arXiv:2305.05235v1 [math.PR] 9 May 2023

多 维伽马分布逼近的Stein方法 n

Ciprian A. Tudor 和 Jérémy Zurcher

法国国家科学研究中心、里尔大学保罗·
潘勒韦实验室 UMR 8524，F-59655
Villeneuve d'Ascq，法国。
ciprian.tudor@univ-lille.fr
jeremy.zurcher@univ-lille.fr

2023年5月10日

摘要

设 $F(\nu)$ 为参数为 $\nu > 0$ 的中心伽马分布，并记 $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ 为随机向量 $\mathbb{Y}$ 的概率分布。我们针对伽马逼近发展了一种多维 Stein方法变体，由此可以得到 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中任意随机向量 $(X,\ \mathbb{Y})$ 的概率分布与概率分布 $F(\nu)\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ 之间二阶Wasserstein距离的界。对于分量属于 Wiener混沌的随机向量，这些界可导出关于序列 $((X_n,\ \mathbb{Y}_n)\ n\geq 1)$ 联合收敛至 $F(\nu)\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ 的若干有趣判据；其条件是 $(X_n,\ n\geq 1)$ 在 $n\to\infty$ 时依分布收敛至 $F(\nu)$，且 $(\mathbb{Y}_n,\ n\geq 1)$ 在 $n\to\infty$ 时依分布收敛至任意随机向量 $\mathbb{Y}$。我们通过两个具体例子说明这些判据。

2010 AMS分类号：60F05,60G15,60H05,60H07。

关键词：Stein方法、Stein方程、Gamma逼近、Malliavin演算、多重随机积分、渐近独立性。

1 引言

Stein方法是一套广受欢迎的概率论技术，可用于评估随机变量概率分布之间的距离。给定两个随机变量$F,\ G$，Stein方法可以对以下形式的量给出精确估计

$$\sup_{h\in\mathcal{H}}|\mathbf{E}[h(F)]-\mathbf{E}[h(G)]| \tag{1}$$

其中，H构成了一个足够大的函数类。尤其重要的是，其中一个随机变量服从高斯分布的情形，但其他目标分布的情形也值得关注。

关于Stein方法技术的详细介绍及其应用，请参阅专著和综述 [6], [7], [17], [18] 。

我们的研究涉及 Stein方法的一种变体，该方法能够衡量具有相同边缘分布、但各分量之间相关性不同的两个随机向量之间的距离。这一变体最初由 [16], 提出，作者通过结合 Stein 启发式方法与 Malliavin演算的工具，获得了两个概率分布之间瓦瑟斯坦距离的界，其中一个概率分布对应于随机向量 (X,Y)，其中 $X\sim\mathrm{N}(0,1)$，而 Y 是任意随机变量；另一个概率分布对应于向量 (Z,Y) 的概率分布，其中 $Z\sim\mathrm{N}(0,1)$，且 Z 与 Y 独立。我们用 $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$ 表示随机向量 $\mathbb{X}$ 的概率分布。从某种意义上说，这种方法能够评估分量 X 和 Y 偏离独立状态的程度。 [19], 对该方法进行了扩展，给出了渐近结果，并重点研究了分量属于 Wiener混沌的随机向量情形。

我们的目的是为参数为 $\nu>0$ 的中心Gamma分布建立类似的理论，后文记为 $F(\nu)$。基本观察是，若 $X\sim F(\nu)$，且 X 与任意 n 维随机向量 $\mathbb{Y}$ 独立，则

$$\mathbf{E}\left[2(X+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(X,\mathbb{Y})-Xf(X,\mathbb{Y})\right]=0 \tag{2}$$

对于一大类可微函数 $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，上述结论成立。此外，若（2）对一大类函数 f 成立，则 $X\sim F(\nu)$ 与 X 独立。接着，我们引入Gamma分布标准Stein方程的多维对应形式，即

$$2(x+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mathbf{y})-xf(x,\mathbf{y})=h(x,\mathbf{y})-\mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})], \tag{3}$$

其中 $Z_\nu\sim F(\nu)$，且 $h\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 属于适当的函数类。我们详细分析方程（3）的解及其偏导数的存在性、唯一性和正则性。特别地，我们证明（3）存在唯一的有界解，并且该解及其一阶偏导数的无穷范数受 h 及其一阶和二阶偏导数的无穷范数控制。结合Stein方程与Malliavin分部积分，我们得到以下界

$$d_2\left(\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})},\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\right),$$

其中d_2是二阶Wasserstein距离（本文后文将给出定义）， $Z_\nu\sim F(\nu)$，并且 X， $\mathbb{Y}$ 分别是 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的任意随机向量，在Malliavin演算意义下具有足够的正则性。我们还分析了Wiener混沌中随机序列的情形，在这种情形下，上述一般结果可转化为易于应用的伽马分布逼近准则。我们考虑一个序列（X_k， $k\geqslant 1$）以及一个由 n维随机向量组成的序列（$\mathbb{Y}_k$， $k\geqslant 1$），使得对每个 $k\geqslant 1$，X_k 及 $\mathbb{Y}_k$ 的各个分量都属于某个Wiener混沌，并假设在分布意义下， X_k 收敛到 $Z_\nu\sim F(\nu)$，且当 $k\to\infty$时， $\mathbb{Y}_k$ 收敛到任意随机向量 $\mathbb{Y}$ 。在一些相当自然的条件下（在具体情形中尤其容易验证），我们证明，当 $k\to\infty$时，向量（（X_k， $\mathbb{Y}_k$） $k\geqslant 1$）依分布收敛到 $F(\nu)\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$。我们还评估了所谓二阶Wasserstein距离下相应的收敛速率。文中通过若干示例说明了该方法。我们的

结果拓展了文献中与伽马分布逼近相关的方法和发现，参见例如
[1], [2], [3], [4], [5], [9], [8], [10], [11], [12], [13]。

本文组织如下。第2节中，我们给出一个随机向量的概率分布的刻画：该随机向量的第一个边缘分布是中心伽马分布，且向量的其余部分与第一个分量独立。这自然引出了与此类多维随机向量的分布相对应的多维Stein方程。随后，我们详细分析整个实数轴上的Stein方程的解，并为该解及其偏导数证明适当的界。第3节中，我们结合关于Stein方程解的研究结果与Malliavin演算技术，本着 [12], 的精神，获得任意随机向量与如下随机向量之间的二阶Wasserstein距离的界：该随机向量的第一个分量服从 $F(\nu)$分布，且其余部分与第一个分量独立。第4节致力于研究Wiener混沌中的随机变量序列。若（X_n，$n \geq 1$）依分布收敛于 $F(\nu)$，且（$\mathbb{Y}_n$，$n \geq 1$）依分布收敛于 $\mathbb{R}^n$上的任意分布 U，我们给出检验向量（（X_n，$\mathbb{Y}_n$） $n \geq 1$）联合收敛至 $F(\nu) \otimes U$的判据。第5节中，我们通过两个具体例子阐释我们的结果。最后，附录包含Malliavin演算的基础知识以及一个技术性结果的证明。

2 多维Stein方程及其解

设 Z_ν 为服从参数为 $\nu > 0$的中心Gamma分布 $F(\nu)$ 的随机变量，其概率密度函数为

$$p_\nu(x) := \frac{(x+\nu)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x+\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \mathbf{1}_{(-\nu,+\infty)}(x). \tag{4}$$

当 ν为整数时， Z_ν的分布与 $\sum_{i=1}^{\nu}(N_i^2 - 1)$ 相同，其中 $N_1, ..., N_\nu$是相互独立的标准高斯随机变量。我们回顾一下，在用于Gamma逼近的标准Stein方法中，该方法的推导基于这样一个事实： $Z_\nu \sim F(\nu)$ 当且仅当

$$\mathbf{E}\left[2(Z_\nu + \nu)_+ f'(Z_\nu)\right] = \mathbf{E}\left[Z_\nu f(Z_\nu)\right] \tag{5}$$

对于一大类可微函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其中 $x_+ = \max(x,0)$。下面我们在多维情形下陈述并证明一个类似的结果。我们回顾一下，如果 $X \sim F(\nu)$，那么其特征函数 ψ 是下列微分方程的唯一解：

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1 - 2i\lambda)\psi'(\lambda) + 2\lambda\nu\psi(\lambda) = 0, \tag{6}$$

其中 $\psi(0) = 1$。

引理1. 设 $\mathbb{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ 为一个 n维实随机向量。

1. 假设 $Z_\nu \sim F(\nu)$ 以及 Z_ν 和 $\mathbb{Y}$ 相互独立。那么

$$\mathbf{E}\left[2(Z_\nu + \nu)\frac{\partial f}{\partial x}(Z_\nu, \mathbb{Y})\right] = \mathbf{E}\left[Z_\nu f(Z_\nu, \mathbb{Y})\right],$$

对于任意函数 f: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，满足 $\mathbf{E}\left[\left|\left(Z_\nu+\nu\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left(Z_\nu,\ \mathbb{Y}\right)\right|\right]<\infty$ 以及 $\mathbf{E}\left[|Z_\nu f\left(Z_\nu,\ \mathbb{Y}\right)|\right]<\infty$。*2.* 反之，假设 Z 是一个可积随机变量，满足

$$\mathbf{E}\left[2(Z+\nu)_+\frac{\partial f}{\partial x}(Z,\mathbb{Y})\right]=\mathbf{E}\left[Zf(Z,\mathbb{Y})\right], \tag{7}$$

对任意满足： $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{E}\left[\left|(Z+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(Z,\mathbb{Y})\right|\right]<\infty$ 且 $\mathbf{E}\left[|Zf(Z,\mathbb{Y})|\right]<\infty$的函数。则 $Z\sim F(\nu)$，且 Z 与 $\mathbb{Y}$相互独立。

证明： 假设 $Z_\nu\sim F(\nu)$、 Z_ν 和 $\mathbb{Y}$ 相互独立。于是，根据中心伽马分布的 Stein 刻画式 (5)，对每个 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，有

$$\mathbf{E}\left[2(Z_\nu+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(Z_\nu,\mathbf{y})\right]=\mathbf{E}\left[Z_\nu f(Z_\nu,\mathbf{y})\right].$$

So,

$$\int_{-\nu}^{\infty}2(x+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}(x)=\int_{-\nu}^{\infty}xf(x,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}(x),$$

对每个 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$。我们对 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ 积分上述关系，并利用 Z_ν 与 $\mathbb{Y}$ 的独立性，得到左侧为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{-\nu}^{\infty}2(x+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}(x)\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) &= \int_{(-\nu,\infty)\times\mathbb{R}^n}2(x+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mathbf{y})\mathrm{d}(\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}})(x,\mathbf{y})\\ &= \mathbf{E}\left[2(Z_\nu+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(Z_\nu,\mathbb{Y})\right].\end{aligned}$$

右侧同理

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{-\nu}^{\infty}xf(x,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}(x)\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) &= \int_{(-\nu,\infty)\times\mathbb{R}^n}xf(x,\mathbf{y})\mathrm{d}(\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}})(x,\mathbf{y})\\ &= \mathbf{E}\left[Z_\nu f(Z_\nu,\mathbb{Y})\right].\end{aligned}$$

现在证明引理的第二点。取一个支集包含于 $(-\infty,-\nu)$ 的函数 f，可得 $\mathbb{P}(Z_\nu\le-\nu)=0$。令 φ 为随机向量 $(Z,\mathbb{Y})$ 的特征函数，即

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2):=\mathbf{E}\left[e^{i(\lambda_1Z+\lambda_2\cdot\mathbb{Y})}\right],$$

对于 $\lambda_1\in\mathbb{R},\lambda_2\in\mathbb{R}^n$，其中 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ 表示$\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$的欧几里得内积。我们对 φ 关于 λ_1 求导，并应用 (7)（针对 φ的实部和虚部）。令 $g(x,\mathbf{y})=e^{i(\lambda_1x+\lambda_2\cdot\mathbf{y})}$，则由于 Z 可积， g 满足应用 (7) 的条件，因此得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2) &= i\mathbf{E}\left[Ze^{i(\lambda_1Z+\lambda_2\cdot\mathbb{Y})}\right]=i\mathbf{E}[Zg(X,\mathbb{Y})]\\ &= i\mathbf{E}\left[2(Z+\nu)\frac{\partial g}{\partial x}(Z,\mathbb{Y})\right]=-2\lambda_1\mathbf{E}\left[(Z+\nu)e^{i(\lambda_1Z+\lambda_2\cdot\mathbb{Y})}\right]\\ &= 2i\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)-2\nu\lambda_1\varphi(\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned}$$

因此，对于任意 $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$(1-2i\lambda_1)\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}(\lambda_1,\lambda_2)+2\lambda_1\nu\varphi(\lambda_1,\lambda_2)=0.$$

注意到对于每个 $\lambda_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(0,\lambda_2)=\mathbf{E}\left[e^{i\lambda_2\cdot\mathbb{Y}}\right]=\varphi_{\mathbb{Y}}(\lambda_2),$$

其中 $\varphi_{\mathbb{Y}}$ 表示随机向量 $\mathbb{Y}$的特征函数，由式 **(6)** 可得，对于每个$\lambda_1 \in \mathbb{R}$， $\lambda_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2)=\psi(\lambda_1)\varphi_{\mathbb{Y}}(\lambda_2).$$

这意味着 $Z \sim F(\nu)$，且 Z 与 $\mathbb{Y}$独立。 ■

我们引入关于中心伽马分布 $F(\nu)$ 的多维Stein方程

$$2(x+\nu)\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mathbf{y})-xf(x,\mathbf{y})=h(x,y)-\mathbf{E}\left[h(Z_\nu,\mathbf{y})\right], \tag{8}$$

其中 $Z_\nu \sim F(\nu)$ 且 $h\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足$\mathbf{E}\ [|h(F(\nu),\ \mathbf{y})|] < \infty$，对任意$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$均成立。为求解式 **(8)**，我们回顾一些关于伽马分布在整条实数轴上的一维Stein方程的知识

$$2(x+\nu)f'(x)-xf(x)=h(x)-\mathbf{E}[h(F(\nu))], \tag{9}$$

其中 $h\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足$\mathbf{E}\ [|h(F(\nu))|] < \infty$。回想一下，该分布的密度由式 **(4)** 给出，并引入函数

$$q_\nu(x) := \frac{(-(x+\nu))^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x+\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\mathbf{1}_{(-\infty,-\nu)}(x). \tag{10}$$

两个函数 p_ν 和 q_ν 均为正值。注意，与 p_ν不同，函数 q_ν 不定义˜概率测度。我们将 F_ν 视为 p_ν 的累积概率函数。我们用 F_ν表示定义在 $(-\infty,-\nu]$上的下列函数:

$$\tilde{F}_\nu(x)=\int_x^{-\nu} q_\nu(u)\ \mathrm{d}u. \tag{11}$$

˜那么， F_ν 是定义在 $(-\infty,-\nu]$上的正递减映射。

引理2。 设 $h\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测，且 $\mathbf{E}\ [|h(Z_\nu)|] < \infty$。那么，*Stein*方程 （*9*）存在唯一的有界解，其表达式为

$$\begin{aligned} f_h(x) = & \left[\int_{-\nu}^{x}\frac{p_\nu(u)}{2(x+\nu)p_\nu(x)}\left(h(u)-\mathbf{E}\left[h(Z_\nu)\right]\right)\ \mathrm{d}u\right]\mathbf{1}_{(-\nu,+\infty)}(x) \\ - & \left[\int_{x}^{-\nu}\frac{q_\nu(u)}{2(x+\nu)q_\nu(x)}\left(h(u)-\mathbf{E}[h(Z_\nu)]\right)\ \mathrm{d}u\right]\mathbf{1}_{(-\infty,-\nu)}(x) \\ + & \frac{h(-\nu)-\mathbf{E}\left[h(Z_\nu)\right]}{\nu}\mathbf{1}_{\{-\nu\}}(x). \end{aligned} \tag{12}$$

证明： 参见 [9] 第 2.2 节。 ■

注1。当 h 为 C^1 且 h' 绝对连续时，利用洛必达法则多次求导，可证明这个唯一解在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 。例如，当 x从上方趋近于 $-\nu$ 时：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow -\nu} f_h'(x) = & \lim_{x\downarrow -\nu} \frac{2(x+\nu)p_\nu(x)\tilde{h}(x) + x\int_{-\nu}^{x}\tilde{h}(u)p_\nu(u)\,\mathrm{d}u}{4(x+\nu)^2 p_\nu(x)} \\
\overset{(\hat{H})}{=} & \lim_{x\downarrow -\nu} \frac{2(x+\nu)p_\nu(x)h'(x) - xp_\nu(x)\tilde{h}(x) + \int_{-\nu}^{x}\tilde{h}(u)p_\nu(u)\,\mathrm{d}u + x\tilde{h}(x)p_\nu(x)}{2(2-x)(x+\nu)p_\nu(x)} \\
= & \frac{1}{2+\nu}\lim_{x\downarrow -\nu} \frac{2(x+\nu)p_\nu(x)h'(x) + \int_{-\nu}^{x}\tilde{h}(u)p_\nu(u)\,\mathrm{d}u}{2(x+\nu)p_\nu(x)} \\
\overset{(\hat{H})}{=} & \frac{1}{2+\nu}\lim_{x\downarrow -\nu} \frac{2h''(x)(x+\nu)p_\nu(x) - xp_\nu(x)h'(x) + \tilde{h}(x)p_\nu(x)}{-xp_\nu(x)} \\
= & \frac{h'(-\nu)}{2+\nu} + \frac{\tilde{h}(-\nu)}{\nu(2+\nu)},
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{h}(x) = h(x) - \mathbf{E}[h(Z_\nu)]$, "$\overset{(\hat{H})}{=}$" 表示我们使用了洛必达法则，并且还应用了基本性质

$$2(x+\nu)p_\nu(x) = -\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\,\mathrm{d}u. \tag{13}$$

当 x 从下方趋近于 $-\nu$ 时，利用关于 q_ν 的类似关系式，同样可以得到这一结论：

$$2(x+\nu)q_\nu(x) = \int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\,\mathrm{d}u \text{ for every } x < -\nu.$$

首先，我们推导出多维 Stein 方程 (8) 存在唯一有界解。

命题 1. 设 $h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个测试函数，满足对任意$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，均有 $\mathbf{E}\left[|h(F(\nu),\mathbf{y})|\right] < \infty$。则 *(8)* 存在唯一有界解，可表示为

$$\begin{aligned}
f_h(x,\mathbf{y}) = & \left[\int_{-\nu}^{x} \frac{p_\nu(u)}{2(x+\nu)p_\nu(x)}\left(h(u,\mathbf{y}) - \mathbf{E}\left[h(Z_\nu,\mathbf{y})\right]\right)\,\mathrm{d}u\right]\mathbf{1}_{(-\nu,+\infty)}(x) \\
- & \left[\int_{x}^{-\nu} \frac{q_\nu(u)}{2(x+\nu)q_\nu(x)}\left(h(u,\mathbf{y}) - \mathbf{E}\left[h(Z_\nu,\mathbf{y})\right]\right)\,\mathrm{d}u\right]\mathbf{1}_{(-\infty,-\nu)}(x), \\
+ & \frac{h(-\nu,\mathbf{y}) - \mathbf{E}\left[h(Z_\nu,\mathbf{y})\right]}{\nu}\mathbf{1}_{\{-\nu\}}(x).
\end{aligned} \tag{14}$$

证明： 我们先证明 (14) 满足 (8)。对于 $x > -\nu$，对 x 求 (14) 的导数可得：

$$\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y}) = \frac{h(x,\mathbf{y}) - \mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})]}{2(x+\nu)} + \frac{x}{4(x+\nu)^2 p_\nu(x)} \int_{-\nu}^{x} p_\nu(u)(h(x,\mathbf{y}) - \mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})])\ \mathrm{d}u,$$

因此我们得出，在 $(-\nu,+\infty)$ 中有 (8)。对于 $x < -\nu$：

$$\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y}) = \frac{h(x,\mathbf{y}) - \mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})]}{2(x+\nu)} - \frac{x}{4(x+\nu)^2 q_\nu(x)} \int_{x}^{-\nu} q_\nu(u)(h(x,\mathbf{y}) - \mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})])\ \mathrm{d}u,$$

从而在 $(-\infty,-\nu)$ 上得到相同的结论。最后，我们可以像 [8]，中那样运用洛必达法则，验证当 x 趋于 $-\nu$时，解 (14) 趋于 $^{h}{}_{(-\nu,\mathbf{y})-\mathbf{E}\ [h\ Z_\nu\ \ ]\ (,\mathbf{y})}$，无论取左极限~~还是右极限。~~因此， $x \longmapsto f_h(x,\mathbf{y})$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。此外，按照备注 1 中的相同论证，我们可以证明，当 h 是C^1 且 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 绝对连续时，$\frac{\partial f_h}{\partial x}$ 也有同样的性质。因此， f 关于 x 是 C^1 。至此，存在性部分得证。

下面证明唯一性。假设 f_h, g_h 是方程 (8) 的两个有界解。那么，对每个 $(x,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$2(x+\nu)\frac{\partial (f_h - g_h)}{\partial x}(x,\mathbf{y}) - x(f_h - g_h)(x,\mathbf{y}) = 0.$$

解上述方程组可得

$$(f_h - g_h)(x,\mathbf{y}) = \begin{cases} c_1(\mathbf{y})\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(x+\nu)^{\frac{\nu}{2}}} \text{ if } (x,\mathbf{y}) \in (-\nu,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ c_2(\mathbf{y})\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(-(x+\nu))^{\frac{\nu}{2}}} \text{ if } (x,\mathbf{y}) \in (-\infty,-\nu)\times\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

so

$$f_h(x,\mathbf{y}) = \begin{cases} g_h(x,\mathbf{y}) + c_1(\mathbf{y})\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(x+\nu)^{\frac{\nu}{2}}} \text{ if } (x,\mathbf{y}) \in (-\nu,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ g_h(x,\mathbf{y}) + c_2(\mathbf{y})\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(-(x+\nu))^{\frac{\nu}{2}}} \text{ if } (x,\mathbf{y}) \in (-\infty,-\nu)\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

因此，当且仅当对每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$， f_h 有界， $c_1(\mathbf{y}) = c_2(\mathbf{y}) = 0$ 。 ■

下一步是为解 (14) 及其偏导数寻找合适的估计。我们沿用 [9] 和 [8] 在一维情形下提出的方法。首先给出一个有用的结果，它为 (8) 的解提供了另一种表达形式。以下引理的证明可见附录。

引理 3. *1.* 设 f_h 由 *(14)* 给出。那么对于 $x > -\nu$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} & f_h(x,\mathbf{y}) \qquad (15) \\ = \quad & \frac{1-F_\nu(x)}{\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u}\int_{-\nu}^{x}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\ \mathrm{d}w + \frac{F_\nu(x)}{\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u}\int_{x}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w, \end{aligned}$$

且对于每个 $x < -\nu$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，我们有：

$$\begin{aligned} f_h(x,\mathbf{y}) = \ & \frac{1}{\int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u}\ \left[\int_{x}^{-\nu}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[\tilde{F}_\nu(x) - \tilde{F}_\nu(w)\right]\ \mathrm{d}w\right. \\ & \left. + \tilde{F}_\nu(x)\int_{-\nu}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w\right]. \qquad (16) \end{aligned}$$

2. 若 F_ν 表示中心伽马分布 $F(\nu)$ 的累积分布函数，则对于任意 $x \in (-\nu, \infty)$：

$$\int_{-\nu}^{x} F_\nu(s)\ \mathrm{d}s = xF_\nu(x) - \int_{-\nu}^{x} sp_\nu(s)\ \mathrm{d}s.$$

and

$$\int_{x}^{+\infty} (1 - F_\nu(s))\ \mathrm{d}s = -x(1 - F_\nu(x)) + \int_{x}^{+\infty} sp_\nu(s)\ \mathrm{d}s.$$

˜3. 令 F_ν 由（*11*）给出。则对于 $x \in (-\infty, -\nu)$，有

$$\int_{x}^{-\nu} \tilde{F}_\nu(w)\ \mathrm{d}w = \int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u - x\tilde{F}_\nu(x).$$

现在我们来为 Stein方程的解推导一些估计。证明思路基于 [8] 中定理 3.13 的证明。

命题 2. 设 $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 是一个偏导数有界的 C^2 映射。设 f_h 是与 h相对应的（*8*）的唯一有界解。我们有以下估计：

$$\|f_h\|_\infty \leqslant C\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty, \tag{17}$$

并且对于每个 $j \in \{1, ..., n\}$,

$$\left\|\frac{\partial f_h}{\partial y_j}\right\|_\infty \leqslant C\left\|\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y_j}\right\|_\infty \quad and \quad \left\|\frac{\partial f_h}{\partial x}\right\|_\infty \leqslant C\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty. \tag{18}$$

证明： 我们来证明估计（17）。设 $x > -\nu$。利用引理 3，我们有

$$\begin{aligned} & |f_h(x, \mathbf{y})| \\ = & \left| \frac{F_\nu(x)}{\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u} \int_{x}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w, \mathbf{y})(1 - F_\nu(w))\ \mathrm{d}w + \frac{1 - F_\nu(x)}{\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u} \int_{-\nu}^{x} \frac{\partial h}{\partial x}(w, \mathbf{y})F_\nu(w)\ \mathrm{d}w \right|. \end{aligned}$$

注意到 $\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u = -2(x + \nu)p_\nu(x) < 0$。于是，根据引理 3 中第 2 点，

$$
\begin{aligned}
|f_h(x,\mathbf{y})| \leqslant\ & \frac{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty}{-\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left(F_\nu(x)\int_x^{+\infty}(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w+(1-F_\nu(x))\int_{-\nu}^{x}F_\nu(w)\ \mathrm{d}w\right)\\
=\ & \frac{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty}{-\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left(F_\nu(x)\left(\int_x^{+\infty}sp_\nu(s)\ \mathrm{d}s-x(1-F_\nu(x))\right)\right.\\
& & \left.+(1-F_\nu(x))\left(xF_\nu(x)-\int_{-\nu}^{x}sp_\nu(s)\ \mathrm{d}s\right)\right)\\
=\ & \frac{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty}{-\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left(F_\nu(x)\int_{-\nu}^{+\infty}sp_\nu(s)\ \mathrm{d}s-\int_{-\nu}^{x}sp_\nu(s)\ \mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
$$

利用 $\int_{-\nu}^{+\infty} sp_\nu(s)\,\mathrm{d}s=\mathbf{E}[Z_\nu]=0$ 这一事实，我们得出在 $(-\nu,+\infty)$ 上的估计 (17)。现在，我们对 $x<-\nu$ 采用相同的方法。根据引理 3

$$
\begin{aligned}
|f_h(x,\mathbf{y})| =\ & \frac{1}{-\int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left|\left[\int_x^{-\nu}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[\tilde{F}_\nu(x)-\tilde{F}_\nu(w)\right]\ \mathrm{d}w\right.\right.\\
& & \left.\left.+\tilde{F}_\nu(x)\int_{-\nu}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w\right]\right|.
\end{aligned}
$$

由于 $\tilde{F}_\nu$ 在 $(-\infty,-\nu)$ 上递减，且 $\int_x^{-\nu} uq_\nu(u)\,\mathrm{d}u=2(x+\nu)q_\nu(x)\geqslant 0$，因此我们有

$$
\begin{aligned}
|f_h(x,\mathbf{y})| \leqslant\ & \frac{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty}{-\int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left[\int_x^{-\nu}\left[\tilde{F}_\nu(x)-\tilde{F}_\nu(w)\right]\ \mathrm{d}w+\tilde{F}_\nu(x)\int_{-\nu}^{+\infty}(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w\right]\\
\leqslant\ & \frac{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty}{-\int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left[\tilde{F}_\nu(x)\left(-(x+\nu)+\int_{-\nu}^{+\infty}(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w\right)-\int_x^{-\nu}\tilde{F}_\nu(w)\ \mathrm{d}w\right]\\
\leqslant\ & \frac{\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty}{-\int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u} & \left[-x\tilde{F}_\nu(x)-\left(\int_x^{-\nu}uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u-x\tilde{F}_\nu(x)\right)\right]\\
=\ & \left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty. &
\end{aligned}
$$

我们使用引理 3 来表示 $\tilde{F}_\nu$ 的积分，并利用了 $\int_{-\nu}^{+\infty}(1-F_\nu(u))\,\mathrm{d}u=\nu$ 这一事实。因此，我们证明了在 $(-\infty,-\nu)$ 上的界 (17)。利用 f_h 的连续性，这个不等式对 $x=-\nu$ 也成立。因此，不等式 (17) 成立。

现在我们来证明不等式 (18)。首先处理 f_h 关于 x 的导数。由于 f_h 满足 (8)，因此对于 $x\neq-\nu$ 以及 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，

$$
\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y})=\frac{x}{2(x+\nu)}f_h(x,\mathbf{y})+\frac{h(x,\mathbf{y})-\mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})]}{2(x+\nu)}. \tag{19}
$$

我们再次区分 $x > -\nu$ 和 $x < -\nu$ 两种情况。

• 假设 $x > -\nu$。根据引理 3 的第 1 点，以及该引理证明中的关系式（48），我们得到

$$\begin{aligned} & xf_h(x,\mathbf{y}) + \tilde{h}(x,\mathbf{y}) \\ = \; & \frac{x(1-F_\nu(x))}{\int_{-\nu}^x up_\nu(u)\,\mathrm{d}u}\int_{-\nu}^x \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\,\mathrm{d}w + \frac{xF_\nu(x)}{\int_{-\nu}^x up_\nu(u)\,\mathrm{d}u}\int_x^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\,\mathrm{d}w \\ + \; & \int_{-\nu}^x \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\,\mathrm{d}w - \int_x^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\,\mathrm{d}w \\ = \; & \frac{G(x)}{A_\nu(x)}\int_{-\nu}^x \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\,\mathrm{d}w - \frac{H(x)}{A_\nu(x)}\int_x^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\,\mathrm{d}w, \end{aligned}$$

其中我们使用了记号

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_\nu(x) & = & \int_{-\nu}^x up_\nu(u)\,\mathrm{d}u = -2(x+\nu)p_\nu(x) \leqslant 0 \\ G(x) & = & A_\nu(x) + x(1-F_\nu(x)) \\ H(x) & = & -A_\nu(x) + xF_\nu(x). \end{array}\right.$$

注意到 $H'(x) = F_\nu(x)$ 和 $H(-\nu) = 0$。因此，$H(x) = \int_{-\nu}^x F_\nu(u)\,\mathrm{d}u$。又有 $G(x) = \int_x^{+\infty}(1-F_\nu(u))\,\mathrm{d}u$，因为 $G'(x) = 1 - F_\nu(x)$，$G(-\nu) = -\nu$，且 $\int_{-\nu}^{+\infty}(1-F_\nu(u))\,\mathrm{d}u = \nu$。因此，我们得到 $\frac{\partial f_h}{\partial x}$ 的以下界：

$$\left|\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y})\right| \leqslant \left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty \frac{2\left(\int_{-\nu}^x F_\nu(u)\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_x^{+\infty}(1-F_\nu(u))\,\mathrm{d}u\right)}{(x+\nu)|A_\nu(x)|}.$$

最后，我们需要证明由 S_ν 定义的函数

$$S_\nu(x) := \frac{2\left(\int_{-\nu}^x F_\nu(u)\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_x^{+\infty}(1-F_\nu(u))\,\mathrm{d}u\right)}{(x+\nu)|A_\nu(x)|} \tag{20}$$

在 $(-\nu,+\infty)$ 上有界。我们将证明 S_ν 在 $\mathbb{R}_+$ 上有界，并且在 $-\nu$ 处存在有限极限。对于 $x > 0$，我们使用引理 3 得到

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty}(1-F_\nu(u))\,\mathrm{d}u = & \quad 2(x+\nu)p_\nu(x) - x(1-F_\nu(x)) \\ \leqslant & \quad 2(x+\nu)p_\nu(x). \end{aligned}$$

因此，对于每个 $x > 0$，我们都有（利用 F_ν 是递增的且 $\int_{-\nu}^{\infty}(1-F(u))du = \nu$），

$$S_\nu(x) \leqslant \frac{2(x+\nu)F_\nu(x)\cdot 2(x+\nu)p_\nu(x)}{2(x+\nu)^2 p_\nu(x)} = 2F_\nu(x) \leqslant 2.$$

现在，对于从 x 到 $-\nu$，首先注意到：

$$\lim_{x\to-\nu} S_\nu(x) = 2\nu \lim_{x\to-\nu}\frac{\int_{-\nu}^x F_\nu(u)\,\mathrm{d}u}{2(x+\nu)p_\nu(x)},$$

由于分子和分母都趋于零，我们多次应用洛必达法则即可得出结论。我们利用关系式 (13) 对 (20) 求导。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\nu} S_\nu(x) = &\quad 2\nu \lim_{x\to-\nu} \frac{F_\nu(x)}{(2-x)(x+\nu)p_\nu(x)} = \frac{4\nu}{2+\nu}\lim_{x\to-\nu}\frac{F_\nu(x)}{2(x+\nu)p_\nu(x)}\\ = &\quad \frac{4\nu}{2+\nu}\lim_{x\to-\nu}\frac{p_\nu(x)}{-xp_\nu(x)} = \frac{4}{2+\nu}.\end{aligned}$$

因此， S_ν 是连续的，在 $\mathbb{R}_+$ 上有界，并且在 $-\nu$处有有限极限，所以 S_ν 在 $(-\nu,\ +\infty)$ 上有界，由此我们得出

$$\forall x > -\nu, \left|\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y})\right| \leqslant \|S_\nu\|_\infty \left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty.$$

• 对于 $x < -\nu$。 我们进行相同的计算，得到

$$\begin{aligned}&x f_h(x,\mathbf{y}) + \tilde{h}(x,\mathbf{y})\\ = &\quad \frac{\tilde{G}(x)}{B_\nu(x)}\int_x^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[1-F_\nu(w)\right]\,\mathrm{d}w - \frac{x}{B_\nu(x)}\int_x^{-\nu}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\tilde{F}_\nu(w)\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

其中我们记

$$\begin{cases} B_\nu(x) &= \int_x^{-\nu} u q_\nu(u)\,\mathrm{d}u = 2(x+\nu)q_\nu(x)\\ \tilde{G}(x) &= x\tilde{F}_\nu(x) - B_\nu(x).\end{cases}$$

那么，我们有 $\tilde{G}(x) = \int_x^{-\nu}\tilde{F}_\nu(u)\,\mathrm{d}u$。对所有 $x < -\nu$，令：

$$R_\nu(x) := \frac{\left(\int_x^{-\nu}\tilde{F}_\nu(u)\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_x^{+\infty}\left[1-F_\nu(w)\right]\,\mathrm{d}w - x\right)}{(x+\nu)B_\nu(x)} = \frac{-2x\left(\int_x^{-\nu}\tilde{F}_\nu(u)\,\mathrm{d}u\right)}{2q_\nu(x)(x+\nu)^2}.$$

那么，根据 (19)，对于每个 $x < -\nu$ 以及每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，我们有：

$$\left|\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y})\right| \leqslant R_\nu(x)\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty.$$

我们需要证明 R_ν 有界。在这里，我们将证明 R_ν 在 $-\infty$和 $-\nu$处有有限极限。我们将再次使用基本等式 (13)。在 $-\nu$ 中：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\nu} R_\nu(x) = &\quad 2\nu\lim_{x\to-\nu}\frac{\int_x^{-\nu}\tilde{F}_\nu(u)\,\mathrm{d}u}{2(x+\nu)^2 q_\nu(x)}\\ = &\quad 2\nu\lim_{x\to-\nu}\frac{-\tilde{F}_\nu(x)}{(2-x)(x+\nu)q_\nu(x)} = \frac{4\nu}{\nu+2}\lim_{x\to-\nu}\frac{-\tilde{F}_\nu(x)}{2(x+\nu)q_\nu(x)}\\ = &\quad \frac{4\nu}{\nu+2}\lim_{x\to-\nu}\frac{q_\nu(x)}{-xq_\nu(x)} = \frac{4}{2+\nu}.\end{aligned}$$

在 $-\infty$中，我们以类似的方式进行，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} R_\nu(x) = &\quad -2\lim_{x\to-\infty}\frac{\int_x^{-\nu}\tilde{F}_\nu(u)\,\mathrm{d}u}{2(x+\nu)q_\nu(x)}\\ = &\quad -2\lim_{x\to-\infty}\frac{\tilde{F}_\nu(x)}{xq_\nu(x)} = -4\lim_{x\to-\infty}\frac{\tilde{F}_\nu(x)}{2(x+\nu)q_\nu(x)}\\ = &\quad -4\lim_{x\to-\infty}\frac{q_\nu(x)}{xq_\nu(x)} = 0.\end{aligned}$$

这证明了 R_ν在（$-\infty$， $-\nu$）上是有界的，因此对于每个 $x<-\nu$， $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，

$$\left|\frac{\partial f_h}{\partial x}(x,\mathbf{y})\right| \leqslant \|R_\nu\|_\infty \left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty.$$

由于 f_h 关于 x是 C^1 的，这通过连续性在 $-\nu$ 上成立。因此，我们证明了 t

$$\left\|\frac{\partial f_h}{\partial x}\right\|_\infty \leqslant \max\left\{\|S_\nu\|_\infty, \|R_\nu\|_\infty\right\}\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_\infty$$

且（18）中的第一个不等式得证。

为处理（18）中的第二个界，对 Stein方程（8）关于 y_j求导，我们实际上得到

$$\frac{\partial f_h}{\partial y_j} = f_{\frac{\partial h}{\partial y_j}}.$$

由于 h 是 C^2的，（17）中的估计直接给出了（18）中的第二个估计。 ■

3 伽马分布的多维 Stein-Malliavin 演算

我们结合 Malliavin演算的技巧，利用多维Stein方程及其解在命题 2 中证明的性质，从而获得随机向量概率分布之间距离的界。具体而言，我们将评估任意随机向量 $(X,\ \mathbb{Y})$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的分布与随机向量 $(Z_\nu,\ \mathbb{Y})$ 之间的二阶Wasserstein距离，其中 $Z_\nu\sim F(\nu)$，且 Z_ν与 $\mathbb{Y}$独立。

首先介绍下文中使用的距离。令 H 为函数h的集合： $\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ ，它们满足 C^1 ，使得 h 的每个偏导数都是 Lipschitz 连续的，且

$$\|h\|_{\mathrm{Lip}} + \|h'\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1,$$

其中

$$\|h\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n+1}\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}}}\frac{|h(\mathbf{x})-h(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \text{ and } \|h'\|_{\mathrm{Lip}} := \max_{1\leqslant j\leqslant n+1}\sup_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n+1}\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}}}\frac{|\partial_j h(\mathbf{x})-\partial_j h(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}.$$

那么，对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中任意可积的随机向量 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$，我们将二阶*Wasserstein*距离 定义为

$$d_2(\mathbb{P}_{\mathbb{X}}, \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}) := \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbf{E}[h(\mathbb{X})] - \mathbf{E}[h(\mathbb{Y})]| . \tag{21}$$

（按照惯例，如果 $\mathbb{X}$ 或 $\mathbb{Y}$ 不可积，我们就将其设为 ∞：我们无法用这种距离进行测量）。我们还回顾一下经典的瓦瑟斯坦距离。令

$$\mathcal{A} = \{h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h \text{ is Lipschitz continuous with } \|h\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1\}.$$

然后是 Was $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 的概率分布之间的 serstein 距离定义为 b y

$$d_{\mathrm{W}}(\mathbb{P}_{\mathbb{X}}, \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}) := \sup_{h \in \mathcal{A}} |\mathbf{E}[h(\mathbb{X})] - \mathbf{E}[h(\mathbb{Y})]| . \tag{22}$$

我们可以证明以下事实：对于距离 d_2 的收敛蕴含经典瓦瑟斯坦距离的收敛。

引理4。对于任意可积的随机向量 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$，我们有

$$d_{\mathrm{W}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant \sqrt{\frac{32 I_n}{\sqrt{\pi}}} \sqrt{d_2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})},$$

其中 $I_n := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{u}\| e^{\frac{-\|\mathbf{u}\|^2}{2}}$
d*u</style}*。

证明： 设 h 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 1-利普希茨映射。根据拉德马赫定理，h 在勒贝格几乎处处可微。我们可以考虑其偏导数的一个版本。对于 $\sigma > 0$，我们考虑方差为 σ^2 的 n 维高斯核，其形式为

$$G_\sigma(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}\right),$$

以及 h 的以下近似式：$h_\sigma := h * G_\sigma$。首先，我们证明存在一个常数 a_σ，使得 $a_\sigma h_\sigma \in \mathbf{H}$。函数 h_σ 是 C^∞，其一阶偏导数由 $\partial_i h_\sigma = \partial_i h * G_\sigma$ 给出。因此，我们得出结论：

$$\|\partial_j h_\sigma\|_\infty \leqslant \|h\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1.$$

关于 h_σ 的二阶导数，我们有：

$$\begin{aligned} \left|\partial^2_{i,j} h_\sigma(\mathbf{x})\right| = & \quad |\partial_i h * \partial_j G_\sigma(\mathbf{x})| \leq \frac{\|h\|_{\mathrm{Lip}}}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_j| \exp\left(\frac{-\|\mathbf{u}\|^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \\ = & \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\|h\|_{\mathrm{Lip}}}{\sigma} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}. \end{aligned}$$

这意味着，对于每个 $\sigma \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$，$\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} h_\sigma \in \mathbf{H}$。

接下来，我们来计算 h 和 h_σ 之间的差值。我们可以写成

$$\begin{aligned} & |h(\mathbf{x}) - h_\sigma(\mathbf{x})| \\ = & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})) G_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \right| \leq \|h\|_{\mathrm{Lip}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{u}\| G_\sigma(\mathbf{u}) \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \\ \leq & \frac{\sigma^{n+1}\|h\|_{\mathrm{Lip}}}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{u}\| e^{\frac{-\|\mathbf{u}\|^2}{2}} \,\mathrm{d}\mathbf{u} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{u}\| e^{\frac{-\|\mathbf{u}\|^2}{2}} \,\mathrm{d}\mathbf{u} \right) \sigma := I_n \sigma. \end{aligned}$$

因此，对于每个 $\sigma \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$，我们有

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}[h(\mathbb{X})] - \mathbf{E}[h(\mathbb{Y})]| \leqslant & \quad |\mathbf{E}[h(\mathbb{X})] - \mathbf{E}[h_\sigma(\mathbb{X})]| + |\mathbf{E}[h(\mathbb{Y})] - \mathbf{E}[h_\sigma(\mathbb{Y})]| \\ & + \quad |\mathbf{E}[h_\sigma(\mathbb{X})] - \mathbf{E}[h_\sigma(\mathbb{Y})]| \\ \leqslant & \quad 2\|h - h_\sigma\|_\infty + \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} d_2(X, Y) \\ \leqslant & \quad 2I_n\sigma + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} d_2(\mathbb{X}, \mathbb{Y}). \end{aligned}$$

左侧作为 σ 的函数，可通过在 $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ 上取值来优化。

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} d_2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{2I_n}} \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right].$$

注意，由于 $(I_n)_n$ 是递增的，确实有 $\sigma_0 \leqslant \sqrt{\frac{d_2(\mathbb{X}\,\mathbb{Y}}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}},$ ~~，因为~~距离小于 $\mathbf{1}$。 σ 的这个取值导致了

$$d_{\mathrm{W}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leqslant 2\sqrt{\frac{8I_n}{\sqrt{\pi}} d_2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})},$$

这就是所需的结论。 ■

下面陈述并证明本节的主要结果。

定理1。 设 X 为中心化随机变量， $\mathbb{Y} = (Y_1, \cdots Y_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的中心化随机向量，满足 $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ 且 $Y_j \in \mathbb{D}^{1,2}$ 对每个 $j \in \{1, \cdots n\}$ 均成立。那么存在一个常数 $C = C(\nu) > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & d_2\left(\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}, F(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\right) \\ \leq & \quad C\ \mathbf{E}\left[\left|2(X+\nu) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}X \right\rangle\right|\right] + C\ \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left[\left|\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}Y_j \right\rangle\right|\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

此外，若我们假设对于每个 $j \in \{1, \cdots n\}$， $X \in \mathbb{D}^{1,4}$ 且 $Y_j \in \mathbb{D}^{1,4}$，则

$$
\begin{aligned}
& d_2\left(\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}, F(\nu)\otimes\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\right) \qquad (24)\\
\leq\ & C\ \mathbf{E}\left[\left(2(X+\nu)-\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}X\right\rangle\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + C\ \sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}Y_j\right\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

证明： 首先，设 $h\in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$，且 $\mathsf{k}h\mathsf{k}^{\mathrm{Lip}}+\mathsf{k}h'\mathsf{k}_{\mathrm{Lip}}\leqslant 1$。令 f_h 为 Stein方程（8）的相应解。则

$$
\begin{aligned}
& \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}(x,\mathbf{y}) - \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(x,\mathbf{y})\\
=\ & \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}(x,\mathbf{y}) - \int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})]\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y})\\
=\ & \mathbf{E}\left[h(X,\mathbb{Y}) - \mathbf{E}\left[h(Z_\nu,\mathbb{Y})\right]\right].
\end{aligned}
$$

因此，根据斯坦方程（8），我们有

$$
\begin{aligned}
& \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}(x,\mathbf{y}) - \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(x,\mathbf{y})\\
=\ & 2\mathbf{E}\left[(X+\nu)\frac{\partial f_h}{\partial x}(X,\mathbb{Y})\right] - \mathbf{E}\left[X f_h(X,\mathbb{Y})\right]. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

由于 X 是中心化的，我们可以写成 $X=\delta\left[\mathrm{D}(-L)^{-1}X\right]$，将其代入（25）

$$
\begin{aligned}
& \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}(x,\mathbf{y}) - \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(x,\mathbf{y})\\
=\ & 2\mathbf{E}\left[(X+\nu)\frac{\partial f_h}{\partial x}(X,\mathbb{Y})\right] - \mathbf{E}\left[\delta\left[\mathrm{D}(-L)^{-1}X\right] f_h(X,\mathbb{Y})\right]\\
=\ & 2\mathbf{E}\left[(X+\nu)\frac{\partial f_h}{\partial x}(X,\mathbb{Y})\right] - \mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}f_h(X,\mathbb{Y})\right\rangle\right]\\
=\ & 2\mathbf{E}\left[(X+\nu)\frac{\partial f_h}{\partial x}(X,\mathbb{Y})\right] - \mathbf{E}\left[\frac{\partial f_h}{\partial x}(X,\mathbb{Y})\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}X\right\rangle\right]\\
& -\ \sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\left[\frac{\partial f_h}{\partial y_j}(X,\mathbb{Y})\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}Y_j\right\rangle\right].
\end{aligned}
$$

由于 $\mathsf{k}h\mathsf{k}^{\mathrm{Lip}}+\mathsf{k}h'\mathsf{k}_{\mathrm{Lip}}\leqslant 1$，利用引理 3 可得 $\left\|\frac{\partial f_h}{\partial x}\right\|_\infty\leqslant C$ 和 $\left\|\frac{\partial f_h}{\partial y_j}\right\|_\infty\leqslant 1$。因此，对于某个通用常数 C，我们得到

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}(x,\mathbf{y}) - \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_X\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(x,\mathbf{y})\right|\\
\leqslant\ & C\mathbf{E}\left[\left|(X+\nu) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}X\right\rangle\right|\right] + C\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\left[\left|\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}Y_j\right\rangle\right|\right].
\end{aligned}
$$

为了得出界（23），我们需要上述不等式对每个 $h \in \mathbf{H}$ 都成立。如果 h 是这些函数之一，我们用序列逼近它

$$h_k(x,\mathbf{y}) := \mathbf{E}\left[h\left(x+\frac{N}{\sqrt{k}},\mathbf{y}+\frac{\mathbf{N}}{\sqrt{k}}\right)\right],$$

其中，$N \sim \mathrm{N}(0,1)$ 与 $\mathbf{N} \sim \mathrm{N}_n(0,I_n)$ 相互独立。随后，$(h_k)_k$ 一致收敛于 h，并且我们仍有 $\|h_k\|_{\mathrm{Lip}} + \|h_k'\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$。因此，我们得到：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,\mathbb{Y})}(x,\mathbf{y}) - \int_{(-\nu,+\infty)\times\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y})\ \mathrm{d}\mathbb{P}_{Z_\nu}\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(x,\mathbf{y})\right| \\
\leqslant\ & 2\|h-h_k\|_\infty + C\mathbf{E}\left[\left|(X+\nu) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}X\right\rangle\right|\right] \\
+\ & C\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\left[\left|\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}Y_j\right\rangle\right|\right].
\end{aligned}$$

取 $k\to\infty$ 的极限，即可得到 (23)。对于 (24)，只需注意，如果 $X, Y_j \in \mathbb{D}^{1,4}$，那么标量积 $\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}X\rangle$ 和 $\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X, \mathrm{D}Y_j\rangle$ 都属于 L^2，因此我们可以应用柯西-施瓦茨不等式。 ■

4 Wiener混沌上的渐近独立性

现在我们聚焦于 Wiener 混沌中的随机变量，并给出定理1中所证明结果的一个渐近版本。我们考虑一个序列 $(X_k, k\geq 1)$，它当$k\to\infty$时依分布收敛于中心伽马分布 $F(\nu)$；并考虑一个随机向量序列 $(\mathbb{Y}_k, k\geq 1)$，它当 $k\to\infty$ 时依分布收敛于任意随机向量 $\mathbb{Y}$。我们假设对于每个 $k\geq 1$，X_k 以及 $\mathbb{Y}_k$ 的各分量都属于固定阶的 Wiener 混沌。在一些相当自然的假设下，我们利用定理1以及 Wiener 混沌中随机变量的性质，推导出随机序列 $((X_k,\mathbb{Y}_k)\ k\geq 1)$ 依分布收敛于 $(Z_\nu,\mathbb{Y})$，其中 Z_ν 服从参数为 $\nu>0$ 的中心伽马分布，且 Z_ν 与 $\mathbb{Y}$ 相互独立。这意味着序列 $(X_k, k\geq 1)$ 和 $(\mathbb{Y}_k,\ k\geq 1)$ 渐近独立。我们在由 (21) 定义的 d_2-距离下，给出量化这种渐近独立性的界。

我们首先回顾一下，如果一列位于第 q 阶 Wiener混沌中的 $(X_k,\ k\geq 1)$ 收敛到 $F(\nu)$，那么混沌的阶数 q 必须是偶整数。事实上，如果 q 是奇数，那么对任意 $k\geqslant 1$，都有 $\mathbf{E}\left[X_k^3\right]=0$，这与以下事实矛盾：当 $Z_\nu\sim F(\nu)$ 时，$\mathbf{E}[Z_\nu^3]=8\nu>0$。

在陈述我们的结果之前，我们先回顾一下 Wiener混沌上伽马逼近的以下判据。其证明参见 [13] 。

定理 2。 设 $(X_k, k\geq 1)$ 为一列随机变量，使得对于每个 $k\geqslant 1$, $X_k = I_q(f_k)$，其中 q 为偶数且 $f_k\in H^{\odot q}$。假设 $\mathbf{E}[X_k^2] \xrightarrow[k\to\infty]{} 2\nu$。那么以下命题等价：

1. 序列 $(X_k, k\geq 1)$ 依分布收敛到 $F(\nu)$。

2. 对于满足 $p \neq \frac{q}{2}$ 的每个 $p \in \{1, ..., q-1\}$，

$$\|f_k \otimes_p f_k\|^2_{H^{\otimes 2q-2p}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad and \quad \left\|f_k \widetilde{\otimes}_{\frac{q}{2}} f_k - c_q f_k\right\|^2_{H^{\otimes q}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

其中， $c_q > 0$ 是一个显式常数。

3. 当 $k \to \infty$时，

$$\|\mathrm{D}X_k\|^2_H - 2qX_k - 2q\nu \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \ in \ L^2(\Omega).$$

与 1.-3. 等价的其他条件（我们的工作中不需要）已在 [13]中陈述并证明。

我们将在当前背景下应用这一理论，即研究带有一个趋于中心伽马分布的分量的渐近独立性。我们有以下结果。

定理 *3.* 设 n、 q和 q_1、$\cdots$ q_n 为严格正整数，使得 q为偶数，并且对于每个 $j \in \{1,\cdots\ n\}$，都有 $q \geqslant q_j$。考虑序列 $(X_k, k \geqslant 1) = (I_q(f_k)\ k \geqslant 1)$，当 k趋于 $+\infty$时依分布收敛于服从 $F(\nu)$ 的随机变量 X。考虑随机向量序列 $(\mathbb{Y}_k)_k = ((Y^1_k, \cdots Y^n_k))_k$，使得 $Y^j_k = I_{q_j}(g^j_k)$，并且存在随机向量 $\mathbb{Y} = (Y^1, \cdots\ Y^n)$，使得 $(\mathbb{Y}_k, k \geqslant 1)$依分布收敛于 $\mathbb{Y}$。我们假设，对于每个 $j \in \{1,\cdots\ n\}$，都有：

$$\mathbf{E}\left[X_k Y^j_k\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \ and \ \left\|f_k \otimes_{\frac{q}{2}} g^j_k\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{26}$$

于是我们得到如下依分布收敛：

$$(X_k, \mathbb{Y}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{(\mathrm{d})} (X, \mathbb{Y}), \tag{27}$$

其中 $X \sim F(\nu)$，且 X 与 $\mathbb{Y}$ 独立。此外，若记

$$\theta_k := \mathbb{P}_{(X_k, \mathbb{Y}_k)} \ and \ \eta := \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_{\mathbb{Y}},$$

则这两个测度之间的二阶*Wasserstein*距离可估计如下：

$$\begin{aligned} d_2(\theta_k, \eta) \leqslant \quad & C\ \mathbf{E}\left[\left(2(X_k + \nu) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X_k, \mathrm{D}X_k \right\rangle\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ + \quad & C\ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X_k, \mathrm{D}Y^j_k \right\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}} + d_2\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k}, \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

证明： 对于 $k \geq 1$，考虑概率测度 $\eta_k := \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k} = F(\nu) \otimes \mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k}$。于是，对于每个 $h \in \mathbf{H}$（即第3节开头定义的集合），

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y}) \ \mathrm{d}\eta_k(x,\mathbf{y}) - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} h(x,\mathbf{y}) \ \mathrm{d}\eta(x,\mathbf{y}) \right| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,\mathbf{y}) \ \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k}(\mathbf{y}) - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,\mathbf{y}) \ \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}(\mathbf{y}) \right| \\
= & \left| \mathbf{E}\left[\int_{\mathbb{R}} h(x,\mathbb{Y}_k) \ \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \right] - \mathbf{E}\left[\int_{\mathbb{R}} h(x,\mathbb{Y}) \ \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \right] \right| \\
\leqslant & \ d_2(\mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k}, \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}),
\end{aligned}
$$

最后一个不等式成立，是因为函数 $\mathbf{y} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,\ \mathbf{y})\ \mathrm{d}x$ 也属于 $\mathbf{H}$（在 $\mathbb{R}^n$ 上）。因此，

$$
d_2(\eta_k, \eta) \leqslant d_2(\mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k}, \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}). \tag{29}
$$

现在利用三角不等式、式（29）以及定理1中的界（24），

$$
\begin{aligned}
d_2(\theta_k, \eta) & \leq d_2(\theta_k, \eta_k) + d_2(\eta_k, \eta) \\
& \leq C\ \mathbf{E}\left[\left(2(X_k + \nu) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} X_k, \mathrm{D}X_k \right\rangle \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& + C \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} X_k, \mathrm{D}Y_k^j \right\rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} + d_2\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Y}_k}, \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\right)
\end{aligned}
$$

这与式（28）完全相同。现在证明，当 $k \to \infty$ 时，式（28）右侧趋于零。对于第一项，其趋于零是由定理 2 得出的。事实上，

$$
\mathbf{E}\left[\left(2(X_k + \nu) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} X_k, \mathrm{D}X_k \right\rangle \right)^2 \right] = \frac{1}{q^2}\ \mathbf{E}\left[\left(\|\mathrm{D}X_k\|^2 - 2qX_k - 2q\nu \right)^2 \right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0
$$

这是因为定理 2 的第3点。对于第二项，我们将运用一些关于维纳混沌的经典计算。我们有：

$$
\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} X_k, \mathrm{D}Y_k^j \right\rangle^2 \right] = \frac{1}{q^2} \mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}X_k, \mathrm{D}Y_k^j \right\rangle^2 \right].
$$

于是，利用乘积公式（45）和假设 $q \geqslant q_j$，我们得到

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} X_k, \mathrm{D}Y_k^j \right\rangle^2 \right] \\
= & \ \frac{1}{q^2} \sum_{r=0}^{q_j - 1} (r!)^2 \binom{q_j - 1}{r}^2 \binom{q-1}{r}^2 (q + q_j - 2 - 2r)! \left\| f_k \ \widetilde{\otimes}_{r+1}\ g_k^j \right\|^2 \\
= & \ \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q_j} ((r-1)!)^2 \binom{q_j - 1}{r-1}^2 \binom{q-1}{r-1}^2 (q + q_j - 2r)! \left\| f_k \ \widetilde{\otimes}_r\ g_k^j \right\|^2.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Supp首先假设 $q > q_j$。我们估计对称张量积的范数。

$$\begin{aligned}\left\|f_k\ \tilde{\otimes}_r\ g_k^j\right\|^2 \leqslant\quad & \left\|f_k\otimes_r g_k^j\right\|^2=\left\langle f_k\otimes_r g_k^j, f_k\otimes_r g_k^j\right\rangle\\ =\quad & \left\langle f_k\otimes_{q-r} f_k, g_k^j\otimes_{q_j-r} g_k^j\right\rangle \leq \|f_k\otimes_{q-r} f_k\|\cdot\left\|g_k^j\otimes_{q_j-r} g_k^j\right\|\\ \leqslant\quad & \|f_k\otimes_{q-r} f_k\|\cdot\|g_j\|^2\leq\frac{\mathbf{E}\left[\left(Y_k^j\right)^2\right]}{q_j!}\|f_k\otimes_{q-r} f_k\|.\end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X_k, \mathrm{D}Y_k^j\right\rangle^2\right]\\ \leqslant\quad & \frac{\mathbf{E}\left[\left(Y_k^j\right)^2\right]}{q^2q_j!}\sum_{r=1}^{q_j}((r-1)!)^2\binom{q_j-1}{r-1}^2\binom{q-1}{r-1}^2(q+q_j-2r)!\|f_k\otimes_{q-r} f_k\|.\end{aligned}$$

那么，若对每个 j, $q>q_j$ 都成立，则由定理 2 中的第 2 点以及 (26) 的第二个条件，整个表达式在 $k\to\infty$ 时收敛到零，因此我们得到 (27)。

现在假设 $q=q_j$。我们在 30 中单独取出项 $r=q_j=q$，得到：

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}X_k, \mathrm{D}Y_k^j\right\rangle^2\right]\\ =\quad & \frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q-1}((r-1)!)^2\binom{q-1}{r-1}^4(2(q-r))!\left\|f_k\ \widetilde{\otimes}_r\ g_k^j\right\|^2+((q-1)!)^2\left\|f_k\ \widetilde{\otimes}_q\ g_k^j\right\|^2\\ =\quad & \frac{1}{q^2}\mathbf{E}\left[X_kY_k^j\right]^2+\frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q-1}((r-1)!)^2\binom{q-1}{r-1}^4(2(q-r))!\left\|f_k\ \widetilde{\otimes}_r\ g_k^j\right\|^2.\end{aligned}$$

根据条件 (26) 中的两个条件，以及定理 2 的第 2 点，我们也可以得出，在这种情况下，该期望趋于零，因此得到 (27)。 ■

注 2. 假设 *(26)* 是得到定理 *3* 中结果所必需的，且无法避免。为说明这一点，请考虑以下平凡例子。设 $(W(h)\ h\in H)$ 是一个等距正态过程，并设 $h_1,h_2\in H$ 满足 $\|h_1\|_H=\|h_2\|_H=1$ 且 $\langle h_1,h_2\rangle_H=\rho\in(0,1)$。定义

$$X=W(h_1)^2-1=I_2(h_1^{\otimes 2})\ and\ Y=W(h_2).$$

那么 $X\sim F(1)$ $Y\sim\mathcal{N}(0,\ 1)$ 以及定理 *3* 的陈述中除 *(26)* 外的所有假设均成立。注意，$h_1^{\otimes 2}\otimes_1 h_2=\rho h_1$ 且 $\|h_1^{\otimes 2}\otimes_1 h_2\|_H=\rho\|h_1\|_H=\rho\neq 0$，因此 *(26)* 不成立。另一方面，向量 (X,Y) 的分量并非独立，因为 $h_1^{\otimes 2}\otimes_1 h_2$在 H上几乎处处不为零，见 *[20]*。

5 个示例

我们通过两个例子说明第 4 节中的结果。在这些例子中，我们考虑一个二维随机变量序列，其第一分量为下文由 (31) 定义的序列 U_n，并且依分布收敛到 $F(1)$。对于第二分量，我们先考虑第二 Wiener 混沌中的一个固定随机变量，然后考虑另一个与U_n相关的序列，该序列也收敛到中心伽马分布 $F(1)$。我们证明这个二维序列联合收敛到一个分量相互独立的向量，并推导出其在 d_2-距离下的相应收敛速率。

5.1 示例 1

L且 $(h_i, i \geq 1)$ 是希尔伯特空间 H 的正交归一元。对于 $n \geq 2$，令

$$U_n = I_2\left(\frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} h_i \widetilde{\otimes} hj\right) =: I_2(f_n), \tag{31}$$

其中 I_2 是关于等距正态过程 $(W(h)\ h \in H)$ 的多重积分。于是，序列 $(U_n, n \geq 1)$ 依分布收敛到中心伽马分布 $F(1)$（例如参见 [1]）。由 [4] 中的第 4 节可知，对于足够大的 n，

$$\mathbf{E}\left[\left(2(U_n+1) - \langle \mathrm{D}(-L)^{-1}U_n, \mathrm{D}U_n\rangle\right)^2\right] \leqslant \frac{C}{n}. \tag{32}$$

特别地,

$$d_2(U_n, F(1)) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}. \tag{33}$$

We 考察二维序列 (U_n, G) 的渐近行为，其中 e

$$G := 2H_2(W(h_1)) = I_2\left(h_1^{\otimes 2}\right).$$

让我们来验证（26）。关于（26）的第一部分，对于每个 $n \geq 1$ ，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[U_n G\right] &= \frac{4}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left\langle h_i\widetilde{\otimes}h_j, h_1^{\otimes 2}\right\rangle_{H^{\otimes 2}} \\
&= \frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left\langle h_i\otimes h_j + h_j\otimes h_i, h_1^{\otimes 2}\right\rangle_{H^{\otimes 2}} \\
&= \frac{4}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{1}_{\{i=j=1\}} = 0.
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} f_n \otimes_1 h_1^{\otimes 2} &= \frac{2}{n-1} \sum_{1\le i<j\le n} \left((h_i \widetilde{\otimes} h_j) \otimes_1 h_1^{\otimes 2} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{1\le i<j\le n} \left((h_i \otimes h_j + h_j \otimes h_i) \otimes_1 h_1^{\otimes 2} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{1\le i<j\le n} \left((h_j \otimes h_1)\mathbf{1}_{\{i=1\}} + (h_i \otimes h_1)\mathbf{1}_{\{j=1\}} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} h_j \otimes h_1 \end{aligned} \tag{34}$$

and

$$\begin{aligned} \left\| f_n \otimes_1 h_1^{\otimes 2} \right\|^2_{H^{\otimes 2}} &= \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{2\leqslant j,k\leqslant n} \langle h_j \otimes h_1, h_k \otimes h_1 \rangle_{H^{\otimes 2}} \\ &= \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{2\leqslant j,k\leqslant n} \langle h_j, h_k \rangle_H = \frac{2(n-1)}{(n-1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{35}$$

由定理 3 可知，当 n 足够大时,

$$\begin{aligned} & d_2\left(\mathbb{P}_{(U_n,G)}, F(1) \otimes \mathbb{P}_G \right) \\ \leqslant \quad & C \left\{ \mathbf{E}\left[\left(2(U_n+1) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} U_n, \mathrm{D}U_n \right\rangle \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} U_n, \mathrm{D}G \right\rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

对于任意两个多重积分 $X = I_2(f)$、 $Y = I_2(g)$，若 f， $g \in H^{\odot 2}$,

$$\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} X, \mathrm{D}Y \right\rangle^2 \right] = \mathbf{E}[XY]^2 + 8\| f \otimes_1 g \|^2_{H^{\otimes 2}}.$$

因此，由 (34) 和 (35) 可得,

$$\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1} U_n, \mathrm{D}G \right\rangle^2 \right] = \frac{16}{n-1}. \tag{37}$$

将估计式 (32) 和 (37) 代入 (36)，当 n 充分大时，可得,

$$d_2\left(\mathbb{P}_{(U_n,G)}, F(1) \otimes \mathbb{P}_G \right) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

5.2 例2

设 $H = L^2(\mathbb{R}_+)$，并令 $i \geq 1$

$$h_i := \mathbf{1}_{[2i,2i+1]}.$$

那么，$(h_i, i \geq 1)$ 是 H 中的正交归一元。考虑由 (31) 给出的序列 $(U_n, n \geq 1)$。现在定义 $i \geq 1$,

$$g_i := \mathbf{1}_{\left[2i-1+\frac{1}{i}, 2i+\frac{1}{i^\alpha}\right]}$$

在 $a>0$ 中。族 $(g_i, i\geq 1)$ 在 H 中也正交。注意，对于每个 $i,k\geqslant 1$,

$$\langle h_i, g_k\rangle_H = \frac{1}{i^a}\mathbf{1}_{\{i=k\}}.$$

我们考虑由下式给出的序列 $(V_n, n\geq 1)$

$$V_n = I_2\left(\frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n} g_i\widetilde{\otimes}g_j\right) =: I_2(\varphi_n). \tag{38}$$

我们知道，$(U_n, n\geq 1)$（在前一个例子中定义）和 $(V_n, n\geq 1)$ 都收敛到中心伽马分布 $F(1)$。我们考虑二维序列 $((U_n, V_n)\ n\geq 1)$，并证明它依分布收敛到向量 (F_1, F_2)，其中 $F_1, F_2\sim F(1)$ 与 F_1, F_2 相互独立。我们还将推导该极限定理对应的 d_2-距离下的收敛速率。

我们计算式 (26) 中的各个量。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[U_nV_n\right] &= \frac{4}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq k<l\leq n}\langle h_i\widetilde{\otimes}h_j, g_k\widetilde{\otimes}g_l\rangle \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq k<l\leq n}\langle h_i\otimes h_j + h_j\otimes h_i, g_k\otimes g_l + g_l\otimes g_k\rangle \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq k<l\leq n}\frac{2}{i^aj^a}\left(\mathbf{1}_{\{i=k,j=l\}} + \mathbf{1}_{\{i=l,j=k\}}\right) \\
&= \frac{4}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{(ij)^a} \leq \frac{4}{(n-1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^a}\right)^2 \leq \frac{C}{n^{2a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

接下来，计算 $\mathbf{k}f_n\otimes_1\varphi_n\mathbf{k}^2_{H^{\otimes 2}}$。我们先计算收缩:

$$f_n\otimes_1\varphi_n \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq k<l\leq n}\left((h_i\widetilde{\otimes}h_j)\otimes_1(g_k\widetilde{\otimes}g_l)\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq k<l\leq n}\int_{\mathbb{R}_+}\left[h_i(x)h_j(u)+h_j(x)h_i(u)\right]\left[g_k(y)g_l(u)+g_l(y)g_k(u)\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{1\leq k<l\leq n}\left(h_i\otimes g_k\mathbf{1}_{\{j=l\}} + h_i\otimes g_l\mathbf{1}_{\{j=k\}} + h_j\otimes g_k\mathbf{1}_{\{i=l\}} + h_j\otimes g_l\mathbf{1}_{\{i=k\}}\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}\left[\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ 1\leqslant k<j\leqslant n}} h_i\otimes g_k + \sum_{1\leq i<j<l\leq n} h_i\otimes g_l + \sum_{1\leq k<i<j\leq n} h_j\otimes g_k + \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ 1\leqslant i<l\leqslant n}} h_j\otimes g_l\right]
\end{aligned} \tag{41}$$

并且当 n 足够大时,

$$|f_n\otimes_1\varphi_n| \leq \frac{C}{n}\left|\sum_{1\leq i,k\leq n} h_i\otimes g_k\right|$$

然后

$$\begin{aligned}\|f_n \otimes_1 \varphi_n\|^2_{H^{\otimes 2}} &\leqslant \frac{C}{n^2} \sum_{1\leq i,k,i',k'\leq n} \langle h_i \otimes g_k, h_{i'} \otimes g_{k'} \rangle_{H^{\otimes 2}} \\ &= \frac{C}{n^2} \sum_{1\leq i,k\leq n} \frac{1}{i^a k^a} \leq \frac{C}{n^{2a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

因此，由 (39) 和 (41) 可知，(26) 得到验证，且当 $n \to \infty$ 时，$((U_n,\ V_n)\ n \geq 1)$ 依分布收敛于 $F(1) \otimes F(1)$ 和

$$\mathbf{E}\left[\left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}U_n, \mathrm{D}V_n \right\rangle^2\right] \leqslant \frac{C}{n^{2a}}. \tag{42}$$

根据定理 3,

$$\begin{aligned}d_2\left(\mathbb{P}_{(U_n,V_n)}, F(1)\otimes F(1)\right) \leqslant \quad & C\mathbf{E}\left[\left(2(U_n+1) - \left\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}U_n, \mathrm{D}U_n \right\rangle_H\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ + \quad & C\mathbf{E}\left[\langle \mathrm{D}(-L)^{-1}U_n, \mathrm{D}U_n\rangle_H^2\right]^{\frac{1}{2}} + d_2(\mathbb{P}_{V_n}, F(1)).\end{aligned}$$

由估计式 (32)、(33) 和 (42) 可得，当 n 足够大时,

$$d_2\left(\mathbb{P}_{(U_n,V_n)}, F(1)\otimes F(1)\right) \leq C\left(n^{-\frac{1}{2}} + n^{-a}\right).$$

6 附录

这里介绍 Malliavin演算 的基础知识，并给出引理 3 的证明。

6.1 Wiener 混沌与 Malliavin 导数

这里介绍本文所需的随机分析要素。设 H为一个实可分希尔伯特空间，且 $(W(h)\ h \in H)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\ \mathrm{A}\ \mathbb{P})$ 上的等范高斯过程，它是由满足 $\mathbf{E}\ [W(\varphi)W(\psi)] = \mathrm{h}\varphi,\ \psi\mathrm{i}_H$ 的随机变量构成的中心高斯族。记 I_n为关于 W的多重随机积分（见 [15]）。这个映射I_n 实际上是一个等距映射，将配备缩放范数 $\frac{1}{\sqrt{n!}}\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{H^{\otimes n}}$ 的希尔伯特空间 $H^{\odot n}$（对称张量积）映射到 n 阶 Wiener混沌；后者定义为随机变量 $H_n(W(h))$ 的闭线性张成，其中 $h \in H,\ \mathrm{k}h\mathrm{k}_H = 1$，且 H_n是次数为 $n \in \mathbb{N}$的 Hermite 多项式

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right).$$

多重积分的等距性质可写为：对于 $m,\ n$ 正整数,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[I_n(f)I_m(g)\right] &= n!\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{H^{\otimes n}} \quad \text{if } m = n, \\ \mathbf{E}\left[I_n(f)I_m(g)\right] &= 0 \quad \text{if } m \neq n.\end{aligned} \tag{43}$$

此外，还有

$$I_n(f) = I_n(\tilde{f})$$

˜其中 f 表示 f 的对称化，其定义公式为

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

我们回顾一下，任何关于由 W 生成的σ-代数可测的平方可积随机变量，都可以展开为多重随机积分的正交和。

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \tag{44}$$

其中 $f_n \in H^{\odot n}$ 是（唯一确定的）对称函数，且 $I_0(f_0) = \mathbf{E}[F]$。令 L 为 Ornstein-Uhlenbeck 算子。

$$LF = -\sum_{n \geq 0} n I_n(f_n)$$

若 F 由（44）给出，且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 n! \mathrm{k} f_n \mathrm{k}^2_{\mathcal{H}^{\otimes n}} < \infty$。 L的伪逆，记为（$-L$）$^{-1}$，其表达式为，

$$(-L)^{-1}(F) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n(f_n)$$

对于式 (44) 中的 F，其中 **实数集**$[F] = 0$。

对于 $p > 1$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们将 Sobolev-Watanabe 空间 $\mathbb{D}^{\alpha,\ p}$ 定义为多项式随机变量集合在该范数下的闭包。

$$\|F\|_{\alpha,p} = \|(I - L)^{\frac{\alpha}{2}} F\|_{L^p(\Omega)}$$

其中 I 表示恒等算子。我们将 Malliavin 导数算子记作 D，它作用于如下形式的光滑函数： $F = g(W(h_1) \ldots, W(h_n))$（$g$是具有紧支撑的光滑函数，且 $h_i \in H$）

$$\mathrm{D}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(W(h_1), \ldots, W(h_n)) h_i.$$

算子 D 是从 $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ 到 $\mathbb{D}^{\alpha-1,p}(H)$.的连续算子。

我们将大量使用多重积分的乘积公式。众所周知，对于$f \in H^{\odot n}$ 和 $g \in H^{\odot m}$

$$I_n(f) I_m(g) = \sum_{r=0}^{n \wedge m} r! \binom{n}{r} \binom{m}{r} I_{m+n-2r}(f \otimes_r g) \tag{45}$$

w此处 $f \otimes_r g$ 表示 f 与 g 的 r-收缩（例如参见 [15]第 1.1.2 节） .

我们还需要引入 Skorohod 积分（或称散度算子），记作 δ，它是 D 的伴随算子。其定义域为

$$\mathrm{Dom}(\delta) = \left\{ u \in L^2(\Omega; H), \mathbf{E}\left[|\langle \mathrm{D}F, u \rangle_H| \right] \leq C \|F\|_{L^2(\Omega)} \right\}$$

并且我们有对偶关系

$$\forall F \in \mathcal{S}, \forall u \in \mathrm{Dom}(\delta), \quad \mathbf{E}\left[F\delta(u) \right] = \mathbf{E}\left[\langle \mathrm{D}F, u \rangle_H \right]. \tag{46}$$

6.2 引理 3 的证明

证明： 我们先证明第 1 点。关于式（14）中的分母，请注意，其新的表达式来自下面这个等式；该等式可通过对左侧求导轻易得出（同时要注意上下限变号）：

$$\begin{cases} 2(x+\nu)p_\nu(x) &= -\int_{-\nu}^{x} up_\nu(u)\ \mathrm{d}u & \text{on } (-\nu,+\infty) \\ 2(x+\nu)q_\nu(x) &= \int_{x}^{-\nu} uq_\nu(u)\ \mathrm{d}u & \text{on } (-\infty,-\nu). \end{cases} \tag{47}$$

我们将只关注分子部分。

• 假设 $x > -\nu$。请记住，对于每个 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，我们都有，

$$f_h(x,\mathbf{y}) = \frac{1}{(x+\nu)p_\nu(x)} \int_{-\nu}^{x} p_\nu(u)\tilde{h}(u,\mathbf{y})\ \mathrm{d}u,$$

其中 $\tilde{h}(u,\ \mathbf{y}) = h(u,\ \mathbf{y}) - \mathbf{E}[h(Z_\nu,\ \mathbf{y})]$。我们将分两步证明表达式 (16)。首先，我们将使用 Fubini 定理得到一个用 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 表示 $\tilde{h}$ 的表达式，然后再次使用 Fubini 定理，得到 f_h 的所需公式。

让我们通过将期望写成以下形式，对 h 使用 Fubini定理：

$$\mathbf{E}[h(Z_\nu,\mathbf{y})] = \int_{-\nu}^{+\infty} h(z,\mathbf{y})p_\nu(z)\ \mathrm{d}z.$$

因此，对于每个 $u > -\nu$，我们都可以写出

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u,\mathbf{y}) = &\int_{-\nu}^{+\infty} p_\nu(z)(h(u,\mathbf{y}) - h(z,\mathbf{y}))\ \mathrm{d}z = \int_{-\nu}^{+\infty} p_\nu(z)\left[\int_z^u \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\ \mathrm{d}w\right]\ \mathrm{d}z \\ = &\int_{-\nu}^{u} p_\nu(z)\left[\int_z^u \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\ \mathrm{d}w\right]\ \mathrm{d}z - \int_u^{+\infty} p_\nu(z)\left[\int_u^z \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\ \mathrm{d}w\right]\ \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

最后一行使我们能够交换积分。我们得到：

$$\begin{aligned} \tilde{h}(u,\mathbf{y}) = &\int_{-\nu}^{u} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[\int_{-\nu}^{w} p_\nu(z)\ \mathrm{d}z\right]\ \mathrm{d}w - \int_u^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[\int_w^{+\infty} p_\nu(z)\ \mathrm{d}z\right]\ \mathrm{d}w \\ = &\int_{-\nu}^{u} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\ \mathrm{d}w - \int_u^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{48}$$

现在将最后这个等式代入（14），即可得到所需的表达式。

$$\begin{aligned} (x+\nu)p_\nu(x)f_h(x,\mathbf{y}) = &\int_{-\nu}^{x} p_\nu(u)\int_{-\nu}^{u} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\ \mathrm{d}w\ \mathrm{d}u \\ - &\int_{-\nu}^{x} p_\nu(u)\int_{u}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\ \mathrm{d}w\ \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

第一项 m 可以交换其积分，而对于第二个，我们需要写出

$$\int_{-\nu}^{x}\int_{u}^{+\infty} = \int_{-\nu}^{x}\int_{u}^{x} + \int_{-\nu}^{x}\int_{x}^{+\infty}.$$

我们得到

$$\begin{aligned}(x+\nu)p_\nu(x)f_h(x,\mathbf{y}) = \quad & \int_{-\nu}^{x}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\int_{w}^{x}p_\nu(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w \\ - \quad & \int_{-\nu}^{x}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\int_{-\nu}^{w}p_\nu(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w \\ - \quad & \int_{x}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\int_{-\nu}^{x}p_\nu(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

用 F_ν 表示，它写作

$$\begin{aligned}& (x+\nu)p_\nu(x)f_h(x,\mathbf{y}) \\ = \quad & \int_{-\nu}^{x}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)(F_\nu(x)-F_\nu(w))\,\mathrm{d}w - \int_{-\nu}^{x}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))F_\nu(w)\,\mathrm{d}w \\ - \quad & \int_{x}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))F_\nu(x)\,\mathrm{d}w \\ = \quad - \quad & (1-F_\nu(x))\int_{-\nu}^{x}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})F_\nu(w)\,\mathrm{d}w - F_\nu(x)\int_{x}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\,\mathrm{d}w. \qquad (49)\end{aligned}$$

结合 (47) 和 (49)，我们得到表达式 (16)。

• 假设 $x<-\nu$。由 (14)，我们有

$$f_h(x,\mathbf{y}) = \frac{-1}{(x+\nu)q_\nu(x)}\int_{x}^{-\nu}q_\nu(u)\tilde{h}(u)\,\mathrm{d}u.$$

˜由于积分是在 $(x,-\nu)$ 上进行的，我们不能使用在 $(-\nu,+\infty)$ 上推导出的 h 表达式。事实上，这次我们需要在 $(-\infty,-\nu)$ 上重新计算。

令 $u<-\nu$。我们写作

$$\tilde{h}(u,\mathbf{y}) = \quad - \quad \int_{-\nu}^{+\infty}p_\nu(z)\left[\int_{u}^{z}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\,\mathrm{d}w\right]\,\mathrm{d}z.$$

写出 $\int_{-\nu}^{+\infty}\int_{u}^{z} = \int_{-\nu}^{+\infty}\int_{u}^{-\nu} + \int_{-\nu}^{+\infty}\int_{-\nu}^{z}$ 后，我们利用 Fubini定理得到

$$\begin{aligned}\tilde{h}(u,\mathbf{y}) = \quad - \quad & \int_{u}^{-\nu}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[\int_{-\nu}^{+\infty}p_\nu(z)\,\mathrm{d}z\right]\,\mathrm{d}w - \int_{-\nu}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\left[\int_{w}^{+\infty}p_\nu(z)\,\mathrm{d}z\right]\,\mathrm{d}w \\ = \quad - \quad & \int_{u}^{-\nu}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})\,\mathrm{d}w - \int_{-\nu}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w))\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

再次，我们将这个表达式代入 f_h 的表达式 (14) 中，得到

$$
\begin{aligned}
-(x+\nu)q_\nu(x)f_h(x,\mathbf{y}) = \quad & - \quad \int_x^{-\nu} q_\nu(u) \int_u^{-\nu} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y}) \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}u \\
& - \quad \int_x^{-\nu} q_\nu(u) \int_{-\nu}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w)) \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

负号相互抵消。对于这两项，两个积分都可以利用Fubini定理交换次序，这次无需使用任何Chasles关系。我们得到

$$
\begin{aligned}
& (x+\nu)q_\nu(x)f_h(x,\mathbf{y}) \\
= \quad & \int_x^{-\nu} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y}) \int_x^{w} q_\nu(u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}w + \left(\int_x^{-\nu} q_\nu(u) \, \mathrm{d}u \right) \left(\int_{-\nu}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w)) \, \mathrm{d}w \right) \\
= \quad & \int_x^{-\nu} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y}) \left[\tilde{F}_\nu(x) - \tilde{F}_\nu(w) \right] \, \mathrm{d}w + \tilde{F}_\nu(x) \int_{-\nu}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(w,\mathbf{y})(1-F_\nu(w)) \, \mathrm{d}w,
\end{aligned}
$$

因此，16）得证。

现在证明2。（实际上，证明略微改编自 [8]）。设 $x \in \mathbb{R}$。则

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} F_\nu(s) \, \mathrm{d}s = \quad & \int_{-\nu}^{x} \int_{-\nu}^{s} p_\nu(u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}s = \int_{-\nu}^{x} p_\nu(u) \int_u^x \mathrm{d}s \, \mathrm{d}u \\
= \quad & xF_\nu(x) - \int_{-\nu}^{x} up_\nu(u) \, \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

对于第二个等式，我们以类似的方式进行，得到

$$
\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} (1-F_\nu(s)) \, \mathrm{d}s = \quad & \int_x^{+\infty} \int_s^{+\infty} p_\nu(u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}s = \int_x^{+\infty} p_\nu(u) \int_x^u \mathrm{d}w \, \mathrm{d}u \\
= \quad & \int_x^{+\infty} up_\nu(u) - x(1-F_\nu(x)).
\end{aligned}
$$

关于陈述中的第 3 点，我们采用与之前相同的思路，

$$
\begin{aligned}
\int_x^{-\nu} \tilde{F}_\nu(w) \, \mathrm{d}w = \quad & \int_x^{-\nu} \int_w^{-\nu} q_\nu(u) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}w = \int_x^{-\nu} q_\nu(u) \int_x^u \mathrm{d}w \, \mathrm{d}u \\
= \quad & \int_x^{-\nu} uq_\nu(u) \, \mathrm{d}u - x\tilde{F}_\nu(x).
\end{aligned}
$$

■

参考资料

[1] B. Arras、E. Azmoodeh、G. Poly、Y. Swan（2019）：关于独立随机变量线性组合之间的*2-Wasserstein*距离的一个界。随机过程及其应用 129（7），2341-2375。[2] B. Arras、E. Azmoodeh、G. Poly、Y. Swan（2020）：伽马随机变量线性组合的*Stein*刻画。巴西概率与统计杂志 34（2），394-413。[3] B. Arras、Y. Swan（2017）：伽马分布漫步。随机过程及其应用 127（11），3661-3688。[4] E. Azmoodeh、P. Eichelsbacher、L. Knichel（2020）：*Wiener*空间上的最优伽马逼近。ALEA拉丁美洲概率数学统计杂志 17，101-132。[5] E. Azmoodeh、G. Peccati、G. Poly（2015）：收敛到卡方随机变量的线性组合：一种基于*Malliavin*的方法。纪念 Marc Yor，概率研讨会XLVII，339-367，数学讲义，2137，施普林格，查姆。[6]L. Chen、L. Goldstein和Q.-M. Shao（2010）：利用*Stein*方法进行正态逼近。施普林格科学与商业媒体。[7] L. Chen、Q.-M. Shao（2005）：用于正态逼近的Stein方法。载于：Stein方法导论。新加坡国立大学国际数学科学讲义系列，第4卷，1-59。新加坡大学出版社，新加坡。[8] C. Döbler（2012）：Stein方法及其应用的新进展。博士学位论文，鲁尔大学波鸿分校。[9] C. Döbler、P. Peccati（2018）：伽马*Stein*方程与非中心*de Jong*定理。伯努利 24（4B）（2018），3384-3421。[10] S. Kusuoka和C. A. Tudor（2012）：通过*Malliavin*演算研究扩散过程不变测度的*Stein*方法。随机过程及其应用 122（4），1627-1651。[11] S. Kusuoka和C. A. Tudor（2018）：全变差收敛的刻画，以及将四阶矩定理推广至扩散过程的不变测度。伯努利 24（2），1463-1496。[12] I. Nourdin和G. Peccati（2009）：*Wiener*混沌上的*Stein*方法。概率论及相关领域 145（1-2），75-118。[13] I. Nourdin和G. Peccati（2009）：多重积分的非中心收敛，《概率学年刊》37（4），1412-1426。[14] I. Nourdin和G. Peccati（2012）：Malliavin演算下的正态逼近：从Stein方法到普适性。剑桥大学出版社。[15] D. Nualart（2006）：Malliavin演算及相关主题。第二版。施普林格。

[16] L. Pimentel (2022)：分部积分与*KPZ*二点函数。《概率学年刊》50 (5), 1755-1780.[17] G. Reinert (2005)：Stein方法的三种一般方法。载于：Stein方法导论。国际数学科学讲义丛书，新加坡国立大学，卷4，第183-221页。新加坡：新加坡大学出版社。[18] Ch. Stein (1986年)：期望的近似计算。数理统计学会讲义-专著丛书，卷7。海沃德：数理统计学会。[19] C.A. Tudor (2022)：多维*Stein*方法与定量渐近独立性。预印本。[20] A. S. Üstünel 和 M. Zakai (1989)：*Wiener*空间上的独立性与条件化。《概率学年刊》17 (4), 1441-1453。