arXiv:2305.05243v1 [math.GR] 9 May 2023

余类理论的起源

Heiko Dietrich 和 Bettina Eick

2023年5月10日

摘要

1980年，Leedham-Green 和 Newman 将不变量余类引入素数幂阶群理论，并提出了五个与之相关、影响深远的猜想。他们的工作开启了一项深入且富有成果的群论研究计划，至今仍在持续进行。本文概述这篇著名文章的主要成果，介绍其产生的历史背景，并综述受这些成果启发的一些重要研究进展。

1 引言

1980年，Leedham-Green 和 Newman 在《数学档案》（Archiv der Mathematik）上发表了《空间群与素数幂阶群 I》（“Space groups and groups of prime-power order. I”），参见 [45], 。在这篇文章中，他们提出了一种针对素数幂阶群的新群论不变量，称为余类，并提出了五个与固定余类的群相关的猜想。这些猜想激发了大量有趣的研究。值得注意的是，不仅所有猜想最终都被证明成立，其证明过程还促成了 p-群的一种新结构理论，以及一种实现同构分类的新方法。可以公允地说，这篇余类文章是有限 p-群理论发展历程中的一个转折点。

我们受邀评述这篇备受赞誉的文章，旨在简要阐释其主要研究成果，介绍促成余类猜想提出的相关进展，并概述其对 p-群论的持续影响。下文提及的许多历史细节均来自我们于2022年11月对 Charles Leedham-Green 和 Mike Newman 的一次访谈。

In 本节其余部分将回顾《余类文章》的主要结果。

1.1 余类

阶为 p^n 且幂零类为 c 的群的余类定义为 $n-c$。除了阶为 p、余类为 0 的群之外，有限 p-群的余类是介于 1 和 $n-1$ 之间的整数。余类为 1 的群恰好是极大类群。这些群在文献中已得到广泛研究（下文将提供更多详情），其复杂的结构理论是 Leedham-Green 和的重要研究动机之一。

Newman 将极大类推广为余类。Leedham-Green 和 Newman 也将这一推广视为有限 p 群分类的一种新方法；他们在 [45] 中写道：

> 虽然要期待对余类为 r 的 p-群进行同构分类 [似乎毫无希望，但希望得到一种有用的分类，允许存在仅取决于 p 和 r 的“误差项”，或许是合理的。

1.2 猜想

Leedham-Green 和 Newman 在 [45] 提出的五个猜想如今称为余类猜想。它们的强弱依次递减，尽管有些情况下并不显而易见。我们在此回顾这些猜想如下。以下，p 是素数，r 是正整数。猜想 A 和 B 引自 [45]。

猜想 A. 给定 p、r，存在一个正整数 f，使得每个余类为 r 的 p-群都含有一个 2 阶正规子群，其指数至多为 p^f。

猜想 B. 对每个素数 p 和每个正整数 r，存在一个正整数 g，使得每个余类至多为 r 的 p-群的可解长度至多为 g。

猜想 C、D 和 E 阐述了与余类为 r 的有限 p-群相关联的余类图 $\mathcal{G}(p,r)$ 的结构。$\mathcal{G}(p,r)$ 的顶点对应于余类为 r 的有限p-群，每种同构类型各取一个；边则是满足以下条件的有序对 (Q,P)：P 是 Q 的满同态像，且满足 $|Q| = p|P|$。由于 Q 和 P 具有相同的余类，这意味着 Q 和 P 的类相差 1。$\mathcal{G}(p,r)$ 中边的定义使得考虑 $\mathcal{G}(p,r)$ 中无限路径所关联的线性逆系统变得十分自然。如果 G 是此类系统的逆极限，那么 G 就是一个余类为 r 的无限 pro-p-群。已知这一构造在 $\mathcal{G}(p,r)$ 中的极大无限路径与余类为 r 的无限 pro-p-群的同构类型之间建立了一一对应关系。利用这一对应关系，我们用余类为 r 的无限 pro-p-群的记号来表述猜想 C、D 和 E。

猜想 C：每个有限余类的 pro-p-群都是可解的。

猜想 D：对于固定的 p 和 r，余类为 r 的无限 pro-p-群只有有限多个同构类。

猜想 E：对于固定的 p 和 r，余类为 r 的无限可解 pro-p-群只有有限多个同构类。

容易看出，猜想 A 蕴含猜想 B，而猜想 B 蕴含猜想 C。此外，如果猜想 C 和猜想 E 成立，那么猜想 D 也成立。

1.3 空间群

《余类文章》还首次研究了有限余类的可解无限 pro-p-群，并揭示了它与空间群理论之间的联系。回顾一下，空间群

是由平移子群$T \cong \mathbb{Z}^d$与有限点群 P构成的扩张，后者在 T上忠实作用。空间群理论在群论中历史悠久，并有许多有趣的应用，例如晶体学。 p-进空间群是这一概念的一种变体：它是由平移子群 $T \cong \mathbb{Z}_p^d$与一个 p-幂阶点群 P构成的扩张，其中 $\mathbb{Z}_p$ 表示 p-进整数，且该点群在 T上忠实作用。Leedham-Green 和 Newman 在 [45, 第 4]节中证明了以下结论。

定理 1. 设 G 是一个余类为 r 的无限可解 pro-p-群。 G 的超中心 H 是有限的，其阶为 p^h，且具有 $h < r$。商群 G/H 是一个余类为$r - h$的无限可解 pro-p-群，并且具有一个 p-进空间群的结构。

2 余类文章的历史

哪些洞见促成了“不变量‘余类’”这一概念的提出以及余类猜想的 formulatation？以下历史结合了一些收集到的事实，以及从对 Charles Leedham-Green 和 Mike Newman 的个人访谈中获得的评论。

Charles Leedham-Green 于 1966 年在牛津获得哲学博士学位，此后不久便前往玛丽女王学院（英格兰伦敦），在那里开始与同样新近到任的同事 Sue McKay 合作。Huppert 关于有限群的第一本著作 [33] 刚刚出版，他们读到了 Blackburn 和 Alperin 关于 p极大类群的研究成果[2, 6]。这启发了 Leedham-Green 和 McKay 开展关于 p极大类群的研究，最终形成了一系列论文 [38–41]，发表于1976年和 1984 年之间。

Mike Newman 于 1960 年在曼彻斯特完成了哲学博士学位。取得博士学位后，Newman 在澳大利亚国立大学（澳大利亚堪培拉）任职。他的研究兴趣包括 p-群，后来也包括计算。在澳大利亚国立大学，他参与了 p-群生成算法的开发，早期概要见 [55]。利用该算法进行的计算实验，对于余类理论及其他领域的诸多进展都至关重要。

2.1 撰写余类文章：1974–1980年

Leedham-Green 和 Newman 于 1974 年国际数学家大会在温哥华相识，两人都作了“简短报告”：Newman 谈的是《指数为四的群》，Leedham-Green 报告的题目是《论极大类 p-群》。由于两人都对 p-群论感兴趣，他们自然而然地开始合作。在 1990 年的一篇论文中，[56, 第 52], 页，Newman 回忆说，Leedham-Green 的讲座是他第一次见到极大类群的余类图。当时已知，图 $\mathcal{G}(p, 1)$ 有一条唯一的极大无限路径，而这条路径上各群的逆极限构成了极大类的无限 pro-p-群 G_p。具体而言， G_p 同构于半直积 $P \ltimes T$，其中 P是一个阶为p 的循环群，通过乘以一个 p 次单位根的方式作用于 $(p - 1)$ 维 p-进格 T。

1976年，Leedham-Green 到堪培拉拜访了 Newman。前往堪培拉途中，Leedham-Green 想到，与 $\mathcal{G}(p,1)$ 相关联的无限 pro-p-群可以被构造-

通过将 P 替换为一个阶为 p^n 的循环群来推广，后者通过乘以一个 p^n 次单位根，作用于一个 $(p-1)p^{n-1}$ 维的 p-进格上。抵达堪培拉后，Leedham-Green 与 Newman 讨论了这一推广。Newman 认出，这种构造是空间群的一种 p-进变体。Newman 刚从亚琛工业大学访问归来；当时 Neub¨user 及其合作者 Brown、B¨ulow、Zassenhaus 和晶体学家 Wondratschek 正在编写一本关于 4 维空间群分类的书。Newman 将许多关于整数空间群的结果推广到了 p-进空间群。正如 G_p 在 $\mathcal{G}(p, 1)$ 中生成一条无限路径一样，新构造的无限群也产生了无穷多个有限 p-群族，它们的余类都相同。这些洞见的结合催生了这一新不变量！

猜想 A 和 B 将关于极大类 p-群的结果推广开来，并受到 Wiman [69,70],、Blackburn [6],、Alperin [2],、Miech [50–53],、Shepherd [66],以及 Leedham-Green 和 McKay [38–41]的工作的影响。与猜想 B 尤其相关的是 Alperin 的一个定理，该定理指出：对于每个 p，都存在一个常数 m，使得每个极大类 p-群的导出长度至多为 m。

猜想 C、D 和 E 性质不同，依赖于 p-群与空间群之间的新联系。Leedham-Green 在 [36] 中写道：

> 这些猜想并非凭空而来。它们最初是根据我与 Susan McKay 合作研究极大类 p-群（即余类为 1 的群）所得的见解而提出的（当时的表述并不准确）；我们的工作证明了这些猜想在此情形下成立。后来这些猜想以正确的形式出现（我至今仍惊讶于它们竟如此准确），则归功于 M. F. Newman 对空间群结构的洞察。

2.2 即时反应：1975–1984

余类文章的结果和猜想在1979年投稿之前就已经被人们讨论过。许多研究人员都渴望加入这一项目，其中一些人已经证明了一些有趣的结果。那是一个类似淘金热的时期，想必令人异常兴奋。

余类文章的后缀“I”表明，这篇论文原本计划成为一个系列的第一篇。事实上，就在它发表后不久，一系列论文便相继刊印。前两篇（称为“II”和“IV”）是在亚琛工业大学 [31, 32]撰写的。第一篇由 Finken、Neub¨user 和 Plesken 撰写，解决了具有固定余类的 p-进空间群的同构问题。第二篇由 Felsch、Neub¨user 和 Plesken 撰写，通过 p-进空间群的商群确定了一个反类宽猜想的无限反例族。该系列的第三部分“III”在 [32], 中有所提及，但从未发表。该系列的其他文章（称为“V”“VI”等）旨在证明余类猜想；下文将对此提供更多细节。

除了对极大类 p-群的详细结构理论之外，人们所知甚少，因此更具体的研究颇有意义。1975 年，James [34, 35] 开始研究 $\mathcal{G}(2, 2)$ 中的群。他采用算法方法，甚至使用早期计算机

来解决这些 2-群的同构问题。这也是促使 Ascione [3–5], ——Newman 的一位哲学博士生——研究余类 2 的 3-群的起点之一。她长达 137 页的论文为 $\mathcal{G}(3,2)$ 提供了有趣的见解。

3 余类猜想的证明

余类猜想的证明形成于1980年至1994年间。在许多情况下，证明本身，或至少证明中的重要思路，早在正式发表前数年便已出现。因此，发表日期往往无法准确反映历史上的实际进程。Leedham-Green 和 McKay 所著的书中详述了这些证明 [42]。

3.1 猜想 E 的证明

撰写《余类文章》时，猜想 E 的证明已经初现端倪。由定理 1 可知，猜想 E 等价于以下主张：固定余类的可解 p-进空间群只有有限多个同构类。早在约 1911 年，Bieberbach 就证明了，在任意固定维数下，整数空间群只有有限多个同构类。因此，接下来需要研究可解p-进空间群与整数空间群之间的关系，并说明群的余类与空间群的维数之间有何关联。

《余类文章》发表后不久，Leedham-Green、McKay 和 Plesken 在奥伯沃尔法赫数学研究所会面，讨论证明思路。证明中的一个步骤是确定所有可能的点群；也就是说，能够嵌入 GL($d,\mathbb{Z}_p$) 的有限 p-群 P，其中 d 是某个适当的维数。这一步的一个关键要素是 Vol'vačev 对 GL($d,\mathbb{Q}_p$) 的 Sylow p-子群的描述 [68] 。Leedham-Green 和 Plesken [46] 纠正了 $p = 2$ 中的一个错误，最终完成了对可能点群的确定。

对点群对平移子群的扩张进行研究，以及探讨维数与余类之间的关系，结果发现这是一项更为微妙的工作。Charles Leedham-Green 回忆道：

> 一段时间后，我来到亚琛，与 Wilhelm Plesken 一起研究猜想 E。我们提出了一个能够解决这一问题的猜想，并在维数 4 的情形下对其进行了检验，使用的是柏林公交公司委托开发的计算机程序。公交车使用储存在稀土晶体中的氢气作为燃料，而氢气降低了它们的对称性。因此，该公司委托开发了一个用于计算空间群子群的程序。借助这个程序，计算机找到了一个反例，推翻了我们的猜想。

尽管存在这些问题，Leedham-Green、McKay 和 Plesken 最终还是证明了猜想 E。该证明发表在两篇论文 [43, 44], 中，分别讨论偶素数和奇素数的情形。对于奇素数，在 GL($d,\mathbb{Q}_p$) 中只有一个 Sylow p-群，而这些扩张

由其子群构成的对象表现得相当一般。对于偶素数 $p = 2$，情况不再如此，因此证明需要更多工作。McKay [49] 后来证明了此类 p进空间群的余类存在显式上界。

3.2 猜想 C 的证明

接下来的一步是证明猜想 C；结合猜想 E 的证明，这也解决了猜想 D。

第一个里程碑是 Donkin 对素数 $p \geq 5$ 的猜想 C 的证明 [17] 。该证明依赖于单纯 p-进李代数的分类以及 p-进 Chevalley 群理论。Donkin [17] 指出，Tits 曾提出一个适用于所有素数的证明；该证明运用了建筑理论，但一直未发表。

第二个里程碑是 Shalev 和 Zelmanov 所作的证明 [64] ，该证明相对简短，且在很大程度上更为初等，适用于所有素数。它依赖于 Leedham-Green [36] 得到的、将问题约化到解析群的结果。

3.3 猜想 A 的证明

Leedham-Green [37] 和 Shalev[63] 分别给出了猜想 A 的两个独立证明。这两个证明大约在 1990/91 年问世，并于 1994 年刊印。Mann 在 AMS MathSciNet 上为这两个证明撰写了一篇精彩的“专题评论”。为强调猜想 A 的重要性，Mann 还指出：

> 根据 N. Blackburn 的一句传闻所言，这一猜想一旦得到证明，将成为“ p-群理论中的第一个一般性定理”。

在 [37, 63], 之前，猜想 A 的一些特殊情形已经得到了证明。例如，McKay[48] 证明了所谓的未覆盖 CF-群的猜想 A。基于这一证明，并利用新近发展起来的强力 p-群理论，Mann [47] 在 $p > 2$ 的条件下证明了所有未覆盖 p-群的猜想 A。

Shalev 对猜想 A 的证明 [63] 也运用了强 p群理论，并依赖 Mann [47]的结果。更准确地说，该证明用到如下事实：每个余类为 r 的有限群都有一个指数有界的强子群，其界为 p 和 r。假设猜想 A 不成立，那么一族假定的反例中的这些强子群可用于构造一个适当的李环，最终与 Jacobson 关于 Engel 李代数的一个结果相矛盾。

Leedham-Green 的证明 [37] 出现得比 Shalev 的证明晚，但（据 Mann 所述）它才是第一个证明，而且 Shalev 当时可以获得该证明。它依赖于猜想 C 及其证明。逆极限构造是证明中的关键步骤：假设猜想 A 不成立，对一族假定的反例进行逆极限构造，会得到一个余类为 r 的无限 pro-p-群 G 。根据 [36], , 它是 p-进解析的，因此猜想 C 及其证明对 G 的结构具有重要意义。最后，借助所谓的既定群以及与之相关的李环的结果，得出矛盾。

4 超越余类猜想

余类猜想得到证明后，研究重点转向了余类图 $\mathcal{G}(p,r)$ 的详细结构。猜想 D 的证明意味着，对于任意给定的 p 和 r， $\mathcal{G}(p,r)$ 中只有有限条极大无限路径。对于 $\mathcal{G}(p,r)$ 中的群 G，用 $\mathcal{D}(G)$ 表示 $\mathcal{G}(p,r)$ 中由 G 及其后代组成的完整子树。如果 G 是一条无限路径上的群，那么 $\mathcal{D}(G)$ 就是一棵无限树。若一棵树从其根 G 出发仅包含一条无限路径，则称其为余类树。如果在 $\mathcal{G}(p,r)$ 中不存在 G 的真祖先 H，使得 $\mathcal{D}(H)$ 也为余类树，则称其为极大余类树。猜想 D 的证明现可推出以下结论；另见第 11 节 [42, 中的讨论2]:

定理 D′。图 $\mathcal{G}(p,r)$ 由有限个极大余类树和有限个其他群组成。

定理 D′ 意味着，余类图的一般结构由其有限多个极大余类树的结构决定。根据定义，每棵余类树 $\mathcal{T}$ 都有一条唯一的无限路径 $S_1 \to S_2 \to \dots$，它从树根出发。该路径上各群的逆极限 S 是与这棵极大余类树相关联的余类为 r 的无限 pro-p-群。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathcal{T}$ 的分支 $\mathcal{B}_n$ 定义为差图 $\mathcal{D}(S_n) \setminus \mathcal{D}(S_{n+1})$；也就是说， $\mathcal{B}_n$ 由 $\mathcal{G}(p,r)$ 中所有属于 S_n 后代、但不属于 S_{n+1} 后代的顶点组成。

对于奇数 p 以及任意给定的 r，Eick [19] 引入了一种算法，用于确定余类为 r 的无限 pro-p-群（在同构意义下）；这可以视为定理 D 证明的构造性版本。此外，Eick [20] 确定了余类为 r 的无限 pro-p-群的同构类数量的估计，并表明该数量随 p 和 r指数级地增长。

关于余类树的结构，有如下观察结果。

注记 1. 每棵极大余类树 $\mathcal{T}$由其极大无限路径 $S_1 \to S_2 \to \dots$及其分支 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ 构成。每个分支 $\mathcal{B}_i$ 都是一棵以 S_i为根的有限树。

由定理 D′和注记 1 可知，余类图 $\mathcal{G}(p,r)$ 的一般结构由 $\mathcal{G}(p,r)$ 中极大余类树的分支结构决定。如今，理解这些分支是余类理论的主要研究重点。

4.1 骨架

在关于极大类 p-群的论文中，Leedham-Green 和 McKay 为 $\mathcal{G}(p,1)$ 中余类树分支内的某些群引入了一种新颖的构造：所谓的可构造群。后来，这一思想被推广到所有图 $\mathcal{G}(p,r)$，详见著作 [42]。分支 $\mathcal{B}_i$ 中的可构造群构成一个连通子树。将此子树截断在接近完整深度的位置，便称为 $\mathcal{B}_i$的骨架。Leedham-Green 的下述定理表明，骨架展现了分支的大体结构；证明见 [42, 定理 11.3.7 和 11.3.9]。这可以视为对猜想 A 更强版本的证明。

定理 A'。给定 p, r，存在整数 $n = n(p, r)$ 和 $m = m(p, r)$，使得每个余类为 r、阶至少为 p^n 的 p-群 P 都有一个阶至多为 p^m 的正规子群 N，从而P/N是一个可构造群。

可构造群的明确性定义较为技术性，超出了本综述的讨论范围。其基本思想是考察余类树无限路径上的群。这些群是相关逆极限 S 的商群，而无限的 pro-p-群 S 是由一个有限 p-群 P 对正规子群 $T \cong \mathbb{Z}_p^d$ 作扩张得到的。群 T 具有唯一的极大 S-不变链 $T = T_0 > T_1 > \ldots$，原始无限路径上的群与商群 S/T_i 同构，只要 i 足够大即可。现在，通过对 T/T_i 中的乘法进行「扭曲」，使所得结果成为一个 2 阶群，从而得到可构造群。借助其中的满同态，可以实现向 2 阶群的「扭曲」。

$$\mathrm{Hom}_{S/T}(T \wedge T, T_j/T_i).$$

i 的选择决定了所得可构造群的阶，而 j 的选择决定了该群所属的分支。对同态空间和可构造群同构问题的深入研究，会转化为代数数论中有趣且非平凡的问题；这一课题已在许多出版物中得到探讨，最近的研究见 [9, 13, 16]。

定理 A' 表明，对骨架群进行分类即可对所有余类为 r 的 p-群进行分类，仅存在一个很小的"误差项"；这实现了余类理论的主要目标之一，参见第 1.1 节中的引述。

4.2 图 $\mathcal{G}(5,1)$ 与计算

计算群论对余类理论产生了重大影响。例如，可以使用 p-群生成算法计算余类图的有限部分；该算法最初由 Newman [55] 开发，后来由 O'Brien [59] 进行了大幅扩展。使用 p-群生成算法进行的计算机实验，对于提出许多关于 $\mathcal{G}(p, r)$ 结构的最新猜想至关重要。

图 $\mathcal{G}(2, 1)$ 展示于 [45]，依据的是一个众所周知的结果：当 $n \geq 4$ 时，阶为 2^n 的极大类 2-群的数量为 3。图 $\mathcal{G}(3, 1)$ 可从 Blackburn [6] 对极大类 3-群的判定中读出。对于更大的 p，Leedham-Green 和 McKay [38–41] 描述了 $\mathcal{G}(p, 1)$ 的许多特征。然而，直到 1990 年前后，人们仍不了解 $\mathcal{G}(p, 1)$ 的精确结构细节。当时，人们采用计算方法研究最小的未解决情形，即图 $\mathcal{G}(5, 1)$。Newman 的实验 [56] 揭示，$\mathcal{G}(5, 1)$ 远比 $\mathcal{G}(2, 1)$ 和 $\mathcal{G}(3, 1)$ 复杂，但它具有大量周期结构。为了描述后者，我们需要引入修剪分支的概念：对于一个分支 $\mathcal{B}_i$ 和整数 k，修剪分支 $\mathcal{B}_i(k)$ 是 $\mathcal{B}_i$ 的完整子树，其中包含所有与根的距离至多为 k 的顶点。以下是 [15, 猜想 IV] 的一个简化变体。

猜想（$\mathcal{G}(5,1)$）。如果 $i \geq 9$，则唯一极大余类树 $\mathcal{T}$ 中 $\mathcal{G}(5,1)$ 的分支 $\mathcal{B}_i$ 具有深度 $i+1$，并且以下成立：

(a) $\mathcal{B}_{i+4}(i-4) \cong \mathcal{B}_i(i-4)$, *and*
(b) $\mathcal{B}_{i+4} \setminus \mathcal{B}_{i+4}(i-4) \cong \mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}_i(i-8)$.

如果这个猜想成立，那么 $\mathcal{G}(5,1)$ 就可以利用两种周期均为 4 的周期性模式，从一个有限子树构造出来。第一种模式是 (a) 部分：它沿着 $\mathcal{G}(5,1)$ 中的无限路径平行移动，并描述如何将 $\mathcal{B}_i$ 的一个经过大量剪枝的部分嵌入 $\mathcal{B}_{i+4}$。第二种模式是 (b)：它垂直移向无限路径，并描述分支生长的“枝脚”如何变化。

Dietrich [11, 12]，已证明了 (a) 部分和 (b) 部分的一种较弱形式，而完整证明至今仍未完成。

4.3 图 $\mathcal{G}(2,r)$ 与猜想 P

和数学中经常出现的情况一样，$p=2$ 的情形与奇素数的情形不同。最显著的区别是，在 $\mathcal{G}(2,r)$ 中，极大余类树的所有骨架都是平凡的：它们只包含一个顶点，即相应分支的根。定理 A’ 现在意味着，$\mathcal{G}(2,r)$ 中的分支都有有界深度；也就是说，对于每个余类 r，都存在一个常数 c，使得 $\mathcal{G}(2,r)$ 中的每个分支深度至多为 c。对于具有 $p>2$ 的余类树，这一般并不成立；例如，参见上文关于 $\mathcal{G}(5,1)$ 的猜想。这表明，图 $\mathcal{G}(2,r)$ 的结构比奇素数对应的大多数图 $\mathcal{G}(p,r)$ 简单得多。

Newman 和 O’Brien [58] 使用计算工具研究了 $r \leq 3$ 中的余类树 $\mathcal{G}(2,r)$。他们对 $\mathcal{G}(2,3)$ 中的群进行了分类，并提出了以下猜想。

猜想 P. 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{G}(2,r)$ 中一棵具有分支 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ 的余类树。存在整数d 和 n，使得对于每个 $i \geq n$，都有 $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{B}_{i+d}$。

du Sautoy [18] 几乎立即以如下推广形式证明了这一猜想。余类树的维数是与该树中无限路径相关联的 p-adic 空间群的维数。

定理 P’. 设 p 为任意素数，r,k 为正整数，且 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{G}(p,r)$ 中一棵具有分支 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$、维数为 d 的余类树。存在整数 $n=n(p,r,k)$，使得对于所有 $i \geq n$，都有 $\mathcal{B}_i(k) \cong \mathcal{B}_{i+d}(k)$。

du Sautoy 对定理 P’ 的证明基于模型论和 ζ 函数理论；它是非构造性的，也无法给出 n 的任何界。Eick 和 Leedham-Green [27] 给出了定理 P’ 的第二个证明；他们的证明是构造性的，此外还能够显式分析 $\mathcal{B}_i(k)$ 中群的结构，并为 $n=n(p,r,k)$ 给出一个显式界。

4.4 图 $\mathcal{G}$(3,2) 与猜想 W

余类 2 的 3-群早在撰写余类文章前后，就已由 Ascione、Havas 和 Leedham-Green[3, 4] 进行研究。此外，Leedham-Green 还针对 $\mathcal{G}$(3,2) 撰写了详细笔记，原本计划将其作为由余类文章开启的系列论文中的“III”部分。2001 年，Eick、Leedham-Green、Newman 和 O’Brien 重新审阅了这些笔记。他们的论文 [28] 包含以下结果。

定理（$\mathcal{G}$(3, 2)）。
(a) 图 $\mathcal{G}$(3, 2) 由 16 棵极大余类树组成。在相关的无限 pro-3-群中，有六个是余类为 1 的无限 pro-3-群的中心扩张，另有十个是 3-进空间群。(b) 16 棵极大余类树中，有 12 棵具有有界深度；它们的结构由定理 P’ 完整描述。其余四棵极大余类树对应的 3-进空间群，其点群为 9 阶循环群或 27 阶特异群。

[28] 的主体部分是对四棵不具有有界深度的极大余类树进行详细描述。这些描述都依赖于对各分支骨架的完整确定。基于对 $\mathcal{G}$(3, 2)的这项研究、关于 $\mathcal{G}$(5, 1)的现有实验性证据，以及 [12], 中的周期性结果，提出了以下猜想[28, 猜想 W]:

猜想 W。设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{G}(p,r)$ 中一棵余类树，其分支为 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$，维数为 d。存在整数 n, k，使得对所有 $i \geq n$，以下结论均成立：
(a) $\mathcal{B}_i(k) \cong \mathcal{B}_{i+d}(k)$，且 (b) 对于 $\mathcal{B}_{i+d}$ 中深度为 k 的每个 P，都存在 $\mathcal{B}_i$ 中深度为 $k-d$ 的 Q，使得 $\mathcal{D}(P) \cong \mathcal{D}(Q)$。

猜想 W 仍未解决，证明它是余类理论的主要目标之一。主要问题是根据 P 找到对 Q 的一般性描述。群 Q 通常称为 P 的周期性父群。

4.5 图 $\mathcal{G}$(p,1) 与伽罗瓦树

令 $\mathcal{T}_p$ 表示 $\mathcal{G}$(p,1) 中唯一的极大余类树。那么，对于 $p \in \{2, 3\}$，$\mathcal{T}_p$ 的分支具有有界深度；对于 $p = 5$，它的分支深度不断增长，但宽度有界；而对于 $p \geq 7$，它则疯狂增长。Dietrich 和 Eick [13] 以及 Cant、Dietrich、Eick 和 Moede [9] 最近研究了 $p \geq 7$ 的增长。

对于 $\mathcal{T}_p$ 中某个分支的骨架里的群 G，我们将其伽罗瓦阶 $o(G)$定义为 |Aut(G)|的 p' 部分。若 G 位于 $\mathcal{T}_p$的无限路径上，则 $o(G) = (p-1)^2$。若 G 不在无限路径上，则 $o(G)$ 整除 $p-1$。若 $\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{T}_p$ 中某个分支 $\mathcal{B}_i$ 的骨架 $\mathcal{S}_i$ 的子树，且其中所有群的伽罗瓦阶均为 o，并且 $\mathcal{O}$ 是具有此性质的极大子树，则 $\mathcal{O}$ 是阶为 o 的伽罗瓦树。Dietrich 和 Eick [13, 定理 1.1] 确定了 $\mathcal{G}$(p, 1)中伽罗瓦阶为$p-1$ 的伽罗瓦树，如下所述。

定理（伽罗瓦树）。设 $p \geq 5$ 和 $\ell = (p-3)/2$。 $\mathcal{G}(p, 1)$中的每个骨架都有 ℓ 棵最大伽罗瓦阶为 $p-1$的伽罗瓦树。它们的根 G_1、……、 G_ℓ 在骨架中的深度为 1，其叶在骨架中具有完整深度。伽罗瓦树中深度非最大为 m 且根为 G_i 的群有 1 个或 p 个后代；当且仅当 m 为偶数且（m 模（$p-1$））$\notin \{0, p-1-2i\}$时，才会出现后一种情况。

Cant、Dietrich、Eick 和 Moede [9] 将这一结果推广到了具有任意伽罗瓦阶的伽罗瓦树。

研究伽罗瓦树的主要动机见于 Dietrich 的工作 [12]以及文献 [13]：人们认为，伽罗瓦树或许有助于找到群 P 的一个周期性父群 Q（如猜想 W 所提出的那样）。更具体地说，人们希望通过在群 $\mathcal{B}_{i+d}$ 的伽罗瓦树中向上移动 d 步，再取 $\mathcal{B}_i$中相应的群，从而得到周期性父群。已知在骨架中向上移动 d 步通常并不能得到周期性父群，参见 Saha [62, 第 6.2 节7]。

4.6 余类族

Eick 和 Leedham-Green [27] 的周期性结果将无穷多个群划分为有限个余类族，这些群位于一系列修剪分支 $\mathcal{B}_1(k)$ $\mathcal{B}_2(k)$ . . . 中。为此，设n 和 d 如定理 P'中所述，并从 $\mathcal{B}_i(k)$ 中取一个满足 $i \in \{n, n+1, \ldots, n+d-1\}$的群 G。相应的余类族定义为这样一个群序列：对 G 应用图同构 $\mathcal{B}_i(k) \to \mathcal{B}_{i+d}(k) \to \mathcal{B}_{i+2d}(k) \to \ldots$所得到的所有像组成该序列。这些图同构由 Eick 和 Leedham-Green [27] 在定理 P'的证明中定义；该证明还表明，同一余类族中的所有群都可以用一个参数化表示来描述。这类表示中众所周知的例子是 $\mathcal{G}(2, 1)$中的余类族：它们分别是二面体群 D_{2^n}、四元数群 Q_{2^n} 和半二面体群 SD_{2^n} 的族，并且可以用以下参数化表示来描述：

$$\begin{array}{lcll} D_{2^n} & = & \langle x, y \,|\, x^{2^{n-1}} = 1,\ y^2 = 1,\ x^y = x^{-1} \rangle & (n \geq 3), \\ Q_{2^n} & = & \langle x, y \,|\, x^{2^{n-1}} = 1,\ y^2 = x^{2^{n-2}},\ x^y = x^{-1} \rangle & (n \geq 4), \\ SD_{2^n} & = & \langle x, y \,|\, x^{2^{n-1}} = 1,\ y^2 = 1,\ x^y = x^{2^{n-2}-1} \rangle & (n \geq 4). \end{array}$$

反过来，参数化表示使得人们能够证明关于一族无限群的结果。这类结果已针对自同构群、舒尔乘子、上同调环、特征标次数以及各种其他不变量得到证明，参见例如 [1, 7, 8, 15,21–26, 29, 54, 57, 67]。

4.7 其他代数对象

最后补充一点，其他代数结构也定义了不变量"余类"，例如幂零李代数、幂零结合代数和半群，参见 [10, 29, 30, 61]。这些研究也揭示了有趣的结果、周期性模式以及各种猜想。

5 未解决的问题与进一步研究

我们列出了一些我们认为值得进一步研究的开放问题。关于这些问题的许多细节和背景资料将在即将出版的书籍 [14] 中提供。

问题 1。Kourovka 笔记本中的问题17.63。证明：如果 p 是奇素数且 s 是正整数，那么具有余类为 s 的点群的有限余类 p-进空间群只有有限多个同构类。

问题2。《库罗夫卡笔记》中的问题14.64，以及 Shalev 综述 *[65]* 中的问题3。通过余类族，补全 $\mathcal{G}(5,1)$ 的描述以及余类为1的5群的分类。

问题 3。比问题 2 更一般的是：完成对 $p > 5$ 的 $\mathcal{G}(p,1)$ 的描述，以及通过余类族对极大类 p-群进行分类。

问题 4。比问题 3 更一般：证明猜想 W。

参考文献

[1] H. Abdolzadeh 和 B. Eick。《关于具有固定余类的 2-群无限序列的高效表示》。Algebra Colloq. 20:561–572, 2013。[2] J. L. Alperin。《可解群的自同构》。Proc. Amer. Math. Soc. 13:175–180, 1962。[3] J. A. Ascione、G. Havas 和 C. R. Leedham-Green。《某些素数幂阶群的计算机辅助分类》。Bull. Austral. Math. Soc. 17:257–274, 1977。[4] J. A. Ascione、G. Havas 和 C. R. Leedham-Green。《某些素数幂阶群的计算机辅助分类：更正》。Bull. Austral. Math. Soc. 17:317–319, 1977。[5]J. A. Ascione。《关于第二极大类的 3-群》。哲学博士论文，ANU，1979。https://openresearch-repository.anu.edu.au/handle/1885/139377。[6] N. Blackburn。《关于一类特殊的 p-群》。Acta. Math. 100:45–92, 1958。[7] J. F. Carlson。《余类与上同调》。J. Pure Appl. Algebra 200:251–266, 2005。[8] M. Couson。《按余类分类的有限 p-群的特征标次数》。J. Algebra 418:91–109, 2014。[9] A. Cant、H. Dietrich、B. Eick 和 T. Moede。《极大类 p-群图中的伽罗瓦树》。J. Algebra 604:429–450, 2022。[10] A. Distler 和 B. Eick。《通过相应代数研究幂零半群的余类理论》。J. Algebra 373:491–501, 2013。

[11] H. Dietrich。《极大类 p-群图中的周期模式》。J. Group Theory 13:851– 871, 2010。[12] H. Dietrich。《极大类 p-群图中的一种新模式》。Bull. Lond. Math. Soc. 42:1073–1088, 2010。[13] H. Dietrich 和 B. Eick。《具有“大型”自同构群的有限极大类 p-群》。J. Group Theory 20:227–256, 2017。[14] H. Dietrich 和 B. Eick。《 p-群的余类图》。专著, Springer（编写中）。[15] H. Dietrich、B. Eick 和 D. Feichtenschlager。《使用 GAP 按余类研究 p-群》。载于：《计算群论与群论》，美国数学会计算群论专题会议，Davidson, 2007 年 3 月 3—4 日。Contemporary Math. 470:45–61, 2008。[16] H. Dietrich 和 S. Saha。《关于余类图中骨架群的一则札记》。Internat. J. Algebra Comput. 29:127–146, 2019。[17] S. Donkin。《空间群与素数幂阶群。VIII. 有限余类的 Pro-p -群与p-进李代数》。J. Algebra 111:316–342, 1987。[18] M. du Sautoy。《计数 p-群与幂零群》。Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 92:63– 112, 2001。[19] B. Eick。《确定具有给定余类的单列空间群》。J. London Math. Soc. 71:622–642, 2005。[20] B. Eick。《所有余类为 r 的 p-群图中的无限分支数》。J. Group Theory 8:687–700, 2005。[21] B. Eick。《2-群的自同构群》。J. Algebra 300:91–101, 2006。[22] B. Eick。《具有固定余类的有限 p-群的 Schur 乘子》。Israel J. Math. 166:157–166, 2008。[23] B. Eick。《有限余类的无限 pro-p-群的 Schur 乘子》。Israel J. Math. 166:147– 156, 2008。[24] B. Eick。《计算 Schur 乘子平凡的 p-群》。J. Algebra 322:741–751, 2009。[25] B. Eick 和 D. Feichtenschlager。《计算具有固定余类的 p-群无限序列的低维（上）同调群》。Internat. J. Algebra Comput. 21:635–649, 2011。[26] B. Eick 和 D. J. Green。《余类族的上链序列与 Quillen 范畴》。J. Aust. Math. Soc. 102:185–204, 2017。[27] B. Eick 和 C. R. Leedham-Green。《按余类分类素数幂阶群》。Bull. Lond. Math. Soc. 40:274–288, 2008。[28] B. Eick、C. R. Leedham-Green、M. F. Newman 和 E. A. O’Brien。《按余类分类素数幂阶群：余类为 2 的 3-群》。Internat. J. Algebra Comput. 23:1243– 1288, 2013。

[29] B. Eick 和 T. Moede。《有限幂零结合代数的余类理论：算法与周期性猜想》。Exp. Math. 26:267–274, 2017.[30] B. Eick 和 T. Moede。《幂零结合代数与余类理论》。J. Algebra 434:249–260, 2015.[31] W. Felsch、J. Neub¨user 和 W. Plesken。《空间群与素数幂阶群。IV. 关于类宽度猜想的反例》。J. London Math. Soc. 24:113–122, 1981.[32] H. Finken、J. Neub¨user 和 W. Plesken。《空间群与素数幂阶群。II. 按有限因子群分类空间群》。Arch. Math. 35:203–209, 1980.[33] H. Huppert。《有限群 I》。数学科学基础丛书，第 134 卷。Springer-Verlag，柏林-海德堡-纽约，1967年.[34] R. James。《几乎极大类的 2 群》。J. Austral. Math. Soc. 19 (Series A):343–357, 1975.[35] R. James。《几乎极大类的 2 群：勘误》。J. Austral. Math. Soc. 35 (Series A):307, 1983.[36] C. R. Leedham-Green。《有限余类的 pro-p 群》。J. London Math. Soc. 50:43–48, 1994.[37] C. R. Leedham-Green。《有限 p 群的结构》。J. London Math. Soc. 50:49–67, 1994.[38] C. R. Leedham-Green 和 S. McKay。《关于极大类的 p 群 I》。Quart. J. Math. Oxford Second Ser. 27:297–311, 1976.[39] C. R. Leedham-Green 和 S. McKay。《关于极大类的 p 群 II》。Quart. J. Math. Oxford Second Ser. 29:175–186, 1978.[40] C. R. Leedham-Green 和 S. McKay。《关于极大类的 p 群 III》。Quart. J. Math. Oxford Second Ser. 29:281–299, 1978.[41] C. R. Leedham-Green 和 S. McKay。《极大类 p 群的分类》。Quart. J. Math. Oxford Second Ser. 35:293–304, 1984.[42] C. R. Leedham-Green 和 S. McKay。《素数幂阶群的结构》。伦敦数学会专著，新系列。牛津大学出版社，2002.[43] C. R. Leedham-Green、S. McKay 和 W. Plesken。《空间群与素数幂阶群。V. 固定余类空间群维数的上界》。Proc. London Math. Soc. 52:73–94, 1986.[44] C. R. Leedham-Green、S. McKay 和 W. Plesken。《空间群与素数幂阶群。VI. 固定余类的 2-adic 空间群维数上界》。J. London Math. Soc. 34:417–425, 1986.[45] C. R. Leedham-Green 和 M. F. Newman。《空间群与素数幂阶群。I》。Arch. Math. 35:193–202, 1980.[46] C. R. Leedham-Green 和 W. Plesken。《关于一般线性群的 Sylow 子群的一些评论》。Math. Z. 191:529–535, 1986.

[47] A. Mann。《空间群与素数幂阶群。VII. 强 p 群与未覆盖p群》。Bull. London Math. Soc. 24:271–276, 1992.[48] S. McKay。《一类特殊 p 群的结构》。Quart. J. Math. Oxford Second Ser. 38:489–502, 1987.[49] S. McKay。《空间群余类的精确上界》。J. London Math. Soc. 50:488–500, 1994.[50] R. J. Miech。《极大类的后阿贝尔 p 群》。Trans. Amer. Math. Soc. 152:331–373, 1970年.[51] R. J. Miech。《一些极大类 p 群》。Trans. Amer. Math. Soc. 189:1–47, 1974.[52] R. J. Miech。《极大类的后阿贝尔 p 群》。Trans. Amer. Math. Soc. 236:93–119, 1978.[53] R. J. Miech。《极大类的后阿贝尔 p 群 II》。Trans. A mer. Math. Soc. 272:465–474, 1982.[54] P. Moravec。《关于给定余类的有限 p 群的舒尔乘子》。Israel J. Math. 185:189–205, 2011.[55] M. F. Newman。《素数幂阶群的确定》。载于：群论，堪培拉 1975 年小型会议论文集，Lect. Notes Math. 573:73–84, 1977.[56] M. F. Newman。《素数幂阶群》。Groups-Canberra 1989, Lecture notes math., Springer 1456: 49–62, 1990.[57] M. F. Newman。《论余类与平凡舒尔乘子》。J. Algebra 322:910–913, 2009.[58] M. F. Newman 和 E. A. O'Brien。《按余类分类 2 群》。Trans. Amer. Math. Soc. 351:131–169, 1999.[59] E. A. O'Brien。《 p 群生成算法》。J. Symbolic Comput. 9:677–698, 1990.[60] O. Garaialde Oca˜na。《循环点群单列 p-adic 空间群的上同调》。J. Algebra 493:79–88, 2018.[61] D. M. Riley 和 J. F. Semple。《受限李代数的余类》。Bull. London Math. Soc. 26:431–437, 1994.[62]S. Saha。《有限 p 群与余类理论》。哲学博士论文，莫纳什大学，2020。https://bridges.monash.edu/articles/thesis/Finite_p-Groups_and_Cocl

驴_理论/12431

[63] A. Shalev. 有限 p群的结构：余类猜想的有效证明。《Invent. Math.》115:315–345, 1994年。[64] A. Shalev 和 E. I. Zelmanov. 有限余类的 pro-p 群。《Math. Proc. Camb. Phil.Soc.》111:417–421，1992年。[65] A. Shalev. 有限 p群。载于：《有限群与局部有限群》。北约高级研究院于1994年8月14日至27日在土耳其伊斯坦布尔举行的会议论文集，ISBN 0-7923-3669-0：401–450，1995年。

[66] R. Shepherd. 极大类 p群。博士论文，芝加哥大学，1970年。[67] P. Symonds. 秩、余类与上同调。《Int. Math. Res. Not. IMRN》22:17399–17412，2021年。[68] R. T. Vol'vaˇcev. 全线性群的 Sylow p子群。（俄文）《Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math.》27:1031–1054，1963年；《Amer. Math. Soc. Transl.》64:216–243，1967年。.[69] A. Wiman. 与二面体群相关的 p群。《Ark. Mat. Astr. Fys.A》33(6)，12页，1946年。.[70] A. Wiman. 极大类 p群。《Acta Math.》88:317–346，1952年。

致谢

感谢 Charles Leedham-Green 和 Mike Newman 将我们引入令人振奋的余类理论领域。我们也感谢他们提供有趣的背景信息、细节，以及关于促成他们于1980年发表论文的历史日期和事件的轶事。