arXiv:2305.05264v1 [math.CA] 9 May 2023

ON ¨SCHMUCKENSCHLAGE的特征值不等式 R

YI C. HUANG

Abstract. 大约十年前，Schmuckenschl¨ager证明了：对于两个球的交集（即 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内部的凸、对称且紧的子集），狄利克雷拉普拉斯算子的最低特征值小于两个球各自最低特征值之和。他的论证依赖于Kac公式、高斯测度的对数凹性、球的对称性，以及Lieb关于两个域交集的经典结果。在本文中，我们重新审视Schmuckenschl¨ager的证明，并针对这些不等式提出一种直接且初等的、无需使用Lieb结果的方法。

1. Introduction

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$中的一个有界Lipschitz域。用 $\lambda_1(\Omega)$表示 Ω上以下狄利克雷边值问题的第一特征值：

$$-\frac{1}{2}\Delta u = \lambda_1(\Omega)u \quad \text{and} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

我们关注 Ω 是两个球的交集的情况。

定义 1.1. $B \subset \mathbb{R}^n$ 称为球，当且仅当它是凸的、对称的（更准确地说，是关于原点 0 中心对称的）、紧的，且具有非空内部。

定理1.2（Schmuckenschl¨ager，2011）。设 B_1 和 B_2 是 $\mathbb{R}^n$中的两个球。则

$$\lambda_1(B_1 \cap B_2) < \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2). \tag{1.1}$$

这一 [Sch11，命题 2 中可以找到次可加性。5]。这里我们将其表述为一个精确不等式，而这一点隐含在 Schmuckenschl¨ager 的论证中。关于复球在复插值下的类似结果（沿袭 Cordero-Erausquin [CE02] 和 Berndtsson [Ber98] 的思路）也在那里得到了证明。

Schmuckenschl¨ager的原始论证依赖于Kac公式、高斯测度的对数凹性、球的对称性以及Lieb关于两个域交集的经典结果。在本文中，我们重新审视Schmuckenschl¨ager的证明，并提出一种直接且初等的、无需Lieb的方法来证明这些不等式。

2. Proof of Theorem 1.2 after Schmuckenschläger

在表述狄利克雷问题时，采用 Δ 前面的因子 $\frac{1}{2}$，因为我们将使用概率方法。令 $\{X_t, t \geq 0\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准布朗运动。对于 $x \in \mathbb{R}^n$，P^x 表示满足以下条件的概率测度。

$$\mathbf{P}^x(X_0 = x) = 1,$$

日期：2023年5月10日。2020年数学主题分类。主要分类：35P15；次要分类：60J65。关键词和短语：狄利克雷特征值 · 退出时间。作者的研究得到中国国家自然科学基金项目（编号：11801274）的资助。本文是在作者休假期间于巴黎北索邦大学 LAGA 完成的，休假经费由 CSC 博士后／访问学者项目（编号：202006865011）资助。

也就是说，在 $\mathbf{P}^x$ 下，过程 X_t 从 x 开始。令 T_Ω 为布朗运动 X_t 离开 Ω 的退出时间。Kac公式表明，对所有 $x \in \Omega$,

$$\lambda_1(\Omega) = -\lim_{t\to\infty} \frac{\log \mathbf{P}^x(T_\Omega > t)}{t}. \tag{2.1}$$

有如下对数凹性结果（另见 Borell [Bor75]）。

引理2.1（Schmuckenschläger，2011）。设 A、B 和 C 是 $\mathbb{R}^n$、$0 \le \lambda \le 1$ 的开子集，使得

$$(1-\lambda)A + \lambda B \subset C.$$

Then

$$\mathbf{P}^{(1-\lambda)x+\lambda y}(T_C > t) \ge \mathbf{P}^x(T_A > t)^{1-\lambda}\mathbf{P}^y(T_B > t)^\lambda. \tag{2.2}$$

注2.2。陈述此引理时，我们也纳入了端点情形 $\lambda = 0$ 和$\lambda = 1$。它们直接由退出时间关于集合的单调性得出。事实上，若 $x \in \Omega_1 \subset \Omega_2$，则对任意 $t > 0$,

$$T_{\Omega_1} \le T_{\Omega_2} \quad \text{and} \quad \mathbf{P}^x(T_{\Omega_1} > t) \le \mathbf{P}^x(T_{\Omega_2} > t).$$

因此，利用Kac公式，我们得到单调性

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Longrightarrow \lambda_1(\Omega_1) \ge \lambda_1(\Omega_2). \tag{2.3}$$

此外，严格包含关系意味着严格单调性。

注 2.3. 作为补充（1.1），我们有

$$\lambda_1(B_1 \cap B_2) \ge \max\{\lambda_1(B_1), \lambda_1(B_2)\}.$$

现在我们重述 Schmuckenschläger 的证明。由球 B_1和 B_2 的对称性（它们也都以 0 为中心），可知：对任意 $y \in \mathbb{R}^n$ 和任意 $t > 0$,

$$\mathbf{P}^0(T_{B_1\cap(B_2+y)} > t) = \mathbf{P}^0(T_{B_1\cap(B_2-y)} > t), \tag{2.4}$$

因此，利用 Kac公式,

$$\lambda_1(B_1 \cap (B_2 + y)) = \lambda_1(B_1 \cap (B_2 - y)). \tag{2.5}$$

接着，由 Lieb 在 [Lie83], 中的经典结果，可知存在[1] 一个 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\lambda_1(B_1 \cap (B_2 + x)) < \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2). \tag{2.6}$$

接下来，由凸性，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\frac{B_1 \cap (B_2 + x) + B_1 \cap (B_2 - x)}{2} \subset B_1 \cap B_2,$$

因此，由（2.3）、（2.2）以及 Kac公式[2]，（2.5）和（2.6），

$$\begin{aligned}\lambda_1(B_1 \cap B_2) &\le \lambda_1\left(\frac{B_1 \cap (B_2 + x) + B_1 \cap (B_2 - x)}{2}\right)\\ &\le \frac{\lambda_1(B_1 \cap (B_2 + x)) + \lambda_1(B_1 \cap (B_2 - x))}{2}\\ &= \lambda_1(B_1 \cap (B_2 + x)) < \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2).\end{aligned}$$

这就证明了定理 1.2。

[1]Lieb的结果描述了 B_1 与 $B_2 + x$之间的重要交集。因此，与 B_2的大小相比，x 很小。这一观察启发了我们接下来的方法。[2]我们使用 $\mathbf{P}^0$，因为 $0 \in B_1 \cap B_2 \pm x$，正如前一个脚注中的解释，这样做是合理的。

注2.4。 关于 Lieb 特征值估计（2.6）的近期研究，参见 Frank 和 Larson [FL21] 与 Davies Hardy不等式 [Dav84]。

3. A Lieb-free Proof of Theorem 1.2

观察。我们首先给出以下启发：Lieb的结果适用于一般情形下的主交集，而由此得到的平移 $x \in \mathbb{R}^n$ 以某种方式承载着 B_1 和 $B_2 + x$ 具有最大可能交集的信息。因此，对于球交集，我们自然可以直接取 $x = 0$。换言之，在上一个证明中使用Lieb的交集结果可能是多余的。

更准确地说，我们的目标是绕过对 (2.6) 的使用，并直接证明

$$\lambda_1(B_1 \cap B_2) < \lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2), \tag{3.1}$$

其中 B_1 和 B_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个球。

首先，注意到 $B_1 \subset B_2$ 和 $B_2 \subset B_1$ 对于（3.1）是平凡的，因此可以排除。无需失去一般性，我们可以假设 α的每个分量所对应圆锥的张角 $B_1 \backslash B_2$ 不大于 $B_2 \backslash B_1$的张角。因此 $\alpha \le \pi/2$。

由齐次性可得

$$\frac{1}{2}\lambda_1(B_1 \cap B_2) = \lambda_1\left(\sqrt{2}(B_1 \cap B_2)\right).$$

因此，只需证明以下几何性质

$$(B_1 \backslash B_2) \subset \sqrt{2}(B_1 \cap B_2), \tag{3.2}$$

由此根据凸性可得（严格）包含关系

$$\frac{B_1 + B_2}{2} \subset \sqrt{2}(B_1 \cap B_2).$$

事实上，由（3.2）和（2.3）可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda_1(B_1 \cap B_2) &= \lambda_1\left(\sqrt{2}(B_1 \cap B_2)\right) \\ &< \lambda_1\left(\frac{B_1 + B_2}{2}\right) \le \frac{\lambda_1(B_1) + \lambda_1(B_2)}{2}.\end{aligned}$$

最后一步与前面一样，使用（2.2）以及 Kac公式。

现在我们来证明（3.2）以及定理 1.2 即可得出。由 B_1和 B_2的对称性，只需考虑 $x \in B_1 \backslash B_2$ 是该分量的轴的情形。记

$$x' = \{\lambda x : \lambda > 0\} \cap \partial B_2.$$

记 ρ_1 为定义 B_1 的度量。结合 $\alpha \le \pi/2$，以及 B_1 的对称性，并再次使用 B_2，可得 $x_1^\sharp$、 $x_2^\sharp \in \partial B_1 \cap \partial B_2$，满足 $|x_1^\sharp|_{\rho_1} = |x_2^\sharp|_{\rho_1}$，从而

$$\sqrt{2}|x'|_{\rho_1} \ge \sqrt{2}\left|\frac{x_1^\sharp + x_2^\sharp}{2}\right|_{\rho_1} \ge |x_1^\sharp|_{\rho_1}.$$

但是$|x|_{\rho_1} < |x_1^\sharp|_{\rho_1}$，因此$x \in \sqrt{2}\,(B_1 \cap B_2)$ 和 （3.2）得证。

References

[Ber98] Bo Berndtsson。关于多复变次调和函数的Pr´ekopa定理和Kiselman最小原理。《数学年刊》，312(4):785–792，1998年。[Bor75] Christer Borell。高斯空间中的Brunn-Minkowski不等式。《数学发明》，30(2):207–216，1975年。[CE02] Dario Cordero-Erausquin。关于 $\mathbb{C}^n$ 通过复插值的Santalo不等式。《数学报告》，334(9):767–772，2002年。[Dav84] E. Brian Davies。关于薛定谔算子的一些范数界和二次型不等式。II。《算子理论杂志》，12:177–196，1984年。[FL21] Rupert L. Frank和Simon Larson。Davies Hardy不等式的两个推论。《泛函分析及其应用》，55(2):174–177，2021年。[Lie83] Elliott H. Lieb。关于两个域交集上拉普拉斯算子的最低特征值。《数学发明》，74(3):441–448，1983年。[Sch11] Michael Schmuckenschl¨ager。关于球的退出时间和特征值的不等式。《势分析》，35(3):287–300，2011年。

Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée, LAGA, CNRS (UMR 7539), F-93430 Villetaneuse, France

School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023,People's Republic of China电子邮箱：Yi.Huang.Analysis@gmail.com 个人主页：https://orcid.org/0000-0002-1297-7674