随机准一维模型的局域化

H. Boumaza

H. Boumaza，巴黎北索邦大学，*LAGA*，法国国家科学研究中心（*CNRS*），*UMR 7539*，*F-93430*，维勒塔讷兹，法国[a)]

（日期：2023年7月4日）

本文综述了不同随机算子族的安德森局域化结果，这些算子属于随机准一维模型的研究框架。我们首先从物理和数学两个角度回顾安德森局域化的含义。基于二维情形下的安德森-伯努利猜想，我们说明了引入准一维模型的理由。随后，我们介绍这些模型的不同类型：离散和连续情形下的薛定谔型模型、酉型模型、狄拉克型模型以及点相互作用型模型。在第二部分，我们介绍一维动力系统研究中的工具：传递矩阵形式、李雅普诺夫指数和 Furstenberg 群。接着，我们证明了一个适用于薛定谔型准一维模型的局域化判据，该判据仅涉及 Furstenberg 群的几何和代数性质。最后两节中，我们综述局域化结果，先讨论薛定谔型模型，再讨论酉型模型。每次我们都将局域化问题归结为对 Furstenberg 群的研究，并说明如何运用越来越精细的代数判据来证明该群所需的性质。本文介绍的所有薛定谔型准一维模型结果都包含伯努利随机性的情形。

arXiv:2305.05224v2 [math-ph] 3 Jul 2023

a)电子邮件：boumaza@math.univ-paris13.fr；由 ANR JCJC RAW 支撑

I. 安德森局域化与准一维模型

凝聚态物理研究具有晶体结构的固体，它告诉我们，电子分布在固体的所有原子之间。在平衡态下，泡利不相容原理指出，两个电子作为费米子，不能处于同一个量子态，这意味着固体中的所有电子不可能都处于基态。因此，最低能级会逐渐被填满，直至达到费米能级。当固体受到温度变化或电势作用时，一些电子会受到激发，其能量超过费米能级。这些电子在固体中散射，从而产生电子输运。

这种对电子输运的描述适用于晶体结构具有周期性、因而不含杂质的固体。然而，自然界中并不存在理想晶体，它们总是含有杂质。这些杂质的性质各不相同。例如，在晶格网络中可以观察到电离原子的存在；或者，如果晶体并非由完全相同的原子构成，而是由多种材料组成的合金，那么晶格网络就可能不再完全具有周期性，因为这里或那里会有一个原子不在正确的位置。最后，有些原子有时会偏离其在周期性晶格上的理想位置。在所有这些情况下，晶体的物理性质都会发生改变。

我们如何对晶体中的这些杂质及其对电子输运的影响进行建模？最早提出模型来解释无序对含有杂质的晶格中电子量子行为的影响的，是美国物理学家 Philip Warren Anderson[5]。通过在薛定谔方程中引入随机项，人们证明了两种新现象：安德森局域化，以及在维度3及以上存在的相变。

安德森局域化现象可以表述如下：在固定能量下，当晶体中的无序程度超过某一限度时，电子的扩散便会停止，任何受激电子都会被限制在一个局域区域内，而不会在晶体中扩散。晶体不再是导体，而会变成绝缘体。

安德森局域化的一种可能解释如下，采用波的观点：晶体中的每个受激电子都伴有一个波；电子每次与晶体中的杂质碰撞时，其伴随的波都会发生散射。人们会预

期，随着无序程度增加，平均自由程（电子两次碰撞之间行进的平均距离）会不断缩短。但实际情况并非如此。当杂质数量达到某个临界值后，电子的扩散会突然停止。这种突然停止发生在平均自由程短于电子波长时：如果波在完成第一个周期之前就已被散射，我们就很难再将其视为波了.....值得注意的是，局域化现象并不局限于量子力学的范畴。在其他波在无序介质中传播的情形下，也能观察到这一现象。例如光波、微波或声波。关于凝聚态物理的完整入门介绍，可参阅 Anderson 的经典著作[4]，或 Girvin 和 Yang 的较新著作[46]。若想进一步了解安德森局域化的物理方面，以及它如何出现在物理学的多个领域中，请参阅[9,21,57]。

Anderson 的论文[5] 还预测，只要晶格维数大于或等于 3，就会存在绝缘体-导体相变。无论晶体中的无序程度如何，都存在一个能量阈值：低于该阈值时会发生安德森局域化，高于该阈值时激发电子会发生散射。对于一维晶体，这种相变并不存在；对于二维晶体，人们推测也不存在相变：只要存在无序，无论能量为何，都会出现安德森局域化现象。因此，人们推测，对于安德森模型，存在一个临界维数——在此情形下为 3——系统的行为会因此发生剧烈变化。值得注意的是，数学上已充分证明一维情形不存在相变，但二维情形仍是一个尚未解决的猜想。在从数学角度介绍安德森模型之后，我们将再回到这一问题。

Anderson 最初的想法是，认为晶体中原子的电荷是一个˜ ˜ ˜随机变量。更准确地说，设 (Ω $\mathcal{A}$,P) 为一个完备概率空间，并令

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) = \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\Omega}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathcal{A}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathsf{P}} \right). \tag{1}$$

我们将 Ω 的坐标 ω_n $\omega \in$ 视为 (˜Ω $\tilde{\mathcal{A}}$, ˜P) 上的随机变量 $\omega^{(n)}$ $\omega^{(n)}$，例如表示位置 $n \in \mathbb{Z}^d$处原子的电荷。

Anderson 的想法促使我们考虑在 for 的点 x 处感受到的势 m

$$\forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^d,\ V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega^{(n)} f(x-n).$$

$\omega^{(n)}$ 原则上只能取有限多个值，但我们也可以考虑 $\omega^{(n)}$ 服从连续分布的情形，从数学角度来看这更简单。我们还假设 $\{\omega^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 是一族独立同分布（简称$i.i.d.$）随机变量。

这一思路引出了随机薛定谔算子族的定义：

$$\forall \omega \in \Omega,\ H_\omega = -\Delta_d + V_{\mathrm{per}} + \lambda V_\omega, \tag{2}$$

它作用于空间 $L^2(\mathbb{R}^d)$，并在 Sobolev 空间 $H^2(\mathbb{R}^d)$上自伴，其中 Δ_d 是维数为 d时通常的拉普拉斯算子， Vper是由一个 $\mathbb{Z}^d$-周期函数定义的乘法算子， V_ω 是由上文引入的函数 V_ω 定义的乘法算子，而 λ 是一个衡量无序强度的正实数。算子族$\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 称为**连续安德森模型**。

这一模型的离散类比为：

$$\forall \omega \in \Omega, \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \forall n \in \mathbb{Z}^d,\ (h_\omega u)_n = -\sum_{||m-n||_1=1} u_m + \lambda \omega^{(n)} u_n, \tag{3}$$

它作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$，且对所有 $n=(n_1, \ldots\ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$， $||n||_1 = |n_1| + \cdots + |n_d|$。同样， λ 是一个衡量无序强度的正实数。算子族$\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 称为**离散安德森模型**。

我们已经注意到，这两类随机算子具有 $\mathbb{Z}^d$-遍历性。对于$\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$而言，这与势 V_ω的特定形式有关。更确切地说， $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的$\mathbb{Z}^d$-遍历性源于对随机变量族 $\{\omega^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 所作的独立同分布 假设，以及单点势 f 的各个平移的支撑彼此不重叠这一事实。

我们简要回顾一下随机算子族这一性质的定义。设 Γ

是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个格点（通常为 $\mathbb{Z}^d$）。设 (Ω $\mathcal{A}$,P) 是一个完备的概率空间，且 $\{\tau_i\}_{i\in\Gamma}$ 是一群保持测度 P 不变的可测变换。当对于所有 $i \in \Gamma$ 都有 $\tau_i^{-1}A = A$ 时，集合 $A \in \mathcal{A}$ 被称为在 $\{\tau_i\}_{i\in\Gamma}$ 的作用下不变。于是，如果任意不变集的测度都为零或一，则称 $\{\tau_i\}_{i\in\Gamma}$ 是 Γ-遍历的。

定义1。若存在一个遍历变换群 $\{\tau_i\}_{i\in\Gamma}$ 和一族酉算子 $\{U_i\}_{i\in\Gamma}$ ，使得：则称自伴 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 可测族是 Γ-遍历的。

$$\forall i \in \Gamma,\ \forall \omega \in \Omega,\ H_{\tau_i\omega} = U_i H_\omega U_i^*.$$

遍历性的有趣之处在于，对于任意 $\omega \in$ Ω和任意 $i \in \Gamma$，$\sigma(H_{\tau_i\omega}) = \sigma(H_\omega)$，借助 Pastur定理[70] (推论1)，可知存在一个确定性集合，它几乎必然等于P意义下的 H_ω 谱。这个确定性集合称为该族的几乎必然谱 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ，记作 Σ。更确切地说，Kunz和 Souillard的一项结果[65] (定理IV.2)指出，对于遍历的自伴算子族，其纯点谱、奇异连续谱和绝对连续谱几乎必然与 ω 无关（另见[60] (定理1)）。这些几乎必然谱分别记为 Σ_{pp}、Σ_{sc} 和 Σ_{ac} 。

不同类型的几乎必然谱的存在，对于证明这些谱性质几乎必然不依赖于 ω 、适用于族$\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 和 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 至关重要，并由此引出了安德森局域化的第一个定义。

对于一族随机算子的安德森局域化现象，有几种不同的数学定义。回顾一下，(Ω $\mathcal{A}$, P) 表示一个完备概率空间，并且我们考虑一族定义在希尔伯特空间上的自伴随机算子 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ；连续情形下，该空间为 $L^2(\mathbb{R}^d)$，离散情形下则为 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$。

定义 2。设 I 为 $\mathbb{R}$的一个区间。若对几乎每个$\omega \in$Ω（相对于P），算子 H_ω 在 I 中的谱非空且为纯点谱，则称族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 在 I 中**谱局域**。

第一个定义表明，对于几乎所有的 $\omega \in$ Ω， H_ω 在 I中没有连续谱。由此，R.A.G.E. 定理（见[2,74]）保证 H_ω不存在扩散态，而且这对 ω几乎必然成立。但这并未清楚说明与 ω 中的特征值相关联的

特征函数的行为。为此，我们将给出第二个定义，它更加精确，也更能体现局域态的概念，而不仅仅是非扩散态。

定义 3. 设 I 是 $\mathbb{R}$的一个区间。若几乎必然谱 Σ 的族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 具有**在 I 中的安德森局域化**性质，则称其满足：

1. $\Sigma\cap I\neq\emptyset$ 和 $\Sigma\cap I=\Sigma_{\mathrm{pp}}\cap I$；*2.* 与 $\Sigma\cap I$ 中的特征值相对应的特征函数在无穷远处指数衰减至0 。

注意，若 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 在 I中表现出安德森局域化，P-几乎必然地， H_ω 的点谱在 $\Sigma\cap I$ 中稠密。这一现象与在原子或分子层面，或在没有无序的周期介质中观察到的谱相比，相当令人惊讶。例如氢原子的谱通常表现为孤立的特征值，并最终带有一个绝对连续分量。周期势满足合理假设（见[73]）的周期薛定谔算子具有纯绝对连续的带谱，不含特征值。获得稠密特征值集这一现象，主要见于存在无序的模型中，无论这种无序像这里一样是随机的，还是例如出现在拟周期算子中。

刚才给出的安德森局域化定义是一个静态定义，只涉及哈密顿量 H_ω ，而不涉及相关的单参数群。下面的定义则考虑了波包随时间演化的动力学。记 Σ 为连续情形下 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的几乎必然谱，或离散情形下 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的几乎必然谱。

定义 4。设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间。当满足以下条件时，我们称族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ （分别地，$\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$）在 I 中是**动力学局域化的**：

1. $\Sigma\cap I=\emptyset$,

2。对于每个紧区间 $I_0\subset I$、每个 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 以及每个 $p\geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}||(1+|\cdot|^2)^{\frac{p}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_\omega}\mathbf{1}_{I_0}(H_\omega)\psi||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)<+\infty \tag{4}$$

其中， $\mathbf{1}_{I_0}(H_\omega)$ 表示与 H_ω 相关联的 I_0 上的谱投影算子， $\mathbb{E}$ 表示相对于概率测度 P 取的期望；

分别地，对于每个 $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 和每个 $p \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} || \ (1+||\cdot||_1)^p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}th_\omega} \mathbf{1}_I(h_\omega)u||^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}\right) < +\infty \tag{5}$$

定义 4 本质上是动态的，追踪波包随时间的演化。它告诉我们，薛定谔方程的解在空间中局限于其初始位置附近，并且这一性质在时间上是一致的。这反映了量子输运的缺失。

需要指出的是，动力学局域化意味着安德森局域化[35,80]。还可以定义更强的局域化概念。关于这些概念的全面介绍，请参阅[38] 由 Abel Klein 撰写的第三部分。

回顾一下，安德森模型之所以受到积极研究，是因为它涉及两个重要猜想：其一，在大于或等于 3 维的情形下存在绝缘体-导体相变；其二，在一维或二维中不存在这种相变。

从数学角度来看，尽管自 20 世纪 70 年代末以来学界一直持续努力，但对于这些猜想，我们得到的答案相当有限。安德森模型的谱的性质并不容易确定。事实上，如果拉普拉斯算子具有纯绝对连续谱，那么乘以 V_ω 的乘法算子在离散情形下是一个对角随机矩阵，因此其谱是离散的。当我们考察这两个算子之和的谱时，这两种效应会相互抵消。许多数学结果具有微扰性质，并包含一个用于衡量 V_ω 项前面阶数大小的系数。当这一参数较大时，随机势会压倒拉普拉斯算子，因此初步看来会出现局域化。当这一参数较小时，情况则相反。直观地说，阶数越大，出现局域态的可能性就越高。

标量值算子维数 $d = 1$ 的情形是迄今为止唯一得到彻底解决的情形：无论式（2）和（3）中出现的随机变量 $\omega^{(n)}$ 的共同分布如何，也无论无序参数 $\lambda > 0$取何值，在离散情形下，所有能量都会发生局域化[29,65] ；在连续情形下，除一个离散集外，所有能量都会发生局域化[34]。我们将在第 IV节更详细地介绍这些结果。

维度为 $d = 2$ 的情形较为特殊。我们将讨论限制在

安德森-伯努利算子。人们猜想，无论无序参数取何值，所有能量下都会发生局域化，就像维度为 $d = 1$时一样。然而，也有可能谱在所有能量下仍为纯点谱，但特征函数在较高能量处不再呈指数衰减，并因此像朗道哈密顿量的情形那样，在量子输运层面引发相变[45]。目前唯一已知的是，在连续情形下，谱底部会发生局域化，适用于 $d \geq 1$任意[20]；而在离散情形下，适用于 $d = 2$[37] 和 $d = 3$[66]。

对于二维安德森-伯努利模型，所有能量下的局域化问题极其困难，难以直接处理。最初可行的简化方案是，不考虑整个平面上的安德森模型，而只考虑连续带上的模型。

采用（1）中引入的记号，考虑作用于 $L^2(\mathbb{R} \times [0,1]) \otimes \mathbb{C}$ 上的算子，并定义如下：对于每个 $\omega \in \Omega$,

$$H_{cs,\omega} = -\Delta_2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega^{(n)} V(x-n, y), \tag{6}$$

在 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 和 $\mathbb{R} \times \{1\}$ 上施加狄利克雷边界条件，且 V 支撑于 $[0,1]^2$ 中。

对于 $\{H_{\mathrm{cs},\omega}\}_{\omega\in\Omega}$，所有能量下的局域化问题与研究 $\mathbb{R}^2$ 上的安德森-伯努利算子时遇到的困难相当，这是因为这两个问题都与偏微分方程理论有关，因此无法借助一维特有的工具来处理。

然而，借助 $\{H_{\mathrm{cs},\omega}\}_{\omega\in\Omega}$，我们可以沿着带状区域有界的方向 $[0,1]$ 进行离散化。为此，我们对第二个变量作傅里叶变换，从而考察一个沿一个方向连续、沿另一个方向离散的连续模型，因此该模型作用于空间 $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$，而非 $L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$。形式上，我们由此将问题化为一个一维连续安德森算子，其势是一个无限维矩阵。当然，这个模型本质上仍是二维模型。为了将其转化为一维模型，我们将第二个变量的傅里叶频率限制在一个有界区间内，从而将矩阵势限制为有限维。这样便得到一个一维安德森模型，其势是一个维数任意但有限的矩阵。它作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$，其中 $D \geq 1$ 是一个整数。这样，最初的偏微分方程问题就转化为一个微分系统问题，我们将能够

运用一维 动力系统的技术，例如传递矩阵和李雅普诺夫指数。我们希望由此能够得到这个矩阵值一维模型的局域化，并且局域化区间和局域化长度至多与 D无关；至少在最坏的情况下，当 D 趋于无穷时，能够对这些量进行良好的控制。然而，如果考察谱底部积分态密度的行为，[18] 中证明了它具有 Lifschitz 尾行为，且 Lifschitz 指数与D无关。因此，从这个角度来看，这种近似方法是否有望奏效仍不清楚。

对其势函数为矩阵的一维安德森-伯努利模型的研究，属于一个更一般的理论框架。

定义 5. 令 $D \geq 1$ 为一个整数，且 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ 为一个完备概率空间。我们将作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$（离散模型）或 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$（连续模型）并由 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ 索引的任意可测算子族称为**随机准一维模型**。

这种定义也可以转用于作用在 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$ 或$L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$ 上的任意算子，或者作用在这些空间上并依赖于频率参数的拟周期算子族等。我们选择只考虑随机情形，因为接下来我们只会处理这种情形。

一个随机准一维模型可以看作作用于 D 个 $\mathbb{Z}$ 的副本（离散情形）或 D 个 $\mathbb{R}$ 的副本（连续情形）。下文研究的模型将通过非对角矩阵值势耦合这些 D 个副本。这意味着，这些准一维模型不会平凡地约化为有限个标量值一维模型的直和。

准一维模型这一概念的定义涵盖了大量可能的情形。其中，我们列举四种模型。

1. **薛定谔型**：在离散情形中，算子作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$，其形式为

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (h_\omega u)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + \lambda V_{\omega^{(n)}} u_n$$

其中 λ 是一个正实数，$(V_{\omega^{(n)}})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是在 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ 上取值于 $D \times D$ 阶对称矩阵空间的一列独立同分布随机变量。

在连续情形中，算子作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$，形式如下

$$H_\omega = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_{\mathrm{D}} + V_{\mathrm{per}} + \lambda V_\omega$$

其中，λ 是一个正实数，V_{per} 是周期性相互作用势，V_ω 是随机势，二者的取值都属于大小为 $D \times D$ 的正则对称矩阵空间。薛定谔型包括离散型和连续型安德森模型。

2. **酉型**：包括酉随机矩阵作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$ 的情形，特别是 CMV 矩阵、酉安德森模型或圆柱体上的 Chalker-Coddington 模型。此外，还包括随机散射拉链模型。该模型定义如下：设 $\mathbb{U}_\omega = \mathbb{V}_\omega \mathbb{W}_\omega$，其中

$$\mathbb{V}_\omega = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & S_{\omega^{(0)}} & & \\ & & S_{\omega^{(2)}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \circ s_g^D, \qquad \mathbb{W}_\omega = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & S_{\omega^{(-1)}} & & \\ & & S_{\omega^{(1)}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

s_g 是向左的移位算子（$(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (v_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$），而 $S_{\omega^{(n)}}$ 是酉群 $U(2D)$ 中具有以下特殊形式的酉矩阵

$$S_{\omega^{(n)}} = \begin{pmatrix} \alpha & \rho(\alpha) U_{\omega^{(n)}} \\ V_{\omega^{(n)}} \tilde{\rho}(\alpha) & -V_{\omega^{(n)}} \alpha^* U_{\omega^{(n)}} \end{pmatrix}, \ \rho(\alpha) = (\mathrm{Id}_{\mathrm{D}} - \alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}, \ \tilde{\rho}(\alpha) = (\mathrm{Id}_{\mathrm{D}} - \alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}}, \ ||\alpha\alpha^*|| < 1.$$

关于 $(U_{\omega^{(n)}}, V_{\omega^{(n)}})_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 α 的确切假设将在第 V节中给出。

3. **狄拉克型**：算子作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$，形式如下

$$D_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \otimes I_{\mathrm{D}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \otimes I_{\mathrm{D}} & 0 \end{pmatrix} + V_{\mathrm{per}} + \lambda V_\omega$$

其中 $\lambda > 0$, V_{per} 是周期势，由张量积泡利矩阵的线性组合构成，形式为 $V_{\mathrm{per}} = (\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \mathrm{I}_2) \otimes \hat{V}_{\mathrm{per}}$，其中 $\hat{V}_{\mathrm{per}}$ 是一个取值为实对称矩阵的周期函数。

随机势具有如下形式 $V_\omega = (\beta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \mathrm{I}_2) \otimes \hat{V}_\omega$ 其中 $\hat{V}_\omega = \mathrm{diag}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_1^{(n)} f_1(\cdot - n) \ldots, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_D^{(n)} f_D(\cdot - n)\right)$ 和 $f_1, \ldots, f_D$ 支撑在 $[0, 1]$ 中。序列 $(\omega_1^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}, \ldots, (\omega_D^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ 上的随机变量序列。这些序列假设彼此独立。

4. 点相互作用型：形式上，这类模型由以下随机薛定谔算子族表示：

$$\forall \omega \in \Omega,\ H_{P,\omega} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_{\mathrm{D}} + V_{\mathrm{per}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1\omega_1^{(n)}\delta_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_D\omega_D^{(n)}\delta_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

作用于 L^2（$\mathbb{R}$）$\otimes\mathbb{C}^D$。数值 c_1、……、c_D 是非零实数，δ_n 是位于 $n \in \mathbb{Z}$ 处的狄拉克分布，而 V_{per} 是由一个取值于实对称矩阵的周期函数定义的乘法算子。数列（$\omega_1^{(n)}$）$_{n\in\mathbb{Z}}$、……、（$\omega_D^{(n)}$）$_{n\in\mathbb{Z}}$ 是在完备概率空间（Ω $\mathcal{A}$，P）上定义的随机变量序列。假设这些序列彼此独立。这是点相互作用模型的矩阵值版本，该模型在标量值情形中由[10]引入。

由于狄拉克分布的存在，$H_{P,\ \omega}$ 算子在（7）中的定义是形式化的。因此，有必要像[3]中那样给出精确定义。对所有 $\omega \in$Ω，定义：

$$H_{P,\omega} = \bigoplus_{i=1}^{D} H_{\omega_i} + V_{\mathrm{per}} \tag{8}$$

作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$。对于每个 $i \in \{1,\ldots,D\}$，H_{ω_i} 通过以下方式作用于 $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$：$H_{\omega_i} f = -f''$ 对于定义域中的 f：

$$D(H_{\omega_i}) = \{f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid f, f' \text{在 } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f'' \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ 上绝对连续},$$
$$f \text{ is continuous on } \mathbb{R},\ f'(n^+) = f'(n^-) + c_i\omega_i^{(n)} f(n) \text{ for every } n \in \mathbb{Z}\},$$

其中，假设在任意整数点 n 处，左导数 $f'(n^-)$ 和右导数 $f'(n^+)$ 均存在。

离散或连续的薛定谔型模型描述了一维层中的电子输运，这些层先验地彼此相互作用。电子可以从一层跃迁到另一层，并且在每一层上，它在每个整数点处都可能遇到杂质，也可能不会遇到。

为了研究准一维随机模型中的安德森局域化，可以采用专用于一维的动力系统技术：传递矩阵形式体系和李雅普诺夫指数。在下一节中，我们将在薛定谔型准一维随机模型的框架下介绍这些工具。

II. 李雅普诺夫指数与 Furstenberg 群

要探讨准一维薛定谔型模型的安德森局域化问题，我们可以从考察这类模型中特征函数指数增长的条件入手。由此，我们需要研究二阶线性方程的渐近行为：在离散情形下是有限差分方程，在连续情形下则是微分方程。

设 $D \geq 1$ 和 $E \in \mathbb{R}$。在离散薛定谔情形中，我们研究满足以下条件的序列 $u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$ 的指数渐近行为：

$$h_\omega u = Eu \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ -(u_{n+1} + u_{n-1}) + \lambda V_{\omega^{(n)}} u_n = E u_n. \tag{9}$$

在连续薛定谔情形中，我们研究满足以下条件的函数 $u \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$ 的渐近指数行为：

$$H_\omega u = Eu \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ -u''(x) + (V_{\mathrm{per}} + \lambda V_\omega)(x) u(x) = E u(x). \tag{10}$$

我们并不是要寻找 u 在无穷远处的精确等价式，而只是想知道 u 的渐近行为是否类似于指数函数。这一观察使我们能够将研究 $+\infty$（分别为 $-\infty$）中 u 的指数渐近行为，归结为研究从位置 n 到位置 $n+1$（分别从 $-n$ 到 $-n-1$）的连续跃迁，其中 n 为任意自然数。这引出了传递矩阵的概念，并可应用将二阶线性方程转化为一阶系统的思想。

首先，在离散情形下，方程（9）等价于以下系统

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda V_{\omega^{(n)}} - E & -\mathrm{I_D} \\ \mathrm{I_D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}$，令：

$$T_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} \lambda V_{\omega^{(n)}} - E & -\mathrm{I_D} \\ \mathrm{I_D} & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

矩阵 $T_{\omega^{(n)}}(E)$ 称为从 n 到 $n+1$ 的**传递矩阵**。序列 $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中的随机矩阵序列；$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 是阶数为 D 的辛群。辛群 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL_{2D}}(\mathbb{R})$ 的子群，由满足 ${}^tMJM = J$ 的矩阵 M 构成，其中 J 是由 $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_D \\ I_D & 0 \end{pmatrix}$ 定义的 $2D \times 2D$ 阶矩阵。此外，如果我们

假设 $(V_{\omega^{(n)}})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一列相互独立且独立同分布的随机变量，那么序列 $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ 也是如此。

迭代（11）后， $+\infty$ 中的（u_n）$_{n\in\mathbb{Z}}$ 的渐近行为归结为乘积$T_{\omega^{(n)}}$（E）$\cdots T_{\omega^{(0)}}$（E）的渐近行为，而在 $-\infty$中，则归结为乘积（$T_{\omega^{(-n+1)}}$（E））$^{-1}\cdots$（$T_{\omega^{(-1)}}$（E））$^{-1}$所决定的渐近行为

$$\forall n \geq 0,\ \left(\begin{smallmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{smallmatrix}\right) = T_{\omega^{(n)}}(E)\cdots T_{\omega^{(0)}}(E)\left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{smallmatrix}\right) \tag{13}$$

and

$$\forall n < 0,\ \left(\begin{smallmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{smallmatrix}\right) = (T_{\omega^{(-n+1)}}(E))^{-1}\cdots(T_{\omega^{(-1)}}(E))^{-1}\left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{smallmatrix}\right). \tag{14}$$

在连续情形下，方程（10）等价于微分系统

$$\left(\begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I_D} \\ V_{\mathrm{per}}+\lambda V_\omega - E & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix}\right). \tag{15}$$

于是，对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，我们引入从**传递矩阵**从 n 到 $n+1$，仍记作 $T_{\omega^{(n)}}$（E），它将系统（$\left(\begin{smallmatrix} u \\ u' \end{smallmatrix}\right)$）的一个解15在时刻 n 映射为时刻 $n+1$的解。因此，对每个$T_{\omega^{(n)}}$（E），传递矩阵 $n\in\mathbb{Z}$由以下关系定义

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u'(n+1) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E)\begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

由于$T_{\omega^{(n)}}(E)$是在时刻1的一个一阶哈密顿系统的解，$T_{\omega^{(n)}}(E)$属于$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$。此外，我们假设过程$(V_{\omega^{(n)}})_{n\in\mathbb{Z}}$满足：$(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$是$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$中的一列独立同分布的随机矩阵。

因此，在离散和连续情形下，我们需要研究一列独立同分布的$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$随机矩阵的渐近行为。更准确地说，我们引入余圈$\Phi_E$：$\mathbb{Z}\times\Omega\to\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$，其对每个 $E\in\mathbb{R}$ 定义为:

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall\omega\in\Omega,\ \Phi_E(n,\omega) = \begin{cases} T_{\omega^{(n-1)}}(E)\cdots T_{\omega^{(0)}}(E) & \text{if}\quad n>0 \\ I_D & \text{if}\quad n=0 \\ (T_{\omega^{(n)}}(E))^{-1}\cdots(T_{\omega^{(-1)}}(E))^{-1} & \text{if}\quad n<0 \end{cases} \tag{17}$$

现在，我们定义与其相关的正无穷和负无穷处的主李雅普诺夫指数

余圈 Φ_E。

定义 6。 以下极限存在且属于 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$：

$$\gamma^+(E)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}(\log||\Phi_E(n,\cdot)||)\quad and\quad \gamma^-(E)=\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{|n|}\mathbb{E}(\log||\Phi_E(n,\cdot)||)\tag{18}$$

我们称它们为与余圈 Φ_E 相关的 $\pm\infty$ 中的主李雅普诺夫指数。

根据有限维空间中范数的等价性，$\gamma^+(E)$ 和 $\gamma^-(E)$ 不依赖于 $\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$ 上的范数选择。(18) 中的极限存在源于序列 $(\mathbb{E}(\log||\Phi_E(n,\cdot)||))_{n\in\mathbb{Z}}$ 的次可加性。

事实证明，主李雅普诺夫指数也可以作为几乎处处成立的极限获得，而不仅仅是期望意义下的极限。这正是富斯滕伯格-Kesten 定理的研究对象[41]，该定理可以通过直接证明得到[11,]，也可以看作次可加遍历 Kingman 定理的推论[59]。

主李雅普诺夫指数不为零时，可以帮助我们理解随机矩阵序列的整体指数渐近行为。然而，它无法让我们更细致地研究序列 $||\Phi_E(n,\omega)v||$ 对任意向量 $v\in\mathbb{R}^D$ 的渐近行为。事实上，空间 $\mathbb{R}^D$ 被分解为若干子空间，在这些子空间中，指数动力学由一族李雅普诺夫指数给出。

定义 7. 与余圈 Φ_E 相关的李雅普诺夫指数 $\gamma_1^{\pm}(E)\ldots,\gamma_D^{\pm}(E)$ 由 $\gamma_1^{\pm}(E)=\gamma^{\pm}(E)$（主导李雅普诺夫指数）以及对 $p\in\{2,\ldots,D\}$ 的情形归纳定义，

$$\sum_{i=1}^{p}\gamma_i^{\pm}(E)=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{|n|}\mathbb{E}(\log||\wedge^p\Phi_E(n,\cdot)||)$$

其中 $\wedge^p$ 表示矩阵 $\Phi_E(n,\cdot)$ 的 p 次外幂（参见[11]）。

我们看到，求和项 $\sum_{i=1}^{p}\gamma_i^{\pm}(E)$ 实际上是余圈 $\wedge^p\Phi_E$ 的主导李雅普诺夫指数，其中 p 变化。因此，这些极限存在，且这些求和项属于 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。我们根据矩阵 $\Phi_E(n,\omega)$ 的奇异值序列，也就是矩阵 ${}^t\Phi_E(n,\omega)\Phi_E(n,\omega)$ 的特征值平方根，给出这些李雅普诺夫指数的刻画。

命题 1。 如果对于 $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1(n,E,\omega) \geq \ldots \geq \lambda_D(n,E,\omega) > 0$ 是 $\Phi_E(n,\omega)$的奇异值，那么，对于 P-几乎每个 $\omega \in \Omega$,

$$\forall p \in \{1,\ldots,D\},\ \gamma_p^{\pm}(E) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|}\mathbb{E}(\log \lambda_p(n,E,\cdot)) = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|}\log \lambda_p(n,E,\omega)$$

特别是，这个命题说明了李雅普诺夫指数的编号方式以及“主导李雅普诺夫指数”这一术语是合理的，因为它意味着 $\gamma_1^{\pm}(E) \geq \cdots \geq \gamma_D^{\pm}(E)$。证明见[11] 或见[6]。

由于余圈 Φ_E 的取值属于 $\mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$，我们还可得到两个性质。首先，所有李雅普诺夫指数都是有限的，而且，

$$\forall n < 0,\ \mathbb{E}(||\Phi_E(n,\cdot)||) = \mathbb{E}(||(\Phi_E(-n,\cdot))^{-1}||) = \mathbb{E}(||\Phi_E(-n,\cdot)||)$$

并且 $\gamma^-(E) = \gamma^+(E)$。类似地，对于任意 $i \in \{1,\ldots,2D\}$, $\gamma_i^-(E) = \gamma_i^+(E)$。事实上，第一个等式源于 Ω 上的移位保持乘积测度这一事实（这也可由传递矩阵具有独立同分布这一更强假设推出；若缺少平稳性，该等式便不成立），第二个等式则源于辛矩阵的范数等于其逆矩阵的范数这一事实。因此，在下文中，我们将不加区分地省略指数 $+$和 $-$。

第二个性质是对称性。若 Φ_E 对应的李雅普诺夫指数为 $\gamma_1(E) \geq \ldots \geq \gamma_{2D}(E)$，则对于每个 $i \in \{1,\ldots,D\}$, $\gamma_{2D-i+1} = -\gamma_i$.

对称性的这一性质告诉我们，与独立同分布辛随机矩阵序列相关的李雅普诺夫指数可以两两配对，且每对指数互为相反数，因此只需研究前 D 个指数，即 $\gamma_1(E)\ldots,\gamma_D(E)$。特别是，如果李雅普诺夫指数互不相同，那么根据对称关系，前 D 个指数严格为正，接下来的 D 个指数严格为负：

$$\gamma_1(E) > \cdots > \gamma_D(E) > 0 > \gamma_{D+1}(E) > \cdots > \gamma_{2D}(E).$$

根据奥塞德茨定理[69]，主导李雅普诺夫指数在不为零时，给出了方程（9）或（10）的解在某个方向上的指数衰减率。因此，为了证明 h_ω 或 H_ω的特征函数指数衰减，应首先考察李雅普诺夫指数是否非零。在讨论

正性　　关于李雅普诺夫指数，首先让我们回顾一下这种正性意味着什么　　.

为简化讨论，我们考虑 $D = 1$ 标量值算子的情形。在这种情形下，我们陈述一个由 Ruelle 提出的奥塞德茨定理的简单确定性形式[75]。

定理 1 （SL_2（$\mathbb{R}$））。 设（T_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是SL_2（$\mathbb{R}$）中的一个序列，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln||T_n|| = 0 \ and\ \gamma = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(||T_n\cdots T_1||) > 0.$$

那么存在一个维数为1 的子空间 $V_- \subset \mathbb{R}^2$，使得

1. $\forall v \in V_-,\ v \neq 0, \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(||T_n\cdots T_1 v||) = -\gamma.$
2. $\forall v \notin V_-, \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(||T_n\cdots T_1 v||) = \gamma.$

我们将定理1 应用于 $D = 1$ 和 $n > 0$的传递矩阵序列。假设 $E \in \mathbb{R}$ 满足 γ（E） > 0。根据SL_2（$\mathbb{R}$）中的奥塞德茨定理，几乎必然仅存在指数增长解或指数衰减解，满足方程 $h_\omega u = Eu$ 或 $H_\omega u = Eu$。只有在初始条件为 $+\infty$时，才会得到（在$v_{+\infty} \in V_-^+$中的）指数衰减解。任何其他初始条件都会在 $+\infty$中产生指数增长解。

同样根据奥塞德茨定理，在 $-\infty$ 中，只有对于初始条件 $v_{-\infty} \in V_-^-$，才存在指数增长的解。因此，要在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 或 $L^2(\mathbb{R})$ 中得到一个特征向量，必须有 Span($v_{+\infty}$) = Span($v_{-\infty}$)，而这并非先验成立。

还必须注意，我们刚才所述的结论取决于E。如果 E 在一个不可数集合中变化（例如，一个 $\mathbb{R}$区间），那么对于某些测度非零的 $\omega \in \Omega$，任意 E 对应的李雅普诺夫指数都可能并非严格为正。例如，不能说对于任意 E， $h_\omega u = Eu$ 或$H_\omega u = Eu$ 的任意解几乎必然都指数增长或指数衰减。这需要进一步分析。不过，利用 Kotani理论，这已经意味着几乎处处绝对连续谱不存在。对于 $S \subset \mathbb{R}$，用 $\overline{S}^{\mathrm{ess}}$ 表示其本质闭包；对于 $j \in \{1,\ldots,D\}$，定义

$$Z_j = \{E \in \mathbb{R} \mid \exists\, l_1,\ldots,l_{2j} \in \{1,\ldots,2D\},\ \gamma_{l_1}(E) = \cdots = \gamma_{l_{2j}}(E) = 0\}.$$

于是，我们得到由 Kotani 和 Simon 提出的、针对准一维薛定谔算子的 Ishii–Pastur 定理推广。

定理 2(Kotani-Simon[64])。 *1.* 集合 Z_j 是重数为 $2j$ 的绝对连续谱的本质支撑。

2. 不存在奇数重数的绝对连续谱。

3. 我们有

$$\Sigma_{\mathrm{ac}} = \overline{Z_D}^{\mathrm{ess}} = \overline{\{E \in \mathbb{R} \mid \gamma_1(E) = \cdots = \gamma_{2D}(E) = 0\}}^{\mathrm{ess}}.$$

特别地，这意味着，若对于勒贝格几乎处处的 $E \in \mathbb{R}$, $\gamma_1(E) \geq \cdots \geq \gamma_D(E) > 0$, 则 $\Sigma_{\mathrm{ac}} = \emptyset$。那么，R.A.G.E. 定理[2,74] 保证，对于 H_ω （分别为 h_ω），不存在扩散态；且这一结论关于 ω 几乎必然成立。

让我们回到李雅普诺夫指数正性的问题。直观地说，为了有望在公式（18）中得到严格为正的极限，必须确保随机参数变化时，大量传递矩阵及其逆矩阵的乘积具有足够大的范数，从而在取平均并除以 n之后，极限不为零。例如，如果所有传递矩阵乘积都有界，那么（18）中的极限将自动为零。因此，我们必须研究随机参数变化时包含所有传递矩阵乘积的集合。

我们在上文假设传递矩阵是独立同分布的。注意， μ_E 是这些传递矩阵的共同分布。μ_E 的支撑给出了当我们改变随机参数时传递矩阵可能取值的集合。如果随后我们想要像在 Φ_E 中那样对这类矩阵进行乘法和求逆，那么自然的代数对象就是由 μ_E的支撑生成的群。

定义 8。 与传递矩阵序列 $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ 相关联的 **Furstenberg 群** G_{μ_E} 是由$T_{\omega^{(n)}}$的共同分布的支撑生成的群的闭包（E）： $G_{\mu_E} = \langle$支撑 $\mu_E\rangle$.

我们在 Furstenberg 群的定义中加入由矩阵空间上的通常拓扑所诱导的拓扑下的闭包，是因为这样可以使其成为实线性群$\mathrm{GL}_{2\mathrm{D}}(\mathbb{R})$的闭子群，从而成为李群。在下文中，必须赋予 Furstenberg 群一个实线性李群的结构，以便使用这些群所特有的全部技术，尤其是使用它们的李代数。

李雅普诺夫指数的严格正性归结为对 Furstenberg 群“大小”的研究。如果这个群在某种尚待明确的意义上足够大，那么， there

将具有李雅普诺夫指数的严格正性，且这些指数彼此不同。现在，我们来定义 Furstenberg 群的两个性质；当这两个性质同时满足时，就可以推出李雅普诺夫指数彼此不同且均为正。

定义 9 (**p-压缩性**)。 设 $T \subset \mathrm{GL}_{2D}(\mathbb{R})$ 且 $p \in \{1, \ldots, D\}$。如果存在序列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 T，使得下述极限存在，则称 T 是**p-压缩的**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\wedge^p M_n}{||\wedge^p M_n||} = M$$

且是一个秩为1的矩阵。

我们引入 $\mathbb{R}^{2D}$ 的 p-拉格朗日子流形。令 $(e_1, \ldots, e_{2D})$ 为 $\mathbb{R}^{2D}$ 的标准基。

对于所有 $p \in \{1, \ldots, D\}$，令 $L_p = \mathrm{Span}(\{Me_1 \wedge \ldots \wedge Me_p \mid M \in \mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})\})$。它被称为 $\mathbb{R}^{2D}$ 的 p-拉格朗日子空间。

定义 10 (L_p**-强不可约性**)。 设 T 是$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 的一部分，且 p 是 $\{1, \ldots, D\}$ 中的一个整数。如果不存在 L_p 的有限个真子空间的并集 W，使得对于所有 $M \in T$ 都有 $\wedge^p M(W) = W$，则称 T 是 L_p**- 强不可约的**。

所谓真子空间，是指 L_p 不同于 L_p 和 $\{0\}$的子空间。现在我们陈述一个关于 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中 Lyapunov 指数分离定理。该定理引自[11]，最初由 Guivarch 和 Raugi 证明[51]。

定理 3 ([11,51])。 设 $E \in \mathbb{R}$ 和 $p \in \{1, \ldots, D\}$。假设 G_{μ_E} 是 p-压缩的且L_p-强不可约。那么 $\gamma_p(E) > \gamma_{p+1}(E)$，并且对于任意非零的 $x \in L_p$ 以及几乎所有的 P- ω,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||\wedge^p (\Phi_E(n, \omega))x|| = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E).$$

这一结果尤其会以如下推论的形式引起我们的兴趣。

推论1。 设 $E \in \mathbb{R}$。假设对于所有 $p \in \{1, \ldots, D\}$， G_{μ_E} 都是 p-压缩的，并且是 L_p- 强不可约的。那么，与 Φ_E 相关的李雅普诺夫指数彼此不同，特别地:

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > \ldots > \gamma_D(E) > 0.$$

这里建立了如下联系：一个取值于辛群的余圈所对应的动力学性质——在此即其李雅普诺夫指数的分离——与和该余圈相关的代数对象，即富斯滕伯格群的更多几何性质之间的联系。这一判据在实践中非常有用，因为它使我们无需直接研究传递矩阵乘积的极限，而只需将问题归结为富斯滕伯格群中这些矩阵的有限乘积。

III. 薛定谔型准一维模型的局域化判据

本节将介绍适用于离散或连续薛定谔型准一维模型的代数局域化判据。

设 $D \geq 1$ 为整数。设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ 为一个完备概率空间，并令 $\omega \in \Omega$。

在离散情形下，我们考虑作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D$ 上的随机算子，其形式为

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^D,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (h_\omega u)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega^{(n)}} u_n \tag{19}$$

其中 $(V_{\omega^{(n)}})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一列取值于实对称矩阵的 独立同分布 随机变量。

在连续情形下，我们考虑作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$ 上的随机算子，其形式为

$$H_\omega = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_{\mathrm{D}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - \ell n), \tag{20}$$

其中， I_{D} 是 D 阶单位矩阵， $\ell > 0$ 是实数。

假设对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，函数 $x \mapsto V_\omega^{(n)}(x)$的取值属于实对称矩阵空间，支撑于 $[0, \ell]$ ，并且在 x、 n 和 ω上均一致有界。

我们还假设序列 $(V_\omega^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ 是定义在 Ω 上的一列独立同分布随机变量。最后，我们假设势 $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{(n)\omega}(x - \ell n)$使得随机算子族$\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $\ell\mathbb{Z}$-遍历的。作为 $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_{\mathrm{D}}$的有界扰动，算子 H_ω 在 Sobolev 空间 $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$ 上是自伴的，因此， 对于任意 $\omega \in \Omega$， H_ω 的谱包含于 $\mathbb{R}$。

我们将 $\Sigma \subset \mathbb{R}$ 记为族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 或该族的几乎必然谱。

族 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$。对于 $E\in\mathbb{R}$，令 G_{μ_E} 为 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 或 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的 *Furstenberg* 群。定理 *4*（局域化判据[15,62]）。设 $I\subset\mathbb{R}$ 为一个紧区间，使得 $\Sigma\cap I\neq\emptyset$ ~ ~，并令 I 为包含 I 的一个开区间，且满足对任意 $E\in I$， G_{μ_E} 均为 p-压缩且 L_p-强不可约，对所有 p 均在 $\{1,\ldots,D\}$中成立。于是，$\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$（分别为 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$）在 $\Sigma\cap I$上同时具有动力学局域化和安德森局域化性质。

在离散情形中，这一判据由 Klein、Lacroix 和 Speis[62] 得出。在连续情形中，这一结果由[15] 得出。

该定理的证明详见[15,62], ，其思路如下:

1. 对所有 p 属于 $\{1,\ldots,D\}$ 的情形，Furstenberg 群是 p-收缩且 L_p-强不可约的。这一事实不仅意味着李雅普诺夫指数可分离，还意味着存在这些指数的积分公式。借助该积分公式，我们可以证明李雅普诺夫指数具有 Hölder 正则性。

2. 借助 Thouless 公式，我们可以推导出与 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 相关的积分态密度具有相同的 Hölder 正则性。

3. 积分态密度的 Hölder 正则性意味着一种弱 Wegner 估计，该估计适用于伯努利随机性情形。

4. 有了 Wegner 估计之后，便可以应用多尺度分析方案。这尤其要求证明一个初始尺度估计。

这是 Damanik、Sims 和 Stolz 在连续标量情形中采用的方法[34]，也是 Klein、Lacroix 和 Speis 在离散准一维情形中采用的方法[62]。在[15], 中，我们结合这两篇参考文献的结果来证明定理 4。

步骤 1。 如第 II 节所述，李雅普诺夫指数为正并不足以保证存在在无穷远处指数衰减至 0的特征函数。事实上，定理 3 可以用李雅普诺夫指数之和的积分公式加以精确表述。

定理 5 ([11])。设 E 为实数，且 p 为 $\{1,\ldots,D\}$中的整数。假设G_{μ_E} 是 p-压缩的，且 L_p-强不可约的。那么，存在唯一的 μ_E-不变的

概率测度，定义在 $\mathbb{P}(L_p) = \{\bar{x} \in \mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{R}^{2D}) \mid x \in L_p\}$ 上，记作 $\nu_{p,E}$，使得：

$$\int_{\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(L_p)} \log \frac{|| \wedge^p Mx||}{||x||} \, \mathrm{d}\mu_E(M) \, \mathrm{d}\nu_{p,E}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E) \tag{21}$$

我们有一个涉及测度 $\nu_{p,E}$ 的李雅普诺夫指数积分表示，这意味着，为了研究这些指数作为E 的函数时的正则性，只需研究该测度作为 E的函数时的正则性。运用这一方法，可以证明以下关于李雅普诺夫指数 Hölder 正则性的一般定理[13]。

定理 6 ([13])。设 I 是 $\mathbb{R}$ 中的一个紧区间，且对每个 $E \in I$：

1. 对每个 $p \in \{1, \ldots, D\}$，G_{μ_E} 是 p-压缩的且 L_p-强不可约。

2. 存在与 n, ω, E 无关的 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$，使得

$$\forall p \in \{1, \ldots, D\}, \ || \wedge^p T_{\omega^{(n)}}(E)||^2 \leq \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C_2. \tag{22}$$

3. 存在与 n, ω, E 无关的 $C_3 > 0$，使得

$$\forall p \in \{1, \ldots, D\}, \ \forall E, E' \in I, \ || \wedge^p T_{\omega^{(n)}}(E) - \wedge^p T_{\omega^{(n)}}(E')|| \leq C_3 |E - E'|. \tag{23}$$

那么，存在两个实数 $\alpha > 0$ 和 $C > 0$，使得：

$$\forall p \in \{1, \ldots D\}, \ \forall E, E' \in I, \ |\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha.$$

为证明这一结果，我们使用[30]（命题 IV 3.5）中所述的关于负余循环的结果。正是在这一点上，我们使用了由定理6的第一个假设所诱导的李雅普诺夫指数的可分离性。我们还需要如[30]（命题 V 4.13）中所述的关于 Hölder 空间上的拉普拉斯算子的估计，这些估计使用了估计式（22）和（23）。最后，利用[30]（命题 IV 3.12）中给出的、涉及不变测度的这些拉普拉斯算子的分解，我们证明了$E \mapsto \nu_{p,E}$ 在 I上的赫尔德连续性。在定理4证明的这一阶段，工作中的一个重要部分是证明与族 $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 相关联的传递矩阵满足估计式（22）和（23）。

对于离散准一维薛定谔型算子，这一点相对明显，因为传递矩阵具有非常明确的形式；而在连续情形中，这些估计则不那么显然，并且与微分方程解的先验估计有关。关于这一点，请参见[13]（引理 2 和引理 3）。

步骤 2。 积分态密度是一个计数函数，用于统计能量 E 以下的能级。对于谱为连续或稠密的算子，之所以会产生是否存在此类函数的问题，是因为朴素的定义不可避免地会导致：在谱底以上的任意点，函数值都等于无穷大。为克服这一困难，我们通过热力学极限来定义积分态密度。

固定 $\omega \in \Omega$。我们首先将 H_ω 限制在 $\mathbb{R}$ 中长度有限的区间上。令 L 为大于 1 的整数，并令 $\Lambda = [-\ell L, \ell L] \subset \mathbb{R}$ 为以 0 为中心、长度为 $2\ell L$ 的区间。我们令：

$$H_\omega^{(\Lambda)} = \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{(\Lambda)} \otimes I_{\mathrm{D}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - \ell n) \tag{24}$$

在带有狄利克雷（或诺伊曼）边界条件的 $L^2(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^D$ 上作用的 H_ω 的限制。

定义 11。 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的积分态密度是一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的增函数，$E \mapsto N(E)$ 其中对于任意实数 E，$N(E)$ 定义为：

$$N(E) = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \#\left\{\lambda \le E |\ \lambda \in \sigma(H_\omega^{(\Lambda)})\right\} \tag{25}$$

其中 $|\Lambda| = 2\ell L$ 是 Λ的长度。

表达式（25）中存在一个双重的存在性问题。我们必须证明，对于所有 $\#\{\lambda \le E |\ \lambda \in \sigma(H_\omega^{(\Lambda)})\}$，其基数有限；$E$ 固定后，再证明极限存在。解决这两个问题的关键在于证明存在一个 L^2 单参数群$(\mathrm{e}^{-tH_\omega^{(\Lambda)}})_{t>0}$的核。该核通过包含有序指数映射的 Feynman-Kac 公式构造得到[13]（命题 1）。

结合[64] 和[34], 的结果，我们在[13] 中给出 Thouless 公式，揭示态密度与正李雅普诺夫指数之和之间的联系。这种联系通过一个称为 Kotani 函数[63] 的函数 w 建立，并借助调和分析工具。我们引入赫尔格洛茨函数空间：$\mathcal{H} = \{h :\ \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+ \mid h \text{ 在 } \mathbb{C}_+\}$上全纯，并考虑 $\mathcal{H}$的子空间，$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{H} \mid w,\ w',\ -\mathrm{i}w \in \mathcal{H}\}$.

在[13]（命题 8）中证明，Kotani 函数 w 属于该空间 $\mathcal{W}$。由于$-(\gamma_1+\ldots+\gamma_D)$和 πN在切向极限下，分别是函数 w 的实部和虚部，而该函数属于空间 $\mathcal{W}$，Kotani 在[63]中针对该空间所发展的调和分析表明，这两个函数之间存在积分关系，由此可推出以下 Thouless 公式。

The定理 7 (Thouless 公式[13])。 对于勒贝格几乎处处的 $E\in\mathbb{R}$，我们有：

$$(\gamma_1+\ldots+\gamma_{\mathrm{D}})(E)=-\alpha+\int_{\mathbb{R}}\log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') \tag{26}$$

其中 α 是一个与 E 无关的实数，而 $\mathfrak{n}$ 是态密度。此外，若 $I\subset\mathbb{R}$是一个区间，在该区间上 $E\mapsto(\gamma_1+\ldots+\gamma_{\mathrm{D}})(E)$ 连续，则（*26*）对任意$E\in I$都成立。

对于取标量值的离散或连续安德森算子[29,34]，，或取矩阵值的离散安德森算子[64]，，可以利用 Thouless 公式证明，积分态密度与李雅普诺夫指数具有相同的赫尔德连续性。这正是[13]的主要结果。

定理 8 ([13])。 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个紧区间， $\tilde{I}$ 是一个包含 I的开区间。若 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的 *Furstenberg* 群 G_{μ_E} 对于任意$p\in\{1,\ldots,\mathrm{D}\}$和任意 $E\in I$均为 p-收缩且 L_p-强不可约，则与 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$相关联的积分态密度在 I上赫尔德连续。

定理8 的证明基于 Thouless 公式和 Hilbert 变换的性质。

还需注意的是，在 Bernoulli 情形下，可以利用[77] 基于超对称形式体系的一般泛函分析结果，恢复积分态密度的赫尔德连续性。

步骤 3。 对于任意维度下类似于（2）的连续安德森模型，或类似于（3）的离散模型，当存在常数 $C_W>0$ 和实指数 α， $\beta>0$ 使得对于任意区间 $I\subset\mathbb{R}$ 以及任意立方体 $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ （或 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$），

$$\mathsf{P}\left(\left\{H_\omega^{(\Lambda)}\text{ has an eigenvalue in }I\right\}\right)\leq C_W|I|^\alpha\cdot|\Lambda|^\beta \tag{27}$$

其中，对于任意 ω, $H_\omega^{(\Lambda)}$是 H_ω 在立方体 Λ 上的限制，并满足狄利克雷（或诺伊曼）边界条件； $|\cdot|$ 表示勒贝格测度，在 $\mathbb{R}$ 中对应于 I，或在 $\mathbb{R}^d$ 中对应于 Λ（若 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$，则为 Λ 的基数）。

这类估计是应用多尺度分析方案的关键要素。Wegner 估计在谱统计结果中也发挥着核心作用；在此背景下，必须获得关于 Λ 的能量和体积的线性估计。这种情况下，我们称之为最优 Wegner 估计。例如，对于随机变量的共同分布具有密度的离散标量 Anderson h_ω 算子，我们可以证明最优 Wegner 估计：

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbf{1}_I\left(h_\omega^{(\Lambda)}\right)\right)\right) \leq C_W \cdot |I| \cdot |\Lambda| \tag{28}$$

其中 $\mathbf{1}_I\left(h_\omega^{(\Lambda)}\right)$ 是 $h_\omega^{(\Lambda)}$在区间 I上的谱投影算子。值得一提的是，(28) 与 (27) 通过马尔可夫不等式相关联，由此可知一般而言，

$$\mathsf{P}\left(\left\{h_\omega^{(\Lambda)} \text{ has an eigenvalue in } I\right\}\right) \leq \mathrm{Tr}\left(\mathbf{1}_I\left(h_\omega^{\Lambda}\right)\right).$$

在连续情形下，加入关于随机性的额外假设，也可以得到最优 Wegner 估计。有关这些结果，请参阅[54,81]。一般而言，Wegner 估计的证明依赖于谱平均[2]，，这解释了为何需要对代数作正则性假设，即定义安德森势的随机变量的分布必须具有密度。然而，对于安德森-伯努利算子，诸如 (27) 这样的 Wegner 估计不可能对任意区间 I成立。事实上，如果安德森势中的随机变量服从参数为 $_1$ $_2$的伯努利分布，那么事件 $\left\{H_\omega^{(\Lambda)}$在 $I\right\}$ 中有一个特征值 $2^{-|\Lambda|}$的概率有下界 I；而当区间长度过小时，(27) 就不可能成立。对于伯努利随机性，仍然可以为安德森模型证明较弱形式的 Wegner 估计。

定理 9 ([15])。 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个紧区间，且 $\tilde{I}$ 是一个开区间， $I \subset \tilde{I}$，使得˜对于任意 $E \in I$， G_{μ_E}是 p-压缩的，且 L_p对任意 $p \in \{1,\ldots,D\}$ 都是 L_p-强不可约的。于是，对于任意 $\beta \in (0,1)$ 和任意 $\kappa > 0$，存在 $L_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\xi > 0$ 使得，

$$\mathsf{P}\left(d\left(E, \sigma(H_\omega^{(\Lambda)})\right) \leq \mathrm{e}^{-\kappa(\ell L)^\beta}\right) \leq \mathrm{e}^{-\xi(\ell L)^\beta}, \tag{29}$$

对于所有 $E \in I$ 以及所有 $L \geq L_0$。

定理 9 的证明依赖于特定的一维工具。不同于随机变量的分布具有密度的情形，这里积分态密度的正则性并非 Wegner 估计的结果，而是其证明的关键要素。在一维中，积分态密度的 Hölder 正则性直接由李雅普诺夫指数的 Hölder 正则性以及 Thouless 公式得到，正如步骤 2 中所解释的那样。

我们首先证明，在定理 9的假设下，存在 $H_\omega^{(\Lambda)}$在区间 $[E-\varepsilon, E+\varepsilon]$ 中具有特征值、对应于一个归一化特征函数，且其位于 $[-\ell L, \ell L]$ 边缘处的特征值受 ε控制的概率，小于 L 与 ε^α 的某个倍数，其中 α 是积分态密度的赫尔德连续性指数。因而，这一初步结果不仅基于积分态密度的赫尔德连续性，还基于确定性微分系统 $-u''+Vu=0$ 的解的先验估计，其中 V是一个矩阵值局部可积函数。此外，这一初步证明还利用了以下事实：安德森势在平移下的分布保持不变，以及大数定律，从而将给定的事件序列与积分态密度联系起来。

定理证明的其余部分9 接下来依赖于对事件（29）与一族事件之交的概率估计；对于这族事件，传递矩阵乘积的范数允许从 $[-\ell L, \ell L]$ 的一条边过渡到另一条边，并且严格大于一个形如$\mathrm{e}^{\theta(\ell L)^\beta}$的正数。我们还利用传递矩阵作为能量函数时的 Lipschitz 连续性，这在所考虑的模型中成立。同样，使用传递矩阵使得不等式（29）的证明相当特定于一维情形。

步骤 4。定理证明的最后一步4 是实施多尺度分析。这是一种通过归纳法进行证明的程序，归纳对象是我们将所研究的随机算子族限制到的立方体的大小。

其思路如下：特征函数的指数增长可由受限算子在越来越大的立方体上的预解算子范数的指数增长推出。为证明局部预解算子范数会随立方体大小呈指数衰减，我们先证明，在一个初始大小的立方体上，该范数有一个指数小量作为上界。接着，我们将预解算子范数的这种指数控制

扩展到所有更大尺度的立方体，其大小是初始尺度的一个正幂。为此，我们必须证明，几乎必然能够保持预解式的指数估计。特别是，当能量处于某个紧区间内时，我们所需的预解式估计必须关于能量一致。因此，从一个立方体尺度过渡到更大尺度时，必须确保避开那些会导致预解算子范数爆增的能量，即受限算子的谱中的能量。此时 Wegner 估计便发挥作用：它保证，以指数接近 1 的概率，所考虑区间内的能量与受限算子的谱之间至少保持严格为正的距离。

有关多尺度分析的一般详细介绍，请参阅 Abel Klein 的相关文章[61] 以及 Germinet 和 Klein 的相关文章[44]。关于在定理 4的证明中使用多尺度分析的详细内容，请参阅[15]。

对于一维算子，可以合理地提出这样一个问题：是否能够采用一种更直接的方法，仅通过研究传递矩阵序列并证明该序列满足大偏差不等式，来实现局域化？这种方法已成功应用于[24,58] 中的离散情形和[25] 中的连续情形，并给出了维数为 $d = 1$ 时更为初等的局域化证明。通过推广[58],中的方法，[42]中实现了动力学局域化。值得注意的还有[50], 中基于Furstenberg定理的参数版本给出的纯动力学安德森局域化证明。最后，我们提及[67], 中关于离散准一维模型的一种推广形式的最新局域化证明，该证明基于与[24,58]相同的技术。关于大偏差定理的更一般结果，另请参见[39]。

IV. 准一维模型的局域化结果

本节回顾不同类型准一维随机模型的局域化结果。这些模型中的随机性由随机变量引入，其中随机变量可以是伯努利变量。我们不介绍不包含这种情形的其他局域化结果。我们根据相关 Furstenberg 群的代数复杂度阶数对这些结果进行分类。

在所有研究的模型中，随机性均以下述方式出现。对于 $i \in \{1, \dots, D\}$,

˜ ˜ ˜设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathsf{P}_i)$ 为一个完备概率空间，并设

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}) = \left(\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\Omega}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\Omega}_D, \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_D, \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathsf{P}}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathsf{P}}_D \right) \tag{30}$$

令 $(\omega_1^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}, \ldots, (\omega_D^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ 分别为定义在˜ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜(Ω1, A1, P1),. . ., (ΩD, AD, PD) 上的独立同分布实随机变量序列，其共同分布分别为 $\nu_1, \ldots, \nu_D$，它们的支撑 supp ν_i 至少包含两个不同的点 a_i 和 b_i （例如，若它们是伯努利变量，则为 0 和 1），且有界。我们还令 $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \ldots, \omega_D^{(n)})$ 服从分布 $\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_D$。

A. 富斯滕伯格判据

我们首先回顾标量值算子的局域化结果，这对应于准一维随机模型定义中的情形 $D = 1$ 。

根据定理 4，要在某个区间 I上获得局域化结果，只需证明与所研究模型相关联的富斯滕伯格 群是 p-压缩的，并且对于所有 p 属于 $\{1, \ldots, D\}$，都是 L_p-强不可约的。在 $D = 1$的情况下，这些性质可归结为下面富斯滕伯格提出的结果所要求的假设。

定理 *10*（富斯滕伯格[40]）。设 $E \in \mathbb{R}$，$(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一列服从共同分布 μ_E 的独立同分布随机矩阵，取值于 $SL_2(\mathbb{R})$，并设 G_{μ_E} 为其 *Furstenberg* 群。假设 G_{μ_E} 非紧，且 G_{μ_E} 强不可约，即不存在由 $V_1, \ldots, V_k$ 组成的有限真子空间族，使得：$\forall M \in G_{\mu_E}$，$M(V_1 \cup \cdots \cup V_k) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$.

那么存在 $\gamma(E) > 0$，使得对于每个 $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$，以下结论几乎必然成立（相对于 P）：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log(||\Phi_E(n,\omega)x||) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log(||\Phi_E(n,\omega)||) = \gamma(E).$$

其中 Φ_E 按 （17）中的定义。此外，存在唯一的 μ_E-不变概率测度，定义在 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ 上，记作 ν_E，满足：

$$\gamma(E) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)} \log \frac{||Mx||}{||x||} \, \mathrm{d}\mu_E(M) \, \mathrm{d}\nu_E(\bar{x})$$

这里，$P(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的射影空间；对于 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$，$\bar{x}$ 表示其在 $P(\mathbb{R}^2)$ 中的等价类。

对于传递矩阵属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，且只需考察一个李雅普诺夫指数（即主导指数）是否严格为正的模型，Furstenberg 定理足以处理这一情形。

1. 离散一维安德森模型

我们将把富斯滕伯格定理应用于一个首个例子：一列$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 随机矩阵，它们来自维数为1 且取标量值的离散安德森模型。我们使用式（30）中引入的记号；由于这里 $D = 1$ 我们省略记号中的下标1，见$(\omega_1^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ 或 ν_1。

考虑由下式定义的 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 随机算子遍历族

$$\forall \omega \in \Omega,\ h_\omega\ :\ \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (-(u_{n+1}+u_{n-1})+\omega^{(n)}u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \tag{31}$$

其几乎必然谱为 $[-2,2]+\mathrm{supp}\ \nu$（见[38]（定理 3.9））。与 $\{h_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 相关的传递矩阵为

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall E \in \mathbb{R},\ T_{\omega^{(n)}}(E) = \left(\begin{smallmatrix} \omega^{(n)}-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

并且序列 $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中的随机矩阵序列，独立同分布且共同分布为 μ，该分布由随机变量 $\omega^{(n)}$的分布 ν 诱导而来。由于传递矩阵是独立同分布的，Furstenberg 群为

$$\forall E \in \mathbb{R},\ G_{\mu_E} = \overline{\langle \{T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \mathrm{supp}\ \nu\}\rangle}.$$

我们首先指出，G_{μ_E} 中的所有矩阵的行列式均为 1。为了证明 G_{μ_E} 不是紧的，我们将给出 G_{μ_E}中的一个无界序列。根据 $\omega^{(0)}$的分布律所满足的假设，我们有

$$\left\langle \left(\begin{smallmatrix} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \subset G_{\mu_E}.$$

那么，

$$\left(\begin{smallmatrix} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G_{\mu_E}$$

并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n(a-b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G_{\mu_E}$$

其中包含一个无界序列，因为 $a - b \neq 0$。

可以证明[11] 的强不可约性 G_{μ_E} 等价于（在 Furstenberg 群非紧的假设下）：

$$\forall \bar{x} \in P(\mathbb{R}^2),\ \#\{M\bar{x} \mid M \in G_{\mu_E}\} \geq 3.$$

设 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$。假设 $x_2 \neq 0$。接着，只需解线性方程组即可证明：对于 $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，向量 Ax、A^2x 和 A^3x 两两不共线，这使得我们能够在 $\{M\bar{x} \mid M \in G_{\mu_E}\}$ 中构造出 3 个不同的元素。如果 $x_2 = 0$，那么 $x_1 \neq 0$；而如果 $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a-b & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in G_{\mu_E}$，那么向量 Bx、B^2x 和 B^3x 两两不共线。

因此，富斯滕伯格定理对每一个 $E \in \mathbb{R}$ 都适用，并利用定理 4 可以得到以下局域化结果，该结果最初由 Carmona、Klein 和 Martinelli 提出[29]。

定理 11 (Carmona,Klein, Martinelli[29])。 该族 $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 在每个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 中都表现出动力学局域化。

关于随机 Jacobi 矩阵局域化结果的文献浩如烟海，这些结果扩展了一维离散 Anderson 模型的定义。不过，其中处理伯努利随机性的寥寥无几。在近期论文中，我们列举 Rangamani 关于奇异随机 Jacobi 矩阵的结果[71]，以及关于随机词模型局域化的研究，其中包括安德森-伯努利模型和二聚体模型等多个模型[72]。我们还在第 III 节末提到了近期的论文[24,50,58]，这些论文给出了维数 $d = 1$ 下局域化的初等证明，所用方法是大偏差定理或 Furstenberg 定理的参数版本。

2. 一维连续安德森模型

考虑由 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 定义的遍历算子族

$$\forall \omega \in \Omega,\ H_\omega\ :\ \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & -u'' + \left(V_{\text{per}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \omega^{(n)} f(\cdot - n)\right) u \end{array} \tag{32}$$

其中，Vper 是由一个局部可积的 $\mathbb{Z}$-周期函数定义的乘法算子，而 f是一个支撑于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$中的可积非零函数。

对于这个遍历族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$，Damanik、Sims 和 Stolz[34] 证明了以下局域化结果。

定理 12 (Damanik、Sims 和 Stolz[34])。 存在一个离散集 $M \subset \mathbb{R}$，使得对每个 $E \in \mathbb{R}\setminus M$， G_{μ_E}都是非紧且强不可约的。因此，对每个 $E \in \mathbb{R}\setminus M$，$\gamma(E) > 0$ 在每个区间 $I \subset \mathbb{R}\setminus M$上都表现出动力学局域化。

证明与 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 相关的主导李雅普诺夫指数严格为正，显然比离散情形更为微妙。详细内容请直接参见[34]。连续模型中出现的主要困难在于，传递矩阵不再像离散情形那样具有显式形式，而需要在区间 $[n, n+1]$ 上求解微分系统来计算。因此，问题在于寻找传递矩阵中涉及的解的表达式，以便验证富斯滕伯格定理的假设。在[34], 中，思路是先考虑 $-u'' + V$per$u = Eu$ 的弗洛凯解，然后利用它们构造$-u'' + (V$per $+ f)u = Eu$的约斯特解。我们此前已将问题化归到 $a = 0$且 $b = 1$的情形，因此需要在区间 $[n, n+1]$上求解 $-u'' + V$per$u = Eu$ 或 $-u'' + (V$per $+ f)u = Eu$，以确定富斯滕伯格群中包含的两个传递矩阵。

在第一种情况下，得到的传递矩阵将是一个旋转矩阵；在第二种情况下，它将是旋转的线性组合。于是，我们的思路是从平面中的一个单位向量出发，并对其应用第二个传递矩阵。通过恰当地选择初始单位向量的方向θ_0，我们可以得到一个范数严格大于 1、方向为 θ_1的新向量。再次应用第二个传递矩阵后，我们得到一个其

范数取决于 θ_1的新向量。借助第一个传递矩阵将其旋转，我们可以将其调整到θ_1 的新方向，使得应用第二个传递矩阵后得到的新向量的范数严格大于所得到的第二个向量。通过这种方式，我们成功地从一个单位向量构造出一个无界的向量序列。这样，我们就在 Furstenberg 群中构造出了一个无界序列，因此该群不是紧的。

对于强不可约性，只需利用作为旋转的传递矩阵，从一个精心选择的初始方向出发，通过迭代构造出无穷多个不同的方向。

临界能量的离散集 M 是通过将所构造的约斯特解的反射系数和透射系数的零点组成的集合得到的；这些系数关于 E 和 f 具有解析依赖性，并且假定它们均非零。

在所有连续模型中，都可以发现存在一个离散的能量集，使得 Furstenberg 定理的假设不成立。值得注意的是，研究李雅普诺夫指数在这些临界能量处的行为是一个难题。尤其是，由于 Furstenberg 群缺乏可约性，在没有李雅普诺夫指数的积分表示的情况下，为了证明李雅普诺夫指数在临界能量附近的连续性，必须直接考察与传递矩阵序列相关的马尔可夫链的一些性质。为此，可以尝试改编[43] 中的思路，这些思路已在[39]中得到拓展。遗憾的是，这两篇参考文献都假设随机变量为正，而这一假设在安德森模型以及 Chapman 和 Stolz 研究的随机伊辛链中并不成立[31]。

3. 一维狄拉克模型

考虑作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ 上的 $\mathbb{Z}$-遍历族 $\{D_\omega\}_{\omega\in\Omega}$

$$D_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \end{pmatrix} + V_{\mathrm{per}} + V_\omega$$

其中， V_{per} 是泡利矩阵 $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$、 $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 I_2 的 $\mathbb{Z}$-周期线性组合； V_ω 是随机势，由 $V_\omega(x) = \sum \omega^{(n)} f(x-n)$ 给出，其中 f 是 σ_1 与 σ_3 的线性$_{n\in\mathbb{Z}}$组合，或是 I_2 的倍数。

定理 13 ([83])。 存在一个离散集 $M \subset \mathbb{R}$，使得对于每个 $E \in \mathbb{R} \setminus M$， G_{μ_E} 都是

非紧且强不可约。因此，对于每个 $E \in \mathbb{R} \setminus M$、 $\gamma(E) > 0$，并且在每个区间 $I \subset \mathbb{R} \setminus M$、 $\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 上，都表现出动力学局域化。

该定理的证明与定理12 的证明非常相似，尤其是在研究 Furstenberg 群方面。还需要调整定理4证明中的一些部分，以适用于狄拉克算子，特别是关于积分态密度的存在性和性质，包括 Thouless 公式。为此，我们可以依赖[76] 的结果，以及他们将 Kotani理论推广到狄拉克框架的工作。

Furstenberg 定理足以证明离散和连续 Anderson 模型或该狄拉克模型的主导李雅普诺夫指数严格为正。转向准一维模型时，我们必须寻找新的代数判据。

B. Goldsheid-Margulis判据

若要验证推论1 对准一维 Anderson 算子的具体实例所提出的假设，就会遇到一个棘手的难题。即使对于 Goldsheid 和 Margulis 在[49], 中介绍的离散准一维安德森模型，其传递矩阵具有显式且相对简单的形式，验证p-压缩性，尤其是 L_p-强不可约性，也并非易事。因此，Goldsheid 和 Margulis 使用了以下判据。

定理14 (Goldsheid 和 Margulis[49])。 设 G 是 $\mathrm{Spin}(\mathbb{R})$的子群。若 G 在 $\mathrm{Spin}(\mathbb{R})$ 中 *Zariski* 稠密，则对所有 $p \in \{1, \ldots, N\}$， G 都是 p-压缩且 L_p-强不可约的。

这一判据使我们能够将李雅普诺夫指数分离与严格正性的动力学问题，化归为重构李群的代数问题。关键在于，线性李群的扎里斯基闭包仍是线性李群。正如我们稍后将看到的，我们大部分时间都将在连通的辛群中进行研究，这使我们能够将大部分计算转化到李代数层面。这样一来，代数证明便更为简洁，因为群中的代数计算可以转化为线性代数和李括号的计算。

1. 离散准一维安德森模型

我们研究由 $\{h_\omega^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$ 定义的算子族

$$\forall\omega\in\Omega,\ h_\omega^{(D)}\ :\ \begin{array}{ccc}\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^D) & \to & \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^D)\\ (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (-(u_{n+1}+u_{n-1})+V_{\omega^{(n)}}u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\end{array} \tag{33}$$

其中 $V_{\omega^{(n)}}=V_0+\mathrm{diag}(\omega_1^{(n)},\ldots,\omega_D^{(n)})$，$V_0$ 是对角线元素为零、上下副对角线元素为 1 的三对角矩阵。

Goldsheid 和 Margulis 在[49] 中证明，$\{h_\omega^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$ 的 Furstenberg 群在$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$中扎里斯基稠密。基于这一结果，Klein、Martinelli 和 Speis 在[62] 中证明了以下局域化结果。

定理 15 ([49,62])。 对于每个 $E\in\mathbb{R}$，G_{μ_E} 在 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$中扎里斯基稠密。因此，$\{h_\omega^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$在每个区间 $I\subset\mathbb{R}$内都呈现动力学局域化。

与 $\{h_\omega^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$相关联的传递矩阵由 $T_{\omega^{(n)}}(E)=\begin{pmatrix}V_{\omega^{(n)}}-E & -I_\mathrm{D}\\ I_\mathrm{D} & 0\end{pmatrix}$给出。这些传递矩阵构成 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中一个共同分布为 μ_E 的独立同分布矩阵序列，并且有

$$G_{\mu_E}=\overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E)\mid\omega^{(0)}\in\mathrm{supp}\,(\nu_1\otimes\cdots\otimes\nu_D)\rangle}.$$

根据 对 ν_i 的支集所作的假设，并令 $a=0$ 和 $b=1$，

$$G_{\{0,1\},E}:=\overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E)\mid\omega^{(0)}\in\{0,1\}^D\rangle}\subset G_{\mu_E}$$

因此，只需证明由 2^D 矩阵、$G_{\{0,1\},\ E}$ 生成的子群在 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密。我们用 $\mathrm{Cl_Z}(G_{\{0,1\},\ E})$ 表示它在 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中的扎里斯基闭包，并用 $\mathfrak{g}E$ 表示 $\mathrm{Cl_Z}(G_{\{0,1\},\ E})$ 的李代数。回顾一下，$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 的李代数为

$$\mathfrak{sp}_\mathrm{D}(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}A & B_1\\ B_2 & -{}^tA\end{pmatrix},\ A\in\mathcal{M}_\mathrm{D}(\mathbb{R}),\ b_1\text{ and }b_2\text{ symmetric}\right\}.$$

对于 $i,j\in\{1,\ldots,D\}$，令 E_{ij} 为 $\mathcal{M}_\mathrm{D}(\mathbb{R})$ 中的矩阵，其第 i 行与第 j 列交点处的系数为 1，其余位置为 0。我们还设定了

$$\forall i,j\in\{1,\ldots,D\},\ X_{ij}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & E_{ij}+E_{ji}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ Y_{ij}={}^tX_{ij},\ Z_{ij}=\begin{pmatrix}E_{ij} & 0\\ 0 & -E_{ji}\end{pmatrix}.$$

对这三个矩阵的李括号进行初等计算，可以证明$\mathfrak{sp}_D(\mathbb{R})$由
$\{X_{ij}, Y_{ij} \mid i,j \in \{1,\dots,D\}, |i-j| \le 1\}$.生成。由此，我们需要证明，对于任意 $E \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{g}(E)$都包含所有矩阵 X_{ij}和 Y_{ij}，其中 i、 $j \in \{1,\dots,D\}$、$|i-j| \le 1$。我们固定 $E \in \mathbb{R}$，然后逐步推进。

首先，我们证明形如 $\left(\begin{smallmatrix} I & D \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ D & I \end{smallmatrix}\right)$ 的矩阵（其中 D 为对角矩阵）属于 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E})$。为此，我们选取与 $V_{\omega^{(0)}}$ 的两种实现 V_1 和 V_2 相关联的 T_1 和 T_2，它们属于 $G_{\{0,1\},E}$。由于 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E})$ 是一个群，因此它对求逆和乘积运算封闭。所以我们有：

$$B := T_1 T_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} I & V_1 - V_2 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in G_{\{0,1\},E}.$$

设 $i \in \{1,\dots,D\}$。我们可以选择 V_1 和 V_2，使得 $B = \left(\begin{smallmatrix} I & E_{ii} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$.。于是，对每个 $n \in \mathbb{Z}$：$B^n = \left(\begin{smallmatrix} I & nE_{ii} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$.。设 P 为 $\mathbb{R}[X_{1,1},\dots,X_{2D,2D}]$ 中满足以下条件的多项式：$\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(B^n) = 0$。对于所有 $j \in \{1,\dots,2D\}$，我们固定 $X_{j,j} = 1$；对于除 $X_{i,D+i}$ 之外的 $r \neq l$，我们固定 $X_{r,l} = 0$，并考虑：

$$\widetilde{P} : X_{i,D+i} \mapsto P\left(\begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & X_{i,D+i} & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)$$

~这是一个具有无穷多个根的单变量多项式， $n \in \mathbb{Z}$。因此 P 是~零多项式，且：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha) = 0$。这意味着 P 在所有矩阵$\left(\begin{smallmatrix} I & \alpha E_{ii} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$上都相消。根据扎里斯基闭包的定义：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} I & \alpha E_{ii} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},\ E})$。由于我们已固定任意一个 i，所以：$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_D \in \mathbb{R}$,

$$\left(\begin{smallmatrix} I & \alpha_1 E_{11} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \dots \left(\begin{smallmatrix} I & \alpha_D E_{DD} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} I & \alpha_1 E_{11} + \dots + \alpha_D E_{DD} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E}).$$

这意味着，对于每个对角矩阵 D，都有 $\left(\begin{smallmatrix} I & D \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E})$。

我们对这第一步进行了详细阐述，因为这一步涉及扎里斯基拓扑。其余步骤则是在 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E})$ 与其李代数之间反复来回：得到 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E})$ 中的元素，便可以推导出其李代数中的元素；再通过线性组合和李括号，我们可以在李代数中得到新元素。通过取指数映射，我们可以重新得到 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},E})$ 中的元素，而仅靠乘积和逆元则难以构造这些元素。

最终我们得到 $\mathfrak{g}(E) = \mathfrak{sp}_D(\mathbb{R})$，并由 $\mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$ 的连通性可知 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\{0,1\},\ E}) = \mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$。由此我们可以推断，与该族相关的 Furstenberg 群

$\{h_\omega^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$ 在$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密。应用定理 4，即可推出定理 15。

2. 点相互作用

我们使用（7）和（8）中引入的记号。在这个模型中，随机参数通过施加于特征函数上的界面条件，在每个整数点处发挥作用。这就是我们称之为点相互作用的原因。事实证明，该模型与准一维离散安德森模型这类离散模型十分接近。从随机性的角度来看，传递矩阵具有与离散情形相同的依赖关系，随机性仅在整数点处发挥作用。另一方面，在维数为1 的情形下，以连续拉普拉斯算子取代离散拉普拉斯算子，会改变传递矩阵对能量参数的依赖关系，从而产生临界能量，此时李雅普诺夫指数可能为零。

为了确定与 $\{H_{P,\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 相关的传递矩阵，对于 $E\in\mathbb{R}$，我们考虑微分系统 $H_{P,\omega}u = Eu$ 其解为函数 $u=(u_1,\dots,u_D)$：$\mathbb{R}\to\mathbb{C}^D$，满足 $-u''+V_0u=Eu$ 于 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ 上，并且每个坐标函数 u_i 均满足边界条件：$\forall i\in\{1,\dots,D\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $u_i'(n^+) = u_i'(n^-) + c_i\omega_i^{(n)}u_i(n)$。若 u 是这样的一个解，则从 n^+ 到 $(n+1)^+$ 的传递矩阵 $T_{\omega^{(n)}}^{(n,n+1]}(E)$ 定义为

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \begin{pmatrix} u((n+1)^+) \\ u'((n+1)^+)\end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}^{(n,n+1]}(E)\begin{pmatrix} u(n^+) \\ u'(n^+)\end{pmatrix}.$$

序列 $(T_{\omega^{(n)}}^{(n,n+1]}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 中一个独立同分布的矩阵序列，其共同分布为 μ_E。与准一维离散安德森模型的情形一样，我们显式地计算传递矩阵。为此，我们首先求解开区间 $(n,n+1)$ 上的自由微分系统。由于 V_0 具有 1-周期性，只需在区间 $(0,1)$ 上求解即可。然后我们得到从 n^+ 到 $(n+1)^-$ 的传递矩阵：

$$T_{(n,n+1)}(E) = T_{(0,1)}(E) = \exp\begin{pmatrix} 0 & I_D \\ V_0-EI_D & 0\end{pmatrix}.$$

我们还对每个 $Q\in\mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ 设置了由 $M(Q) = \begin{pmatrix} I_D & 0 \\ Q & I_D\end{pmatrix}$ 定义的 $M(Q)\in\mathcal{M}_{2D}(\mathbb{R})$。然后，利用边界条件，从 $(n+1)^-$ 到 $(n+1)^+$ 的传递矩阵无非是 $M(\mathrm{diag}(c_1\omega_1^{(n)},\dots,c_D\omega_D^{(n)}))$。最后，从 n^+ 到 $n+1$ 的传递矩阵是

从 n^+ 到 $(n+1)^-$ 以及从 $(n+1)^-$ 到 $(n+1)^+$ 的传递矩阵的乘积。

$$T^{(n,n+1]}_{\omega^{(n)}}(E) = M(\mathrm{diag}(c_1\omega_1^{(n)}, \ldots, c_D\omega_D^{(n)}))\, T_{(0,1)}(E).$$

第一个因子包含随机部分，且与能量 E 无关。第二个因子是确定性的，只依赖于 E。

最后，传递矩阵的 独立同分布 性质推出了 Furstenberg 群的如下内部描述:

$$G_{\mu_E} = \overline{< T^{(0,1]}_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \mathrm{supp}\ \nu >}.$$

在[19] 和[14] 中，我们证明了以下结果。

定理 16。 存在一个离散集 $\mathcal{S}_{P,\ 2} \subset \mathbb{R}$ （分别为 $\mathcal{S}_{P,\ 3} \subset \mathbb{R}$），使得对于每个 $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,\ 2}$（分别为 $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,\ 3}$），$G_{\mu_E}$ 在 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密（分别在$\mathrm{Sp}_3(\mathbb{R})$ 中）。

因此，对于 $D = 2$ 和 $D = 3$，$\{H_{P,\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 的几乎处处绝对连续谱为空。

此外，与 $\{H_{P,\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 相关的积分态密度在包含于 $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,\ 2}$ 的每个区间上 ***Hölder*** 连续（若 $D = 2$），而在 $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,\ 3}$ 的每个区间上 ***Hölder*** 连续（若 $D = 3$）。

遗憾的是，我们未能对 $\{H_{P,\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 进行更深入的分析，尤其是没有证明该模型的弱韦格纳估计。

开放问题 1. 在点相互作用模型的框架下证明定理 *4* 的对应结论。

据我们所知，关于随机点相互作用模型的局域化结果寥寥无几。对于离散点相互作用模型，Delyon、Simon 和 Souillard 在[36]中给出了局域化的证明。但这一结果要求随机性具有绝对连续分量，因此不适用于 Bernoulli 情形。Hislop、Kirsch 和 Krishna 关于局域化[55] 的结果也不适用于 Bernoulli 情形，其研究维数为 $d = 1$，2，3；此外，他们还研究了特征值统计[56]，同样是在维数 $d = 1$，2，3。对于 Bernoulli 情形，我们指出 Damanik 、 Fillman 、 Helman 、 Kesten 和 Sukhtaiev 最近的结果 [32] 以及

Damanik、Fillman 和 Sukhtaiev[33] 得到了关于度量树图和离散树图上的点相互作用的局域化结果。

为证明定理16，首先要显式计算 $T_{(0,1)}(E)$ 中的矩阵指数。这促使我们根据能量 E 的取值，将证明分成几种情况。事实上，对于 $E>1$，若 $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$，则 $T_{(0,1)}(E)=\left(\begin{smallmatrix}U & 0\\ 0 & U\end{smallmatrix}\right)R_{\alpha,\beta}\left(\begin{smallmatrix}U & 0\\ 0 & U\end{smallmatrix}\right)$，其中 $\alpha=\sqrt{E-1}$、$\beta=\sqrt{E+1}$，且

$$R_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \frac{1}{\alpha}\sin\alpha & 0\\ 0 & \cos\beta & 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta\\ -\alpha\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & -\beta\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}.$$

对于 $E\in(-1,1)$，将 $R_{\alpha,\beta}$ 中的 α 的余弦和正弦分别替换为余弦和双曲正弦，即可得到相同的表达式。对于 $E<-1$，将 $R_{\alpha,\beta}$ 中所有的余弦和正弦分别替换为双曲余弦和双曲正弦，仍可得到相同的表达式。

借助传递矩阵的这一显式形式，我们将通过多个步骤证明：对于除证明过程中得到的一个离散集之外的所有能量 E，G_{μ_E} 的扎里斯基闭包都等于 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$。首先，利用扎里斯基闭包的定义以及对 ν_i 的支撑所作的假设，我们证明，对于任意对角矩阵 $Q\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$，$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ Q & 0\end{smallmatrix}\right)$ 都属于 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ 的李代数。因此，对于任意对角矩阵 $Q\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$，$M(Q)$ 都属于 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$。接着，我们利用线性李群中的共轭性质，通过 R_α、β 的幂对 $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ Q & 0\end{smallmatrix}\right)$ 进行共轭，并使其仍属于群 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$。选取这样的四个幂，我们得到 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ 的李代数中的一族四个矩阵，并证明除 E 的一个离散集外，这些矩阵在 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 中线性无关。使这四个矩阵的列所构成的 4×4 行列式（其系数为所考虑的四个矩阵的非零系数）为零的 E 值，正是需要排除的值。由此，我们得到一个包含于 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ 的李代数中的四维子空间；取该空间中的特定矩阵，再通过李括号得到新的矩阵。随后，我们考虑一族新的六个矩阵，其非零系数与前述第一族四个矩阵的非零系数互为补集，并且仍属于 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ 的李代数。同样，我们必须排除使行列式 6×6 为零的 E 的一个离散集。由此，我们得到 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})$ 的李代数中的一族十个线性无关的矩阵。由于 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ 的李代数维数为 10，我们便证明了这两个李代数相等；再由 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ 的连通性，可得 $\mathrm{Cl}_Z(G_{\mu_E})=\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$。因此，利用 Goldsheid

以及 Margulis 判据和定理的若干版本 2 （关于绝对连续谱不存在）及定理 8 （关于积分态密度正则性结果），这些结果均针对点相互作用模型的框架进行了调整（见[14]）。

$D = 3$ 情形下的证明与 $D = 2$情形下的证明非常相似。从构造可以看出，我们可以选择 $c_2 = 0$ ，并且仍然得到 G_{μ_E} 在Sp(3)(ℝ)中的Zariski稠密性。这一事实意味着我们正处于随机性传播现象之中。根据Kotani理论，启发式地说，如果模型中的第二层变为确定性的，那么李雅普诺夫指数就不应具有可分离性。然而，第一层和第三层通过确定性势 V_0 与第二层耦合，因此第一层和第三层的随机性会以某种方式传递到第二层。据我们所知，只有另外两篇论文观察到了这一现象[47,48]。

由于构造中使用了显式行列式，我们无法证明对于任意 $D \geq 1$，Furstenberg 群在 Sp(D)(ℝ) 中扎里斯基稠密。

开放问题2. 对于 $D \geq 1$，证明与 $\{H_{P,\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 相关联的 *Furstenberg* 群在 $\mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密。

3. *A* 连续准一维安德森模型（ $D = 2$ ）（I）

在[19], 中，我们获得了以下准一维连续安德森-伯努利模型的李雅普诺夫指数可分离性的首个结果：

$$\forall \omega \in \Omega,\ H_\omega^{(2)} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_2 + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n) & 0 \\ 0 & \omega_2^{(n)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \tag{34}$$

作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$。

定理17 （[19]）。 存在一个可数集 $\mathcal{C}$，使得对于任意 $E \in (2,\ +\infty) \setminus \mathcal{C}$， $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega\in\Omega}$ 的 *Furstenberg* 群在 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ 中是扎里斯基稠密的。因此

$$\forall E \in (2, +\infty) \setminus \mathcal{C},\ \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0$$

并且那里 不存在 $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega\in\Omega}$ *in* $(2,\ +\infty$ 的几乎处处绝对连续谱).

对于固定的 $E \in \mathbb{R}$，传递矩阵 $T_{\omega^{(0)}}(E)$ 的形式为 $\exp\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ V_{\omega^0} & -EI_2 \end{pmatrix}()$，其中 $V_{(0)\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 \\ 1 & \omega_2^{(0)} \end{pmatrix}$，而 I_2 是 2 阶单位矩阵。因此，有必要计算一个指数矩阵，而这一次该矩阵取决于 ω，这与点相互作用模型的情形相反。这大大增加了后续计算的复杂性。

我们注意到，这里我们不像离散情形或点相互作用情形那样在第一步使用扎里斯基稠密性，而是利用环面 $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ 上轨道稠密性的论证，因此必须排除一个可数能量集。

只需排除一个可数能量集，就足以应用定理 2并得出不存在绝对连续谱；但这不足以应用定理 4，后者使我们能够从李雅普诺夫指数的可分离性推导出安德森局域化。事实上，在我们的构造中，没有任何结果能保证这个可数集 $\mathcal{C}$ 在 $(2,+\infty)$中不是稠密集，因此我们无法断定存在一个非平凡的能量区间，使得 Furstenberg 群具有扎里斯基稠密性。我们将看到，如何改进该定理证明中使用的代数技巧，从而得出 Furstenberg 群实际上在通常拓扑意义下稠密于 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$，对于 $(2,+\infty)$ 中的能量，除一个离散集外均成立。

C. Breuillard-Gelander 判据

证明 $\mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$ 的子群在 $\mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$ 中扎里斯基稠密，是一个构造性问题，且可能难以实现。上一节中，传递矩阵由矩阵指数给出，而随机参数与能量参数混杂其中，这使得显式构造变得困难，因此我们无法再沿用离散准一维情形或点相互作用模型中的构造方法。为了改进定理 17所得的结果，我们因而有必要找到一种新的代数判据，以便在具有合理半单性和连通性性质的李群中，得到子群的稠密性，进而得到其 Zariski 稠密性。因此，本节将介绍一种判据，把如下问题：由有限个元素生成的半单李群 G 的子群是否稠密，转化为重构 G的李代数的问题。

定理 18 (Breuillard 和 Gelander[23])。 若 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的实半单连通李群，那么存在单位元的一个邻域 $\mathcal{O} \subset G$，在该邻域上 $\log = \exp^{-1}$是良定义的微分同胚，并且满足 g_1、……、 $g_m \in \mathcal{O}$ 生成 G 的稠密子群，当且仅当 $\log(g_1)$、……、 $\log(g_m)$ 生成 $\mathfrak{g}$。

这里使用“生成”一词时，指的是李代数意义上的生成，因此同时考虑线性组合和李括号。

定理18 为我们提供了明确的思路，说明了当我们想要证明辛群的一个子群在辛群中稠密时应当如何着手。我们必须先构造子群中的元素（在我们的情形中即 Furstenberg 群），使它们位于 $\mathcal{O}$ 定理18 应用于辛群时给出的邻域中，然后计算这些元素的对数。接着，我们考虑由这些对数生成的李代数，并证明它等于辛群的李代数。

1. D = $D = 2$ 时的连续准一维安德森模型（II）

在[12],中，我得到了以下结果，对定理17作出了改进。

定理 19。存在一个离散集 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$，使得对于任意 $E \in (2, +\infty) \setminus \mathcal{S}$， $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega\in\Omega}$ 的 *Furstenberg* 群在$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$中稠密（因而是扎里斯基稠密的）。因此，$\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega\in\Omega}$ 在包含于 $(2, +\infty) \setminus \mathcal{S}$ 的每个紧区间与 $\{H_\omega^{(2)}\}_{\omega\in\Omega}$的几乎必然谱的交集中都表现出动力学局域化。

首先，我们必须从传递矩阵构造出由定理 18 应用于群 $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ 得到的 I_4 的邻域$\mathcal{O}$ 中的矩阵。这一次，我们不想使用环面上的轨道稠密性论证，因为那样会像之前一样，得到一个可数稠密的临界能量集，而不是离散集。相反，我们将使用同时丢番图逼近论证，由此可知存在 $m_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathbb{N}^*$，使得 $1 \le m_{\omega^{(0)}}(E) \le M$ 且 $(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)} \in \mathcal{O}$，对任意固定的 $M \ge 1$ 均成立。

第二步是计算矩阵 $(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)}$ 的对数，我们刚刚证明了这些矩阵属于 $\mathcal{O}$。当然，即使这些矩阵写成指数映射的形式，也没有任何理由表明这些指数映射的参数属于 $\log\mathcal{O}$，而且先验地

$$\log(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)} \neq m_{\omega^{(0)}}(E) \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ V_\omega^{(0)} - EI_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，这些对数的表达式使得证明它们生成李代数 $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ 变得困难。我们仍然能够进行非常具体的计算和构造，其中与点相互作用的情形一样，会涉及许多行列式，并据此推导出需要排除的临界能量离散集。

鉴于此方法中所进行的计算，显然，要继续采用这种非常显式的方法来处理矩阵势属于 $\mathcal{M}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$ 的准一维算子（对任意 $D \geq 1$）是很困难的。为了克服这些困难并获得更一般的结果，我们必须付出代价：引入一个强无序参数，而它在我们的首批结果中并不存在，离散准一维安德森模型的相关结果中也没有这一参数。

2. D ⩾ 1 时的连续准一维安德森模型

再次采用（30）中引入的记号。对于任意 $\omega \in \Omega$ 以及任意实数 $\ell > 0$，我们引入算子

$$H_{\omega,\ell}^{(D)} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I_{\mathrm{D}} + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1\omega_1^{(n)}\mathbf{1}_{[0,\ell]}(x-\ell n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_D\omega_D^{(n)}\mathbf{1}_{[0,\ell]}(x-\ell n) \end{pmatrix}, \tag{35}$$

作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^D$。数值 c_1、……、c_D 均为非零实数； V_0 表示由三对角矩阵定义的乘法算子，该矩阵的对角线元素为零，上、下对角线元素均为 1； $\mathbf{1}_{[0,\ell]}$ 是区间 $[0,\ell]$ 的示性函数。

实数 $\ell > 0$可以看作衡量无序强度的参数。事实上，在一个长度固定的区间内， ℓ 越小，这个固定区间中包含的序列 $(\omega^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ 的随机变量就越多，它们分布在格点 $\ell\mathbb{Z}$ 的每个点上。例如，区间 $[0,1]$ 将包含 $\mathrm{E}(\frac{1}{\ell})$ 个随机变量。因此，当 ℓ趋近于 0 时，随机性会越来越多地充满 $\mathbb{R}$的有界区间。

令 $\mathcal{O}$ 为 Breuillard 和 Gelander 定理应用于 D 阶辛群后，在 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$ 中给出的 $I_{2\mathrm{D}}$ 的邻域。我们设

$$\mathrm{d}_{\log\mathcal{O}} = \max\{R > 0 \mid B(0,R) \subset \log\mathcal{O}\},$$

其中， $B(0,R)$ 是以 0 为中心、半径为 $R>0$ 的开球；其所依据的拓扑由 $\mathbb{R}^{2D}$ 上的欧几里得范数所对应的矩阵范数，在 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 的李代数 $\mathfrak{sp}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$ 上诱导而来。

令 $M_{\omega^{(0)}} = V_0 + \mathrm{diag}(c_1\omega_1^{(0)}, \ldots, c_D\omega_D^{(0)})$。矩阵 $M_{\omega^{(0)}}$ 是对称的，因此其特征值 $\lambda_1^{\omega^{(0)}}, \ldots, \lambda_D^{\omega^{(0)}}$ 均为实数。我们设：

$$\lambda_{\min} = \min_{\omega^{(0)}\in\{0,1\}^D} \min_{1\le i\le D} \lambda_i^{\omega^{(0)}}, \qquad \lambda_{\max} = \max_{\omega^{(0)}\in\{0,1\}^D} \max_{1\le i\le D} \lambda_i^{\omega^{(0)}} \tag{36}$$

以及 $\lambda_0 = \frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{2}$。我们还设 $\ell_C := \ell_C(D) = \min\left(1, \mathrm{d}_{\lambda_0}^{\log \mathcal{O}}\right)$，并且对每个 $\ell < \ell_C$，

$$I(\ell, D) = \left[\lambda_{\max} - \frac{\mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}}{\ell}, \lambda_{\min} + \frac{\mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}}{\ell}\right] \subset \mathbb{R}. \tag{37}$$

W采用这些记号，我们陈述[15]中得到的局域化结果。

定理 20 ([15])。 对于每个 $\ell \in (0, \ell_C)$ 以及每个 $E \in I(\ell, D)$，$\{H_{\omega,\ell}^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$ 的 *Furstenberg* 群等于 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$。因此，族 $\{H_{\omega,\ell}^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$ 在每个紧区间 $I \subset I(\ell, D) \cap \Sigma$上都呈现动力学局域化。

To p要证明此定理，只需证明第一点并使用定理4 .

对于 $E \in \mathbb{R}$、 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\omega^{(n)} \in \tilde{\Omega}^{\otimes D}$，令 $M_{\omega^{(n)}}(E) = V_0 + \mathrm{diag}(c_1\omega_1^{(n)}, \ldots, c_N\omega_D^{(n)}) - EI_{\mathrm{D}}$. 那么，如果我们还定义

$$X_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathrm{D}} \\ M_{\omega^{(n)}}(E) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\mathrm{D}}(\mathbb{R}), \tag{38}$$

通过求解具有常系数的微分系统 $H_\omega^{(D)}{}_{,\ell} u = Eu$ 在 $[\ell n, \ell(n+1)]$,上

$$\forall \ell > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall E \in \mathbb{R},\ T_{\omega^{(n)}}(E) = \exp\left(\ell X_{\omega^{(n)}}(E)\right). \tag{39}$$

能够将传递矩阵 $T_{\omega^{(n)}}(E)$ 写成矩阵指数的形式，对于后续内容非常重要，尤其是为了能够应用定理 18。

我们有与族 $\{H_{\omega,\ell}^{(D)}\}_{\omega\in\Omega}$ 相关的富斯滕伯格群 G_{μ_E} 的内部描述：

$$\forall E \in \mathbb{R},\ G_{\mu_E} = \overline{< T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \mathrm{supp}\ \nu >}.$$

由于 $\{0,1\}^D \subset \mathrm{supp}\ \nu$, $\overline{< T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N >} \subset G_{\mu_E}$.

定理 18 为我们的证明提供了思路。

1. 我们构造 ℓ_C和 $I(\ell, D)$，使得对于所有 $\ell \in (0, \ell_C)$ 以及所有 $E \in I(\ell, D)$，任意 $\omega^{(0)} \in \{0,1\}^D$ 下都有 $T_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathcal{O}$，其中 $\mathcal{O}$ 是由定理 18 应用于 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$ 得到的 I_{2D} 的邻域。

2. 对于 $\ell < \ell_C$，我们计算 $\log T_{\omega^{(0)}}(E)$。

3. 最后，我们证明 $\mathrm{Lie}\{\log T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^D\} = \mathfrak{sp}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$。

最后一点将由以下代数引理推出。我们在此不作证明，但[15]中对此作了详细证明。

引理 1. 设 $D \geq 1$ 和 $E \in \mathbb{R}$。

李代数 a 由集合 $\{X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^D\}$ 生成的代数等于 $\mathfrak{sp}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})$.

让我们回到定理 20 证明的第一步。首先，(E) 的奇异值为 1、$(\lambda_1^{\omega^{(0)}} - E)^2$、.....、$(\lambda_D^{\omega^{(0)}} - E)^2$, 因此:

$$||X_{\omega^{(0)}}(E)|| = \max\left(1, \max_{1 \leq i \leq D} |\lambda_i^{\omega^{(0)}} - E|\right),$$

其中，$||\ ||$是与 $\mathbb{R}^{2D}$上的欧几里得范数相关联的矩阵范数。

由于邻域 $\mathcal{O}$ 仅取决于 $\mathrm{Sp_D}(\mathbb{R})$，因而仅取决于 D，我们构造一个 E 的取值区间，使得当 ℓ 足够小时，

$$\forall \omega^{(0)} \in \{0,1\}^D,\ 0 < \ell ||X_{\omega^{(0)}}(E)|| < \mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}, \tag{40}$$

或者等价地

$$0 < \ell \max\left(1, \max_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^D} \max_{1 \leq i \leq D} |\lambda_i^{\omega^{(0)}} - E|\right) < \mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}\,. \tag{41}$$

假设 $\ell \leq \mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}$，并令 $r_\ell = \frac{1}{\ell}\mathrm{d}_{\log \mathcal{O}} \geq 1$。那么，由于 $r_\ell \geq 1$，集合:

$$I(\ell, D) = \left\{ E \in \mathbb{R} \;\middle|\; \max\left(1, \max_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^D} \max_{1 \leq i \leq D} |\lambda_i^{\omega^{(0)}} - E|\right) \leq r_\ell \right\} \tag{42}$$

可写成以下交集,

$$I(\ell, D) = \bigcap_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^D} \bigcap_{1 \leq i \leq D} [\lambda_i^{\omega^{(0)}} - r_\ell, \lambda_i^{\omega^{(0)}} + r_\ell]. \tag{43}$$

根据 $\lambda_{\min}$、 $\lambda_{\max}$ 和 λ_0 在（36）中的定义，若 $\lambda_0 < r_\ell$， I（ℓ， D）$\neq \emptyset$ 更准确地说，I（ℓ， D）$= [\lambda_{\max} - r_\ell, \lambda_{\min} + r_\ell]$。该区间以$\frac{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}{2}$为中心，长度为$2r_\ell - 2\lambda_0 > 0$，当 $+\infty$ 趋于 ℓ 时趋于 0^+。

此外， $\lambda_{\min}$、 $\lambda_{\max}$ 和 $\mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}$ 仅依赖于 D， $I(\ell, D)$ 仅依赖于 ℓ 和 D，且条件 $\lambda_0 < r_\ell$ 等价于 $\ell < \mathrm{d}_{\lambda_0}^{\log \mathcal{O}} = \ell_C$. 我们刚刚构造了 ℓ_C 和$I(\ell, D)$，使得

$$\forall \ell \in (0, \ell_C),\ \forall E \in I(\ell, D),\ 0 < \ell ||X_{\omega^{(0)}}(E)|| \leq \mathrm{d}_{\log \mathcal{O}}\,. \tag{44}$$

现在回顾定理 18 中 $\mathcal{O}$ 的定义， exp 是从 $\log \mathcal{O}$ 到 $\mathcal{O}$的微分同胚。因此，对任意 $E \in I(\ell, D)$，$\log T_{\omega^{(0)}}(E) = \ell X_{\omega^{(0)}}(E)$，这便直接引出了证明的第三步。

第三步只需应用引理 1 即可得到：

$$\forall \ell > 0,\ \forall E \in \mathbb{R},\ \mathrm{Lie}\{\ell X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^D\} = \mathfrak{sp}_{\mathrm{D}}(\mathbb{R})\,, \tag{45}$$

再应用定理 18，即完成证明。

借助参数 ℓ，我们无需使用同时丢番图逼近即可得到 $\mathcal{O}$中的元素。计算对数也没有困难，因为这次我们可以选取 ℓ，使算得的对数完全落在 $\log \mathcal{O}$内。最后，由于对数的代数表达式足够简单，李代数的代数构造可以针对任意 $D \geq 1$ 进行。因此，我们无需手工构造线性无关矩阵族，也无需借助行列式证明其线性无关性。此外，我们的构造中没有用到行列式，这意味着与定理 16 和定理 19不同，此处无需排除任何由临界能量组成的离散集。另一方面，发生局域化的区间依赖于参数 ℓ，但它有一个好性质：当 ℓ 趋于 0^+时，该区间趋于整个实数轴。

3. 推广至一般相互作用势

利用 Breuillard 和 Gelander 定理获得李雅普诺夫指数的可分离性，使我们需要证明由有限个矩阵生成的李代数具有某种代数性质。正如[22], 这是一个开条件，而且更好的是， n元组

$\mathfrak{sp}_D(\mathbb{R})$ 中不生成稠密子群的元素都包含在一个闭解析子簇中。这使我们能够扰动相互作用势 V_0，同时保持（35）中的 Furstenberg 群等于 $\mathrm{Sp}_D(\mathbb{R})$ 这一性质，对 $I(\ell, D)$ 中的任意能量均成立，其中 $\ell \in (0, \ell_C)$。

在（35）中，我们将矩阵 V_0 替换为任意一个 V 阶的实对称矩阵 $D \geq 1$。记 S_D（$\mathbb{R}$）为 $D \times D$阶实对称矩阵的空间。

定理 21 （[16]）。对于几乎处处的 $V \in \mathrm{S}_D$（$\mathbb{R}$），存在一个有限集 $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$ 和 $\ell_C = \ell_C$（D, V）> 0，使得对于每个 $\ell \in$（0, ℓ_C），存在一个紧区间 I（ℓ, D, V）$\subset \mathbb{R}$, 满足：

1. $\forall E \in I$（ℓ, D, V）$\setminus \mathcal{S}_V$, $G_{\mu_E} = \mathrm{Sp}_D$（$\mathbb{R}$）。2. 如果（$\ell$, D, V）$\setminus \mathcal{S}_V$是一个具有 $\Sigma \cap I \neq \emptyset$的开区间，那么 $H^{(D)}_{\omega,\ell}$, 在 $\Sigma \cap I$ 中表现出动力学局域化。

在此定理中，一般性是指相对于 $\mathrm{S}_D(\mathbb{R})$ 上的勒贝格测度而言的，其中该测度已与 $\mathbb{R}^{\frac{D(D+1)}{2}}$ 上的勒贝格测度对应。这正是[16]中所陈述的结果。然而，该定理的证明蕴含着一个更强的结果，即扎里斯基一般性：可以将 V 选取在 $\mathrm{S}_D(\mathbb{R})$ 的一个稠密扎里斯基开集中。

所涉及对象的代数性质使我们能够在 V 中证明一个一般性结果，并证明临界能量集合是有限的。我们仅概述证明中用到的思路：非零单变量多项式的零点集是有限的；更一般地，非零多变量多项式的零点集的勒贝格测度为零。更精确的证明请参见 [16]。

V. 幺正情形

正如我们将在四个不同的例子中看到的，对于薛定谔型准一维模型，辛群所发挥的作用将由所谓的洛伦兹群承担。

惯性指数为 (D, D) 的洛伦兹群 $\mathrm{U}(D, D)$ 定义为保持形式 $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{I_D} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I_D} \end{pmatrix}$ 的 $2D \times 2D$ 阶矩阵所构成的集合，其中 T 属于 $\mathrm{U}(D, D)$ 当且仅当 $T^* \mathcal{L} T = \mathcal{L}$。

为了将辛框架下关于李雅普诺夫指数的结果转化到洛伦兹群框架中，可以使用凯莱变换。通过凯莱变换，

群 U(D, D) 与复辛群酉等价。更确切地说，若$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{I_D} & -i\mathrm{I_D} \\ \mathrm{D} & \mathrm{D} \\ i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2D}$(ℂ) 且 $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{D} & 0^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$，则 U($D, D$) $= C$Sp$_{\mathrm{D}}$(ℂ)C^*，其中

$$\mathrm{Sp_D}(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_{2D}(\mathbb{C}) | M^* J M = J\}.$$

为了直接应用[11], 的结果，我们必须从复辛群转到实辛群。为此，我们遵循[7] 并引入一个映射，将复系数矩阵的实部和虚部分离出来，并将它们分块排列：

$$\begin{aligned} \pi \ : \ & \mathcal{M}_{2D}(\mathbb{C}) \ \to \ \mathcal{M}_{4D}(\mathbb{R}) \\ & A + iB \ \ \mapsto \ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

最后， $\pi(C^* \cdot$U$(D, D) \cdot C) \ \subset$ 属于 Sp$_{2\mathrm{D}}$(ℝ)，因此可以利用辛群中关于李雅普诺夫指数的结果来研究酉情形下的李雅普诺夫指数。

A. 酉安德森模型

我们介绍的第一个一维酉模型局域化结果，是安德森模型的酉类比。Hamza、Joye 和 Stolz 在[52]中研究了该模型。我们介绍他们的结果，并沿用他们的记号。

首先，考虑两个 2×2 酉矩阵 $B_1 = \begin{pmatrix} r & t \\ -t & r \end{pmatrix}$和 $B_2 = \begin{pmatrix} r & -t \\ t & r \end{pmatrix}$，其中$(r, t) \in \mathbb{R}^2$满足 $r^2 + t^2 = 1$。这些实数对应反射系数和透射系数。接着，令 U_e 为定义在 ℓ^2(ℤ)上的酉矩阵算子，它由相同的 B_1块直和而成，且各块从偶数指标处开始。再构造 U_o，它是定义在 ℓ^2(ℤ)上的酉矩阵算子，由相同的 B_2块直和而成，且各块从奇数指标处开始。令 $S = U_e U_o$ 为定义在 ℓ^2(ℤ)上的带有带状结构的酉算子。

接着，引入概率空间 (Ω $\mathcal{F}, \mathbb{P}$)，其中 Ω $= \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$（满足 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$），$\mathcal{F}$是由博雷尔集的圆柱体生成的 σ-代数，而 $\mathbb{P} = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}} \mu$ 中 μ 是定义在 $\mathbb{T}$上的非平凡概率测度。假设 μ绝对连续且具有有界密度。然后，在 (Ω $\mathcal{F}, \mathbb{P}$) 上定义一列随机变量 $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$，它们取值于 $\mathbb{T}$，且独立同分布，共同分布为 μ。利用这些随机变量，可以定义对角随机

算子 D_ω，它作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$，并定义为：

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{Z}, D_\omega e_k = \mathrm{e}^{-i\theta_k(\omega)} e_k$$

其中，$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$的标准基。

酉安德森模型是作用于$\ell^2(\mathbb{Z})$的酉算子族 $\{U_\omega\}_{\omega\in\Omega}$，其中对于每个 $\omega \in \Omega$，$U_\omega = D_\omega S$。

该族 $\{U_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 关于 2-移位在 Ω 下具有遍历性，并且可以证明，其几乎必然谱等于：$\Sigma = \{\mathrm{e}^{ia} \mid a \in [-\lambda_0, \lambda_0] - \mathrm{supp}\ \ \mu\} \subset \mathbb{S}^1$ 其中$\lambda_0 = \arccos(r^2 - t^2)$[52]。

对于 $\omega \in \Omega$ 和 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$，令 $G_\omega(z) = (U_\omega - z)^{-1}$，并且对于 k、$l \in \mathbb{Z}$，令 $G_\omega(k, l, z) = \langle e_k | G_\omega(z) e_l \rangle$ 为 U_ω 的格林函数。

利用分数阶矩方法[2]，，Hamza、Joye 和 Stolz 证明了以下结果：

定理 22 ([52])。对于每个 $t < 1$，都存在 $s > 0$、$C < \infty$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\mathbb{E}(|G_\omega(k, l, z)|^s) \leq C\mathrm{e}^{-\alpha|k-l|}$$

对于所有满足 $0 < ||z| - 1| < \frac{1}{2}$ 的 $z \in \mathbb{C}$，以及所有 k，$l \in \mathbb{Z}$。因此，$\{U_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 在整个 Σ 上都表现出动力学局域化。

定理 22 的证明依赖于传递矩阵形式体系，并利用 Furstenberg 定理得到李雅普诺夫指数的正性，从而可以证明传递矩阵某些乘积的指数衰减结果。

令 $\omega \in \Omega$。考虑方程 $U_\omega \psi = z\psi$，其中 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，且 ψ 不一定属于 ℓ^2（$\mathbb{Z}$）。对于所有 $(\theta, \eta) \in \mathbb{T}^2$，令

$$T_z(\theta, \eta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-i\eta} & \frac{r}{t}\left(\mathrm{e}^{i(\theta-\eta)} - \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-i\eta}\right) \\ \frac{r}{t}\left(1 - \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-i\eta}\right) & -\frac{z}{t^2}\mathrm{e}^{i\theta} + \frac{r^2}{t^2}\left(1 + \mathrm{e}^{i(\theta-\eta)} - \frac{1}{z}\mathrm{e}^{-i\eta}\right) \end{pmatrix}.$$

于是，有

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \begin{pmatrix} \psi_{2k+1} \\ \psi_{2k+2} \end{pmatrix} = T_z(\theta_{2k}(\omega), \theta_{2k+1}(\omega)) \begin{pmatrix} \psi_{2k-1} \\ \psi_{2k} \end{pmatrix}.$$

令 $\gamma(z)$ 为与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中的独立同分布 矩阵序列 $(T_z(\theta_{2k}(\omega)\ \theta_{2k+1}(\omega)))_{k\in\mathbb{Z}}$ 相关的李雅普诺夫指数。以与离散情形非常相似的方式使用 Furstenberg 定理。

标量值一维安德森模型，已在[53] 中得到证明

(i) 若 supp $\mu = \{a, b\}$ 满足 $|a-b| = \pi$，则 $\gamma(-a) = \gamma(-b) = 0$，且对所有 $z \in \mathbb{T}\backslash\{-a, -b\}$，$\gamma(z) > 0$。

(ii) 若 $\{a, b\} \subset$ supp μ 满足 $|a - b| \notin \{0, \pi\}$，则对每个 $z \in \mathbb{T}$，$\gamma(z) > 0$。

李雅普诺夫指数为正这一结果意味着，对每个紧致的 $K \subset \mathbb{C}$，都存在 $\alpha > 0$、$\delta \in (0,1)$ 和 $C < \infty$，使得：$\forall z \in K$、$\forall n \in \mathbb{N}$、$\forall v \in \mathbb{C}^2$、$||v|| = 1$,

$$\mathbb{E}(||T_z(\theta_{2(n-1)}(\cdot), \theta_{2(n-1)+1}(\cdot)) \cdots T_z(\theta_0(\cdot), \theta_1(\cdot))v||^{-\delta}) \leq C\mathrm{e}^{-\alpha n}.$$

这一估计是定理 22 的证明的核心。

B. CMV 矩阵

酉安德森模型是一类更一般的一维酉随机算子的特例，这类算子称为 CMV 矩阵，其名称源自作者[28]，他们使这类矩阵广为人知。

设 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个复数序列，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$|\alpha_n| < 1$。如果$\rho_n = (1 - |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}$，那么与 Verblunsky 序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 相关联的 CMV 矩阵是作用于 $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ 的算子，其对应的半无限矩阵为,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_0} & \overline{\alpha_1}\rho_0 & \rho_1\rho_0 & & & & \\ \rho_0 & -\overline{\alpha_1}\alpha_0 & -\rho_1\alpha 0 & & & & \\ & \overline{\alpha_2}\rho_1 & -\overline{\alpha_2}\alpha_1 & \overline{\alpha_3}\rho_2 & \rho_3\rho_2 & & \\ & \rho_2\rho_1 & -\rho_2\alpha_1 & -\overline{\alpha_3}\alpha_2 & -\rho_3\alpha_2 & & \\ & & & \overline{\alpha_4}\rho_3 & -\overline{\alpha_4}\alpha_3 & \overline{\alpha_5}\rho_4 & \rho_5\rho_4 \\ & & & \rho_4\rho_3 & -\rho_4\alpha_3 & -\overline{\alpha_5}\alpha_4 & -\rho_5\alpha_4 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{46}$$

也定义与 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 相关联的扩展 CMV 矩阵，其中 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个复数序列，对每个 $n \in \mathbb{Z}$, $|\alpha_n| < 1$，该矩阵作为作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ 的算子，由下列无限矩阵给出,

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \overline{\alpha_0}\rho_{-1} & -\overline{\alpha_0}\alpha_{-1} & \overline{\alpha_1}\rho_0 & \rho_1\rho_0 & & & & \\ \rho_0\rho_{-1} & -\rho_0\alpha_{-1} & -\overline{\alpha_1}\alpha_0 & -\rho_1\alpha 0 & & & & \\ & & \overline{\alpha_2}\rho_1 & -\overline{\alpha_2}\alpha_1 & \overline{\alpha_3}\rho_2 & \rho_3\rho_2 & & \\ & & \rho_2\rho_1 & -\rho_2\alpha_1 & -\overline{\alpha_3}\alpha_2 & -\rho_3\alpha_2 & & \\ & & & & \overline{\alpha_4}\rho_3 & -\overline{\alpha_4}\alpha_3 & \overline{\alpha_5}\rho_4 & \rho_5\rho_4 \\ & & & & \rho_4\rho_3 & -\rho_4\alpha_3 & -\overline{\alpha_5}\alpha_4 & -\rho_5\alpha_4 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{47}$$

CMV 矩阵是雅可比矩阵的酉类比，最初是在研究单位圆上的正交多项式时引入的。事实上，它们出现在映射 $f \mapsto zf$ 在 $L^2(\mathbb{S}^1, \mathrm{d}\mu)$ 下的表示中，其所用基底由劳伦多项式集合 $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots\}$ 根据 $L^2(\mathbb{S}^1,\mathrm{d}\mu)$上的通常内积正交归一化而得。这里 $\mathbb{S}^1$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的单位圆，μ 表示 $\mathbb{S}^1$ 上的一个概率测度，且其支撑不是有限集。关于这一广阔领域的全面综述，参见[78,79] 。

为了在扩展 CMV 矩阵中引入随机性，令 ν 为支撑在 $\mathbb{C}$ 中开单位圆盘的紧集 S 上的 Borel 概率测度，其中该紧集至少包含两个点。令 $\Omega = S^{\mathbb{Z}}$，并考虑 $(\alpha_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}} = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Omega$，这是一个服从共同分布 ν的独立同分布随机变量序列。特别地，ω_n 可以是伯努利变量。

随机 Verblunsky 序列 $(\alpha_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}}$ 定义了一个随机扩展 CMV 矩阵 $\mathcal{E}_\omega$。该族 $\{\mathcal{E}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $\mathbb{Z}$-遍历的。对于这样的遍历族，目前没有可用的多尺度分析或 Kunz-Souillard 方法，而 Bernoulli 情形下的首个局域化结果见于[24] （定理 7.1–7.2）：

定理 23。 存在一个至多包含三个点的集合 $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^1$，使得对于每个紧区间 $I \subset \mathbb{S}^1 \setminus \mathcal{D}$，族 $\{\mathcal{E}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 在 I 上呈现安德森局域化和动力学局域化。

这一结果也由 Zhu 使用略有不同的技巧在[?] （定理 1–2）中得出。在这两种情况下，证明都基于 Furstenberg 定理和大偏差估计。

还要注意，CMV 矩阵与带硬币量子行走之间存在深刻联系，正如[1,82]中所述。事实上，对于每个由单个硬币和单次平移构成的带硬币量子行走，都可以按照[24,82]中的说明关联一个随机 CMV 算子。这使我们能够通过研究相应的随机 CMV 算子，推导出此类带硬币量子行走的谱性质和动力学性质。

C. 准一维 Chalker-Coddington 模型

本节回顾[7]中介绍的 Chalker-Coddington 模型准一维版本的一个局域化结果。引入该模型是为了帮助理解量子霍尔效应的离域相变。

与酉安德森模型一样，我们首先引入两个参数 $r,t\in[0,1]$，使得 $r^2+t^2=1$，它们对应于反射系数和透射系数。若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$，令 $q=(q_1,q_2,q_3)\in\mathbb{T}^3$，并设 $S(q)$ $=\left(\begin{smallmatrix}q_1q_2 & 0\\ 0 & \frac{q_1}{q_2}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}t & -r\\ r & t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}q_3 & 0\\ 0 & \frac{1}{q_3}\end{smallmatrix}\right)$.

令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，其中 $\Omega=(\mathbb{T}^6)^{(2\mathbb{Z})^2}$，$\mathcal{F}$是由博雷尔集的圆柱体生成的 σ-代数，而 $\mathbb{P}=\bigotimes_{(2\mathbb{Z})^2}\lambda^{\otimes 6}$，其中 λ 是 $\mathbb{T}$上的 Haar测度。

对 $p\in\Omega$ 及任意 $j,k\in\mathbb{Z}$, $p(2j,2k)$，定义 $=(p_e(2j,2k)\ p_o(2j+1,2k+1))$，其中$p_e($ $2j,2k)=(p_1(2j,2k)\ p_2(2j,2k)\ p_3(2j,2k))$，且 $p_o(2j,2k)=(p_4(2j,2k)\ p_5(2j,2k)\ p_6(2j,2k))$。

采用这些记号，在 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上引入酉算子族，$\hat{}\ \hat{}\ \hat{}\{U(p)\}_{p\in\Omega}$其中对每个 $p\in\Omega$，$U(p)$ 由其矩阵元定义，$U(p)_{\mu,\ \nu}=\langle e_\mu|\hat{}U(p)e_\nu\rangle$ 对于 $\mu,\nu\in\mathbb{Z}^2$，且 $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{Z}^2}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 的标准基。令 $\hat{}\ U(p)_{\mu,\ \nu}=0$但以下块除外

$$\begin{pmatrix}\hat{U}(p)_{(2j+1,2k),(2j,2k)} & \hat{U}(p)_{(2j+1,2k),(2j+1,2k+1)}\\ \hat{U}(p)_{(2j,2k+1),(2j,2k)} & \hat{U}(p)_{(2j,2k+1),(2j+1,2k+1)}\end{pmatrix}:=S(p_e(2j,2k)),\forall j,k\in\mathbb{Z}$$

and

$$\begin{pmatrix}\hat{U}(p)_{(2j+2,2k+2),(2j+2,2k+1)} & \hat{U}(p)_{(2j+2,2k+2),(2j+1,2k+2)}\\ \hat{U}(p)_{(2j+1,2k+1),(2j+2,2k+1)} & \hat{U}(p)_{(2j+1,2k+1),(2j+1,2k+2)}\end{pmatrix}:=S(p_o(2j+1,2k+1)),\forall j,k\in\mathbb{Z}.$$

关于这一族称为 Chalker-Coddington 模型的酉算子的完整物理解释，请参阅[7]。这些作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上的算子并非准一维随机算子。为了纳入准一维随机算子的框架，需要将 U (p) 的作用限制在一个方向上。令 $M\in\mathbb{N}$。设 $\mathbb{Z}_{2M}=\mathbb{Z}/(2M\mathbb{Z})$ 表示周长为 $2M$ 的离散圆。令 $p\in\Omega$，并考虑将 $\hat{}U(p)$ 限制到 $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2M})$ 上，记为 $U(p):\ \ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2M})\to\ell^2($ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2M})$，其定义如下：

$$\forall(\mu,\nu)\in(\mathbb{Z}^2)^2,\ U(p)_{\mu,\nu}=\hat{U}(p)_{(\mu_1,\mu_2\bmod 2M),(\nu_1,\nu_2\bmod 2M)}.$$

族 $\{U(p)\}_{p\in\Omega}$ 是一个 $2\mathbb{Z}$-遍历的准一维酉算子族，称为圆柱体上的 Chalker-Coddington 模型。将这个算子族改写为一个酉等价族后，可以得到广义特征函数的渐近行为由一列独立同分布传递矩阵决定，这些矩阵属于

洛伦兹群 U(M, M)。与这列传递矩阵相关联的是一个 Furstenberg 群和 $2M$ 个李雅普诺夫指数，它们成对互为相反数。因此只需考虑正指数 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_M \geq 0$。

已证明[7]（定理 6.1）这些李雅普诺夫指数彼此不同且均严格为正。该结果是通过证明 Furstenberg 群等于整个洛伦兹群 $\mathrm{U}(M, M)$而得出的。由连通性可知，只需证明李代数相等即可。从传递矩阵重构洛伦兹群李代数的方法，与下一节关于随机散射拉链模型中所采用的方法非常相似，相关细节届时将进一步说明。需要指出的是，[7] 的构造早已完成，并且对[17]中的构造产生了重要启发。

利用李雅普诺夫指数严格为正这一结果，以类似于[52] 中的方式应用分数阶矩方法，并采用谱平均（这也是随机性通过 Haar测度而非奇异测度给出的原因之一），可在[8] 中得到以下局域化结果：

定理 24。设 $M \in \mathbb{N}$，并假设 $rt \neq 0$。令 φ 为满足 $(t, r) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$的角。则存在 $\varphi_0 > 0$，使得当 $|\varphi \bmod \frac{\pi}{2}| < \varphi_0$ 时，圆柱体上的 *Chalker-Coddington* 模型 $\{U(p)\}_{p\in\Omega}$在其几乎必然谱上呈现动力学局域化。

D. 随机散射拉链

散射拉链是一种系统，它由一系列散射事件首尾连接而成，每个散射事件都具有固定的偶数个出射通道和入射通道。对于每个散射元件以及分别考察的所有元件，出射通道数均等于入射通道数。更准确地说，散射拉链由散射矩阵序列 $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 描述，这些矩阵属于酉群 U($2D$) 的子集 $\mathrm{U}(2D)_{\mathrm{inv}}$，其定义为

$$\mathrm{U}(2D)_{\mathrm{inv}} = \{ S(\alpha, U, V) \in \mathrm{U}(2D) \mid \alpha^*\alpha < \mathrm{I}_{\mathrm{D}} \text{ et } U, V \in \mathrm{U}(D) \} ,$$

其中 $S(\alpha, U, V) = \begin{pmatrix} \alpha & \rho \\ \alpha & V\widetilde{\rho} \end{pmatrix}$ 以及 $\rho(\alpha) = (\mathrm{I}_{\mathrm{D}} - \alpha\alpha^*)^{\frac{1}{2}}$, $\widetilde{\rho}(\alpha) = (\mathrm{I}_{\mathrm{D}} - \alpha^*\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

与序列 $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 相关联的散射拉链算子 $\mathbb{U}$ 是作用于

在 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^D)$ 上并定义为:

$$\mathbb{U} \;=\; \mathbb{V}\,\mathbb{W}\,, \tag{48}$$

其中两个酉算子 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}$ 作用于 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^D)$，并且定义为

$$\mathbb{V} \;=\; \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & S_0 & & \\ & & S_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \circ s_g^D\,, \quad \mathbb{W} \;=\; \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & S_{-1} & & \\ & & S_1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\,, \tag{49}$$

其中， s_g 是定义为的移位算子。

$$s_g : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \\ (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (v_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}. \end{array} \tag{50}$$

考虑到文献中证明的 CMV 矩阵的分解[28], 散射拉链模型可以看作是具有矩阵值系数的 CMV 矩阵的一种变体。

现在，我们按照[17] 引入散射拉链的一个随机版本。令 $\Omega_0 = \mathrm{U}(D) \times \mathrm{U}(D)$， $\mathcal{B}_0$ 为 $\mathrm{U}(D) \times \mathrm{U}(D)$ 上的 Borel σ-代数，并赋予其通常的李群拓扑； $\mathbb{P}_0 = \nu_D \otimes \nu_D$ 其中 ν_D 是 $\mathrm{U}(D)$ 上的 Haar 测度。于是我们定义概率空间:

$$(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P}) = \left(\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_0,\ \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_0,\ \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}_0\right)$$

对于 $\omega \in \Omega$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，我们记 $\omega_n = (U_n(\omega)\ V_n(\omega)) \in \Omega_0$.

设 $\omega \in \Omega$，并令 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 为 $\mathcal{M}_D(\mathbb{C})$ 中一个与 ω 独立的矩阵序列，使得对于任意 $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n^*\alpha_n < \mathrm{I_D}$。那么，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$S_n(\omega) = S(\alpha_n, U_n(\omega), V_n(\omega)) \in \mathrm{U}(2L)_{\mathrm{inv}}$$

其中，序列 $((U_n(\omega)\ V_n(\omega)))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是概率空间 上独立同分布的 随机变量序列 $(\Omega_0,\mathcal{B}_0,\mathbb{P}_0)$。定义了 $\mathrm{U}(2D)_{\mathrm{inv}}$中的这样一个独立随机矩阵序列后，对于任意 $\omega \in \Omega$，我们按照（ $\mathbb{V}_\omega$、 $\mathbb{W}_\omega$ 和 $\mathbb{U}_\omega = \mathbb{V}_\omega\ \mathbb{W}_\omega$ ）中的定义，定义算子 48）和（49）。

称与序列 $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}}$ 相关联的算子族 $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 为随机散射拉链 。

为了使族 $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 具有 $2\mathbb{Z}$-遍历性，我们假设

Verblunsky 系数序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为常数，等于满足 $\alpha^*\alpha < \mathrm{I_D}$ 的矩阵 $\alpha \neq 0$。这一假设还确保独立矩阵 $S_n(\omega)$ 同分布。与准一维 Anderson 模型相比，Verblunsky 序列的常数性假设可以理解为安德森势的简单格点假设：一个具有常数紧支撑的确定性势沿着 $\mathbb{Z}$ 平移，且在格点 $\mathbb{Z}$ 的每个点上，只有乘在它前面的随机变量不同。这里，α 是确定性势的对应物，它沿着 $\mathbb{Z}$ 保持不变，只有在 $S_n(\omega)$ 的表达式中乘在它前面的相位会随着n 沿着 $\mathbb{Z}$移动而变化。因此，这一假设确保 $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 具有遍历性也就不足为奇了，正如简单格点假设确保准一维安德森模型具有遍历性一样。

利用传递矩阵形式，我们将对解 ϕ of 的渐近行为的研究

$$\mathbb{U}_\omega\phi = z\phi, \quad \text{for } z \in \mathbb{S}^1, \tag{51}$$

转化为对随机矩阵乘积的渐近行为的研究。我们不再考察散射矩阵的输入—输出关系 S_n（ω），而是寻找一个新的矩阵，使其能够将 $\begin{pmatrix}\phi_{n+1}\\ \psi_{n+1}\end{pmatrix}$ 表示为 $\begin{pmatrix}\phi_n\\ \psi_n\end{pmatrix}$，其中 ϕ 是（51）的一个解，而 $\psi = \mathbb{W}\phi$。具体做法是通过以下双射，将属于 U S_n（ω）的散射矩阵转化为洛伦兹群的元素$2D$：$_{\text{inv}}$

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{U}(2D)_{\text{inv}} & \to & \mathrm{U}(D,D) \\ \varphi\ : & \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}\gamma-\delta\beta^{-1}\alpha & \delta\beta^{-1}\\ -\beta^{-1}\alpha & \beta^{-1}\end{pmatrix} \end{array}$$

我们有以下关系，这些关系已在[68] 中得到证明：

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \begin{pmatrix}\phi_{2n}\\ \psi_{2n}\end{pmatrix} = \varphi(z^{-1}S_{2n}(\omega))\begin{pmatrix}\psi_{2n-1}\\ \phi_{2n-1}\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix}\psi_{2n+1}\\ \phi_{2n+1}\end{pmatrix} = \varphi(S_{2n+1}(\omega))\begin{pmatrix}\phi_{2n}\\ \psi_{2n}\end{pmatrix}. \tag{52}$$

由这些关系可引入映射 $T(z,\cdot)$：$\Omega \to \mathrm{U}(D,D)$,

$$\forall\omega\in\Omega,\ T(z,\omega) = \begin{pmatrix}V_0(\omega) & 0\\ 0 & (U_0(\omega))^*\end{pmatrix}\hat{T}_0(z)\begin{pmatrix}V_1(\omega) & 0\\ 0 & (U_1(\omega))^*\end{pmatrix}\hat{T}_1 \tag{53}$$

with

$$\hat{T}_0(z) = \begin{pmatrix} z^{-1}(\widetilde{\rho}(\alpha))^{-1} & (\widetilde{\rho}(\alpha))^{-1}\alpha^* \\ \alpha(\widetilde{\rho}(\alpha))^{-1} & z(\rho(\alpha))^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{T}_1 = \begin{pmatrix} (\widetilde{\rho}(\alpha))^{-1} & (\widetilde{\rho}(\alpha))^{-1}\alpha^* \\ \alpha(\widetilde{\rho}(\alpha))^{-1} & (\rho(\alpha))^{-1} \end{pmatrix}.$$

如果 $\tau: \Omega \to \Omega$ 由以下方式定义： $\forall \omega \in \Omega \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$, $(\tau(\omega))_n = \omega_{n+2}$, 则有：

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall z \in \mathbb{S}^1,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ T(z, \tau^n(\omega)) = \varphi(z^{-1}S_{2n}(\omega)) \cdot \varphi(S_{2n-1}(\omega)). \tag{54}$$

矩阵 $T(z, \tau^n(\omega))$ 是与 $\mathbb{U}_\omega$ 相关联的第 n 个传递矩阵。因此，$(T(z, \tau^n(\omega)))_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathrm{U}(D, D)$ 中的独立同分布随机矩阵序列，这是由于 Ω 中序列 $((U_n(\omega)\ V_n(\omega)))_{n\in\mathbb{Z}}$ 具有独立同分布这一性质，且 Verblunsky 序列为常数。

传递矩阵 $T(z, \cdot)$ 在遍历动力系统 $(\Omega\ \mathcal{B}, \mathbb{P}, (\tau^n)_{n\in\mathbb{Z}})$ 上生成一个余圈 $\Phi(z, \cdot, \cdot) : \Omega \times \mathbb{Z} \to \mathrm{U}(D, D)$，该动力系统定义如下：

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \Phi(z, \omega, n) = \begin{cases} T(z, \tau^{n-1}(\omega)) \dots T(z, \omega) & \text{if} \quad n > 0 \\ I_{2L} & \text{if} \quad n = 0 \\ (T(z, \tau^n(\omega)))^{-1} \dots (T(z, \tau^{-1}(\omega)))^{-1} & \text{if} \quad n < 0. \end{cases}$$

由此余圈，我们定义与遍历族$\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$相关联的李雅普诺夫指数。令 $z \in \mathbb{S}^1$。对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in\Omega$，以下极限存在且相等：

$$\Psi(z, \omega) := \lim_{n\to+\infty} ((\Phi(z, \omega, n))^* \Phi(z, \omega, n))^{1/2n} = \lim_{n\to-\infty} ((\Phi(z, \omega, n))^* \Phi(z, \omega, n))^{1/2|n|}. \tag{55}$$

对于每个 $k \in \{1, \dots, 2D\}$，令 $\lambda_k(z, \omega)$ 为 $\Psi(z, \omega)$ 的第 k 个特征值，特征值按递增顺序排列。因此存在实数 $\lambda_k(z) \geq 0$，使得对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$, $\lambda_k(z, \omega) = \lambda_k(z)$。于是，我们将与遍历族 $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 相关联的李雅普诺夫指数定义为实数 $\gamma_k(z)$，其定义如下：

$$\forall z \in \mathbb{S}^1,\ \forall\ k \in \{1, \dots, 2D\},\ \gamma_k(z) := \log(\lambda_k(z)).$$

传递矩阵属于洛伦兹群这一事实意味着李雅普诺夫指数满足一种对称关系，这与传递矩阵属于辛群时的情况相同： $\forall k \in \{0, \dots D\}$, $\gamma_{2D-k+1}(z) = -\gamma_k(z)$。

在[17],中，我们证明了以下结果。

定理 25 （[17]）。如果 *Verblusnky* 序列为常数，则对每个 $z \in \mathbb{S}^1$,

$$\gamma_1(z) > \gamma_2(z) > \cdots > \gamma_D(z) > 0$$

且 $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的几乎处处绝对连续谱为空。

其思路是直接证明，与族$\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 相关联的 Furstenberg 群 G_{μ_z} 对每个 $z \in \mathbb{S}^1$, $G_{\mu_z} = \mathrm{U}(D, D)$ 均满足。

利用传递矩阵的独立同分布性质，以及 Haar测度的支撑包含在酉群 $\mathrm{U}(D)$ 上这一事实:

$$G_{\mu_z} = \overline{\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & (U_0)^* \end{pmatrix} \hat{T}_0(z) \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & (U_1)^* \end{pmatrix} \hat{T}_1 \middle| (U_0, V_0, U_1, V_1) \in \mathrm{U}(D)^4 \right\} \right\rangle}. \tag{56}$$

然后，由于洛伦兹群 $\mathrm{U}(D, D)$ 的连通性，要证明 $G_{\mu_z} = \mathrm{U}(D, D)$，只需证明这两个李群的李代数相等。$\mathrm{U}(D, D)$ 的李代数为： $\mathfrak{u}(D, D) = \{T \in \mathcal{M}_{2D}(\mathbb{C}) \mid T^*\mathcal{L} + \mathcal{L}T = 0\}$, 更明确地说,

$$\mathfrak{u}(D, D) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2D}(\mathbb{C}) \mid A^* = -A, C^* = -C, (A, B, D) \in \mathcal{M}_D(\mathbb{C}) \right\}.$$

设 $\mathfrak{g}(z) := \mathrm{Lie}(G_{\mu_z})$。对于 $U_0 = V_0 = U_1 = V_1 = \mathrm{I_D}$, $\hat{T}_0(z)\,\hat{T}_1 \in G_{\mu_z}$。因此，$(\hat{T}_0(z)\,\hat{T}_1)^{-1}$也属于 G_{μ_z}。这次取 $U_1 = V_1 = \mathrm{I_D}$，令 U_0, V_0 在 $\mathrm{U}(D)$ 中任取值，并将右侧乘以 $(\hat{T}_0(z)\,\hat{T}_1)^{-1}$： $\forall (U_0, V_0) \in \mathrm{U}(D)^2$, $\begin{pmatrix} V_0 & 0 \\ 0 & U_0^* \end{pmatrix} \in G_{\mu_z}$.

由第一步，我们推得 $\mathrm{U}(D) \oplus \mathrm{U}(D) \subset G_{\mu_z}$ 这意味着 $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}(D)) \oplus \mathrm{Lie}(\mathrm{U}(D)) \subset \mathfrak{g}(z)$, 并且由于 $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}(D)) = \{A \in \mathcal{M}_D(\mathbb{C}) | A^* = -A\}$,

$$\mathfrak{a}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} | \, A^* = -A, C^* = -C, (A, D) \in \mathcal{M}_D(\mathbb{C})^2 \right\} \subset \mathfrak{g}(z).$$

因此， $\mathfrak{g}(z)$ 中矩阵的对角块可以很快构造出来，因为我们假设酉相位 U and$V$ 具有非常规则的随机性。下一步是构造非对角块。

为此，我们先取 $V_0 = U_0 = \mathrm{I_D}$，对于 $j \in \{1, \ldots, D\}$ 和 $t \in \mathbb{R}$，取 $V_1 = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, e^{\mathrm{i}t}, 1, \ldots, 1)$，其中 $e^{\mathrm{i}t}$ 位于第 j 个位置，并取 $U_1 = \mathrm{I_D}$。我们在 $t = 0$ 处推导，得到： $\forall j \in \{1, \ldots, D\}$, $\mathrm{i}\,\hat{T}_1^{-1} \begin{pmatrix} E_{jj} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{T}_1 \in \mathfrak{g}(z)$，其中 $E_{kl} \in \mathcal{M}_D(\mathbb{C})$ 是一个初等矩阵，除系数 (k, l) 为 1 外，其余系数均为 0。对 j 求和，得到:

$\mathrm{i}\,\hat{}\,T_1^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{I_D} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\hat{}\,T_1 \in \mathfrak{g}(z)$，或者更明确地写作 $\mathrm{i}\begin{pmatrix} & \overset{0}{\widetilde{\rho}}(& \\ -2 & & 0\end{pmatrix}\in \mathfrak{g}(z)$。因此，我们得到的矩阵属于 $\mathfrak{g}(z)$，其块位于对角线之外。利用 $\alpha \neq 0$ 这一事实以及 $(\widetilde{\rho}(\alpha))^{-2}$ 的可逆性，通过李括号，我们可知存在一对指标 $(j_0,k_0) \in \{1,\dots,D\}^2$ 和 $c\in\mathbb{C}$，其中 $c\neq 0$，使得 $\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & cE_{k_0j_0}\\ -\overline{c}E_{j_0k_0} & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}(z)$。接下来，通过恰当组合李括号，我们依次证明

$$\forall (j,k)\in\{1,\dots,D\}^2\setminus\{(j_0,k_0)\},\ \begin{pmatrix}0 & E_{kj}\\ E_{jk} & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}(z)\quad\text{and}\quad\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}E_{kj}\\ -\mathrm{i}E_{jk} & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}(z), \tag{57}$$

then

$$\begin{pmatrix}0 & E_{k_0j_0}\\ E_{j_0k_0} & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}(z)\quad\text{and finally}\quad\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}E_{k_0j_0}\\ -\mathrm{i}E_{j_0k_0} & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}(z). \tag{58}$$

令 $\mathfrak{a}_2=\{\begin{pmatrix}0 & B\\ B^* & 0\end{pmatrix}\mid B\in\mathcal{M}_D(\mathbb{C})\}$，由于由（57）和（58）构造的元素构成 $\mathfrak{a}_2$ 的一组基，因此得到 $\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{g}(z)$。

最后，由于 $\mathfrak{u}(D,D)=\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_2\subset\mathfrak{g}(z)$，我们得到 $\mathfrak{u}(D,D)=\mathfrak{g}(z)$，这证明了定理 25 的第一点。

为了证明族 $\{\mathbb{U}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 不存在绝对连续谱，我们将 Kotani 理论的结果推广到了酉型准一维随机模型的框架中[17]。

遗憾的是，我们目前还没有随机散射拉链模型的局域化结果。可以采用分数阶矩方法代替多尺度分析来实现这一点，如[7,52]中所示。

开放问题 3。 在随机散射拉链的框架下证明定理 *4* 的类似结果。

研究散射拉链与某种带硬币量子行走之间的联系也会很有意思。为此，首先应找到某种广义带硬币量子行走，使给定的散射拉链与之相关联，其方式类似于将带硬币量子行走与随机 CMV 算子相关联的做法。相关计算应与[26,27,82] 中所做的计算类似；并且可以从散射拉链的性质推导出其底层广义带硬币量子行走的性质。

致谢

作者谨此感谢 Jake Fillman 提出的多项建议，这些建议大大改善了本文献综述在参考文献方面的内容。作者也感谢一位匿名审稿人提出的许多有益意见和建议，这些意见和建议提升了本文的整体质量。

作者获得 ANR JCJC 项目 RAW 的支撑。

参考文献

[1]Ahlbrecht, A., Scholz, V. B. 和 Werner, A. H.，《一维晶格中的无序量子行走》，数学物理杂志 52，102201，48（2011）。[2]Aizenman, M. 和 Warzel, S.，《随机算子：无序对量子谱和动力学的影响》，第 168 卷（罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会（美国数学学会），2015年），第 xiv 页 + 326。[3]Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R. 和 Holden, H.，《量子力学中的可解模型》，附 Pavel Exner 撰写的附录（罗得岛州普罗维登斯：AMS Chelsea Publishing，2005年），第 xiv 页 + 488。[4]Anderson, P.，《凝聚态物理基本概念》（CRC Press，2018年）。[5]Anderson, P. W.，《某些随机晶格中扩散的缺失》，Phys. Rev. 109，1492–1505（1958）。[6]Arnold, L.，《随机动力系统》（柏林：Springer，1998年），第 xi 页 + 586。[7]Asch, J., Bourget, O. 和 Joye, A.，《Chalker-Coddington 模型的局域化性质》，亨利·庞加莱年刊 11，1341–1373（2010年）。[8]Asch, J., Bourget, O. 和 Joye, A.，《远离相变时 Chalker-Coddington 模型的动力学局域化》，J. Stat. Phys. 147，194–205（2012年）。[9]Basko, D. M., Aleiner, I. L. 和 Altshuler, B. L.，《具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属-绝缘体转变》，Ann. Phys. 321，1126–1205（2006年）。[10]Berezin, F. A. 和 Faddeev, L. D.，《关于具有奇异势的薛定谔方程的一点说明》，Sov. Math., Dokl. 2，372–375（1961）。[11]Bougerol, P. 和 Lacroix, J.，《随机矩阵乘积及其在薛定谔算子中的应用》

算子，第 8 卷（Birkhäuser，马萨诸塞州波士顿，1985年）。[12]Boumaza, H.，《连续矩阵值安德森模型的李雅普诺夫指数正性》，Math. Phys. Anal. Geom. 10，97–122（2007年）。[13]Boumaza, H.，《矩阵值安德森模型积分态密度的赫尔德连续性》，Rev. Math. Phys. 20，873–900（2008年）。[14]Boumaza, H.，《矩阵值点相互作用模型》，Lett. Math. Phys. 87，81–97（2009年）。[15]Boumaza, H.，《矩阵值安德森模型的局域化》，Math. Phys. Anal. Geom. 12，255–286（2009年）。[16]Boumaza, H.，《具有一般相互作用势的安德森-伯努利模型的局域化》，Tohoku Math. J. (2) 65，57–74（2013年）。[17]Boumaza, H. 和 Marin, L.，《随机散射拉链模型中绝对连续谱的缺失》，数学物理杂志 56，022701，13（2015年）。[18]Boumaza, H. 和 Najar, H.，《连续矩阵值安德森模型的利夫希茨尾》，J. Stat. Phys. 160，371–396（2015年）。[19]Boumaza, H. 和 Stolz, G.，《两条耦合链上安德森型模型的李雅普诺夫指数正性》，Electron. J. Differ. Equ. 2007，18（2007年），编号 47。[20]Bourgain, J. 和 Kenig, C. E.，《高维连续安德森-伯努利模型的局域化》，Invent. Math. 161，389–426（2005年）。[21]Brandes, T. 和 Kettemann, S.，编，《安德森局域化及其衍生：无序，p

相位相干性和

物理学讲义笔记，第630卷（柏林：Springer，2003年）。[22]Breuillard, E.，《佩科课程 2006年，离散群的定性性质》（2006年）。[23]Breuillard, E.和 Gelander, T.，《关于李群中的稠密自由子群》J. Algebra **261**，448–467（2003年）。[24]Bucaj, V.、Damanik, D.、Fillman, J.、Gerbuz, V.、Vandenboom, T.、Wang, F. 和 Zhang, Z.，《通过李雅普诺夫指数的正性与大偏差实现一维安德森模型的局域化》，美国数学会汇刊 **372**，3619–3667（2019年）。[25]Bucaj, V.、Damanik, D.、Fillman, J.、Gerbuz, V.、VandenBoom, T.、Wang, F. 和 Zhang, Z.，《连续介质安德森模型中的正李雅普诺夫指数与大偏差定理：简述》，J. Funct. Anal. **277**，3179–3186（2019年）。[26] Cantero, M. J.、Grünbaum, F. A.、Moral, L. 和 Velázquez, L.，《一维量子

行走与一个缺陷》，Rev. Math. Phys. 24，1250002，52（2012年）。[27]Cantero, M. J.、Moral, L.、Grünbaum, F. A. 和 Velázquez, L.，《矩阵值 Szegő 多项式与量子随机游走》，数学物理通讯 63，464–507（2010年）。[28]Cantero, M. J.、Moral, L. 和 Velázquez, L.，《五对角矩阵与单位圆上正交多项式的零点》，Linear Algebra Appl. 362，29–56（2003年）。[29]Carmona, R.、Klein, A. 和 Martinelli, F.，《伯努利势及其他奇异势的安德森局域化》，数学物理通讯 108，41–66（1987）。[30]Carmona, R. 和 Lacroix, J.，《随机薛定谔算子的谱理论》（巴塞尔等地：Birkhäuser Verlag，1990年），第 xxvi 页 + 587。[31]Chapman, J. 和 Stolz, G.，《与自旋链相关的随机块算子的局域化》，亨利·庞加莱年刊 16，405–435（2015年）。[32]Damanik, D.、Fillman, J.、Helman, M.、Kesten, J. 和 Sukhtaiev, S.，《一维具有任意点相互作用的随机哈密顿量》，J. Differ. Equations 282，104–126（2021年）。[33]Damanik, D.、Fillman, J. 和 Sukhtaiev, S.，《度量树图与离散树图上安德森模型的局域化》，Math. Ann. 376，1337–1393（2020年）。[34]Damanik, D.、Sims, R. 和 Stolz, G.，《一维连续介质伯努利-安德森模型的局域化》，Duke Math. J. 114，59–100（2002年）。[35]Damanik, D. 和 Stollmann, P.，《多尺度分析蕴含强动力学局域化》，几何与泛函分析 11，11–29（2001年）。[36]Delyon, F.、Simon, B. 和 Souillard, B.，《从幂纯点谱到无序系统中的连续谱》，Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. 42，283–309（1985年）。[37]Ding, J. 和 Smart, C. K.，《二维格点上安德森伯努利模型边缘附近的局域化》，Invent. Math. 219，467–506（2020年）。[38]Disertori, M.、Kirsch, W.、Klein, A.、Klopp, F. 和 Rivasseau, V.，《随机薛定谔算子》，第25卷（巴黎：法国数学学会（SMF），2008年），第 xiv 页 + 213。[39]Duarte, P. 和 Klein, S.，《随机二维矩阵乘积的大偏差》，数学物理通讯 375，2191–2257（2020年）。[40]Furstenberg, H.，《不交换随机乘积》，美国数学会汇刊 108，377–428（1963）。[41]Furstenberg, H. 和 Kesten, H.，《随机矩阵的乘积》，Ann. Math. Stat. **31**，457–469（1960年）。[42]Ge, L. 和 Zhao, X.，《一维安德森模型中期望意义下的指数动力学局域化》

，J. Spectr. Theory 10，887–904（2020年）。[43]Genovese, G.、Giacomin, G. 和 Greenblatt, R. L.，《随机2×2矩阵乘积的首个李雅普诺夫指数的奇异行为》，数学物理通讯 351，923–958（2017年）。[44]Germinet, F. 和 Klein, A.，《随机介质中的自举多尺度分析与局域化》，数学物理通讯 222，415–448（2001年）。[45]Germinet, F.、Klein, A. 和 Schenker, J. H.，《随机朗道哈密顿量中的动力学离域化》，Ann. Math.（2）166，215–244（2007年）。[46]Girvin, S. 和 Yang, K.，《现代凝聚态物理》（剑桥大学出版社，2019年）。[47]Glaffig, C.，《条带上积分态密度的光滑性》，J. Funct. Anal. 92，509–534（1990年）。[48]Goldsheid, I. Y.，《辛群子群的扎里斯基闭包与条带上薛定谔算子的李雅普诺夫指数》，数学物理通讯 174，347–365（1995年）。[49] Goldsheid, I. Y. 和 Margulis, G. A.，《随机矩阵乘积的李雅普诺夫指标》，Russ. Math. Surv. 44，11–71（1989年）。[50]Gorodetski, A. 和 Kleptsyn, V.，《SL(2,$\mathbb{R}$)矩阵随机乘积上的参数化 Furstenberg 定理》，Adv. Math. 378，82（2021年），编号/第107522号。[51]Guivarc’h, Y. 和 Raugi, A.，《Furstenberg 边界、压缩性质与收敛定理》，Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 69，187–242（1985年）。[52]Hamza, E.、Joye, A. 和 Stolz, G.，《酉安德森模型的动力学局域化》，Math. Phys. Anal. Geom. 12，381–444（2009年）。[53]Hamza, E. 和 Stolz, G.，《酉安德森模型的李雅普诺夫指数》，数学物理杂志 48，043301，16（2007年）。[54]Hislop, P. D.，《随机薛定谔算子讲义》，载于《第四届分析与数学物理暑期学校：谱理论与量子力学专题》，墨西哥库埃纳瓦卡，2005年5月（罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会（美国数学学会），2008年），第41–131页。[55]Hislop, P. D.、Kirsch, W. 和 Krishna, M.，《具有非局部和奇异相互作用的随机模型的谱与动力学性质》，Math. Nachr. 278，627–664（2005年）。[56]Hislop, P. D.、Kirsch, W. 和 Krishna, M.，《薛定谔算子的特征值统计

带有作用于 $\mathbb{R}^d, d = 1$, 2, 3 上的随机点相互作用的模型，” 数学物理杂志 61, 092103, 24 (2020).[57]Hurt, N. E., 量子导线与器件的数学物理：从谱共振到安德森局域化, Math. Appl., Dordr., 第 506 卷（Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，2000）。[58]Jitomirskaya, S.and Zhu, X., “一维安德森模型中李雅普诺夫指数的大偏差与局域化，” 数学物理通讯 370, 311–324 (2019).[59]Kingman, J. F. C., “ 次可加遍历理论，” Ann. Probab. 1, 883–909 (1973).[60]Kirsch, W.and Martinelli, F., “一般随机算子谱的遍历性质，” J. Reine Angew. Math. 334, 141–156 (1982).[61]Klein, A., “ 随机算子的多尺度分析与局域化，” 载于《随机薛定谔算子》（Paris：Société Mathématique de France (SMF), 2008）第 221–259 页。[62]Klein, A., Lacroix, J., and Speis, A., “奇异势下条带上安德森模型的局域化，” J. Funct. Anal. 94, 135–155 (1990).[63]Kotani, S., “李雅普诺夫指标决定平稳随机一维薛定谔算子的绝对连续谱，”《随机分析》，Proc. Taniguchi Int. Symp., Katata & Kyoto/Jap. 1982, North-Holland Math. Libr. 32, 225-247 (1984). (1984).[64] Kotani, S.and Simon, B., “条带上的随机薛定谔算子与 Jacobi 矩阵，” 数学物理通讯 119, 403–429 (1988).[65]Kunz, H.and Souillard, B., « 关于随机有限差分算子的谱，» 数学物理通讯 78, 201–246 (1980).[66]Li, L.and Zhang, L., “三维格点上的 Anderson-Bernoulli 局域化与离散唯一延拓原理，” Duke Math. J. 171, 327–415 (2022).[67]Macera, D.and Sodin, S., “准一维随机算子的安德森局域化，” 亨利·庞加莱年刊 23, 4227–4247 (2022).[68]Marin, L.and Schulz-Baldes, H., “ 散射拉链及其谱理论，” J. Spectr. Theory 3, 47–82 (2013).[69]Oseledets, V. I., “乘法遍历定理：动力系统的李雅普诺夫特征数，” Trans. Mosc. Math. Soc. 19, 197–231 (1968).[70]Pastur, L. A., “单体近似下无序系统的谱性质，” 数学物理通讯 75, 179–196 (1980).[71]Rangamani, N., “奇异无界随机 Jacobi 矩阵，”

数学物理杂志 60, 081904, 11 (2019年)。[72]Rangamani, N.，《随机词模型的指数动力学局域化》，亨利·庞加莱年刊 23, 4171–4193 (2022年)。[73]Reed, M.和Simon, B.，《现代数理物理方法。IV：算子分析》，纽约 - 旧金山 - 伦敦：学术出版社。XV，396页 (1978年)。 (1978年)。[74]Reed, M.和Simon, B.，《现代数理物理方法。III：散射理论》，纽约、旧金山、伦敦：学术出版社。XV，463页 (1979年)。 (1979年)。[75]Ruelle, D.，《可微动力系统的遍历理论》，高等科学研究所数学出版物 50, 27–58 (1979年)。[76] Sadel, C.和Schulz-Baldes, H.，《具有时间反演对称性的随机狄拉克算子》，数学物理通讯 295, 209–242 (2010年)。[77]Shubin, C.、Vakilian, R.和Wolff, T.，《安德森-伯努利模型所引发的一些调和分析问题。附录：T.H.Wolff》，几何与泛函分析 8, 932–964 (1998年)。[78]Simon, B.，《单位圆上的正交多项式。第1部分：经典理论》，美国数学学会研讨会出版物，第54卷（罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会（美国数学学会），2005年）。[79]Simon, B.，《单位圆上的正交多项式。第2部分：谱理论》，美国数学学会研讨会出版物，第54卷（罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，2005年）。[80]Stollmann, P.，《陷于无序：随机介质中的束缚态》，第20卷（波士顿：Birkhäuser，2001年）第xvi页 + 166。[81]Veselić, I.，《随机介质中积分态密度的存在性与正则性性质》

薛定谔算子,

数学讲义，第1917卷（柏林：Springer，2008年）。[82]Werner, A. H.，量子行走中的局域化与回归，博士论文，汉诺威莱布尼茨大学（2013年）。[83]Zalczer, S.，“一维安德森-狄拉克模型的局域化，”亨利·庞加莱年刊24，37–72（2023年）。