中国科学数学

文章 https://doi.org/10.1007/s11425-016-5135-4

arXiv:2305.05158v1 [math.GR] 9 May 2023

导出子群的阶为 2 的一类有限 2 群的群代数的幺正子群

Yulei Wang[1] & Heguo Liu[2], *

[1]*Department of Mathematics, Henan University of Technology, Zhengzhou* 450001, *China;*
[2]*Department of Mathematics, Hainan University, Haikou* 570228, *China*

Email: yulwang@haut.edu.cn, ghliu@hainanu.edu.cn

收稿日期：2023 年 2 月 8 日；录用日期：2023 年 5 月 5 日；在线发表日期：2023 年,

摘要 设 p 为素数， F 为特征为 p的有限域。设 FG 是有限 p 群 G 在域 F上的群代数。令 $V(FG)$表示 FG 中的正规化单位群，并令 $V_*(FG)$表示 $V(FG)$的酉子群。若 p为奇数，则 $V_*(FG)$的阶为 $|F|^{(|G|-1)/2}$。然而， $p=2$ 的情形仍未解决。本文计算了当 G 为如下形式的中心扩张所给出的非阿贝尔 2-群时， $V_*(FG)$的阶：

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

以及 $G' \cong \mathbb{Z}_2$, $n, m \geqslant 1$。此外，本文证实了一个猜想，即 $V_*(FG)$ 的阶可被 $|F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)-1}$整除，其中 $\Omega_1(G) = \{g \in G \mid g^2 = 1\}$。

关键词 规范单位，幺正子群，内阿贝尔 p 群，中心扩张 MSC（2020）20C05，20D15

引用：Yulei Wang，Heguo Liu。《导出子群阶为 2 的一类有限 2 群群代数的酉子群》。中国科学：数学，2023，66，https://doi.org/10.1007/s11425-016-5135-4

1 引言

本文中， p 始终为素数， F 为特征为 p 的有限域， G 为有限 p 群。

对于一个整环 Z，令 $U(Z)$ 和 $U(ZG)$ 分别表示 Z 的乘法群和整群环 ZG。设 f 是群 G 到 $U(Z)$ 的同态，我们定义环 ZG 的一个反自同构： $x^f = \sum_{g\in G} \alpha_g f(g) g^{-1} \in ZG$，其中 $x = \sum_{g\in G} \alpha_g g \in ZG$。元素 $u \in U(ZG)$ 称为 f-酉的，如果其逆元 u^{-1} 与元素 u^f 或 $-u^f$ 相同。显然，群 $U(ZG)$ 中所有 f-酉元素构成一个子群，记作 $U_f(ZG)$。对 $U_f(ZG)$ 的研究源于代数拓扑和 [1,14] 中的酉 K-理论。某些情况下对 $U_f(ZG)$ 的研究与描述被称为 Novikov 问题。

特别地， f 是平凡的，即对所有 $g \in G$， $f(g) = 1$ 。此时，我们将这个平凡同态 f记为 $*$。令 $V(FG)$为 FG中的归一化单位群，即

$$V(FG) = \left\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g \in FG \mid \sum_{g\in G} \alpha_g = 1 \right\}.$$

* 通讯作者
© 中国科学杂志社 2023

显然， $V(FG)$是 $U(FG)$的子群。若元素 $x \in V(FG)$满足 $x^* = x^{-1}$，则称其为酉元（也称幺正归一化单位）。我们用 $V_*(FG)$表示 $V(FG)$中所有酉元构成的子群。Novikov提出了描述 $V_*(FG)$不变量的问题，而Serre指出，有限伽罗瓦扩张 L 关于 F、伽罗瓦群为 G时，其自对偶正规基与 [16], 中的群代数 FG 的酉子群之间存在联系，其中 $char(F) = 2$。

当 $char(F) > 2$在 [9]中时， $V_*(FG)$ 的阶等于 $|F|^{(|G|-1)/2}$。因此，我们只考虑如何在 $p = 2$时计算 $V_*(FG)$ 的阶。事实上，正如 Balogh 在 [2]中所述，当 $p = 2$ 时，计算 $V_*(FG)$ 的阶尤其具有挑战性。此时，[7], 中有一个有趣的猜想，即 $V_*(FG)$ 的阶可被 $F^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)-1}$整除，其中 $\Omega_1(G) = \{g \in G \mid g^2 = 1\}$。

对于有限阿贝尔 p-群， $V_*(FG)$ 的相关结果已在 $[3, 4, 7, 8]$ 中得到。然而，当 G 为非阿贝尔时，关于 $V_*(FG)$ 的一些事实仍有待了解。对于若干特殊类的群，只能得到一些结果，参见 $[4, 5, 10–12, 17]$。特别地，[9] 已确定一类特异 2 群、一个二面体群以及一个四元数群的群代数的酉子群的阶。在 [2], 中，Balogh 给出了满足特殊条件的有限 2 群的群代数的酉子群的阶。Blackburn 在 [6], 中确定了导出子群的阶为素数的素数幂阶群的同构类型，但为了计算这一类 2 群的群代数的酉子群，我们还需要进一步确定更精确的结构。在 [17], 中，我们研究了一个导出子群的阶为 2、由一个初等阿贝尔 2-群对一个循环群作中心扩张得到的非阿贝尔 2-群的幺正归一化单位。现在我们将考虑一个由如下形式的中心扩张得到的非阿贝尔 2-群 G 。

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

以及 $G' \cong \mathbb{Z}_2$、 m、 $n \geqslant 1$。

首先，我们将在第二节给出一些基本结论。然后，在第三节中，我们根据内阿贝尔有限 2-群和中心积，给出上述群 G 的精确结构。在第四节中，我们将确定群代数 FG的酉子群，其中 $char(F) = 2$。此外，我们还证实了关于 $V_*(FG)$ 的阶的一个猜想。

2 预备知识

为避免混淆，我们将解释一些记号。令 $G[2^i]$ 表示子群 $\langle g \in G \mid g^{2^i} = 1\rangle$，令 G^{2^i} 表示子群 $\langle g^{2^i} \mid g \in G\rangle$。令 $G^{(k)}$ 表示 k 个群 $G's$的直积。对于$x = \sum \alpha_g g \in FG$， x 的支撑 $\{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ 记为 $supp(x)$。对于 G的任意子集 S，我们定义$\widehat{S} := \sum_{g \in G} g$。对于 G中的元素 c，我们用 $\Omega_c(G)$ 表示集合 $\{g \in G \mid g^2 = c\}$。我们用$d(G) = \min_{g \in S} g$表示有限 p-群 G的极小生成元数。组合数记为 $\binom{n}{i}$，即 $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$。令

$$\gamma_1(k) := \binom{k}{0}3^k + \binom{k}{2}3^{k-2} + \cdots + \binom{k}{l}3^{k-l} = 2^{2k-1} + 2^{k-1},$$

其中，当 k 为偶数时为 $l = k$，当 k 为奇数时为 $l = k - 1$。令

$$\gamma_2(k) := \binom{k}{1}3^{k-1} + \binom{k}{3}3^{k-3} + \cdots + \binom{k}{l}3^{k-l} = 2^{2k-1} - 2^{k-1},$$

其中，当 k 为偶数时为 $l = k - 1$，当 k 为奇数时为 $l = k$。其他所使用的记号均为标准记号（如 [13, 15] 中所示）。

定义 2.1。如果 $G = HK$、$[H, K] = 1$，则群 G 是正规子群 H 和 K 的中心积，记作 $H \curlyvee K$。 k 个群 $H's$ 的中心积记作 $H^{\curlyvee k}$。

定义 2.2. 如果 p-群 G 满足以下条件，则称其为内阿贝尔群： G 是非阿贝尔群，且 G 的每个真子群都是阿贝尔群。

引理 2.3 ([?])。设 G 为一个有限阿贝尔 2-群， F 为一个特征为 2 的有限域。那么

$$|V_*(FG)| = |G^2[2]| \cdot |F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}.$$

引理 2.4（[?]）。设 F 是一个特征为 2 的有限域。(i) 若 G 是一个阶为 2^{n+1} 的二面体群，则 $|V_*(FG)| = |F|^{3\cdot 2^{n-1}}$。(ii) 若 G 是一个阶为 2^{n+1} 的四元数群，则 $|V_*(FG)| = 4|F|^{2^n}$。

引理 2.5（[2]）。设 F 是一个特征为 2 的有限域。设 $G = K \times E$，其中 $K = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, [a,b] = a^2\rangle$ 和 E 是有限初等阿贝尔 2-群。则 $|V_*(FG)| = 4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}$。

在 [12], 中，Kaur 和 Khan 研究了群代数 $F(G\times A)$ 中任意有限群 G 与有限初等阿贝尔 2-群 A 在特征为 2 的域 F 上的单位群 $U(F(G\times A))$ 和酉单位群 $U_*(F(G\times A))$。类似地，我们可以得到 $V_*(F(G \times A))$ 的结果。

引理 2.6. 设 F 是特征为 2 的有限域。设 G 是有限 2-群， A 是阶为 2^k 的初等阿贝尔 2-群。则酉正规化单位子群$V_*(F(G \times A))$ 是群 W^* 与酉正规化单位子群 $V_*(FG)$ 的半直积，其中 $W^* = (\cdots((A_k^* \rtimes A_{k-1}^*) \rtimes A_{k-2}^* \rtimes \cdots) \rtimes A_1^*$，使得每个 A_i^* 都是阶为 $|F|^{2^{i-2}(|G|+|\Omega_1(G)|)}$ 的初等阿贝尔 2-群，并且 $V_*(F(G \times A))$ 的阶为 $|V_*(FG)| \cdot |F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)(|A|-1)}$。此外，如果对于某个自然数 l，有 $|V_*(FG)| = l|F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)-1}$，则 $|V_*(F(G \times A))| = l|F|^{\frac{1}{2}(|G\times A|+|\Omega_1(G\times A)|)-1}$。

证明。设 $A = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \cdots \times \langle a_k\rangle$。记 $G_k := G \times A = G_{k-1} \times \langle a_k\rangle$ 和 $G_0 := G$，其中 $G_{k-1} = G\times\langle a_1\rangle\times\cdots\times\langle a_{k-1}\rangle$。令 θ 为 G_k 到 G_{k-1}上的投影。假设 $\theta'\colon FG_k \to FG_{k-1}$是一个关于 F 的代数同态，它是投影 θ的线性延拓。显然，同态的核 $\mathrm{Ker}\theta'$ 是由 $a_k - 1$生成的 FG_k的一个理想。在映射 θ'下， $V(FG_k)$中的一个幺正归一化单位的像是 $V(FG_{k-1})$中的一个幺正归一化单位。此外，由于 θ是固定 G_{k-1}的满同态，受限映射 $\theta'|_{V_*(FG_k)}$ 是从 $V_*(FG_k)$到 $V_*(FG_{k-1})$的满同态，其核 $A_k^* = (1+\mathrm{Ker}\theta') \bigcap V_*(FG_k)$是一个初等阿贝尔群。由此，对于任意的 $x \in A_k^*$，有 $x^* = x$。假设 $x = 1 + \sum_{g\in G_{k-1}} \alpha_g g(a_k - 1)$，那么

$$x = 1 + \sum_{g\in\Omega_1(G_{k-1})} \alpha_g g(a_k-1) + \sum_{g\in I} \alpha_g(g+g^{-1})(a_k-1),$$

其中 I 是 $G_{k-1}\setminus\Omega_1(G_{k-1})$ 的一个子集，且若 $g \in I$，则 $g^{-1} \notin I$。因此， I 的基数为 $2^{k-2}(|G| - |\Omega_1(G)|)$。由此， A_k^* 的阶为 $|F|^{2^{k-2}(|G|+|\Omega_1(G)|)}$。

由于存在包含映射 $i\colon V_*(FG_{k-1}) \to V_*(FG_k)$，我们有 $V_*(FG_k) = A_k^* \rtimes V_*(FG_{k-1})$。假设 $A_i^* = (1+\mathrm{Ker}\theta') \bigcap V_*(FG_i)$，则可通过归纳法证明该引理。

若 $|V_*(FG)| = l|F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|-1)}$ 对于某个自然数 l，则

$$\begin{aligned}|V_*(F(G\times A))| &= l|F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)-1}|F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)(|A|-1)}\\ &= l|F|^{\frac{1}{2}(|G||A|+|\Omega_1(G)||A|)-1}\\ &= l|F|^{\frac{1}{2}(|G\times A|+|\Omega_1(G\times A)|)-1}.\end{aligned}$$

□

注意， Q_8 与 Q_8 的中心积同构于 D_8 与 Q_8的中心积。由此可知，特异 p-群的结构如下。

引理 2.7（[15]）。特异 p-群是由 n个阶为 p^3的非阿贝尔子群作中心积得到的，其阶为 p^{2n+1}。若 $p = 2$, G 是 $D_8's$ 的中心积，或是 $D_8's$ 与单个 Q_8的中心积。

对于内阿贝尔有限 p-群，有以下结果。

Lem引理 2.8（[18]）。设 G 是有限 p-群，则以下性质等价 *nt:*

(i) G 是内阿贝尔群；(ii) $d(G) = 2$ 和 $|G'| = p$。(iii) $d(G) = 2$ 和 $\zeta G = Frat(G)$。

引理 2.9（[18]）。设 G 是一个内阿贝尔有限 p-群，则 G 属于以下类型之一：(i) Q_8，四元数群；(ii) $M_p(n,m) = \langle a、\ b \mid a^{p^n} = b^{p^m} = 1、\ a^b = a^{1+p^{n-1}} \rangle、\ n \geqslant 2、\ m \geqslant 1$；(iii) $M_p(n,m,1) = \langle a、\ b、\ c \mid a^{p^n} = b^{p^m} = c^p = 1、\ [a,b] = c、\ [c,a] = [c,b] = 1 \rangle、\ n \geqslant m \geqslant 1$。

3 群的同构类型

设 G 是一个非阿贝尔 2-群，由如下形式的中心扩张给出。

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

以及 $G' = \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_2、\ N \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}、\ n、\ m \geqslant 1$。不失一般性，我们在以下各节中假设 $n \geqslant m \geqslant 1$。

注意，$G' \leqslant \mathrm{Frat}\ G \leqslant N \leqslant \zeta G$。因此，$G/\zeta G$ 是一个初等阿贝尔 2-群。此外，我们有以下引理。

引理 3.1. (1) 对于 $G/\zeta G$ 中任意两个元素 $\bar{x} = x\zeta G$ 和 $\bar{y} = y\zeta G$，设 $[x,y] = c^r$ $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ 和 $f(\bar{x},\bar{y}) = r$，则 $G/\zeta G$ 成为一个定义在含有 2 个元素的域 F 上的非退化辛空间。

(2) $G = E \Upsilon \zeta G$，其中 E 是若干内阿贝尔群的中心积。此外，这些内阿贝尔群的同构类为：Q_8，$M_2(u,v)$和 $M_2(w,1,1)$，其中 $u,v,w \leqslant n+1$。

证明。(1) 显然，f是良定义的。对于 $x, y, x_i, y_i \in G, i = 1, 2$，有 $[x_1x_2, y] = [x_1, y][x_2, y]$和 $[x, y_1y_2] = [x, y_1][x, y_2]$，因此 f是双线性的。由于 $[x,x] = 1$和 $[x,y] = [y,x]^{-1}$，$f(\bar{x},\bar{x}) = 0$和$f(\bar{x},\bar{y}) = -f(\bar{y},\bar{x})$，所以 $G/\zeta G$是 F上的辛空间。若对所有 $y \in G$都有 $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$，则 $[x,y] = 1$，因此 $x \in \zeta G$。由此可知，辛空间 $G/\zeta G$ 是非退化的。

（2）由（1）可假设，辛空间 $G/\zeta G$ 的维数为 $2k$，且 $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_k\}$ 是 $G/\zeta G$ 的一组基，其中 $\bar{x}_i = x_i\zeta G$ 和 $\bar{y}_i = y_i\zeta G$ 对于 $i = 1、2、\ldots\ldots、\ k$ 满足：$f(\bar{x}_i,\bar{y}_i) = 1$，即 $[x_i, y_i] = c$；对于 $i \neq j$，$f(\bar{x}_i,\bar{x}_j) = f(\bar{y}_i,\bar{y}_j) = f(\bar{x}_i,\bar{y}_j) = 0$，即 $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, y_j] = 1$。

令 $G_i := \langle x_i, y_i \rangle$，则对于 $i \neq j$，有 $[G_i, G_j] = 1$。显然，$d(G_i) = 2$和 $|G_i'| = 2$；此外，根据引理 2.8，我们有 G_i 是内阿贝尔的。注意到 $G_i^2 \leqslant N$。根据引理 2.9，G_i 的同构类为 Q_8、$M_2(u,v)$ 和 $M_2(w,1,1)$，其中 $u,v,w \leqslant n+1$。

□

令 $r := d(\zeta G)$。假设

$$\zeta G = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \cdots \times \langle z_r \rangle \cong \mathbb{Z}_{2^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{n_r}}, n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r \geqslant 1. \tag{3.1}$$

由于 $(\zeta G)^2 \leqslant N$，我们有：对于 $3 \leqslant i \leqslant r$ 和 $\langle z_1^2 \rangle \times \langle z_2^2 \rangle =$，$\mathrm{Frat}\zeta\mathrm{G} \leqslant N$。如果 $n_2 \geqslant 2$，则

$$N \bigcap (\langle z_3 \rangle \times \cdots \times \langle z_r \rangle) = 1, \tag{3.2}$$

否则，$|N[2]| \geqslant 2^3$，矛盾。如果 $n_2 = 1$，则根据 $N \leqslant \zeta G$，m 必须为 1。此时，通过调整参数 z_1，z_2,... , z_r，同样可以得到 (3.2)。进一步地，我们可以得到如下引理。

引理 3.2. (1) $n \leqslant n_1 \leqslant n+1$ 和 $m \leqslant n_2 \leqslant m+1$。

(2) The isomorphism classes of ζG are as follows:

(i) $A_1 \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$. *In this case,* $N = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle$.

(ii) $A_2 \cong \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$. *In this case,* $N = \langle z_1^2 \rangle \times \langle z_2 \rangle$.

(iii) $A_3 \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$. *In this case,* $N = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2^2 \rangle$.

(iv) $A_4 \cong \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$. *In this case,* $N = \langle z_1^2 \rangle \times \langle z_2^2 \rangle$.

证明. (1) 由于 $N \leqslant \zeta G$, $n =$ 指数$N \leqslant$ 指数$(\zeta G) = n_1$。又由于 $(\zeta G)^2 \leqslant N$, $n_1 - 1 \leqslant n$。由此可得 $n \leqslant n_1 \leqslant n+1$。

如果 $n_2 \leqslant m-1$, 那么 $N \leqslant \zeta G$意味着 $\mathbb{Z}_{2^{n-m+1}} \times \mathbb{Z}_2 \cong N^{2^{m-1}} \leqslant (\zeta G)^{2^{m-1}} \cong \mathbb{Z}_{2^{n_1-m+1}}$, 矛盾。因此 $n_2 \geqslant m$。

假设 $n_1 = n+1$。注意 $\mathbb{Z}_{2^{n_1-1}} \times \mathbb{Z}_{2^{n_2-1}} \cong (\zeta G)^2 \leqslant N$。若 $n_2 \geqslant m+2$, 则 $|N| \geqslant 2^{n+m+1}$, 矛盾。由此可得 $m \leqslant n_2 \leqslant m+1$。假设 $n_1 = n$。若 $n_2 = m+2$, 则 $(\zeta G)^2 \cong \mathbb{Z}_{2^{n-1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \cong N \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。由此可得 $n-1 = m$ 和 $n_1 = n = m+1 < n_2$, 矛盾。若 $n_2 \geqslant m+3$, 则 $2^{n+m+1} \leqslant |(\zeta G)^2| \leqslant |N| = 2^{n+m}$, 矛盾。总之, (1) 成立。

(2) 接下来我们将区分 ζG 的同构类。设 $N = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, 其中 $|a| = 2^n$ 和$|b| = 2^m$。

(i) 假设 $n_1 = n$ 和 $n_2 = m$。根据 (3.2), 我们得到 $\zeta G = \langle a$、b、z_3、……、$z_r \rangle$, 它们是 ζG 的同构类 A_1。

(ii) 假设 $n_1 = n+1$ 和 $n_2 = m$。由于 $\langle z_1^2 \rangle \leqslant N$, 我们可以令 $z_1^2 = a^i b^j$。如果 $n > m$, 那么由于 $|z_1^2| = 2^n = |a| > |b|$, i 与 2 互素。在这种情况下, 根据 (3.2), 我们有 $N = \langle a^i b^j \rangle \times \langle b \rangle = \langle z_1^2 \rangle \times \langle b \rangle$ 和$\zeta G = \langle z_1, b, z_3, \ldots, z_r \rangle$, 这就是 ζG 的结构 A_2。

假设 $n = m$。显然, i 和 j 中必有一个与2互素。如果 i 与2互素, 那么我们得到 ζG 的结构 A_2, 这与情形 $n > m$类似。如果 j 与2互素, 那么由(3.2)可得 $N = \langle a^i b^j \rangle \times \langle a \rangle = \langle z_1^2 \rangle \times \langle a \rangle$ 和 $\zeta G = \langle z_1, a, z_3, \ldots, z_r \rangle$, 这就是 ζG 的结构 A_2。

(iii) 假设 $n_1 = n$ 和 $n_2 = m+1$。为避免混淆, 我们同样可以令 $z_1^2 = a^i b^j$ 和 $z_2^2 = a^u b^v$。显然, i 必须被 2 整除, 且令 $i = 2i_1$。

如果 v 与 2 互素, 那么根据 (3.2), $N = \langle a \rangle \times \langle z_2^2 \rangle$ 和 $\zeta G = \langle a$、z_2、z_3、……、$z_r \rangle$, 这就是 ζG 的同构类 A_3。

假设 v 被 2 整除, 并令 $v = 2v_1$。显然, $z_2^{2^m} = a^{2^{m-1}u}$ 的阶为 2。由于$n = n_1 \geqslant n_2 = m+1$, 我们有 $n > m$。如果 j 被 2 整除, 那么阶为 2 的 $z_1^{2^{n-1}} = a^{2^{n-1}i_1}$ 等于 $a^{2^{m-1}u}$, 这就产生了矛盾。因此, $(j, 2) = 1$。此外, 我们有 $n = m+1$; 否则, $\langle z_1 \rangle \bigcap \langle z_2 \rangle = \langle a^{2^{m-1}u} \rangle \neq 1$, 这就产生了矛盾。因此, $(a^i b^j)^{2^{m-1}}$ 是 $\langle z_1 \rangle$中一个阶为 2 的元素。由此, 调整参数 z_1 和 z_2, 我们可以得到 $N = \langle a \rangle \times \langle a^i b^j \rangle = \langle a \rangle \times \langle z_1^2 \rangle$ 和 $\zeta G = \langle a, z_1, z_3, \ldots, z_r \rangle$, 它们属于 ζG 的同构类 A_3。

(iv) 假设 $n_1 = n+1$ 和 $n_2 = m+1$。由于 $(\zeta G)^2 = \langle z_1^2 \rangle \times \langle z_2^2 \rangle$ 的阶为 2^{n+m}, 因此有$N = (\zeta G)^2$。在这种情况下, 我们可以取 $a = z_1^2$ 和 $b = z_2^2$, 它们是 ζG的同构类 A_4。

□

根据引理 3.1, 我们知道 G 是 E 和 ζG的中心积。进一步, 假设E是 G_1、G_2、……、G_k的中心积, 其中 $G_i (i = 1, 2, \ldots, k)$的同构类分别为 Q_8、$M_2(u, v)$和 $M_2(w, 1, 1)$, 其中 u、v、$w \leqslant n+1$ 如引理 3.1 所述。接下来, 我们将根据引理 3.2 中 ζG 的类型确定 G 的同构类。

3.1 ζG 的同构类型 A1

在本节中, 令

$$\zeta G = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \cdots \times \langle z_r \rangle \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2, N = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle.$$

显然, $c \in N[2] = \langle z_1^{2^{n-1}} \rangle \times \langle z_2^{2^{m-1}} \rangle$。如果 $c = z_1^{2^{n-1}} \cdot z_2^{2^{m-1}}$, 则可将 $N = \langle z_1 \rangle \times \langle z_1^{2^{n-m}} z_2 \rangle$重写为。在此时, $c = (z_1^{2^{n-m}} z_2)^{2^{m-1}}$。不失一般性, 我们总可以假设 $c \in \langle z_1 \rangle$ 或 $c \in \langle z_2 \rangle$。

对于中心积 E 的每个因子 G_i, 我们首先确定 G_i Y N 的类型。注意, 在中心积 G_iY N 中, $\zeta G_i \leqslant N$。为方便起见, 记号 $M_2(m+1, 1, 1)$Y $\mathbb{Z}_{2^n}$、D_8Y $\mathbb{Z}_{2^n}$、$M_2(m+1, 1, 1)$ Y $M_2(n+1, 1)$ 等, 表示在以下部分中, 中心积各因子的交集为群 $\langle c \rangle$。

引理 3.3. 假设 $n \geqslant m \geqslant 1$ 和 $c \in \langle z_1 \rangle$。

(i) 若 $G_i \cong M_2(n+1, m+1)$, 则 G_iY $N = G_i$。当 $n > m$, $G_i \ncong M_2(m+1, n+1)$.

(ii) If $G_i \cong M_2(n+1,v)$, 则 $1 \leqslant v \leqslant m+1$。当 $v \leqslant m$, $G_i \Y N \cong M_2(n+1,1) \times \mathbb{Z}_{2^m}$.

(iii) 若 $G_i \cong M_2(u,n+1)$, 则 $2 \leqslant u \leqslant m+1$ 和 $n = m$。当 $u < m+1$ 时, $G_i \Y N \cong M_2(m+1,1,1) \Y \mathbb{Z}_{2^m}$。

(iv) 若 $G_i \cong M_2(u,v)$, 其中 $2 \leqslant u < n+1$ 和 $1 \leqslant v < n+1$, 则 $G_i \Y N \cong M_2(m+1,1,1) \Y \mathbb{Z}_{2^n}$ 或 $D_8 \Y \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。

(v) 若 $G_i \cong M_2(n+1,1,1)$, 则 $n = m$ 和 $G_i \Y N \cong M_2(m+1,1,1) \Y \mathbb{Z}_{2^m}$。

(vi) 若 $G_i \cong M_2(w,1,1)$, 其中 $1 \leqslant w < n+1$, 则 $G_i \Y N \cong M_2(m+1,1,1) \Y \mathbb{Z}_{2^n}$ 或 $D_8 \Y \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。证明。(i) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{n+1}} = y_i^{2^{m+1}} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, m+1).$$

由于 $\zeta G_i = \langle x_i^2 \rangle \times \langle y_i^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$, 我们有 $N = \zeta G_i$ 且 $G_i \Y N = G_i$。

If

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{m+1}} = y_i^{2^{n+1}} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^m} \rangle \cong M_2(m+1, n+1),$$

于是 $G_i' = \langle x_i^{2^m} \rangle$。因此 $x_i^{2^m} = c = z_1^{2^{n-1}}$。由于 $\zeta G_i = \langle x_i^2 \rangle \times \langle y_i^2 \rangle \leqslant N$, 通过比较它们的阶, 我们有 $N = \zeta G_i$。但是, 当 $n > m$ 时, 这意味着

$$\langle c \rangle = N^{2^{n-1}} = (\zeta G_i)^{2^{n-1}} = \langle y_i^{2^n} \rangle,$$

这与矛盾。因此 $G_i \ncong M_2(m+1, n+1)$。

(ii) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{n+1}} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, v),$$

于是 $G_i' = \langle x_i^{2^n} \rangle$。因此 $x_i^{2^n} = c = z_1^{2^{n-1}}$。由于 $\zeta G_i = \langle x_i^2 \rangle \times \langle y_i^2 \rangle \leqslant N$, 我们有 $2^{n+v-1} \leqslant |N| = 2^{n+m}$。由此可得 $v - 1 \leqslant m$。

设 $v \leqslant m$。令 $x_i^2 = z_1^l z_2^j$ 和 $y_i^2 = z_1^s z_2^t$, 其中 $1 \leqslant l$、$s \leqslant 2^n$、$1 \leqslant j$、$t \leqslant 2^m$。如果 l 被 2 整除, 则 $c = x_i^{2^n} = z_1^{2^{n-1} l} z_2^{2^{n-1} j} = z_2^{2^{n-1} j}$, 这就产生了矛盾。因此, l 必须与 2 互素。由于 $1 = y_i^{2^v} = z_1^{2^{v-1} s} z_2^{2^{v-1} t}$, 我们有 s 和 t 分别被 2^{n-v+1} 和 2^{m-v+1} 整除。令 $s = 2s_1$ 和 $t = 2t_1$。因此, $y_i z_1^{-s_1} z_2^{-t_1}$ 的阶为 2。此时, 我们可以用 $y_i z_1^{-s_1} z_2^{-t_1}$ 替换 y_i。

$$G_i \Y N = \langle x_i, y_i z_1^{-s_1} z_2^{-t_1}, z_2 \rangle = \langle x_i, y_i z_1^{-s_1} z_2^{-t_1} \rangle \times \langle z_2 \rangle \cong M_2(n+1,1) \times \mathbb{Z}_{2^m}.$$

(iii) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^{n+1}} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}} \rangle \cong M_2(u, n+1).$$

由于 $\zeta G_i = \langle x_i^2 \rangle \times \langle y_i^2 \rangle \leqslant N$, 我们有 $2^{u-1+n} \leqslant |N| = 2^{n+m}$。由此可得 $u - 1 \leqslant m$。令 $x_i^2 = z_1^l z_2^j$ 和 $y_i^2 = z_1^s z_2^t$, 其中 $1 \leqslant l, s \leqslant 2^n, 1 \leqslant j, t \leqslant 2^m$。

如果 $n > m$, 那么 $1 \neq y_i^{2^n} = z_1^{2^{n-1} s} z_2^{2^{n-1} t} = z_1^{2^{n-1} s} = c = x_i^{2^{u-1}}$, 这就产生了矛盾。因此, 我们得到 $n = m$。假设 $u < m+1$。由于 $1 = x_i^{2^u} = z_1^{2^{u-1} l} z_2^{2^{u-1} j}$, 我们有 l 和 j 都能被 2^{m-u+1} 整除。令 $l = 2l_1$ 和 $j = 2j_1$。如果 t 能被 2 整除, 那么 $1 \neq y_i^{2^n} = z_1^{2^{n-1} s} z_2^{2^{n-1} t} = z_1^{2^{n-1} s} = c$, 这就产生了矛盾。因此, 我们有 t 与 2 互素。总之, 我们可以用 $x_i z_1^{-l_1} z_2^{-j_1}$ 替换 x_i, 并且

$$G_i \Y N = \langle x_i z_1^{-l_1} z_2^{-j_1}, y_i, z_1 \rangle = \langle x_i z_1^{-l_1} z_2^{-j_1}, y_i \rangle \Y \langle z_1 \rangle \cong M_2(m+1,1,1) \Y \mathbb{Z}_{2^m}.$$

(iv) 令

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}} \rangle \cong M_2(u, v),$$

其中 u、$v \leqslant n$。令 $x_i^2 = z_1^l z_2^j$ 和 $y_i^2 = z_1^s z_2^t$, 其中 $1 \leqslant l$、$s \leqslant 2^n$、$1 \leqslant j$、$t \leqslant 2^m$。显然, l 和 s 都被 2 整除。令 $l = 2l_1$ 和 $s = 2s_1$。

如果 $(j, 2) = 1 = (t, 2)$, 那么存在 j_1 和 t_1, 使得 $jj_1 \equiv 1 \pmod{2^m}$ 且 $tt_1 \equiv 1 \pmod{2^m}$。因此, $x_i^{2j_1} = z_1^{2l_1 j_1} z_2$ 和 $y_i^{2t_1} = z_1^{2s_1 t_1} z_2$。注意, $n \geqslant u \geqslant 2$ 和 $c = z_1^{2^{n-1}}$。由此可得 $(x_i^{j_1} y_i^{-t_1} z_1^{s_1 t_1 - l_1 j_1 + 2^{n-2}})^2 = 1$。于是

$$G_i \Y N = \langle y_i z_1^{-s_1}, x_i^{j_1} y_i^{-t_1} z_1^{s_1 t_1 - l_1 j_1 + 2^{n-2}}, z_1 \rangle \cong M_2(m+1,1,1) \Y \mathbb{Z}_{2^n}.$$

假设 $(j,2)=1$ 且 $2|t$。令 $t=2t_2$。由于 $x_iz_1^{-l_1}$和 $y_iz_1^{-s_1}z_2^{-t_2}$的阶分别为 2^{m+1} 和 2，因此我们有

$$G_i\Upsilon N=\langle x_iz_1^{-l_1},y_iz_1^{-s_1}z_2^{-t_2},z_1\rangle\cong M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}.$$

同理，当 $2|j$ 且 $(t,2)=1$ 时，我们也可以得到相同的结果。

假设 $2|j$ 且 $2|t$。令 $j=2j_2$ 且 $t=2t_3$。我们可以得到

$$G_i\Upsilon N=\langle x_iz_1^{-l_1}z_2^{-j_2},y_iz_1^{-s_1}z_2^{-t_3},z_1,z_2\rangle\cong D_8\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^m}.$$

(v) 令

$$G_i=\langle x_i,y_i,c\mid x_i^{2^{n+1}}=y_i^2=c^2=1,[x_i,y_i]=c,[x_i,c]=[y_i,c]=1\rangle\cong M_2(n+1,1,1).$$

令 $x_i^2=z_1^lz_2^j$，其中 $1\leqslant l\leqslant 2^n,1\leqslant j\leqslant 2^m$。若 $n>m$，则 $x_i^{2^n}=z_1^{2^{n-1}l}z_2^{2^{n-1}j}=z_1^{2^{n-1}l}$，这与假设矛盾。因此 $n=m$。此时，如果 l 和 j 都能被 2 整除，那么 $z_1^lz_2^j$ 的阶小于 2^m，这是不可能的。若 j 能被 2 整除且 $(l,2)=1$，则有$x_i^{2^m}=z_1^{2^{m-1}l}z_2^{2^{m-1}j}=c$，这也不可能。由此可得 $(j,2)=1$。因此

$$G_i\Upsilon N=\langle x_i,y_i,z_1\rangle\cong M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^m}.$$

(vi) 设

$$G_i=\langle x_i,y_i,c\mid x_i^{2^w}=y_i^2=c^2=1,[x_i,y_i]=c,[x_i,c]=[y_i,c]=1\rangle\cong M_2(w,1,1),$$

其中 $1\leqslant w<n+1$。设 $x_i^2=z_1^lz_2^j$，其中 $1\leqslant l\leqslant 2^n,1\leqslant j\leqslant 2^m$。由于 $1=x_i^{2^w}=z_1^{2^{w-1}l}z_2^{2^{w-1}j}$，我们有 l 可被 2 整除。设 $l=2l_1$。

若 $(j,2)=1$，则 $G_i\Upsilon N=\langle x_iz_1^{-l_1},y_i,z_1\rangle\cong M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}$.

假设 j 可被 2 整除，并设 $j=2j_1$。因此

$$G_i\Upsilon N=\langle x_iz^{-l_1}z_2^{-j_1},y_i,z_1,z_2\rangle\cong D_8\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^m}.$$

□

引理 3.4. 假设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_2\rangle$。

(i) 若 $G_i\cong M_2(m+1,n+1)$，则 $G_i\Upsilon N=G_i$。当 $n>m$, $G_i\ncong M_2(n+1,m+1)$。

(ii) 若 $G_i\cong M_2(n+1,v)$，其中 $1\leqslant v\leqslant m+1$，则 $n=m$。当 $1\leqslant v\leqslant m$，$G_i\Upsilon N\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^m}$。

(iii) 若 $G_i\cong M_2(u,n+1)$，其中 $2\leqslant u\leqslant m$，则 $G_i\Upsilon N\cong M_2(n+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^m}$.

(iv) 如果 $G_i\cong M_2(u,v)$，其中 $2\leqslant u<n+1$ 且 $1\leqslant v<n+1$，则

$$G_i\Upsilon N\cong\begin{cases}D_8\times\mathbb{Z}_{2^n}\ or\ Q_8\times\mathbb{Z}_{2^n}, & m=1.\\ M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}\ \text{or}\ D_8\Upsilon\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}, & m>1.\end{cases}$$

(v) 若 $G_i\cong M_2(n+1,1,1)$，则 $G_i\Upsilon N\cong M_2(n+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^m}$.

(vi) 若 $G_i\cong M_2(w,1,1)$，其中 $1\leqslant w<n+1$，则 $G_i\Upsilon N\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}$或 $D_8\Upsilon\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}$。

证明。(i)–(iii) 可仿照引理 3.3 的 (i)–(iii) 得到。

(iv) 令

$$G_i=\langle x_i,y_i\mid x_i^{2^u}=y_i^{2^v}=1,x_i^{y_i}=x_i^{1+2^{u-1}}\rangle\cong M_2(u,v),$$

其中 u、$v\leqslant n$。令 $x_i^2=z_1^lz_2^j$ 和 $y_i^2=z_1^sz_2^t$，其中 $1\leqslant l$、$s\leqslant 2^n$、$1\leqslant j$、$t\leqslant 2^m$。显然，l 和 s 都被 2 整除。令 $l=2l_1$ 和 $s=2s_1$。

若 $(j,2)=1=(t,2)$，则存在 j_1和 t_1，使得 $jj_1\equiv 1$(模 2^m) 且 $tt_1\equiv 1$(模 2^m)。因此 $x_i^{2j_1}=z_1^{2l_1j_1}z_2$ 和 $y_i^{2t_1}=z_1^{2s_1t_1}z_2$。此外，当 $m\geqslant 2$时，$(x_i^{j_1}y_i^{-t_1}z_1^{s_1t_1-l_1j_1}z_2^{2^{m-2}})^2=1$。由此可得

$$G_i\Upsilon N=\langle x_iz_1^{-l_1},x_i^{j_1}y_i^{-t_1}z_1^{s_1t_1-l_1j_1}z_2^{2^{m-2}},z_1\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}.$$

当 $m=1$时，我们有

$$G_i \curlyvee N=\langle x_iz_1^{-l_1},y_iz_1^{-s_1},z_1\rangle\cong Q_8\times\mathbb{Z}_{2^n}.$$

假设 $(j,2)=1$ 且 $2|t$。令 $t=2t_2$。由于 $x_iz_1^{-l_1}$和 $y_iz_1^{-s_1}z_2^{-t_2}$的阶分别为 2^{m+1} 和 2，我们有

$$G_i \curlyvee N=\langle x_iz_1^{-l_1},y_iz_1^{-s_1}z_2^{-t_2},z_1\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}.$$

类似地，对于 $2|j$ 和 $(t,2)=1$的情形，我们也可以得到相同的结果。

假设 $2|j$ 和 $2|t$。令 $j=2j_2$ 和 $t=2t_3$。我们可以得到

$$G_i \curlyvee N=\langle x_iz_1^{-l_1}z_2^{-j_2},y_iz_1^{-s_1}z_2^{-t_3},z_2,z_1\rangle\cong D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}.$$

(v) 令

$$G_i=\langle x_i,y_i,c\mid x_i^{2^{n+1}}=y_i^2=c^2=1,[x_i,y_i]=c,[x_i,c]=[y_i,c]=1\rangle\cong M_2(n+1,1,1).$$

令 $x_i^2=z_1^lz_2^j$，其中 $1\leqslant l\leqslant 2^n$、$1\leqslant j\leqslant 2^m$。如果 l 和 j 都能被 2 整除，那么 $z_1^lz_2^j$ 的阶小于 2^n，这是不可能的。如果 l 能被 2 整除，那么 $(j,2)=1$ 且 $x_i^{2^n}=z_1^{2^{n-1}l}z_2^{2^{n-1}j}=z_2^{2^{n-1}j}$，这与假设矛盾。因此 $(l,2)=1$。由此，我们有

$$G_i \curlyvee N=\langle x_i,y_i,z_2\rangle\cong M_2(n+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}.$$

(vi) 设

$$G_i=\langle x_i,y_i,c\mid x_i^{2^w}=y_i^2=c^2=1,[x_i,y_i]=c,[x_i,c]=[y_i,c]=1\rangle\cong M_2(w,1,1),$$

其中 $1\leqslant w<n+1$。令 $x_i^2=z_1^lz_2^j$，其中 $1\leqslant l\leqslant 2^n,1\leqslant j\leqslant 2^m$。由于 $1=x_i^{2^w}=z_1^{2^{w-1}l}z_2^{2^{w-1}j}$，我们有 l 可以被 2 整除。令 $l=2l_1$。

若 $(j,2)=1$，则 $G_i\curlyvee N=\langle x_iz_1^{-l_1},y_i,z_1\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}$.

假设 j 可以被 2 整除，并令 $j=2j_1$。因此

$$G_i \curlyvee N=\langle x_iz^{-l_1}z_2^{-j_1},y_i,z_2,z_1\rangle\cong D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}.$$

□

根据引理 3.1 和 3.3，对于任意因子 G_i， E, $G_i\curlyvee N$ 的中心积具有以下同构类： $M_2(n+1,m+1)$, $M_2(n+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^m}$, $M_2(m+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^n}$, $D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^m}$ 和 $Q_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^m}$。由此，任意两个因子 G_1 和 G_2 的中心积，只需考虑它们之间属于以下情形： $M_2(n+1,m+1)$, $M_2(n+1,1)$, $M_2(m+1,1,1)$, D_8 和 Q_8。注意 $Q_8\curlyvee Q_8\cong D_8\curlyvee D_8$。因此我们只考虑其他情形。

引理 3.5. 假设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_1\rangle$。令 G_1 和 G_2 为任意两个因子，它们同构于 $M_2(n+1,m+1)$ $M_2(n+1,1)$ 或 $M_2(m+1,1,1)$。

(i) 若 G_1 和 G_2 同构于 $M_2(n+1,m+1)$，则

$$G_1\curlyvee G_2\cong\begin{cases}M_2(2,1,1)\curlyvee D_8\ or\ M_2(2,1,1)\curlyvee Q_8, & n=1.\\ M_2(m+1,1,1)\curlyvee M_2(n+1,1), & n>1.\end{cases}$$

(ii) 若 G_1 和 G_2 分别同构于 $M_2(n+1,m+1)$ 和 $M_2(n+1,1)$，则 $G_1\curlyvee G_2\cong M_2(n+1,m+1)\curlyvee D_8$。

(iii) 若 G_1 和 G_2 分别同构于 $M_2(n+1,m+1)$ 和 $M_2(m+1,1,1)$，则 $G_1\curlyvee G_2\cong M_2(n+1,m+1)\curlyvee D_8$。

（iv）如果 G_1 和 G_2 都与 $M_2(m+1,1,1)$ 同构，则 $G_1\curlyvee G_2\cong M_2(m+1,1,1)\curlyvee D_8$ 或 $M_2(m+1,1,1)\curlyvee M_2(m+1,1,1)$。

(v) 若 G_1 和 G_2 均同构于 $M_2(n+1,1)$，则 $G_1\curlyvee G_2\cong M_2(n+1,1)\curlyvee D_8$ 或 $M_2(n+1,1)\curlyvee M_2(m+1,1,1)$。

证明。(i) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{n+1}} = y_i^{2^{m+1}} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, m+1),$$

其中 $i = 1$, 2。由于 $\zeta G_1 = \zeta G_2 = N$，我们可以令 $x_2^2 = x_1^{2l} y_1^{2j}$和 $y_2^2 = x_1^{2s} y_1^{2t}$。

首先，假设 $n > m$。显然，$(l, 2) = 1$ 且 s 被 2 整除。令 $s = 2s_1$。若 t 被 2 整除，则 $1 \neq y_2^{2^m} = x_1^{2^m s} y_1^{2^m t} = x_1^{2^m s}$，这是不可能的。因此，我们得到 $(t, 2) = 1$。若 $(j, 2) = 1$，则 $x_1^l y_1^j x_2^{-2^{2^{n-1}-1}}$的阶为 2。由此，我们有

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle y_1, x_1^l y_1^j x_2^{-2^{2^{n-1}-1}} \rangle \curlyvee \langle x_2, y_2^{-1} x_1^{2s_1} y_1^t \rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \curlyvee M_2(n+1, 1).$$

若 j 被 2 整除，则有

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle y_1, x_1^l y_1^j x_2^{-1} \rangle \curlyvee \langle x_2, y_2^{-1} x_1^{2s_1} y_1^t \rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \curlyvee M_2(n+1, 1).$$

接下来，假设 $n = m$。显然，l 和 j 不可能同时被 2 整除，s和 t也不能。若 j 与 2 互素，则 $c = x_2^{2^m} = x_1^{2^m l} y_1^{2^m j} = c^l y_1^{2^m}$，这与假设矛盾。由此，我们有 j 被 2 整除且 $(l, 2) = 1$。令 $j = 2j_1$。类似地，t 与 2 互素。

假设 s 与 2 互素。若 $m \geqslant 2$，则

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle y_2, x_1^l y_1^{2j_1} x_2^{-1} \rangle \curlyvee \langle x_1, x_1^{s-2^{m-1}} y_1^t y_2^{-1} \rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \curlyvee M_2(m+1, 1).$$

若 $m = 1$，则

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle y_2, x_1^l y_1^{2j_1} x_2^{-1} \rangle \curlyvee \langle x_1, y_1^t y_2^{-1} \rangle \cong M_2(2, 1, 1) \curlyvee Q_8.$$

若 s 被 2 整除，则同样有 $G_1 \curlyvee G_2 \cong M_2(m+1, 1, 1) \curlyvee M_2(m+1, 1)$。

(ii) 设

$$G_1 = \langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{n+1}} = y_1^{2^{m+1}} = 1, x_1^{y_1} = x_1^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, m+1)$$

and

$$G_2 = \langle x_2, y_2 \mid x_2^{2^{n+1}} = y_2^2 = 1, x_2^{y_2} = x_2^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, 1).$$

由于 $\zeta G_1 = N \geqslant \zeta G_2 = \langle x_2^2 \rangle$，我们可以设 $x_2^2 = x_1^{2l} y_1^{2j}$。此外，由于 $c = x_2^{2^n} = x_1^{2^n l} y_1^{2^n j} = c^l y_1^{2^n j}$，有 $(l, 2) = 1$。

假设 $n > m$。若 $(j,2) = 1$，则有

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1 y_2, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_2^{-2^{2^{n-1}-1}} x_1^l y_1^j, y_2 \rangle \cong M_2(n+1, m+1) \curlyvee D_8.$$

若 j 被 2 整除，则有

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_2^{-1} x_1^l y_1^j, y_2 \rangle \cong M_2(n+1, m+1) \curlyvee D_8.$$

若 $n = m$，则 j 被 2 整除。同理，结论成立。

(iii) 令

$$G_1 = \langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{n+1}} = y_1^{2^{m+1}} = 1, x_1^{y_1} = x_1^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, m+1)$$

and

$$G_2 = \langle x_2, y_2, c \mid x_2^{2^{m+1}} = y_2^2 = c^2 = 1, [x_2, y_2] = c, [x_2, c] = [y_2, c] = 1 \rangle \cong M_2(m+1, 1, 1).$$

由于 $\zeta G_1 = N \geqslant \zeta G_2 = \langle x_2^2, c \rangle$，我们可令 $x_2^2 = x_1^{2l} y_1^{2j}$。若 j 能被 2 整除，则 $x_2^{2^m} = x_1^{2^m l} y_1^{2^m j} = x_1^{2^m l} = c$，这不可能。因此，我们有 $(j, 2) = 1$。

首先 我们假设 $n > m \geqslant 1$。显然，l 被 2 整除。令 $l = 2l_1$。由此可得

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1 y_2, y_1 \rangle \curlyvee \langle x_2^{-1} x_1^{2l_1} y_1^j, y_2 \rangle \cong M_2(n+1, m+1) \curlyvee D_8.$$

接下来假设 $n = m$。当 $2|l$ 时，结果可类似地得到。若 $(l,2) = 1$，则有

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1 y_2, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_1^l y_1^j x_2^{-1}, y_2 \rangle \cong M_2(m+1, m+1) \curlyvee D_8.$$

(iv) 令

$$G_i = \langle x_i, y_i, c \mid x_i^{2^{m+1}} = y_i^2 = c^2 = 1, [x_i, y_i] = c, [x_i, c] = [y_i, c] = 1 \rangle \cong M_2(m+1,1,1),$$

其中 $i = 1, 2$。令 $x_1^2 = z_1^l z_2^j$。若 j 被 2 整除，则 $x_1^{2^m} = z_1^{2^{m-1}l} z_2^{2^{m-1}j} = z_1^{2^{m-1}l}$，这是不可能的。因此，我们有 $(j, 2) = 1$。注意 $\langle x_1^2 \rangle \times \langle z_1 \rangle = N = \langle x_2^2 \rangle \times \langle z_1 \rangle$。令 $x_2^2 = x_1^{2s} z_1^t$。显然，$(s, 2) = 1$。

若 t 被 2 整除，则可令 $t = 2t_1$，并用 $x_1^s z_1^{t_1}$ 替换 x_1。此时，$x_1^2 = x_2^2$。由此可得

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_2 x_1^{-1}, y_2 \rangle \cong M_2(m+1,1,1) \curlyvee D_8.$$

若 (t,2)=1，则 $n = m$，且

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_2 x_1^{-s}, y_2 \rangle \cong M_2(m+1,1,1) \curlyvee M_2(m+1,1).$$

(v) 令

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{n+1}} = y_i^2 = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1,1),$$

其中 $i = 1, 2$。注意 $\langle x_1^2 \rangle \times \langle z_2 \rangle = N = \langle x_2^2 \rangle \times \langle z_2 \rangle$。令 $x_2^2 = x_1^{2s} z_2^t$。显然，$(s, 2) = 1$。

如果 t 被 2 整除，那么我们可以令 $t = 2t_1$，并将 x_1 替换为 $x_1^s z_2^{t_1}$。此时，$x_1^2 = x_2^2$。由此可得

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_2 x_1^{-1}, y_2 \rangle \cong M_2(n+1,1) \curlyvee D_8.$$

如果 (t,2)=1，那么

$$G_1 \curlyvee G_2 = \langle x_1, y_1 y_2 \rangle \curlyvee \langle x_2 x_1^{-s}, y_2 \rangle \cong M_2(n+1,1) \curlyvee M_2(m+1,1,1).$$

□

定理 3.6。假设 $n \geqslant m \geqslant 1$ 和 $c \in \langle z_1 \rangle$。那么 G 的同构类如下。

(i) $M_2(n+1,m+1) \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-1} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$;

(ii) $M_2(n+1,m+1) \curlyvee Q_8 \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-2} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 2$;

(iii) $M_2(n+1,1) \curlyvee M_2(m+1,1,1) \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-2} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 2$;

(iv) $M_2(n+1,1) \curlyvee M_2(m+1,1,1) \curlyvee Q_8 \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-3} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 3$;

(v) $M_2(n+1,1) \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-1} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$;

(vi) $M_2(n+1,1) \curlyvee Q_8 \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-2} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 2$;

(vii) $M_2(m+1,1,1) \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-1} \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$;

(viii) $M_2(m+1,1,1) \curlyvee Q_8 \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-2} \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 2$;

(ix) $\underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k} \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$;

(x) $Q_8 \curlyvee \underbrace{D_8 \curlyvee \cdots \curlyvee D_8}_{k-1} \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$.

证明。首先，我们将 G 重写为 $(G_1 \curlyvee N) \curlyvee (G_2 \curlyvee N) \curlyvee \cdots \curlyvee (G_k \curlyvee N) \curlyvee A_1$。根据引理 3.1 和 3.3，我们有 $G_i \curlyvee N's$ 的同构类为 $M_2(n+1, m+1)$、$M_2(n+1, 1) \times \mathbb{Z}_{2^m}$、$M_2(m+1, 1, 1) \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n}$、$D_8 \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$ 和 $Q_8 \curlyvee \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。

首先，假设 $n > m$。若 $\mathrm{Exp}(E)$ 等于 2^{n+1}，则存在某个 G_i，使得 $\mathrm{Exp}(G_i) = 2^{n+1}$。不失一般性，假设 $\mathrm{Exp}(G_1) = 2^{n+1}$。因此，我们有 $G_1 \curlyvee N \cong$

$M_2(n+1,m+1)$ 或 $M_2(n+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^m}$，由引理 3.3 可知。若 $(G_i\Upsilon N)'s$ 的个数 λ 为奇数，且这些元素同构于 $M_2(n+1,m+1)$，则由引理 3.5 可得 G 的同构类 (i) 和 (ii)。若 λ 是非零偶数，则 G 的同构类为 (iii) 和 (iv)。假设 $\lambda=0$。若存在某个 $G_i\Upsilon N$，使得 $G_i\Upsilon N\cong M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}$，那么 $M_2(n+1,1)\Upsilon M_2(m+1,1,1)$ 将产生 $M_2(n+1,m+1)$，这意味着 $\lambda\neq 0$。此时，我们可得到 G 的同构类 (v) 和 (vi)。

假设 Exp(E) 小于 2^{n+1}。此时，$(G_i\Upsilon N)'s$ 的同构类为 $M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}$、$D_8\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^m}$ 和 $Q_8\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^m}$。若存在某个 $G_i\Upsilon N$，使得 $G_i\Upsilon N\cong M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^n}$，那么根据引理 3.5 的 (iv)，可以得到 G 的同构类 (vii) 和 (viii)，从而避免重复上述类型。否则，可以得到 (ix) 和 (x)。

接下来假设 $n=m$。为方便起见，我们将区分 $m>1$ 和 $m=1$ 两种情况。首先，假设 $m>1$。若 Exp(E) 等于 2^{m+1}，则可以假设 Exp(G_1) $=2^{m+1}$。因此，根据引理 3.3，有 $G_1\Upsilon N\cong M_2(m+1,m+1)$、$M_2(m+1,1,1)\Upsilon\mathbb{Z}_{2^m}$ 或 $M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^m}$。若 $(G_i\Upsilon N)'s$ 的数量 μ 为奇数，且它们同构于 $M_2(m+1,m+1)$，则根据引理 3.5，可以得到 G 的同构类 (i) 和 (ii)。若 μ 是非零偶数，则 G 的同构类为 (iii) 和 (iv)。假设 $\mu=0$。显然，$M_2(m+1,1,1)$ 和 $M_2(m+1,1)$ 不可能同时出现。当 $M_2(m+1,1)$ 出现时，可以得到 G 的同构类 (v) 和 (vi)。当 $M_2(m+1,1,1)$ 出现时，可以得到 (vii) 和 (viii)。假设 Exp(E) 小于 2^{m+1}。此时，可以得到 (ix) 和 (x)。

若 $m=1$，则根据引理 3.3，对于任意 i，我们有 $G_i\Upsilon N\cong M_2(2,2)$、$M_2(2,1,1)$、$D_8\times\mathbb{Z}_2$ 或 $Q_8\times\mathbb{Z}_2$。此时，以下任意两项属于同一同构类：(iii) 与 (vii)、(iv) 与 (viii)、(v) 与 (ix)、(vi) 与 (x)。类似地，我们可以得到 G 的六个同构类，即 (i)、(ii)、(iii)、(iv)、(v) 和 (vi)。

□

根据引理 3.4，我们只需考虑 $M_2(m+1、n+1)$ $M_2(m+1,1)$ $M_2(n+1、1、1)$ D_8 与 Q_8 之间的中心积。因此有以下引理。

引理 3.7。设 $n>m\geqslant 1$ 且 $c\in\langle z_2\rangle$。令 G_1 和 G_2 为任意两个因子，它们同构于 $M_2(m+1、n+1)$ $M_2(m+1、1)$ 或 $M_2(n+1、1、1)$。

(i) 如果 G_1 和 G_2 与 $M_2(m+1,n+1)$ 同构，那么

$$G_1\Upsilon G_2\cong\begin{cases}M_2(n+1,1,1)\Upsilon D_8 \text{ or } M_2(n+1,1,1)\Upsilon Q_8, & m=1.\\ M_2(n+1,1,1)\Upsilon M_2(m+1,1) & m>1.\end{cases}$$

(ii) 如果 G_1 和 G_2 分别与 $M_2(m+1,n+1)$ 和 $M_2(m+1,1)$ 同构，那么 $G_1\Upsilon G_2\cong M_2(m+1,n+1)\Upsilon D_8$。

(iii) 如果 G_1 和 G_2 分别同构于 $M_2(m+1,n+1)$ 和 $M_2(n+1,1,1)$，那么 $G_1\Upsilon G_2\cong M_2(m+1,n+1)\Upsilon D_8$。

(iv) 如果 G_1 和 G_2 都同构于 $M_2(n+1,1,1)$，那么 $G_1\Upsilon G_2\cong M_2(n+1,1,1)\Upsilon D_8$ 或 $M_2(n+1,1,1)\Upsilon M_2(m+1,1)$。

(v) 如果 G_1 和 G_2 都同构于 $M_2(m+1,1)$，那么 $G_1\Upsilon G_2\cong M_2(m+1,1)\Upsilon D_8$。

证明。 (i) 令

$$G_i=\langle x_i,y_i\mid x_i^{2^{m+1}}=y_i^{2^{n+1}}=1,x_i^{y_i}=x_i^{1+2^m}\rangle\cong M_2(m+1,n+1),$$

其中 $i=1,2$。由于 $\zeta G_1=\zeta G_2=N$，我们可令 $x_2^2=x_1^{2l}y_1^{2j}$ 和 $y_2^2=x_1^{2s}y_1^{2t}$。显然，j 被 2 整除，并令 $j=2j_1$。若 l 被 2 整除，则 $c=x_2^{2^m}=x_1^{2^ml}y_1^{2^mj}=y_1^{2^mj}$，这不可能。因此我们得到 $(l,2)=1$。若 t 被 2 整除，则 $1\neq y_2^{2^n}=x_1^{2^ns}y_1^{2^nt}=1$，因为 $n>m\geqslant 1$，矛盾。因此 t 与 2 互素。

如果 $m=1$，当 $\langle x_1,y_2y_1^{-t}\rangle$ 与 D_8 同构（当 $2|s$ 时），或与 Q_8 同构（当 $(s,2)=1$ 时）。由此可得

$$G_1\Upsilon G_2=\langle y_2,x_1^ly_1^{2j_1}x_2^{-1}\rangle\Upsilon\langle x_1,y_2y_1^{-t}\rangle\cong M_2(n+1,1,1)\Upsilon D_8 \text{ or } M_2(n+1,1,1)\Upsilon Q_8.$$

假设 $m>1$。我们可以取 $\varepsilon:=2^{m-1}$ （当 $(s,2)=1$ 时），并在 $2|s$ 时取 0。因此， $y_2y_1^{-t}x_1^{\varepsilon-s}$ 的阶为 2，且

$$G_1\curlyvee G_2=\langle y_2,x_1^ly_1^{2j_1}x_2^{-1}\rangle\curlyvee\langle x_1,y_2y_1^{-t}x_1^{\varepsilon-s}\rangle\cong M_2(n+1,1,1)\curlyvee M_2(m+1,1).$$

(ii)-(v) 可仿照引理 3.5 得到。

□

定理 3.8. 假设 $n>m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_2\rangle$。那么 G 的同构类如下。

(i) $M_2(m+1,n+1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(ii) $M_2(m+1,n+1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(iii) $M_2(n+1,1,1)\curlyvee M_2(m+1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(iv) $M_2(n+1,1,1)\curlyvee M_2(m+1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-3}\curlyvee\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 3$;

(v) $M_2(n+1,1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(vi) $M_2(n+1,1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(vii) $M_2(m+1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(viii) $M_2(m+1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(ix) $\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(x) $Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$.

证明. 根据引理 3.1，我们有

$$G=E\curlyvee A_1=G_1\curlyvee G_2\curlyvee\cdots\curlyvee G_k\curlyvee A_1=(G_1\curlyvee N)\curlyvee(G_2\curlyvee N)\curlyvee\cdots\curlyvee(G_k\curlyvee N)\curlyvee A_1.$$

根据引理 3.1 和引理 3.4， $G_i\curlyvee N's$ 的同构类为 $M_2(m+1,n+1)$, $M_2(n+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}$, $M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}$, $D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}$和 $Q_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}$。

如果 $\mathrm{Exp}(E)$ 等于 2^{n+1}，那么存在某个 G_i 使得 $\mathrm{Exp}(G_i)=2^{n+1}$。不失一般性，假设 $\mathrm{Exp}(G_1)=2^{n+1}$。因此，根据引理 3.4，我们有 $G_1\curlyvee N\cong M_2(m+1,n+1)$ 或 $M_2(n+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}$。如果 $G_i\curlyvee N's$ 的数量 μ 为奇数，且它们与 $M_2(m+1,n+1)$同构，那么根据引理 3.7，我们可以得到 G 的同构类 (i) 和 (ii)。如果 λ 是非零偶数，那么 G 的同构类为 (iii) 和 (iv)。假设 $\mu=0$。如果存在某个 $G_i\curlyvee N$ 使得$G_i\curlyvee N\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}$，那么 $M_2(n+1,1,1)\curlyvee M_2(m+1,1)$ 会产生 $M_2(m+1,n+1)$，这意味着 $\mu\neq 0$。显然，此时，如果两个因子 G_i 和 G_j 与 $M_2(n+1,1,1)$同构，那么$G_1\curlyvee G_2$ 在引理 3.7 的 (iv) 中仅与 $M_2(n+1,1,1)\curlyvee D_8$ 同构。因此得到 G的同构类 (v) 和 (vi)。

假设 $\mathrm{Exp}(E)$小于 2^{n+1}。此时，$(G_i\curlyvee N)'s$ 的同构类为$M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}$、 $D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}$和 $Q_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^n}$。若存在某个 $G_i\curlyvee N$使得$G_i\curlyvee N\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^n}$，则可得到 G的同构类 (vii) 和 (viii)。否则，可得到 (ix) 和 (x)。

□

3.2 ζG 的同构类型 A_2 和 A_3

在本节中，我们首先考虑

$$\zeta G=\langle z_1\rangle\times\langle z_2\rangle\times\cdots\times\langle z_r\rangle\cong\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2,N=\langle z_1^2\rangle\times\langle z_2\rangle,$$

不失一般性，我们总可以令 $c \in \langle z_1^2\rangle$ 或 $c \in \langle z_2\rangle$。E 是G_1、G_2、.....、G_k的中心积，其同构类为 Q_8、M_2（u、v）以及 M_2（w、1、1），其中 u、v、$w \leqslant n+1$见引理 3.1 的（2）。首先，我们确定 G_i Y $\langle z_1$、$z_2\rangle$的类型。

引理 3.9. 假设 $n \geqslant m \geqslant 1$ 和 $c \in \langle z_1\rangle$。

(i) 若 $G_i \cong M_2(n+1, v)$，则 $1 \leqslant v \leqslant m+1$ 和 G_iY $\langle z_1, z_2\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1)$ Y $\mathbb{Z}_{2^{n+1}}$ 或 D_8 Y $\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。

(ii) 若 $n = m$ 和 $G_i \cong M_2(u, m+1)$，其中 $2 \leqslant u < m+1$，则 G_iY$\langle z_1, z_2\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1)Y\mathbb{Z}_{2^{m+1}}$。若 $n > m$，则 G_i 与 $M_2(u, n+1)$不同构，其中 $2 \leqslant u \leqslant m+1$。

(iii) 若 $G_i \cong M_2(u, v)$，其中 $2 \leqslant u < n+1$ 和 $1 \leqslant v < n+1$，则 G_iY$\langle z_1, z_2\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1)$Y $\mathbb{Z}_{2^{n+1}}$或 D_8 Y $\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。

(iv) 如果 $G_i \cong M_2(w, 1, 1)$，那么 $1 \leqslant w < n+1$ (如果 $n > m$) 或 $1 \leqslant w \leqslant m+1$ (如果 $n = m$)。此外，G_i Y $\langle z_1, z_2\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1)$ Y $\mathbb{Z}_{2^{n+1}}$ 或 D_8 Y $\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^m}$。

证明。(i) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{n+1}} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^n}\rangle \cong M_2(n+1, v).$$

由于$\zeta G_i = \langle x_i^2, y_i^2\rangle \leqslant N$，我们有 $2^{n+v-1} \leqslant |N| = 2^{n+m}$和 $v \leqslant m+1$。令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^j$和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2^t$，其中 $1 \leqslant l, s \leqslant 2^n$、$1 \leqslant j, t \leqslant 2^m$。

首先，我们假设 $v = m+1$。显然，通过比较它们的阶可得 $\zeta G_i = N$。如果 t 被 2 整除，那么 $1 \neq y_i^{2^m} = z_1^{2^m s} z_2^{2^{m-1} t} = z_1^{2^m s}$，这是不可能的。因此， t 与 2 互素。

接下来我们考虑两种情况（j，2）$= 1$ 和 $2|j$。当 j 与 2 互素时，不失一般性，我们可以设 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2$ 和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2$。此时，我们有

$$G_i \,\mathrm{Y}\, \langle z_1, z_2\rangle = \langle y_i z_1^{-s}, x_i y_i^{-1} z_1^{s-l+2^{n-1}}\rangle \,\mathrm{Y}\, \langle z_1\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \,\mathrm{Y}\, \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

当 j 被 2 整除时，令 $j = 2j_1$，则有

$$G_i \,\mathrm{Y}\, \langle z_1, z_2\rangle = \langle y_i z_1^{-s}, x_i z_1^{-l} z_2^{-j_1}\rangle \,\mathrm{Y}\, \langle z_1\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \,\mathrm{Y}\, \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

接下来设 $1 \leqslant v < m+1$。由于 $1 = y_i^{2^v} = z_1^{2^v s} z_2^{2^{v-1} t}$，我们有 t 被 2^{m-v+1}整除。令$t = 2t_1$。若 j 与 2 互素，则

$$G_i \,\mathrm{Y}\, \langle z_1, z_2\rangle = \langle x_i z_1^{-l}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_1}, z_1\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \,\mathrm{Y}\, \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

设 j 被 2 整除，并令 $j = 2j_1$。因此

$$G_i \,\mathrm{Y}\, \langle z_1, z_2\rangle = \langle x_i z_1^{-l} z_2^{-j_1}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_1}\rangle \,\mathrm{Y}\, \langle z_1, z_2\rangle \cong D_8 \,\mathrm{Y}\, \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^m}.$$

(ii) 令

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^{n+1}} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}}\rangle \cong M_2(u, n+1),$$

其中 $2 \leqslant u \leqslant m+1$。显然， $\zeta G_i = \langle x_i^2, y_i^2\rangle \leqslant \langle z_1^2, z_2\rangle$。此时，令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^j$和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2^t$。若 $n = m$，则为避免重复（i），我们只考虑 $2 \leqslant u < m+1$ 的情况。由于 $1 = x_i^{2^u} = z_1^{2^u l} z_2^{2^{u-1} j}$， l 和 j 都被 2^{m+1-u} 整除。令 $j = 2j_1$。由于 $1 \neq y_i^{2^m} = z_1^{2^m s} z_2^{2^{m-1} t} = c^s z_2^{2^{m-1} t}$，我们有 t与 2 互素。因此

$$G_i \,\mathrm{Y}\, \langle z_1, z_2\rangle = \langle y_i z_1^{-s}, x_i z_1^{-l} z_2^{-j_1}, z_1\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1) \,\mathrm{Y}\, \mathbb{Z}_{2^{m+1}}.$$

假设 $n > m$。注意到 $1 \neq y_i^{2^n} = z_1^{2^n s} z_2^{2^{n-1} t} = z_1^{2^n s} = c^s$，这就产生了矛盾。

(iii) 令

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}}\rangle \cong M_2(u, v),$$

其中 u、$v \leqslant n$。令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^j$ 和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2^t$，其中 $1 \leqslant l, s \leqslant 2^n$、$1 \leqslant j, t \leqslant 2^m$。显然， l 和 s 都被 2 整除。令 $l = 2l_1$ 和 $s = 2s_1$。

如果 $(j,2)=1=(t,2)$，那么不失一般性，我们可以令 $x_i^2=z_1^{2l}z_2$ 和 $y_i^2=z_1^{2s}z_2$。此时，我们有

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l},x_iy_i^{-1}z_1^{s-l+2^{n-1}},z_1\rangle\cong M_2(m+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

若 $(j,2)=1$ 且 $2|t$。设 $t=2t_1$，则有

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l},y_iz_1^{-s}z_2^{-t_1},z_1\rangle\cong M_2(m+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

类似地，对于 $2|j$ 且 $(t,2)=1$的情形，也可得到相同的结果。

假设 $2|j$ 且 $2|t$。设 $j=2j_2$ 且 $t=2t_2$。可得

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l}z_2^{-j_2},y_iz_1^{-s}z_2^{-t_2},z_1,z_2\rangle\cong D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\mathbb{Z}_{2^m}.$$

(iv) 设

$$G_i=\langle x_i,y_i,c\mid x_i^{2^w}=y_i^2=c^2=1,[x_i,y_i]=c,[x_i,c]=[y_i,c]=1\rangle\cong M_2(w,1,1).$$

由于 $\langle x_i^2,\ c\rangle\leqslant\langle z_1^2,\ z_2\rangle$，我们可设 $x_i^2=z_1^{2l}z_2^j$，其中 $1\leqslant l\leqslant 2^n$、$1\leqslant j\leqslant 2^m$。显然，有 $1\leqslant w\leqslant n+1$。若 $w=n+1$ 且 $n>m$，则 $1\neq x_i^{2^n}=z_1^{2^nl}z_2^{2^{n-1}j}=z_1^{2^nl}=c^l$，这不可能。因此，$w$ 满足以下条件：$1\leqslant w\leqslant n+1$（若 $n=m$）或 $1\leqslant w<n+1$（若 $n>m$）。

如果 j 与 2 互素，那么我们有

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l},y_i,z_1\rangle\cong M_2(m+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

设 j 被 2 整除，并令 $j=2j_1$。由此可得

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l}z_2^{-j_1},y_i,z_1,z_2\rangle\cong D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\mathbb{Z}_{2^m}.$$

□

由引理 3.1 和引理 3.9 可知，G_i 作为 E 的中心积的因子，只需考虑以下三种类型：$M_2(m+1,1,1)$ D_8、Q_8。注意，根据引理 3.5 的 (iv)，只有当 G_1 和 G_2 都同构于 $M_2(m+1,1,1)$ 时，$G_1\curlyvee G_2$ 才同构于 $M_2(m+1,1,1)\curlyvee D_8$。由此，我们可以得到如下类似于定理 3.6 的定理。

定理 3.10。设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_1\rangle$。那么，G 的同构类如下。

(i) $M_2(m+1,1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(ii) $M_2(m+1,1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(iii) $\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\mathbb{Z}_{2^m}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(iv) $Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\mathbb{Z}_{2^m}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$.

引理 3.11. 假设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_2\rangle$。

(i) 若 $G_i\cong M_2(u,n+1)$，则 $2\leqslant u\leqslant m+1$ 且

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle\cong\begin{cases}D_8\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\ or\ Q_8\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}},\ m=1.\\ M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\ or\ D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}},\ m>1.\end{cases}$$

(ii) 若 $n=m$ 且 $G_i\cong M_2(m+1,v)$，其中 $1\leqslant v<m+1$，则 $G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^{m+1}}$。若 $n>m$，则 G_i 不同构于 $M_2(n+1,v)$，其中 $1\leqslant v\leqslant m+1$。

(iii) 若 $G_i\cong M_2(u,v)$，其中 $2\leqslant u<n+1$ 且 $1\leqslant v<n+1$，则我们可以得到与 (*i*) 相同的结果。

(iv) 如果 $G_i\cong M_2(w,1,1)$，其中 $1\leqslant w\leqslant n+1$，那么 $G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}$ 或 $D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}$。

证明。(i) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^{n+1}} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}} \rangle \cong M_2(u, n+1).$$

由于 $\zeta G_i = \langle x_i^2,\ y_i^2 \rangle \leqslant N$，因此我们有 $2^{n+u-1} \leqslant |N| = 2^{n+m}$和 $2 \leqslant u \leqslant m+1$。设 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^j$ 和$y_i^2 = z_1^{2s} z_2^t$，其中 $1 \leqslant l$、$s \leqslant 2^n$、$1 \leqslant j$、$t \leqslant 2^m$。

首先，假设 $u = m+1$。显然，通过比较它们的阶可得 $\zeta G_i = N$。如果 j 被 2 整除，那么 $c = x_i^{2^m} = z_1^{2^m l} z_2^{2^{m-1} j} = z_1^{2^m l}$，这是不可能的。因此 j 与 2 互素。

接下来我们考虑两种情形（t，2）$= 1$ 和 $2|t$。当 t 被 2 整除时，令 $t = 2t_1$，则

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_1}, z_1 \rangle \cong M_2(m+1, 1) \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

当 t 与 2 互素时，不失一般性，我们可以假设 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2$ 与 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2$。如果 $m \geqslant 2$，那么我们有

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l}, x_i y_i^{-1} z_1^{s-l} z_2^{2^{m-2}}, z_1 \rangle \cong M_2(m+1, 1) \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

如果 $m = 1$，那么 $u = 2$ 和

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i, y_i z_1^{-s}, z_1 \rangle \cong Q_8 \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

接下来我们假设 $2 \leqslant u < m+1$。由于 $1 = x_i^{2^u} = z_1^{2^u l} z_2^{2^{u-1} j}$，我们有 j 可被 2^{m-u+1}整除。令 $j = 2j_1$。如果 t 与 2 互素，那么

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle y_i z_1^{-s}, x_i z_1^{-l} z_2^{-j_1}, z_1 \rangle \cong M_2(m+1, 1) \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

假设 t 能被 2 整除，并令 $t = 2t_2$。因此

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l} z_2^{-j_1}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_2} \rangle \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle \cong D_8 \curlyvee \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

(ii) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^{n+1}} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, v),$$

其中 $1 \leqslant v \leqslant m+1$。显然，$\zeta G_i = \langle x_i^2、\ y_i^2 \rangle \leqslant N = \langle z_1^2、\ z_2 \rangle$。此时，令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^j$ 和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2^t$。

若 $n = m$，则我们只考虑 $1 \leqslant v < m+1$ 的情形。由于 $c = x_i^{2^m} = z_1^{2^m l} z_2^{2^{m-1} j} = z_1^{2^m l} c^j$、$j$ 与 2 互素。由于 $1 = y_i^{2^v} = z_1^{2^v s} z_2^{2^{v-1} t}$、$t$ 能被 2^{m-v+1} 整除，即 $2|t$。令 $t = 2t_1$。因此

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_1}, z_1 \rangle \cong M_2(m+1, 1) \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}}.$$

假设 $n > m$。注意到 $c = x_i^{2^n} = z_1^{2^n l} z_2^{2^{n-1} j} = z_1^{2^n l}$，矛盾。

(iii) 令

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}} \rangle \cong M_2(u, v),$$

其中 u、$v \leqslant n$。令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^j$ 和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2^t$，其中 $1 \leqslant l$、$s \leqslant 2^n$、$1 \leqslant j$、$t \leqslant 2^m$。

若 $(j,2) = 1$ 且 $2|t$。令 $t = 2t_1$，则有

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_1}, z_1 \rangle \cong M_2(m+1, 1) \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

类似地，对于 $2|j$ 且 $(t, 2) = 1$ 的情形，也可得到相同的结果。

设 $2|j$ 且 $2|t$。令 $j = 2j_2$ 且 $t = 2t_2$。则

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l} z_2^{-j_2}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t_2}, z_1, z_2 \rangle \cong D_8 \curlyvee \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

如果 $(j, 2) = 1 = (t, 2)$，那么不失一般性，我们可以令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2$ 和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2$。此时，我们将区分 $m = 1$ 和 $m > 1$两种情况。当 $m = 1$时，我们有

$$G_i \curlyvee \langle z_1, z_2 \rangle = \langle x_i z_1^{-l}, y_i z_1^{-s}, z_1 \rangle \cong Q_8 \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

当 $m>1$时，则

$$G_i*\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l},x_iy_i^{-1}z_1^{s-l}z_2^{2^{m-2}},z_1\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

(iv) 设

$$G_i=\langle x_i,y_i,c\mid x_i^{2^w}=y_i^2=c^2=1,[x_i,y_i]=c,[x_i,c]=[y_i,c]=1\rangle\cong M_2(w,1,1).$$

注意到 $\langle x_i^2,c\rangle\leqslant\langle z_1^2,z_2\rangle$。因此，我们可以令 $x_i^2=z_1^{2l}z_2^j$，其中 $1\leqslant l\leqslant 2^n,1\leqslant j\leqslant 2^m$。若 j与 2 互素，则

$$G_i\curlyvee\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l},y_i,z_1\rangle\cong M_2(m+1,1)\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

假设 j 被 2 整除，并令 $j=2j_1$。则

$$G_i*\langle z_1,z_2\rangle=\langle x_iz_1^{-l}z_2^{-j_1},y_i,z_1,z_2\rangle\cong D_8\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}.$$

□

由引理3.1和3.11，中心积 E 的因子 G_i 只需考虑三种类型： $M_2(m+1,1)$ D_8,Q_8。注意， $G_1\curlyvee G_2$仅当 G_1和G_2均与 $M_2(m+1,1)$同构时，才与 $M_2(m+1,1)\curlyvee D_8$同构。由此，我们可以得到以下与定理 3.8 类似的定理。

定理 3.12. 假设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_2\rangle$。那么 G 的同构类如下。

(i) $M_2(m+1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(ii) $M_2(m+1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(iii) $\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(iv) $Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^m}\times\mathbb{Z}_{2^{n+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$.

假设 $N=\langle z_1\rangle\times\langle z_2^2\rangle$. 与情形 A_2类似，我们有以下关于 A_3的结果。推论3.13. 假设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_1\rangle$。那么 G 的同构类如下。

(i) $M_2(n+1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\times\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(ii) $M_2(n+1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\times\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(iii) $\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(iv) $Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$.

推论3.14. 假设 $n\geqslant m\geqslant 1$ 和 $c\in\langle z_2\rangle$。那么 G 的同构类如下。

(i) $M_2(n+1,1,1)\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(ii) $M_2(n+1,1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-2}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 2$;

(iii) $\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$;

(iv) $Q_8\curlyvee\underbrace{D_8\curlyvee\cdots\curlyvee D_8}_{k-1}\curlyvee\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k\geqslant 1$.

3.3 A_4 的同构类型

在本节中,

$$\zeta G = \langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle \times \cdots \times \langle z_r\rangle \cong \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2, N = \langle z_1^2\rangle \times \langle z_2^2\rangle.$$

不失一般性，我们总可以令 $c \in \langle z_1^2\rangle$ 或 $c \in \langle z_2^2\rangle$。首先确定$G_i \Upsilon \langle z_1, z_2\rangle$的类型，其中 $i = 1, 2, \ldots, k$。

引理 3.15. 假设 $n \geqslant m \geqslant 1$ 和 $c \in \langle z_1\rangle$ 或 $\langle z_2\rangle$。

(i) 若 $G_i \cong M_2(u, v)$，其中 $2 \leqslant u \leqslant n+1$和 $1 \leqslant v \leqslant n+1$，则 $G_i \Upsilon \langle z_1, z_2\rangle \cong D_8 \Upsilon (\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}})$

(ii) 若 $G_i \cong M_2(w, 1, 1)$，其中 $1 \leqslant w \leqslant n+1$，则 $G_i \Upsilon \langle z_1, z_2\rangle \cong D_8 \Upsilon (\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}})$。

证明。(i) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i \mid x_i^{2^u} = y_i^{2^v} = 1, x_i^{y_i} = x_i^{1+2^{u-1}}\rangle \cong M_2(u, v).$$

注意，$\zeta G_i = \langle x_i^2、\ y_i^2\rangle \leqslant N$。因此我们可以令 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^{2j}$和 $y_i^2 = z_1^{2s} z_2^{2t}$，其中 $1 \leqslant l、\ s \leqslant 2^n$，$1 \leqslant j、t \leqslant 2^m$。于是

$$G_i \Upsilon \langle z_1, z_2\rangle = \langle x_i z_1^{-l} z_2^{-j}, y_i z_1^{-s} z_2^{-t}, z_1, z_2\rangle \cong D_8 \Upsilon (\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}}).$$

(ii) 设

$$G_i = \langle x_i, y_i, c \mid x_i^{2^w} = y_i^2 = c^2 = 1, [x_i, y_i] = c, [x_i, c] = [y_i, c] = 1\rangle \cong M_2(w, 1, 1).$$

其中 $1 \leqslant w \leqslant n+1$。设 $x_i^2 = z_1^{2l} z_2^{2j}$，其中 $1 \leqslant l \leqslant 2^n, 1 \leqslant j \leqslant 2^m$。因此

$$G_i \Upsilon \langle z_1, z_2\rangle = \langle x_i z_1^{-l} z_2^{-j}, y_i, z_1, z_2\rangle \cong D_8 \Upsilon (\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}}).$$

□

由引理 3.1 和 3.15，以及 $Q_8 \Upsilon Q_8 \cong Q_8 \Upsilon D_8$，容易得到以下定理。

定理 3.16. 假设 $n \geqslant m \geqslant 1$ 和 $c \in \langle z_1\rangle$ 或 $\langle z_2\rangle$。那么 G 的同构类如下。

(i) $\underbrace{D_8 \Upsilon \cdots \Upsilon D_8}_{k} \Upsilon (\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}}) \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$;

(ii) $Q_8 \Upsilon \underbrace{D_8 \Upsilon \cdots \Upsilon D_8}_{k-1} \Upsilon (\mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}}) \times \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r-2}$, $k \geqslant 1$.

4 酉子群

设 G 是一个非阿贝尔 2-群，由如下形式的中心扩张给出

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

以及 $G' = \langle c\rangle \cong \mathbb{Z}_2$、$N \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m}$、$n \geqslant m \geqslant 1$。

在第3节中，我们看到 G 的直积因子中存在一个初等阿贝尔 2-群。根据引理 2.6 和 3.2，在计算 $U_*(FG)$ 的阶时，我们只考虑 $\zeta G = \langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle \geqq N$ 的情形。

设 $\overline{G} = G/G'$，并设 $\Psi : FG \to F\overline{G}$ 为自然同态。考虑集合

$$N_\Psi^* := \{x \in V(FG) \mid \Psi(x) \in V_*(F\overline{G})\},$$

$$\mathrm{Ker}\Psi^+ := \{1 + x \mid x \in \mathrm{Ker}\Psi\}.$$

容易验证，N_Ψ^*是 $V(FG)$的子群，而 $\mathrm{Ker}\Psi^+$是 $V(FG)$的正规子群。设 $S_{G'} := \{xx^* \mid x \in N_\Psi^*\}$。我们有 $S_{G'} \subseteq \mathrm{Ker}\Psi^+ \leqslant N_\Psi^*$。

引理 4.1 ([2])。(i) 对每个 $x \in V(FG)$，$\mathrm{Supp}(xx^*) \cap \Omega_1(G) = \{1\}$。

(ii) 如果 $1+\widehat{G'} \in S_{G'}$ 对于某个 $g \in G$，则 $g^2 = c$。

(iii) 如果对任意 $h \in G$，h^2 都不包含在 G' 中，则对任意 $\alpha \in F$，$1+\alpha(h+h^{-1})\widehat{G'} \in S'_G$。

我们将 $\Theta(G)$ 记为群 $\langle 1 + \sum \alpha_g g G' \in S_{G'},\ \alpha_g \in F\rangle$ 的阶。由此，我们可以$_{g\in\Omega_c(G)}$得到以下引理。

引理 4.2. $S_{G'}$ 是 N_Ψ^*的子群。并且

$$|V_*(FG)| = \frac{1}{\Theta(G)}|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|+|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})|.$$

特别地，如果对于任意 $g \in \Omega_c(G)$ 和 $\alpha \in F$，$1+\alpha g G' \in S_{G'}$ 那么

$$|V_*(FG)| = |F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})|.$$

证明。注意到 FG 的理想 $\mathrm{Ker}\Psi$ 由 $1+c$ 生成。根据引理 4.1，我们可以看到 $S_{G'}$ 的元素具有以下形式

$$1 + \sum_{g\in\Omega_c(G)} \alpha_g g\widehat{G'} + \sum_{h^2\notin G'} \beta_h(h+h^{-1})\widehat{G'}.$$

对于任意 $1+\alpha x G', \sum \alpha_i g_i \in V(FG)$，其中 $\alpha, \alpha_i \in F, x, g_i \in G, i = 1, 2, \ldots, |G|$，我们有$_{i=1}$

$$\begin{aligned}\left(1+\alpha x\widehat{G'}\right)\left(\sum_{i=1}^{|G|}\alpha_i g_i\right) &= \sum_{i=1}^{|G|}\alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{|G|}\alpha\alpha_i x g_i\widehat{G'} = \sum_{i=1}^{|G|}\alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{|G|}\alpha\alpha_i g_i x[x,g_i]\widehat{G'}\\ &= \sum_{i=1}^{|G|}\alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{|G|}\alpha\alpha_i g_i x\widehat{G'} = \left(\sum_{i=1}^{|G|}\alpha_i g_i\right)\left(1+\alpha x\widehat{G'}\right).\end{aligned}$$

因此，$S_{G'}$包含于 $V(FG)$的中心中，且 $S_{G'}$是 N_Ψ^*的一个子群。显然，$\langle 1+\sum_{h^2\notin G'}\beta_h(h+h^{-1})\widehat{G'}, \beta_h \in F\rangle$的阶为 $|F|^{\frac{|G|-|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}}$。因此，根据假设，$|S_{G'}| = \Theta(G)|F|^{\frac{|G|-|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}}$。

考虑映射 $\Phi: N_\Psi^* \to S_{G'}$。显然，$\Phi$ 是一个满同态。注意到 $\Psi(x)^{-1} = \Psi(x^{-1}) = \Psi(x^*) = \Psi(x)^*$ 当且仅当 $x \in V_*(FG)$。因此

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{x \in N_\Psi^* \mid \Phi(x) = 1\} = \{x \in V(FG) \mid x^* = x^{-1}\} = V_*(FG).$$

由此，我们有 $N_\Psi^*/V_*(FG) \cong S_{G'}$。考虑限制映射 $\Psi|_{N_\Psi^*}: N_\Psi^* \to V_*(F\overline{G})$。显然，$\Psi|_{N_\Psi^*}$是满射，且 $\mathrm{Ker}(\Psi|_{N_\Psi^*}) = \mathrm{Ker}\Psi^+$。因此

$$|V_*(FG)| = \frac{|N_\Psi^*|}{|S_{G'}|} = \frac{|\mathrm{Ker}\Psi^+|\cdot|V_*(F\overline{G})|}{|S_{G'}|}.$$

由于

$$|\mathrm{Ker}\Psi^+| = |\mathrm{Ker}\Psi| = \frac{|FG|}{|F\overline{G}|} = F^{|G|/2},$$

我们得到

$$|V_*(FG)| = \frac{|F|^{|G|/2}\cdot|V_*(F\overline{G})|}{|S_{G'}|} = \frac{1}{\Theta(G)}|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|+|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})|.$$

In p特别地，如果对于任意 $g \in \Omega_c(G)$ 和 $\alpha \in F$，都有 $1+\alpha g\widehat{G'} \in S_{G'}$ $\Theta(G) = |F|^{\frac{|\Omega_c(G)|}{2}}$，并且

$$|V_*(FG)| = |F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})|.$$

□

引理 4.3. 假设 h_1、h_2、$h\in G$ 和 $\alpha\in F$。那么

(i) 若 $h_1^4=h_2^4=1$、$h_1^2=h_2^2=c$ 和 $[h_1,h_2]=1$，则 $1+\alpha(h_1+h_2)\widehat{G'}\in S_{G'}$。(ii) 若 $h_1^4=h_2^2=1$、$h_1^2=c$ 和 $[h_1,h_2]=1$，则 $1+\alpha h_1\widehat{G'}+\alpha^2h_1h_2\widehat{G'}\in S_{G'}$。(iii) 若 $h_1^2=h_2^2=1$ 和 $[h_1,h_2]=c$，则 $1+\alpha h_1h_2\widehat{G'}\in S_{G'}$。(iv) 若 $h_1^4=h_2^2=1$ 和 $[h_1,h_2]=h_1^2=c$，则 $1+\alpha h_1\widehat{G'}\in S_{G'}$。(v) 若 $h^8=1$ 和 $h^4=c$，则 $1+\alpha h^2\widehat{G'}\in S_{G'}$。

证明。（i）由 $(1+\alpha h_1+\alpha h_2)(1+\alpha h_1+\alpha h_2)^*=1+\alpha(h_1+h_2)G'$ 可得。（ii）由 $(1+\alpha h_1+\alpha h_2)(1+\alpha h_1+\alpha h_2)^*=1+\alpha h_1$ 可得 $\widehat{G'}+\alpha^2h_1h_2\widehat{G'}$.（iii）由 $(1+\alpha h_1h_2+\alpha h_2)(1+\alpha h_1h_2+\alpha h_2)^*=1+\alpha h_1h_2G'$ 可得。（iv）由 $(1+\alpha h_1+\alpha h_2)(1+\alpha h_1+\alpha h_2)^*=1+\alpha h_1G'$ 可得。容易验证 $(\alpha+\alpha h^2+h)(\alpha+\alpha h^2+h)^*=1+\alpha^2h^2$。注意，映射：$\phi\colon F\to F,\alpha\mapsto\alpha^2$ 是一个自同构。由此，对于任意 $\alpha\in F$，有 $1+\alpha h^2\widehat{G'}\in S_{G'}$。

□

为方便起见，以下部分将描述 D_8 或 Q_8 的关系，如下所示，

$$\langle x,y\mid x^2=y^2=1,[x,y]=c\rangle\cong D_8,\langle x,y\mid x^4=1,x^2=y^2=[x,y]=c\rangle\cong Q_8.$$

引理 4.4. (i) 设 $H_1=\langle a、b\mid a^4=b^4=1、[a,b]=a^2=c\rangle\cong\mathbb{Z}_4\rtimes\mathbb{Z}_4$。则 $\Theta(H_1)$ 等于 $\frac{1}{2}|F|^{\frac{|\Omega_c(H_1)|}{2}}$。

(ii) 设 $H_2=\langle x、y\rangle\cong Q_8$。则 $\Theta(H_2)$ 等于 $\frac{1}{4}|F|^{\frac{|\Omega_c(H_2)|}{2}}$。

证明。根据引理 2.4、2.5 和 2.6，我们知道 $|V_*(FH_i)|=4|F|^{\frac{|H_i|+|\Omega_1(H_i)|}{2}-1}$。假设 $\overline{H_i}=H_i/H_i'$，其中 $i=1,2$，那么

$$|V_*(FH_i)|=\frac{1}{\Theta(H_i)}|F|^{\frac{|H_i|+|\Omega_1(H_i)|+|\Omega_c(H_i)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{H_i})|.$$

根据引理 4.2。

对于群 H_1，$|\Omega_1(H_1)|=4=|\Omega_c(H_1)|$ 和 $\overline{H_1}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$。由于

$$\frac{1}{\Theta(H_1)}|F|^{\frac{16+4+4}{4}}\cdot(2|F|^5)=4|F|^{\frac{16+4}{2}-1},$$

我们有 $\Theta(H_1)=\frac{|F|^2}{2}=\frac{1}{2}|F|^{\frac{|\Omega_c(H_1)|}{2}}$。

对于群 H_2，$|\Omega_1(H_2)|=2$，$|\Omega_c(H_2)|=6$ 和 $\overline{H_1}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^2}$。由于

$$\frac{1}{\Theta(H_2)}|F|^{\frac{8+2+6}{4}}\cdot(|F|^3)=4|F|^{\frac{8+2}{2}-1},$$

我们有 $\Theta(H_2)=\frac{|F|^3}{4}=\frac{1}{4}|F|^{\frac{|\Omega_c(H_2)|}{2}}$。

□

引理 4.5. 设 $H=\langle x,y\mid x^4=y^{2^v}=1,[x,y]=x^2=c\rangle\cong M_2(2,v)$，其中 $v\geqslant3$。那么 $\Theta(H)=\frac{1}{2}|F|^{\frac{|\Omega_c(H)|}{2}}$。

证明。容易验证 $\Omega_c(H)=\{xy^ic^j\mid i=0,2^{v-1},j=0,1\}$。

令 $X:=\{1+\alpha x\widehat{H'}\mid\alpha\in F\}\subseteq S_{H'}$。首先，我们断言 X 的阶为 $\frac{1}{2}|F|$。由于对于任意 $\beta\in F$，$(1+\beta x^2+\beta x)(1+\beta x^2+\beta x)^*=1+(\beta+\beta^2)x\widehat{G'}\in S_{G'}$，因此 X 的阶至少为 $\frac{1}{2}|F|$。FH 的每个元素都可以写成以下形式：$a=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy$，其中 $a_i=a_{i1}+a_{i2}x^2$、$a_{ij}\in F\langle y^2\rangle$。

$$\begin{aligned}aa^*&=a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*+a_4a_4^*+(a_1^*a_2+a_3^*a_4)x+(a_1a_2^*+a_3a_4^*)x^3\\&\quad+a_1a_3^*y^{-1}+a_1^*a_3y+a_1a_4^*y^{-1}x^{-1}+a_1^*a_4xy\\&\quad+a_2a_3^*xy^{-1}+a_2^*a_3yx^{-1}+a_2a_4^*x^2y^{-1}+a_2^*a_4x^2y\\&=a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*+a_4a_4^*+(a_1^*a_2+a_3^*a_4)x+(a_1a_2^*+a_3a_4^*)x^3\\&\quad+b_1y^{-1}+b_2x^2y^{-1}+b_3y+b_4x^2y+b_5xy^{-1}+b_6x^3y^{-1}+b_7xy+b_8x^3y,\end{aligned}$$

其中

$$b_1 = a_{11}a_{31}^* + a_{12}a_{32}^* + a_{21}a_{42}^* + a_{22}a_{41}^* = b_3^*$$
$$b_2 = a_{11}a_{32}^* + a_{12}a_{31}^* + a_{21}a_{41}^* + a_{22}a_{42}^* = b_4^*$$
$$b_5 = a_{11}a_{41}^* + a_{12}a_{42}^* + a_{21}a_{31}^* + a_{22}a_{32}^* = b_7^*$$
$$b_6 = a_{11}a_{42}^* + a_{12}a_{41}^* + a_{21}a_{32}^* + a_{22}a_{31}^* = b_8^*$$

考虑从 FH到 F的增广映射，记为 χ。令 $w_i = \chi(a_i)$ 和 $w_{ij} = \chi(a_{ij})$。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$若 $aa^* \in\in S_{H'}$和 $1+\alpha xH'$在 $\langle 1+ \sum \alpha_g gH' \in S_{H'}$中， $\alpha_g \in F\rangle$仅出现在 aa^*的表达式中， $g\in\Omega_c(H)$

那么我们有

$$\chi(a_1a_1^* + a_2a_2^* + a_3a_3^* + a_4a_4^*) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 1\chi(a_1^*a_2 + a_3^*a_4)$$
$$= w_1w_2 + w_3w_4 = \alpha$$
$$w_{11}w_{31} + w_{12}w_{32} + w_{21}w_{42} + w_{22}w_{41} = w_{11}w_{32} + w_{12}w_{31} + w_{21}w_{41} + w_{22}w_{42}$$
$$w_{11}w_{41} + w_{12}w_{42} + w_{21}w_{31} + w_{22}w_{32} = w_{11}w_{42} + w_{12}w_{41} + w_{21}w_{32} + w_{22}w_{31}.$$

由此,

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1, w_1w_2 + w_3w_4 = \alpha, w_1w_3 + w_2w_4 = 0, w_1w_4 + w_2w_3 = 0.$$

根据 [2],引理10， α的数量为 $\frac{1}{2}|F|$。因此，结论成立。

根据引理 4.3 的 (i)，我们有 $1+\alpha(x+xy^{2^{v-1}})\widehat{G'} \in S_{G'}$对任意 $\alpha \in F$。由此，$\Theta(H)$ 的阶 $\langle 1+ \sum \alpha_g g\widehat{H'} \in S_{H'}$， $\alpha_g \in F\rangle$为$\frac{1}{2}|F|^2$，即 $\Theta(H) = \frac{1}{2}|F|^{\frac{|}{\Omega_c(H\ |)}}_{2}{}_{g\in\Omega_c(H)}$。

□

引理 4.6. 设 $G = H$Y K, $H \bigcap K = \langle c\rangle$ 和$H \cong M_2(u, v)$，其中 $u \geqslant 2$和 $v \geqslant 1$。若$\widehat{\ }(u, v) =$(2, 1) 或 $u > 2$，则对任意 $1 + \alpha gG' \in S_{G'}$ $g \in \Omega_c(G)$， $\alpha \in F$。

证明。令

$$H = \langle x, y \mid x^{2^u} = y^{2^v} = 1, x^y = x^{1+2^{u-1}}\rangle \cong M_2(u, v).$$

对于任意的 $g \in \Omega_c(G)$，设 $g = x^iy^jg_1$，其中 $0 \leqslant i < 2^{u-1}$、 $0 \leqslant j < 2^v$ 和 $g_1 \in K$。此外，我们有 $x^{2i+2^{u-1}ij}y^{2j}g_1^2 = c$。

首先，考虑 $u = 2$ 和 $v = 1$。此时，$H \cong D_8$。在引理 4.3 的 (iv) 中取 $h_1 = x$ 和 $h_2 = y$，可得对于任意 $\alpha \in F$，有 $1 + \alpha xG' \in S_{G'}$。

若 $g_1 \in \Omega_c(G)$，则 $x^{2i+2ij} = 1$。因此，$(i, j) =$(0, 0)、(0, 1)、(1, 1)。

$\frown 1 + \alpha(x + g_1)G' \in S_{G'}$ 由引理 4.3 的 (i) 中取 $h_1 = x$ 和 $h_2 = g_1$ 即得;

$1 + \alpha g_1\widehat{G'} + \alpha^2yg_1\widehat{G'} \in S_{G'}$ 由在引理 4.3(ii) 中取 $h_1 = g_1$ 和 $h_2 = y$ 得到;

$1 + \alpha xyg_1\widehat{G'} \in S_{G'}$ 由在引理 4.3(iii) 中取 $h_1 = \widehat{xg_1}$ 和 $h_2 = y$ 得到。

根据上述结果，我们有 $1 + \alpha g$ $\widehat{G'} \in S_{G'}$ 关于 (i, j 的三种情形)。

若 $g_1 \in \Omega_1(G)$，则 $x^{2i+2ij} = c$。因此， $i = 1$ 和 $j = 0$。进一步，在引理 4.3(i)$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$中取 $h_1 = x$ 和 $h_2 = xg_1$，由于对任意 $\alpha \in F$ 都有 $1 + \alpha xG' \in S_{G'}$，可得 $1 + \alpha xg_1G' \in S_{G'}$。

假设 u 大于 2。在引理 4.3(v) 中取 $h = x^{2^{u-3}}$，可得 $1+\alpha x^{2^{u-2}}\widehat{G'} \in S_{G'}$。若 $g_1 \in \Omega_c(G)$，则 $x^{2i+2^{u-1}ij}y^{2j} = 1$。因此， $j = 0$ 或 2^{v-1}。由此可得 $i = 0$。否则，$i = 2^{u-2}$ 和 $x^{2^{u-1}(1+2^{u-2}j)} = 1$，这不可能。在引理 4.3(i) 中取 $h_1 = x^{2^{u-2}}$ 和 $h_2 = y^jg_1$，由于 $1+\alpha x^{2^{u-2}}\widehat{G'} \in S_{G'}$，可得 $1 + \alpha y^jg_1\widehat{G'} \in S_{G'}$。

如果 $g_1 \in\Omega_1(G)$，那么 $x^{2i+2^{u-1}ij}y^{2j} = c$。因此 $j = 0$或 2^{v-1}。由此，我们有 $i = 2^{u-2}$。对于任意 $\alpha \in F$，在引理 4.3 的 (ii) 中取 $h_1 = x^{2^{u-2}}$和 $h_2 = y^jg_1$，我们有 $1 + \alpha x^{2^{u-2}}y^jg_1\widehat{G'} \in S_{G'}$。

□

$\widehat{\ }$引理 4.7. 假设 $G = H$Y K, $H \bigcap K = \langle c\rangle$ and $H \cong \mathbb{Z}_{2^u}$, where $u \geqslant 3$. Then $1+\alpha gG' \in S_{G'}$for any $g \in \Omega_c(G)$ and $\alpha \in F$.

证明. 设 $H=\langle z\rangle$. 根据假设, $z^{2^{u-1}}=c$. $1+\alpha z^{2^{u-2}}\widehat{G'}\in S_{G'}$ 由引理 4.3 的 (v) 得出。对于任意 $g\in\Omega_c(G)$, 显然 $[z,g]=1$. $1+\alpha(z^{2^{u-2}}+g)\widehat{G'}\in S_{G'}$ 由引理 4.3 的 (i) 得出, 这$\widehat{\ }$意味着 $1+\alpha gG'\in S_{G'}$.

□

引理 4.8. $\Omega_1(D_8^{\Upsilon k})=\Omega_c(Q_8\,\Upsilon\,D_8^{\Upsilon(k-1)})=2\gamma_1(k)$, 且 $\Omega_c(D_8^{\Upsilon k})=\Omega_1(Q_8\,\Upsilon\,D_8^{\Upsilon(k-1)})=2\gamma_2(k)$。证明

. Let

$$G_l=\langle x_1,y_1\rangle\,\Upsilon\,\langle x_2,y_2\rangle\,\Upsilon\cdots\Upsilon\,\langle x_k,y_k\rangle\cong H_l\,\Upsilon\,D_8^{\Upsilon(k-1)},$$

其中 $\langle x_i,y_i\rangle\cong D_8, i=2,\ldots,k$, 以及 $H_1\cong D_8$, $H_2\cong Q_8$, $l=1,2$。对于任意 $g\in G$, 我们不妨设 $g=x_1^{i_1}y_1^{j_1}\cdots x_k^{i_k}y_k^{j_k}c^s$, 其中 $i_t,j_t,s=0$ 或 1, $t=1,\ldots,k$。

对于群 G_1, 我们用 r_1 表示集合 $\{(i_t,j_t)\mid i_t=j_t=1, t\in\{1,\ldots,k\}\}$ 的个数。若 $g^2=1$, 则 r_1 为偶数。此时, 我们有 $\Omega_1(G_1)=2\gamma_1(k)$。若 $g^2=c$, 则 r_1 为奇数。此时, 我们有 $\Omega_c(G_1)=2\gamma_2(k)$。

对于群 G_2, 我们用 r_2 表示集合 $\{(i_t,j_t)\mid i_t=j_t=1, t\in\{2,\ldots,k\}\}$ 的数量。首先假设 $g^2=1$。若 r_2 为偶数, 则 $i_1=j_1=0$; 若 r_2 为奇数, 则 $i_1+j_1\neq 0$。此时, 我们有

$$\Omega_1(G_2)=2\gamma_1(k-1)+6\gamma_2(k-1)=2^{2k}-2^k=2\gamma_2(k).$$

接下来假设 $g^2=c$。若 r_2 为偶数, 则 $i_1+j_1\neq 0$; 若 r_2 为奇数, 则 $i_1=j_1=0$。此时, 我们有

$$\Omega_c(G_2)=6\gamma_1(k-1)+2\gamma_2(k-1)=2^{2k}+2^k=2\gamma_1(k).$$

□

定理 4.9. 假设 $G\cong M_2(n+1,m+1)\,\Upsilon\,D_8^{\Upsilon(k-1)}$, 其中 $n\geqslant m\geqslant 1$, $k\geqslant 1$。则 i $\Omega_1(G)=\Omega_c(G)\models 2^{2k}$。

(ii) $|V_*(FG)|=\begin{cases}2|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}, & \text{if } n=1 \text{ and } k\geqslant 2.\\ 4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$

证明. (i) 设 $G=\langle x_1,y_1\rangle\,\Upsilon\,\langle x_2,y_2\rangle\,\Upsilon\,\cdots\Upsilon\,\langle x_k,y_k\rangle$, 其中 $\langle x_i,y_i\rangle\cong D_8, i=2,\ldots,k$, 且

$$\langle x_1,y_1\mid x_1^{2^{n+1}}=y_1^{2^{m+1}}=1, x_1^{y_1}=x_1^{1+2^n}\rangle\cong M_2(n+1,m+1).$$

对于任意 $g\in G$, 令 $g=g_1g_2$, 其中 $g_1=x_1^{i_1}y_1^{j_1}$, $0\leqslant i_1<2^n$, $0\leqslant j_1<2^{m+1}$, 且 $g_2\in\langle x_2,y_2,\ldots,x_k,y_k\rangle$。若 $g_1^2=1$, 则 $x_1^{2i_1}y_1^{2j_1}c^{i_1j_1}=1$。由此可得 $j_1=0$ 或 2^m 且 $i_1=0$。若 $g_1^2=c$, 则 $x_1^{2i_1}y_1^{2j_1}c^{i_1j_1-1}=1$。由此可得 $j_1=0$ 或 2^m 且 $i_1=2^{n-1}$。根据引理 4.8, 我们有

$$|\Omega_1(G)|=4\gamma_1(k-1)+4\gamma_2(k-1)=2^{2k}=|\Omega_c(G)|.$$

(ii) 我们首先考虑 $k=1$ 的情况。此时, $G=\langle x_1,y_1\rangle$. 如果 $n=1$, 那么 $m=1$ 和 $|V_*(FG)|=4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}$ 由引理 2.5 可得。

设 $n\geqslant 2$。根据引理 4.6, 我们可以得到 $1+\alpha g\widehat{G'}\in S_{G'}$ 对于任意 $g\in\Omega_c(G)$ 和 $\alpha\in F$。根据引理 4.2, 我们有

$$|V_*(FG)|=|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G})|=|F|^{2^{n+m}}\cdot|V_*(F\overline{G})|.$$

注意到 $\overline{G}\cong\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_{2^{m+1}}$。根据引理 2.3, 我们有

$$|V_*(F\overline{G})|=|\overline{G}^2[2]|\cdot|F|^{\frac{|\overline{G}|+|\Omega_1(\overline{G})|}{2}-1}=4|F|^{2^{n+m}+1}.$$

因此 $|V_*(FG)|=4|F|^{2^{n+m+1}+1}$。此外, 由于根据 (i), $\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1=\frac{2^{n+m+2}+4}{2}-1$, $|V_*(FG)|=4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}$。

接下来我们假设 $k\geqslant 2$。此时, D_8 出现在 G 的中心积中。根据引理 4.6, $1+\alpha gG'\in S_{G'}$, 对任意 $g\in\Omega_c(G)$ $\alpha\in F$ 均成立。因此

$$|V_*(FG)|=|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G})|=|F|^{2^{n+m+2k-2}}|V_*(F\overline{G})|$$

根据引理 4.2。注意，$\overline{G} \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^{(k-1)}$。因此，根据引理 2.3，$|V_*(F\overline{G})| = 2|F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k-1}-1}$（若 $n=1$）或 $4|F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k-1}-1}$（若 $n \geqslant 2$）。由此可得

$$|V_*(FG)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}, \text{ if } n=1 \text{ and } k \geqslant 2. \\ 4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}, \text{ if } n \geqslant 2 \text{ and } k \geqslant 2. \end{cases}$$

□

定理 4.10。假设 $G \cong M_2(n+1,m+1) \Upsilon Q_8 \Upsilon D_8^{\Upsilon(k-2)}$，其中 $n \geqslant m \geqslant 1$, $k \geqslant 2$。则 $|\Omega_1(G)| = |\Omega_c(G)| \models 2^{2k}$。

(ii) $|V_*(FG)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}, \text{ if } n=1 \text{ and } k \geqslant 3. \\ 4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}, \text{ otherwise.} \end{cases}$

证明。设 $G = \langle x_1, y_1\rangle \Upsilon \langle x_2, y_2\rangle \Upsilon \cdots \Upsilon \langle x_k, y_k\rangle$，其中 $k \geqslant 2$, $\langle x_2, y_2\rangle \cong Q_8$, $\langle x_i, y_i\rangle \cong D_8, i = 3, \ldots, k$，且

$$\langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{n+1}} = y_1^{2^{m+1}} = 1, x_1^{y_1} = x_1^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1, m+1).$$

(i) 的证明与定理 4.9 中 **(i)** 的证明类似。

(ii) 我们将使用与 **(i)** 中相同的记号，并假设 $g^2 = c$。我们首先考虑 $k=2$ 的情况。此时，g 的形式如下：

$$x_1^{2^{n-1}} y_1^{j_1} c^s, y_1^{j_1} x_2 c^s, y_1^{j_1} y_2 c^s, y_1^{j_1} x_2 y_2 c^s.$$

若 $n=1$，则 $\langle x_1, y_1\rangle \cong \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4$。在引理 4.3 的 **(i)** 中取 $h_1 := x_1$ 和 $h_2 := x_1 y_1^2$，可得对于任意 $\alpha \in F$, $1 + \alpha(x_1 + x_1 y_1^2)\widehat{G'} \in S_{G'}$。对于任意 $\beta \in F$，不难验证

$$(1 + \beta x_1 + \beta c)(1 + \beta x_1 + \beta c)^* = 1 + (\beta + \beta^2) x_1 \widehat{G'} \in S_{G'}.$$

因此，对于任意 $\alpha, \beta \in F$, $1 + (\beta + \beta^2) x_1 \widehat{G'} + \alpha(x_1 + x_1 y_1^2)\widehat{G'} \in S_{G'}$。根据引理 4.4 的 **(i)**，我们知道，在 F 中满足 $1 + \gamma x_1 G' \in S_{G'}$ 的 γ 的数量为 $|F|/2$。假设 g 是除 x_1 之外的任意其他类型。此时，$g^4 = x_1^4 = 1$, $g^2 = x_1^2 = c$ 且 $[x_1, g] = 1$。根据引理 4.3 的 **(i)**，我们可得，对于任意 $\alpha \in F$, $1 + \alpha(x_1 + g)G' \in S_{G'}$。总之，$\langle 1 + \sum_{g \in \Omega_c(G)} \alpha_g g G' \in S_{G'}, \alpha_g \in F \rangle$ 的阶为 $\frac{1}{2}|F|^{|\Omega_c(G)|}$。根据引理 4.2，

$$|V_*(FG)| = \frac{2}{|F|^{\frac{|\Omega_c(G)|}{2}}} |F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|+|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})| = 2|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})|.$$

注意到 $\overline{G} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。根据引理 2.3，我们有

$$|V_*(F\overline{G})| = |\overline{G}^2[2]| \cdot |F|^{\frac{|\overline{G}|+|\Omega_1(\overline{G})|}{2}-1} = 2|F|^{23}.$$

因此 $|V_*(FG)| = 4|F|^{39}$。又由于 $\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2} - 1 = \frac{2^6+2^4}{2} - 1 = 39$ 由 **(i)** 可知，$|V_*(FG)| = 4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}$。如果 $n \geqslant 2$，那么根据引理 4.6，对于任意 $g \in \Omega_c(G)$ $\alpha \in F$，都有 $1 + \alpha g C \in S_{G'}$。由此，根据引理 4.2，

$$|V_*(FG)| = |F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|-|\Omega_c(G)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G})| = |F|^{2^{n+m+2}} |V_*(F\overline{G})|.$$

注意到 $\overline{G} \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。因此 $|V_*(F\overline{G})| = 4|F|^{2^{n+m+2}+7}$。由此可得 $|V_*(FG)| = 4|F|^{2^{n+m+3}+7} = 4|F|^{\frac{|G|+|\Omega_1(G)|}{2}-1}$。

接下来假设 $k \geqslant 3$。此时，D_8 出现在 G 的中心积中。由引理 4.6，$1 + \alpha g G' \in S_{G'}$ 对任意 $g \in \Omega_c(G)$ $\alpha \in F$ 均成立。类似于定理 4.9 的证明，我们可以得到 **(ii)**。

□

定理 4.11. 假设 $G_l \cong M_2(m+1, n+1) \Upsilon H_l \Upsilon D_8^{\Upsilon(k-2)}$，其中 $n > m \geqslant 1$, $H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$, $l = 1, 2$ 以及 $k \geqslant 2$。那么

(i) $|\Omega_1(G_l)| = |\Omega_c(G_l)| = 2^{2k}$.

(ii) $|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } l=1=m, k \geqslant 2 \text{ or } m=1, l=2, k \geqslant 3. \\ 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \textit{ otherwise.} \end{cases}$

证明. (i) 令 $G_l = \langle x_1, y_1\rangle \Upsilon \langle x_2, y_2\rangle \Upsilon \cdots \Upsilon \langle x_k, y_k\rangle$, 其中 $\langle x_2, y_2\rangle = H_l$, $\langle x_i, y_i\rangle \cong D_8, i = 3, \ldots, k$, 并且

$$\langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{m+1}} = y_1^{2^{n+1}} = 1, x_1^{y_1} = x_1^{1+2^m}\rangle \cong M_2(m+1, n+1).$$

对于任意 $g \in G$, 令 $g = g_1 g_2$, 其中 $g_1 = x_1^{i_1} y_1^{j_1}$, $0 \leqslant i_1 < 2^m$, $0 \leqslant j_1 < 2^{n+1}$, 且 $g_2 \in \langle x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k\rangle$。(i) 的证明与定理 4.9 的 (i) 类似。

(ii) 首先, 假设 $m = 1$。若 $G_1 \cong M_2(2, n+1)$。由引理 4.5, 得 $\Theta(G_1) = \frac{1}{2}|F|_{\Omega_c(G_1)^2}$。因此

$$|V_*(FG_1)| = 2|F|^{\frac{|G_1|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G}_1)| = 2|F|^{2^{1+n}} \cdot |V_*(F\overline{G}_1)|$$

由引理 4.2。又由于 $\overline{G}_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}}$, 我们有

$$|V_*(FG_1)| = 2|F|^{2^{1+n}} \cdot 2|F|^{2^{1+n}+1} = 4|F|^{2^{2+n}+1} = 4|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}.$$

若 $G_2 \cong M_2(2, n+1) \Upsilon Q_8$, 则与定理 4.10 类似, 我们有 $\Theta(G_2) = \frac{1}{2}|F|_{\Omega_c(G_2)^2}$。注意到 $\overline{G}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。因此我们有

$$|V_*(FG_2)| = 2|F|^{2^{3+n}} \cdot |V_*(F\overline{G}_2)| = 4|F|^{2^{4+n}+7} = 4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}.$$

对于其他情况, 根据引理 4.6, 我们可以得到 $1 + \alpha g G_l' \in S_{G_l'}$, 对于任意 $g \in \Omega_c(G_l)$ 和 $\alpha \in F$。因此, 根据引理 4.2, $|V_*(FG_l)| = |F|^{\frac{|G_l|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)|$。注意, $\overline{G}_l \cong \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^{n+1}} \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^{(k-1)}$。因此

$$|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k-1}-1} = 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } m = 1. \\ 4|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k-1}-1} = 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } m \geqslant 2. \end{cases}$$

□

定理 4.12. 假设 $G_l \cong M_2(n+1, 1) \Upsilon M_2(m+1, 1, 1) \Upsilon H_l \Upsilon D_8^{\Upsilon(k-3)}$, 其中 $n \geqslant m \geqslant 1$、$k \geqslant 3$ 和 $l = 1$、2、 $H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$。

(i) 若 $n = 1$, 则 $\Omega_1(G_1) = 2^{2k} + 2^{k+1} = \Omega_c(G_2)$ 且 $\Omega_c(G_1) = 2^{2k} - 2^{k+1} = \Omega_1(G_2)$。若 $n \geqslant 2$, 则 $\Omega_1(G_l) = 2^{2k} = \Omega_c(G_l)$。

(ii) $|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n = 1. \\ 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n \geqslant 2. \end{cases}$

证明。 (i) 设 $G_l = \langle x_1, y_1\rangle \Upsilon \langle x_2, y_2\rangle \Upsilon \cdots \Upsilon \langle x_k, y_k\rangle$, 其中 $\langle x_i, y_i\rangle \cong D_8, i = 4, \ldots, k$, $\langle x_3, y_3\rangle = H_l$and

$$\langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{n+1}} = y_1^2 = 1, x_1^{y_1} = x_1^{1+2^n}\rangle \cong M_2(n+1, 1),$$
$$\langle x_2, y_2 \mid x_2^{2^{m+1}} = y_2^2 = 1, [x_2, y_2] = c\rangle \cong M_2(m+1, 1, 1).$$

对于任意 $g \in G$, 我们可以令 $g = g_1 g_2$, 其中 $g_1 = x_1^{i_1} y_1^{j_1} x_2^{i_2} y_2^{j_2}$、 $0 \leqslant i_1 < 2^n$、 $0 \leqslant i_2 < 2^{m+1}$、 j_1、 $j_2 = 0$ 或 1, 且 $g_2 \in \langle x_3$、 y_3、 $\ldots$、 x_k、 $y_k\rangle$。

如果 $g_1^2 = 1$, 则 $x_1^{2i_1} x_2^{2i_2} c^{i_1 j_1 + i_2 j_2} = 1$。因此, $i_2 = 0$ 或 2^m, 且 $x_1^{2i_1 + 2^n i_1 j_1} = 1$。由此, 我们有 $i_1 = 0$, 若 $j_1 = 0$, $i_1 = 0$ 或 2^{n-1}, 若 $n = 1$ 且 $j_1 = 1$, $i_1 = 0$, 若 $n \geqslant 2$ 且 $j_1 = 1$。如果 $g_1^2 = c$, 则 $i_2 = 0$ 或 2^m, 且 $x^{2i_1 + 2^n (i_1 j_1 - 1)}{}_1 = 1$。由此, 我们有 $i_1 = 2^{n-1}$, 若 $j_1 = 0$; 若 $n = 1$ 且 $j_1 = 1$, 则 i_1 为非值; 若 $n \geqslant 2$ 且 $j_1 = 1$, 则 $i_1 = 2^{n-1}$。根据引理 4.8, 我们有以下结果:

(1) 若 $n = 1$, 则有 $\Omega_1(G_1) = 24\gamma_1(k-2) + 8\gamma_2(k-2) = 2^{2k} + 2^{k+1} = \Omega_c(G_2)$, 且 $\Omega_c(G_1) = 8\gamma_1(k-2) + 24\gamma_2(k-2) = 2^{2k} - 2^{k+1} = \Omega_1(G_2)$。

(2) 若 $n \geqslant 2$, 则有 $\Omega_1(G_l) = 16\gamma_1(k-2) + 16\gamma_2(k-2) = 2^{2k} = \Omega_c(G_l)$。

(ii) 根据引理 4.6, 对于任意 $1 + \alpha g \in G_l'$, $g \in \Omega_c(G_l)$ 和 $\alpha \in F$。因此, 根据引理 4.2, $|V_*(FG_l)| = |F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|-|\Omega_c(G_l)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)|$。注意到 $\overline{G}_l \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}} \times \mathbb{Z}_2^{(2k-2)}$。由此可得

$$|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k-1}+\epsilon_l 2^k-1} = 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n = 1. \\ 4|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k-1}-1} = 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n \geqslant 2. \end{cases}$$

其中 $\epsilon_1 = 1$ 且 $\epsilon_2 = -1$。

□

根据定理 4.12，很容易得到以下结果。

推论 4.13。假设 $G_l \cong M_2(m+1,1) \Upsilon M_2(n+1,1) \Upsilon H_l \Upsilon D_8^{\Upsilon(k-3)}$，其中 $n > m \geqslant 1$、$k \geqslant 3$ 和 $l = 1$、2、$H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$。那么 $|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{如果 } m = 1. \\ 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{如果 } m \geqslant 2. \end{cases}$

定理 4.14. 假设 $G_l \cong M_2(n+1,1) \Upsilon H_l \Upsilon D_8^{\Upsilon(k-2)} \times \mathbb{Z}_{2^m}$，其中 $n \geqslant m \geqslant 1$、$k \geqslant 2$ 和 $l = 1$，2，$H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$。那么

(i) 若 $n = 1$，$|\Omega_1(G_1)| = 2^{2k+1} + 2^{k+1} = |\Omega_c(G_2)|$ 且 $|\Omega_c(G_1)| = 2^{2k+1} - 2^{k+1} = |\Omega_1(G_2)|$；若 $n \geqslant 2$，$|\Omega_1(G_l)| = 2^{2k+1} = |\Omega_c(G_l)|$，其中 $l = 1, 2$。

(ii) $|V_*(FG_l)| = \begin{cases} |F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{if } n = m = 1. \\ 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{if } n > m = 1. \\ 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{if } n \geqslant m \geqslant 2. \end{cases}$

证明。(i) 设 $G_l = \langle x_1, y_1 \rangle \Upsilon \langle x_2, y_2 \rangle \Upsilon \cdots \Upsilon \langle x_k, y_k \rangle \times \langle z \rangle$，其中 $\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}_{2^m}$ 且

$$\langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{n+1}} = y_1^2 = 1, x_1^{y_1} = x_1^{1+2^n} \rangle \cong M_2(n+1,1),$$

$$\langle x_2, y_2 \rangle = H_l, l = 1, 2, \text{ and } \langle x_i, y_i \rangle \cong D_8, i = 3, \ldots, k.$$

对于任意 $g \in G$，设 $g = g_1 g_2$，其中 $g_1 = x_1^{i_1} y_1^{j_1} z^s$，$0 \leqslant i_1 < 2^n$，$0 \leqslant j_1 < 2$，$0 \leqslant s < 2^m$ 和 $g_2 \in \langle x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k \rangle$。

若 $g_1^2 = 1$，即 $x_1^{2i_1} c^{i_1 j_1} z^{2s} = 1$，则 $s = 0$ 或 2^{m-1}。此外，当 $n = 1$ 时，我们有 $(i_1, j_1) = (0,0), (0,1), (1,1)$；当 $n \geqslant 2$ 时，$(i_1, j_1) = (0,0), (0,1)$。

若 $g_1^2 = c$，即 $x_1^{2i_1} c^{i_1 j_1} z^{2s} = c$，则 $s = 0$ 或 2^{m-1}。此外，当 $n = 1$ 时，我们有 $(i_1, j_1) = (1,0)$；当 $n \geqslant 2$ 时，$(i_1, j_1) = (2^{n-1}, 0), (2^{n-1}, 1)$。由引理 4.8，我们得到以下结果：

(1) 若 $n = 1$，则有 $\Omega_1(G_1) = 12\gamma_1(k-1) + 4\gamma_2(k-1) = 2^{2k+1} + 2^{k+1} = \Omega_c(G_2)$，且 $\Omega_c(G_1) = 4\gamma_1(k-1) + 12\gamma_2(k-1) = 2^{2k+1} - 2^{k+1} = \Omega_1(G_2)$。

(2) 若 $n \geqslant 2$，则有 $\Omega_1(G_l) = 8\gamma_1(k-1) + 8\gamma_2(k-1) = 2^{2k+1} = \Omega_c(G_l)$。

(ii) 根据引理 4.6，我们有 $1 + \alpha g \in G_l'$ 对于任意 $g \in G_l$ 和 $\alpha \in F$。由此，根据引理 4.2，我们得到

$$|V_*(FG_l)| = |F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|-|\Omega_c(G_l)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)| = \begin{cases} |F|^{2^{n+m+2k-2}+2^k\varepsilon_l} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)|, & \text{if } n = 1. \\ |F|^{2^{n+m+2k-2}} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)|, & \text{if } n \geqslant 2. \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_1 = 1$ 和 $\varepsilon_2 = -1$。注意 $\overline{G} \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_2^{(2k-1)}$。根据引理 2.3，我们有

$$|V_*(F\overline{G}) = \begin{cases} |F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k}-1}, & \text{if } n = m = 1. \\ 2|F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k}-1}, & \text{if } n > m = 1. \\ 4|F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k}-1}, & \text{if } n \geqslant m \geqslant 2. \end{cases}$$

由此可得，

$$|V_*(FG_l)| = \begin{cases} |F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k}+2^k\varepsilon_l-1} = |F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{if } n = m = 1. \\ 2|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k}-1} = 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{if } n > m = 1. \\ 4|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k}-1} = 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, & \text{if } n \geqslant m \geqslant 2 \end{cases} .$$

□

显然，根据引理 2.6，我们不将初等阿贝尔 2-群视为 G 的直积因子。根据定理 4.14，推论3.13 中 (i) 和 (ii) 的酉子群如下。

推论 4.15. 设 $G_l \cong M_2(n+1,1) \Y H_l \Y D_8^{\Y(k-2)} \times \mathbb{Z}_{2^{m+1}}$，其中 $n \geqslant m \geqslant 1$, $k \geqslant 2$和 $l = 1, 2$, $H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$。那么

$$|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n = m = 1. \\ 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n \geqslant 2. \end{cases}$$

定理 4.16. 假设 $G_l \cong M_2(m+1,1) \Y H_l \Y D_8^{\Y(k-2)} \times \mathbb{Z}_{2^n}$，其中 $n > m \geqslant 1$、 $k \geqslant 2$ 和 $l = 1$、2、$H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$。那么

(i) 如果 $m = 1$, $|\Omega_1(G_1)| = 2^{2k+1} + 2^{k+1} = |\Omega_c(G_2)|$ 且 $|\Omega_c(G_1)| = 2^{2k+1} - 2^{k+1} = |\Omega_1(G_2)|$; 如果 $m \geqslant 2$, $|\Omega_1(G_1)| = 2^{2k+1} = |\Omega_1(G_2)|$ 且 $|\Omega_c(G_1)| = 2^{2k} = |\Omega_c(G_2)|$。

(ii) $|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n > m = 1. \\ 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } n > m \geqslant 2. \end{cases}$

证明。(i)由定理 4.14 的 (i) 得出。

(ii) 根据引理 4.6，对于任意 $g \in G_l$ 和 $\alpha \in F$，我们有 $1 + \alpha g G_l' \in S_{G_l'}$。由此，根据引理 4.2，我们得到

$$|V_*(FG_l)| = |F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|-|\Omega_c(G_l)|}{4}} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)| = \begin{cases} |F|^{2^{n+m+2k-2}+2^k\varepsilon_l} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)|, \text{ if } m = 1. \\ |F|^{2^{n+m+2k-2}} \cdot |V_*(F\overline{G}_l)|, \text{ if } m \geqslant 2. \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_1 = 1$ 且 $\varepsilon_2 = -1$。注意， $\overline{G}_l \cong \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_2^{(2k-1)}$。根据引理 2.3，我们有

$$|V_*(F\overline{G}_l) = \begin{cases} 2|F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k}-1}, \text{ if } m = 1. \\ 4|F|^{2^{n+m+2k-2}+2^{2k}-1}, \text{ if } m \geqslant 2. \end{cases}$$

由此可得，

$$|V_*(FG_l)| = \begin{cases} 2|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k}+2^k\varepsilon_l-1} = 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } m = 1. \\ 4|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k}-1} = 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}, \text{ if } m \geqslant 2. \end{cases}$$

□

显然，根据引理 2.6，我们不将初等阿贝尔 2-群视为 G 的直积项。此外，定理 3.12 的 (i) 和 (ii) 中的酉子群是定理 4.16 的特殊情形。

定理 4.17. 设 $G_l \cong M_2(m+1,1,1) \Y H_l \Y D_8^{\Y(k-2)} \Y \mathbb{Z}_{2^n}$，其中 $n \geqslant m \geqslant 1$, $k \geqslant 2$和 $l = 1, 2$, $H_1 \cong D_8$ 和 $H_2 \cong Q_8$。则

(i) 若 $n = 1$, $\Omega_1(G_1) = 2^{2k} + 2^{k+1} = \Omega_c(G_2)$ 且 $\Omega_c(G_1) = 2^{2k} - 2^{k+1} = \Omega_1(G_2)$; 若 $n \geqslant 2$, $\Omega_1(G_l) = 2^{2k+1} = \Omega_c(G_l)$。

(ii) $|V_*(FG_1)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, \text{ if } n = 1 \text{ or } n = 2 \text{ and } k \geqslant 2. \\ 4|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, \text{ otherwise.} \end{cases}$

$|V_*(FG_2)| = \begin{cases} 8|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, \text{ if } n = 1 \text{ and } k = 2. \\ 2|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, \text{ if } 1 \leqslant n \leqslant 2 \text{ and } k \geqslant 3. \\ 4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, \text{ otherwise.} \end{cases}$

证明。设 $G_l = \langle x_1, y_1\rangle \Y \langle x_2, y_2\rangle \Y \cdots \Y \langle x_k, y_k\rangle \Y \langle z\rangle$，其中 $k \geqslant 2$, $\langle x_2, y_2\rangle = H_l$, $\langle x_i, y_i\rangle \cong D_8$, $i = 3, \ldots, k$, $\langle z\rangle \cong \mathbb{Z}_{2^n}$ 且

$$\langle x_1, y_1 \mid x_1^{2^{m+1}} = y_1^2 = c^2 = 1, [x_1, y_1] = c\rangle \cong M_2(m+1,1,1).$$

(i) 对于任意 $g \in G$，我们可以令 $g = g_1 g_2$，其中 $g_1 = x_1^{i_1} y_1^{j_1} z^s$、 $0 \leqslant i_1 < 2^{m+1}$、 $0 \leqslant j_1 < 2$、 $0 \leqslant s < 2^{n-1}$ 以及 $g_2 \in \langle x_2$、y_2、……、x_k、$y_k\rangle$。如果 $g_1^2 = 1$，则 $x_1^{2i_1} y_1^{2j_1} z^{2s+2^{n-1}i_1 j_1} = 1$。因此 $i_1 = 0$ 或 2^m、 $j_1 = 0$ 或 1,

以及 $s=0$。如果 $g_1^2=c$，那么 $n\geqslant 2$ 和 $x_1^{2i_1}y_1^{2j_1}z^{2s+2^{n-1}(i_1j_1-1)}=1$。因此 $i_1=0$ 或 2^m，$j_1=0$ 或 1，且$s=2^{n-2}$。

(1) 若 $n=1$，则我们有 $\Omega_1(G_1)=8\gamma_1(k-1)=2^{2k}+2^{k+1}=\Omega_c(G_2)$ 且 $\Omega_c(G_1)=8\gamma_2(k-1)=2^{2k}-2^{k+1}=\Omega_1(G_2)$。

（2）如果 $n\geqslant 2$，那么我们有 $\Omega_1(G_l)=8\gamma_1(k-1)+8\gamma_2(k-1)=2^{2k+1}=\Omega_c(G_l)$。

(ii) 首先，我们考虑 $n=1$ 的情况。如果 $G_1\cong M_2$(2,1,1)，则 $\Omega_c(G_1)=\emptyset$。因此，$\Theta(G_1)=1$ 见引理 4.2。此外，

$$|V_*(FG_1)|=|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|+|\Omega_c(G_1)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_1)|.$$

注意到 $\overline{G}_1\cong\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{2^2}$。由此可得 $|V_*(FG_1)|=2|F|^{11}=2|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}$。

假设 $G_2\cong M_2(2,1,1)\curlyvee Q_8$。注意，群 $\langle 1+\sum_{g\in\widehat{c}\ \Omega(G_2)}\alpha_g g\widehat{G_2'}\in S_{G_2'},\alpha_g\in F\rangle$ 由以下元素生成

$$1+(\alpha^2+\alpha)x_2\widehat{G_2'},1+(\alpha^2+\alpha)y_2\widehat{G_2'},1+\alpha(x_2+y_2+x_2y_2)\widehat{G_2'},$$

$$1+\alpha(x_2+x_2g)\widehat{G_2'},1+\alpha(y_2+y_2g)\widehat{G_2'},1+\alpha(x_2y_2+x_2y_2g)\widehat{G_2'},$$

其中 $\alpha\in F,g\in\{x_1^2,y_1,y_1x_1^2\}$，分别根据引理 4.3 的 (i) 和引理 4.4 的 (ii)。因此

$$\Theta(G_2)=\frac{1}{4}|F|^{12}=\frac{1}{4}|F|^{\frac{\Omega_c(G_2)}{2}}.$$

根据引理 4.2，

$$|V_*(FG_2)|=\frac{4}{|F|^{\frac{|\Omega_c(G_2)|}{2}}}|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|+|\Omega_c(G_2)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_2)|=4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|-|\Omega_c(G_2)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_2)|.$$

注意 $\overline{G}_2\cong\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$。根据引理 2.3，我们有

$$|V_*(F\overline{G}_2)|=|\overline{G}_2^2[2]|\cdot|F|^{\frac{|\overline{G}_2|+|\Omega_1(\overline{G}_2)|}{2}-1}=2|F|^{23}.$$

因此 $|V_*(FG_2)|=8|F|^{35}=8|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}$。

对于其他情形，当 $n=1$, D_8 会出现在 G_l 的中心积中，其中 $l=1$，2。此时$\widehat{\ }$，根据引理 4.6，我们有 $1+\alpha gG_l'\in S_{G_l'}$。由此，根据引理 4.2，

$$|V_*(FG_l)|=|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|-|\Omega_c(G_l)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_l)|.$$

注意到 $\overline{G}_l\cong\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\mathbb{Z}_2^{(2k-1)}$。因此

$$|V_*(FG_1)|=2|F|^{2^{m+2k}+2^{2k-1}+2^k-1}=2|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}.$$

$$|V_*(FG_2)|=2|F|^{2^{m+2k}+2^{2k-1}-2^k-1}=2|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}.$$

假设 $n=2$ 且 $G_1\cong M_2(m+1,1,1)\curlyvee\mathbb{Z}_4$ 或 $G_2\cong M_2(m+1,1,1)\curlyvee Q_8\curlyvee\mathbb{Z}_4$。

由引理 2.3，我们有 $|V_*(F\langle z\rangle)|=2|F|^2$。据此，根据引理 4.2，$\Theta\langle z\rangle=\frac{1}{2}|F|$。注意，由于对任意 $\beta\in F$，$l=1,2$，均有 $(1+\beta z+\beta c)(1+\beta z+\beta c)^*\in S_{G_l'}$，因此 $\frown 1+(\beta^2+\beta)zG_l'\in S_{G_l'}$，这意味着 $\langle 1+\alpha z\widehat{G_l'}\in S_{G_l'},\alpha\in F\rangle$ 恰有 $\frac{1}{2}|F|$ 个元素。对于任意 $g\in\Omega_c(G_l)$，由引理 4.3 的 (i) 可知，对任意 $\alpha\in F$，我们有 $1+\alpha(z+g)\widehat{G_l'}\in S_{G_l'}$。因此 $\Theta(G_l)=\frac{1}{2}|F|^{|\Omega_c(G_l)|/2}$，其中 $l=1,2$。由引理 4.2，

$$|V_*(FG_l)|=2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|-|\Omega_c(G_l)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_l)|.$$

注意到 $\overline{G}_1\cong\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\mathbb{Z}_2^{(2)}$ 和 $\overline{G}_2\cong\mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times\mathbb{Z}_2^{(4)}$。因此

$$|V_*(FG_1)|=4|F|^{2^{m+3}+3}=4|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}.$$

$$|V_*(FG_2)| = 4|F|^{2^{m+5}+15} = 4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}.$$

对于其他情形，当 $n=2$, D_8 将出现在 G_l的中心积中，其中 $l=1,2$。此时，对于任意 $\alpha\in F$和 $g\in \Omega_c(G_l)$，由引理 4.6 可得 $1+\alpha g G_l'\in S_{G_l'}$。由此，根据引理 4.2 和 (i),

$$|V_*(FG_l)| = |F|^{\frac{|G_l|}{4}}\cdot |V_*(F\overline{G}_l)|.$$

注意，$\overline{G}_l\cong \mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times \mathbb{Z}_2^{(2k)}$。因此

$$|V_*(FG_l)| = 2|F|^{2^{m+2k+1}+2^{2k}-1} = 2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}.$$

若 $n\geqslant 3$, 则对于任意 $\alpha\in F$ 和 $g\in$， $1+\alpha g G_l'\in S_{G_l'}\Omega_c(G_l)$，由引理 4.7 可得。由此，根据引理 4.2,

$$|V_*(FG_l)| = |F|^{\frac{|G_l|}{4}}\cdot |V_*(F\overline{G}_l)|.$$

注意，$\overline{G}_l\cong \mathbb{Z}_{2^{m+1}}\times \mathbb{Z}_2^{(2k-1)}\times \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$。由此可得

$$|V_*(FG_l)| = 4|F|^{2^{n+m+2k-1}+2^{2k}-1} = 4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1}.$$

□

显然，根据引理 2.6，定理 3.10 的 (i) 和 (ii) 中的酉子群是定理 4.17 的特例。此外，容易得到与定理 4.17 类似的以下结果。

推论 4.18。设 $G_l\cong M_2(n+1,1,1)\rtimes H_l\rtimes D_8^{\rtimes(k-2)}\rtimes \mathbb{Z}_{2^m}$，其中 $n>m\geqslant 1$、$k\geqslant 2$ 和 $l=1,2$，$H_1\cong D_8$ 和 $H_2\cong Q_8$。则

$$|V_*(FG_1)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{if } m=1 \text{ or } m=2 \text{ and } k\geqslant 2.\\ 4|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$|V_*(FG_2)| = \begin{cases} 8|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{if } m=1 \text{ and } k=2.\\ 2|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{if } 1\leqslant m\leqslant 2 \text{ and } k\geqslant 3.\\ 4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

推论 4.19. 假设 $G_l\cong M_2(n+1,1,1)\rtimes H_l\rtimes D_8^{\rtimes(k-2)}\rtimes \mathbb{Z}_{2^{m+1}}$，其中 $n\geqslant m\geqslant 1$, $k\geqslant 2$ 和 $l=1,2$，$H_1\cong D_8$ 和 $H_2\cong Q_8$。那么

$$|V_*(FG_1)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{if } m=1 \text{ and } k\geqslant 2.\\ 4|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$|V_*(FG_2)| = \begin{cases} 2|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{if } m=1 \text{ and } k\geqslant 3.\\ 4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

定理 4.20. 假设 $G_l\cong H_l\rtimes D_8^{\rtimes(k-1)}\rtimes \mathbb{Z}_{2^{n_1}}\times \mathbb{Z}_{2^{m_1}}$，其中 n_1、m_1、$k\geqslant 1$ 和 $l=1$、2、$H_1\cong D_8$、$H_2\cong Q_8$。那么

(i) 若 $n_1=1$, $\Omega_1(G_1)=2^{2k+1}+2^{k+1}=\Omega_c(G_2)$ 且 $\Omega_c(G_1)=2^{2k+1}-2^{k+1}=\Omega_1(G_2)$；若 $n_1\geqslant 2$, $\Omega_1(G_l)=2^{2k+2}=\Omega_c(G_l)$, 其中 $l=1,2$。

$$(ii)\ |V_*(FG_1)| = \begin{cases} |F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{if } 1\leqslant n_1\leqslant 2,\ \ m_1=1.\\ 4|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{if } n_1\geqslant 3,\ m_1\geqslant 2.\\ 2|F|^{\frac{|G_1|+|\Omega_1(G_1)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$|V_*(FG_2)| = \begin{cases} 8|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{if } n_1=k=1,\ m_1\geqslant 2.\\ 4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \begin{array}{c}\text{if } n_1=m_1=k=1\\ \text{or } n_1=2, m_1\geqslant 2,\ k=1\\ \text{or } n_1\geqslant 3,\ m_1\geqslant 2.\end{array}\\ |F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{if } 1\leqslant n_1\leqslant 2, m_1=1,\ k\geqslant 2.\\ 2|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明。设 $G_l=\langle x_1,y_1\rangle \mathbf{Y}\ \langle x_2,y_2\rangle \mathbf{Y}\ \cdots \mathbf{Y}\ \langle x_k,y_k\rangle \mathbf{Y}\ \langle z_1\rangle\times\langle z_2\rangle$，其中 $k\geqslant 1$, $\langle x_1,y_1\rangle=H_l$, $\langle x_i,y_i\rangle\cong D_8, i=2,\ldots,k$, $\langle z_1\rangle\cong\mathbb{Z}_{2^{n_1}}$ 且 $\langle z_2\rangle\cong\mathbb{Z}_{2^{m_1}}$。

(i) 对于任意 $g\in G$，我们可令 $g=g_1g_2$，其中 $g_1=z_1^iz_2^j$、$0\leqslant i<2^{n_1-1}$、$0\leqslant j<2^{m_1}$，以及 $g_2\in\langle x_1、y_1、\ldots\ldots、x_k、y_k\rangle$。若 $g_1^2=1$，则 $z_1^{2i}z_2^{2j}=1$。因此，$i=0$、$j=0$ 或 2^{m_1-1}。若 $g_1^2=c$，则 $n_1\geqslant 2$ 和 $z_1^{2i}z_2^{2j}=z_1^{2^{n_1-1}}$。因此，$i=2^{n_1-2}$、$j=0$ 或 2^{m_1-1}。

(1) 若 $n_1=1$，则有 $\Omega_1(G_1)=4\gamma_1(k)=2^{2k+1}+2^{k+1}=\Omega_c(G_2)$，且 $\Omega_c(G_1)=4\gamma_2(k)=2^{2k+1}-2^{k+1}=\Omega_1(G_2)$。

(2) 如果 $n_1\geqslant 2$，那么我们有 $\Omega_1(G_l)=4\gamma_1(k)+4\gamma_2(k)=2^{2k+2}=\Omega_c(G_l)$。

(ii) 假设 $n_1=1$ 和 $G_2=Q_8\times\langle z_2\rangle$。注意，群 $\langle \sum_{g\in\ _c\ \Omega(G_2)}\alpha_g gG_2'\in S_{G_2'},\alpha_g\in F\rangle$ 是由以下元素生成

$$1+(\alpha^2+\alpha)x_1\widehat{G_2'},1+(\alpha^2+\alpha)y_1\widehat{G_2'},1+\alpha(x_1+y_1+x_1y_1)\widehat{G_2'},$$

$$1+\alpha(x_1+x_1z_2^{2^{m_1-1}})\widehat{G_2'},1+\alpha(y_1+y_1z_2^{2^{m_1-1}})\widehat{G_2'},1+\alpha(x_1y_1+x_1y_1z_2^{2^{m_1-1}})\widehat{G_2'},$$

其中 $\alpha\in F$，根据引理 4.3 的 (i) 和引理 4.4 的 (ii)。因此 $\Theta(G_2)=\frac{1}{4}|F|^6=\frac{1}{4}|F|^{\Omega_c(G_2)_2}$。此时，根据引理 4.2，$|V_*(FG_2)|=4|F|^{\frac{|G_2|-2^3}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_2)|$. 注意 $\overline{G}_2\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^{m_1}}$。因此

$$|V_*(FG_2)|=\begin{cases}4|F|^{2^{m_1+2}+1}=4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1},\ \text{if } m_1=1,\\ 8|F|^{2^{m_1+2}+1}=8|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1},\ \text{if } m_1\geqslant 2.\end{cases}$$

对于其他情形，当 $n_1=1$, D_8 出现在 G_l 的中心积中时。此时，对于任意 $\alpha\in F$ 和 $g\in\Omega_c(G_l)$，根据引理 4.6，我们有 $1+\alpha gG_l'\in S_{G_l'}$。由此，根据引理 4.2，

$$|V_*(FG_l)|=|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|-|\Omega_c(G_l)|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_l)|.$$

注意到 $\overline{G}_l\cong\mathbb{Z}_2^{(2k)}\times\mathbb{Z}_{2^{m_1}}$。因此

$$|V_*(FG_l)|=\begin{cases}|F|^{2^{2k+m_1}+2^{2k}+2^k\epsilon_l-1}=|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1},\ \text{if } m_1=1,\\ 2|F|^{2^{2k+m_1}+2^{2k}+2^k\epsilon_l-1}=2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1},\ \text{if } m_1\geqslant 2,\end{cases}$$

其中 $\epsilon_1=1$ 且 $\epsilon_2=-1$。

假设 $n_1=2$ 且 $G_2\cong Q_8\mathbf{Y}\ \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{2^{m_1}}$。与引理 4.17 的 (ii) 类似，我们有 $\Theta(G_2)=\frac{1}{2}|F|^{\Omega_c(G_2)_2}$。根据引理 4.2，$|V_*(FG_2)|=2|F|^{\frac{|G_2|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_2)|$. 注意到 $\overline{G}_2\cong\mathbb{Z}_2^{(3)}\times\mathbb{Z}_{2^{m_1}}$。因此

$$|V_*(FG_2)|=\begin{cases}2|F|^{2^{m_1+3}+7}=2|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1},\ \text{if } m_1=1,\\ 4|F|^{2^{m_1+3}+7}=4|F|^{\frac{|G_2|+|\Omega_1(G_2)|}{2}-1},\ \text{if } m_1\geqslant 2.\end{cases}$$

对于 $n_1=2$ 时的其他情况，根据引理 4.6，对于任意 $\alpha\in F$ 和 $g\in\Omega_c(G_l)$，我们有 $1+\alpha gG_l'\in S_{G_l'}$。由此，根据引理 4.2，$|V_*(FG_l)|=|F|^{\frac{|G_l|}{4}}\cdot|V_*(F\overline{G}_l)|.$。注意到 $\overline{G}_l\cong\mathbb{Z}_2^{(2k)}\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2^{m_1}}$。因此

$$|V_*(FG_l)|=\begin{cases}|F|^{2^{2k+m_1+1}+2^{2k+1}-1}=|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1},\ \text{if } m_1=1,\\ 2|F|^{2^{2k+m_1+1}+2^{2k+1}-1}=2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1},\ \text{if } m_1\geqslant 2.\end{cases}$$

假设 $n_1\geqslant 3$，由引理 4.6 可知，对于任意 $\alpha\in F$ 和 $g\in\Omega_c(G_l)$，有 $1+\alpha gG_l'\in S_{G_l'}$。由此可得

$$|V_*(FG_l)|=\begin{cases}2|F|^{2^{2k+n_1+m_1-1}+2^{2k+1}-1}=2|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1},\ \text{if } m_1=1,\\ 4|F|^{2^{2k+n_1+m_1-1}+2^{2k+1}-1}=4|F|^{\frac{|G_l|+|\Omega_1(G_l)|}{2}-1},\ \text{if } m_1\geqslant 2.\end{cases}$$

□

显然，由引理 2.6，定理 3.6 和 3.8 的 (ix) 和 (x)、定理 3.10 和 3.12 的 (iii) 和 (iv)、推论 3.13 和 3.14，以及定理 3.16 中的幺正子群，都是定理 4.20 的特殊情况。

Cor推论 4.21. 设 G 是一个由如下形式的中心扩张给出的非阿贝尔 2-群

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^m} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

且 $G' \cong \mathbb{Z}_2$、 $n \geqslant m \geqslant 1$。那么 $V_*(FG)$ 的阶可以被 $|F|^{\frac{1}{2}(|G|+|\Omega_1(G)|)-1}$ 整除。

证明. 根据引理 2.6 和 3.2，不妨不将初等阿贝尔 2-群视为 G 的直积因子。对于定理 3.6 中的类型，由定理 4.9、4.10、4.12、4.14、4.17 和 4.20 可知结论成立。对于定理 3.8 中的类型，由定理 4.11、4.16、4.20 以及推论 4.13 和 4.18 可知结论成立。对于定理 3.10 中的类型，由定理 4.17 和 4.20 可知结论成立。对于定理 3.12 中的类型，由定理 4.16 和 4.20 可知结论成立。对于推论3.13 中的类型，由推论 4.15 和定理 4.20 可知结论成立。对于推论 3.14 中的类型，由推论 4.19 和定理 4.20 可知结论成立。对于定理 3.16 中的类型，由定理 4.20 可知结论成立。

□

致谢 本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12171142）的资助。我们诚挚感谢审稿人付出的时间及提出的宝贵意见。

参考文献

1 Artamonov V A, Bovdi A A. 整群环：可逆元群与经典 K-理论. J Soviet Math, 1991, 57 (2): 2931–2958. 2 Balogh Z A. 群代数的酉子群. Int Electron J Algebra, 2021, 29: 187–198. 3 Balogh Z, Laver V. 特征 2 交换群代数的酉子群. Ukrainian Math J, 2020, 72(6): 871–879. 4 Balogh Z, Bovdi V. 模群代数酉子群的同构问题. Publ Math Debrecen, 2020, 97(1-2) : 27–39. 5 Balogh Z, Creedon L, Gildea J. 群代数中的对合与酉子群. Acta Sci Math(Szeged), 2013, 79(3-4): 391–400. 6 Blackburn S R. 导出子群为素数阶的素数幂阶群. J Algebra, 1999, 219: 625–657. 7 Bovdi A A, Sakach A A. 有限阿贝尔p-群的模群代数乘法群的酉子群. Mat Zametki, 1989, 45(6): 23–29. 8 Bovdi A A, Szak´acs A. 有限交换群代数单位群中酉子群的一组基. Publ Math Debrecen, 1995, 46(1-2): 97–120. 9 Bovdi V, Rosa A L. 模群代数酉子群的阶. Comm Algebra, 2000, 28(4): 1897–1905. 10 Creedon L, Gildea J. 群代数 $\mathbb{F}_{2^k}Q_8$ 的酉单位. Internat J Algebra Comput, 2009, 19(2): 283–286. 11 Gildea J. 群代数 $\mathbb{F}_{2^k}D_8$ 的酉单位的结构. Int Electron J Algebra, 2011, 9: 171–176. 12 Kaur K, Khan M. 模群代数中的单位. Comm Algebra, 2017, 45(3): 971–976. 13 Knus M A , Merkurjev A S , Rost M , et al. 对合之书. 美国数学会, 1998. 14 Novikov S P. 从哈密顿形式体系的观点出发，对带对合的环上 K-理论的厄米类比进行代数构造并研究其性质。其在微分拓扑和特征类理论中的应用。I. II. Math USSR-Izv, 1970, 4: 257–292. 15 Robinson D J S. 群论教程（第二版）. 纽约：施普林格出版社, 1996. 16 Serre J P. 特征 2 中的自对偶正规基与酉群. 变换群, 2014, 19(2): 643–698. 17 Wang Y L, Liu H G. 一类有限 p-群群代数的酉子群. J Algebra Appl, 2023, 22(2): 2350043(18 pages). 18 Xu M Y, Qu H P. 有限 p-群. 北京：北京大学出版社, 2010.