arXiv:2305.05283v1 [math.CA] 9 May 2023

双曲三角形上的极大算子

Romain Branchereau & Samuel Bronstein & Anthony Gauvan

2023年5月10日

摘要

我们刻画了极大算子 $M_{\mathcal{B}}$ 在空间 $L^p(\mathrm{H}^2)$ 上的有界性性质，其中 $\mathcal{B}$ 是一个在等距变换下保持不变的任意双曲三角形族。

1 引言

极大算子理论在分析学中历史悠久，至今仍受到广泛研究：在测度度量空间 (X, μ, d) 中，人们通常考虑中心 *Hardy-Littlewood* 极大算子 M^c，其定义为

$$M^c f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\left(B(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} |f|$$

或者其非中心 版本 M，其定义为

$$Mf(x) := \sup_{x \in B \in \mathcal{Q}} \frac{1}{\mu\left(B\right)} \int_{B} |f|.$$

这里，我们用 $\mathcal{Q}$ 表示空间 X 中所有球构成的族。

在赋予 Lebesgue测度的欧几里得空间 R^n 中，算子M 和 M^c 逐点可比（即 对于任意函数 f 和 $x \in \mathrm{R}^n$，都有 $M^c f(x) \simeq_n Mf(x)$），且这两个算子均为弱型 $(1,1)$。

定理 1 (R上的极大定理^n)。对于任意 f 和 $t > 0$，有如下估计

$$|\{Mf > t\}|_n \lesssim_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{t}.$$

众所周知，定理 1 的证明依赖于经典的 Vitali覆盖定理。结合 $p = \infty$进行插值论证，我们立即得到算子 M 和 M^c 从 L^p 到 L^p 的有界性，其中 $p > 1$。这一估计结合测度论中的经典论证，可得以下微分定理。

定理 2 (勒贝格微分定理)。 对于任意局部可积函数 f，以下恒等式几乎处处成立

$$f(x) = \lim_{r \to 0} A_r f(x).$$

这里， $A_r f(x)$ 表示以点 x 为中心、半径为 r 的球（或立方体）上 f 的平均值。

在欧几里得空间中，中心化或非中心化版本的极大算子表现相同；而在非紧对称空间中，情况则大不相同。具体而言，设 G 是一个有限中心的非紧连通半单李群，K 是一个极大紧子群，并考虑非紧对称空间

$$\mathbb{X} = \mathbb{G}/\mathbb{K}$$

赋予其自然的 $\mathbb{G}$-不变测度 μ 和距离 d。在这一背景下，中心化 Hardy-Littlewood 算子 M^c 的情形已由 Stromberg 在[8]中研究。

定理 3 (Stromberg)。 在 $(\mathbb{X}\ \mu, d)$ 上，中心化 *Hardy-Littlewood* 算子M^c是弱型 $(1, 1)$。

与欧几里得空间不同，由于球的体积呈指数增长，无法在非紧对称空间上使用覆盖论证。为解决这一困难，Stromberg 使用局部-整体策略对算子 M^c 进行分解，并详细分析其最佳有界性。另一方面，Ionescu 已在 [6] 中研究了非中心化算子 M 。

定理 4 (Ionescu)。 在$(\mathbb{X}\ \mu, d)$上，非中心 *Hardy-Littlewood* 极大算子 M 在精确指数范围 $p \in (2, \infty]$内是从 L^p 到 L^p 有界的。

Ionescu 的证明依赖于极大算子的有界性与定义该算子的几何族的覆盖性质之间的关系。具体而言，在一个测度度量空间 (X, μ, d) 中，给定一个由有限测度可测集组成的任意族 $\mathcal{B}$ （即几何数据），可以定义与之关联的极大算子 $M_{\mathcal{B}}$ ，如下所示

$$M_{\mathcal{B}} f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mu(R)} \int_R |f|.$$

这里，我们已隐含地假设

$$X = \bigcup_{R \in \mathcal{B}} R.$$

在 [4], Cordoba 和 Fefferman 中指出，这样的族 $\mathcal{B}$ 对于 $q \in (1, \infty)$ 满足覆盖性质 V_q ，如果给定任意一个包含于 $\mathcal{B}$ 中的有限族 $\{R_i : i \in I\}$ ，则存在一个子族 $J \subset I$ ，使得我们有

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) \lesssim \mu\left(\bigcup_{j \in J} R_j\right)$$

以及
таксама

$$\left\| \sum_{j\in J} \mathbb{1}_{R_j} \right\|_{L^p(\mu)} \lesssim \mu\left(\bigcup_{j\in J} R_j \right)^{\frac{1}{q}}.$$

然后他们证明了以下结论。

定理 5 (Cordoba 和 R. Fefferman)。 族 $\mathcal{B}$ 满足覆盖性质 V_q ，当且仅当相应的极大算子 $M_{\mathcal{B}}$ 具有弱型(p,p)，即对于任意 f 和 $t>0$，都有

$$\mu\left(\{M_{\mathcal{B}} f > t\}\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{t}.$$

这里我们假设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。 – –

因此，就定理3 和 4而言，可以看出，几何 会深刻影响 M^c或 M的行为。我们来考虑一个略有不同的问题：在一个固定的测度度量空间（X， μ， d）中，采用极大算子 $M_{\mathcal{B}}$的这一一般定义，我们不禁会想，当族 $\mathcal{B}$由比球更复杂的几何对象构成时，会发生什么？对族 $\mathcal{B}$施加适当的几何限制，或许能揭示底层空间 X 以及族 $\mathcal{B}$中各元素之间相互作用的深层现象。

举一个欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$中的例子：给定任意方向集 $\Omega \subset \mathbb{S}^1$，，考虑由所有最长边与 Ox轴成角度 $\omega \in \Omega$ 的矩形组成的方向族 $\mathcal{R}_\Omega$ ，并记 M_Ω 为与该族相关联的极大算子。过去几十年来，人们对这些方向极大算子进行了深入研究（例如参见 [1], [3] 和 [7]）；经过长期的一系列不同研究，Bateman 才在 [2] 中对 L^p 空间上方向极大算子的行为进行了分类，其中 $1<p<\infty$。在陈述 Bateman 定理之前，我们先给出一些例子：

•如果方向集 Ω 是有限的，那么极大算子 M_Ω 在 L^p 上对任意 $p>1$ 都有界。

• 如果我们考虑方向集 $\Omega_{\text{lac}} = \left\{ \frac{\pi}{2^k} : k \geq 1 \right\}$，那么极大算子 $M_{\Omega_{\text{lac}}}$ 在 L^p 上有界，对任意 $p>1$均成立，参见 [7]。证明依赖于傅里叶分析技术。

• 如果我们考虑方向集 $\Omega_{\text{lin}} = \left\{ \frac{\pi}{k} : k \geq 1 \right\}$，那么极大算子 $M_{\Omega_{\text{lin}}}$ 在 L^p 上对任意 $p<\infty$都无界。证明依赖于所谓的*Perron* 树 的构造，它是平面中*Kakeya* 膨胀 的一个具体实现。

• 如果我们考虑嵌入在 $\mathbb{S}_1$ 中的经典三进制康托集 Ω_{Cantor}，那么极大算子 $M_{\Omega_{\text{Cantor}}}$ 在 L^p 上对任意 $p<\infty$ 都是不有界的，参见[3]。至于 Ω_{lin}，其证明依赖于在平面中实现 Kakeya 膨胀，但这是通过一种复杂的随机构造实现的。

这里，我们使用 Kakeya 膨胀一词来指称欧几里得空间中的以下几何障碍（我们用 $\mathcal{R}$ 表示包含 $\mathbf{R}^2$ 中所有平面矩形的族）。

定理 6 （带有 $\mathcal{R}$的 Kakeya 膨胀）。 给定任意大的常数 $A \gg 1$，存在一个有限族矩形

$$\{R_i : i \in I\} \subset \mathcal{R}$$

使得我们有

$$\left|\bigcup_{i\in I} TR_i\right| \geq A\left|\bigcup_{i\in I} R_i\right|.$$

这里，我们用 TR 表示沿其最长边平移自身长度后的矩形 R

该定理在分析学中有若干应用，并且与传统的 Kakeya 问题相关。例如，C. Fefferman 使用了这一性质的一个更精细版本，从而推翻了著名的球乘子定理：参见[5]其中也包含定理 6 的证明。对于任意方向集 $\Omega \subset \mathbb{S}^1$, 我们陈述 Bateman 定理，该定理指出应考虑的正确概念是 有限稀疏性。我们请读者参阅 Bateman 的论文 [2]，以了解这一概念的精确定义。

定理 7 (Bateman)。 我们有以下两种可能：

- 如果方向集 Ω 是有限稀疏的，那么 M_Ω 在 L^p上对任意 $p > 1$都有界。
- 如果方向集 Ω 不是有限稀疏的，那么就可以利用族 $\mathcal{R}_\Omega$ 构造 *Kakeya* 膨胀。特别地，对于任意 $p < \infty$， M_Ω 在 L^p 上都不是有界的。

本文中，我们研究双曲平面 $\mathbf{H}^2$ 及其自然测度 μ 下的这一问题，其中 $\mathcal{B}$ 是包含于 $\mathcal{T}$中的一个族——该族包含 $\mathbf{H}^2$ 的所有测地三角形——并且 $\mathcal{B}$ 在双曲平面的等距变换下保持不变。由于我们能够完全确定算子 $M_\mathcal{B}$的行为，研究规则性较低的几何族似乎很有意义，下面的例子也颇为恰当。我们固定一点 $\omega \in \partial\mathbf{H}^2$，并考虑曲线族 $\mathcal{G}_\omega$，其中包含所有趋向无穷远处ω 的测地线，以及曲线族 $\mathcal{H}_\omega$，其中包含所有与 ω相切的 horocycle：给定两条测地线 $d \neq d' \in \mathcal{G}_\omega$ 和两个 horocycle $h \neq h' \in \mathcal{H}_\omega$，我们考虑开有界集合 $P(d, d', h, h')$，其边界由四条曲线 d, d', h和 h'围成，然后定义该族】【。

$$\mathcal{P}_\omega = \{P(d, d', h, h') : d \neq d' \in \mathcal{G}_\omega, h \neq h' \in \mathcal{H}_\omega\}.$$

关于极大算子，我们能得出什么结论?

$$M_{\mathcal{P}_\omega} : L^\infty \to L^\infty$$

与族 $\mathcal{P}_\omega$ 相关的极大算子呢？我们能否期待它具有类似于强极大算子的有界性？此外，给定任意一个族 $\Omega \subset \partial \mathrm{H}^2$，，可以考虑如下族

$$\mathcal{P}_\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_\omega.$$

关于与这一族相关的算子 $M_{\mathcal{P}_\Omega}$，我们能得出什么结论？它的行为是否像欧几里得情形那样取决于 Ω？我们稍后会再讨论这些问题。

2 结果

如前所述，我们关注的是由测地三角形组成、且在等距变换的作用下保持不变的族。下文中，我们用 G 表示 H^2 的等距变换群，用 $\mathcal{T}$ 表示包含 H^2 中所有测地三角形的族。包含于 $\mathcal{T}$ 且在 G 下保持不变的族 $\mathcal{B}$，可由其中三角形的角度来参数化：若用 $\boldsymbol{\alpha}_T$ 表示三角形 T 的角集合，并令 $A_{\mathcal{B}} := \{\boldsymbol{\alpha}_T : T \in \mathcal{B}\}$，那么由于 $\mathcal{B}$ 在 G 下保持不变，我们便有 乐彩

$$\mathcal{B} = \{T \in \mathcal{T} : \boldsymbol{\alpha}_T \in A_{\mathcal{B}}\}.$$

我们考虑由下式定义的可容许角度单纯形 S。

$$S := \left\{\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{R}_+)^3 : s(\boldsymbol{\alpha}) \leq \pi\right\}$$

其中 $s(\boldsymbol{\alpha}) := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$。我们将把单纯形 S 分解为三个互不相交的部分 S_1，S_2 和 S_3，根据偏心率函数 p 的定义进行划分：

$$p(\boldsymbol{\alpha}) := \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

我们精确定义：

- $S_0 := \{\boldsymbol{\alpha} \in S : s(\boldsymbol{\alpha}) < \pi, \ p(\boldsymbol{\alpha}) > 0\}$
- $S_1 := \{\boldsymbol{\alpha} \in S : s(\boldsymbol{\alpha}) = \pi, p(\boldsymbol{\alpha}) > 0\}$,
- $S_2 := \{\boldsymbol{\alpha} \in S : s(\boldsymbol{\alpha}) < \pi, \ p(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$,
- 和 $S_3 := \{\boldsymbol{\alpha} \in S : s(\boldsymbol{\alpha}) = \pi, p(\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$

函数 s 和 p 具有简单的几何解释：一方面，对于任意三角形 T，都有

$$\mu(T) = \pi - s(\boldsymbol{\alpha}_T)$$

另一方面， $p(\boldsymbol{\alpha}_T)$表示三角形 T的偏心率，即其厚度。现在我们可以陈述主要结果。

定理 8. 设 $\mathcal{B}$ 是一个在等距变换下保持不变的双曲三角形族，并回顾其角度集合定义为 $A := \{\boldsymbol{\alpha}_T : \ T \in \mathcal{B}\}$。我们有以下几种可能：

- *(I)* 若 $\bar{A} \subset S_0$，则算子 $M_{\mathcal{B}}$ 是从 L^1 到 L^1 的有界算子，即存在一个常数 $C_{\mathcal{B}} < \infty$，使得对任意函数 f，都有

$$\|M_{\mathcal{B}} f\| \leq C_{\mathcal{B}} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

- *(II)* 若 $\bar{A} \subset S_1$ 且 $\bar{A} \cap S_1 \neq \emptyset$，则算子 $M_{\mathcal{B}}$ 为弱型 (1,1)，即存在一个常数 $C_{\mathcal{B}} < \infty$，使得对任意函数 f 和$t > 0$，以下估计成立

$$\mu\left(\{M_{\mathcal{B}} f > t\}\right) \leq C_{\mathcal{B}} \frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{t}.$$

- *(III)* 若 $\bar{A} \cap S_2 \neq \emptyset$，则对任意非零函数 f，存在一个依赖于 f 和 $\mathcal{B}$ 的正常数 $c > 0$，使得对任意 $y \in \mathbb{H}_2$，都有

$$M_{\mathcal{B}} f(y) > c.$$

- *(IV)* 若 $\bar{A} \cap S_3 \neq \emptyset$，则对任意大的常数 $C \gg 1$，存在一个位于 $\mathbb{H}^2$ 中的有界集合 E，满足

$$\mu\left(\left\{M_{\mathcal{B}} \mathbb{1}_E \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \geq C\mu\left(E\right).$$

定理8 的证明将分几个部分完成，并依赖于不同的思路：与 Stromberg 的工作 [8], 不同，我们完全采用几何¯方法。首先，若 $A \subset S_0$，则算子 $M_{\mathcal{B}}$ 受控于

$$T : f(x) \to \frac{1}{B(x,r)} \int_{B(x,r)} |f|$$

其中半径 r 与 x无关。这样的算子 T 是从 L^1到 L^1的有界算子；又由于 $M_{\mathcal{B}} \leq T$，结论便显而易见。若 $\bar{A} \subset S_1$ 且 $\bar{A} \cap S_1 \neq \emptyset$，这意味着族 $\mathcal{B}$ 中的三角形不会变得任意细长。因此，可以将其中每个三角形与半径一致有界的球相比较，这将使我们能够借助覆盖论证 ⁀，按照Vitali 的方法证明所需的弱型估计。

当 $\bar{A} \cap S_2 \neq \emptyset$ 时，族 $\mathcal{B}$ 包含趋于部分理想化的三角形。我们证明，对于任意一对点（x_0，y），总能用部分理想三角形捕捉点 y 以及以 x_0 为中心的一个小球；这将使我们能够证明，任意非零函数的极大函数 $M_{\mathcal{B}} f$ 都有一个统一的正下界。这种现象是双曲平面 H^2 所特有的，在具有经典凸集的欧几里得空间中不会出现。

最后，如果 $\bar{A} \cap S_3 \neq \emptyset$，那么族 $\mathcal{B}$ 包含任意薄、趋于欧几里得化的三角形。通过考察局部三角形族，我们能够构造出所需的集合 E：我们将证明，这些三角形在任意切空间 $T_{x_0}\mathbf{H}^2$ 中的指数映射像包含足够多的欧几里得三角形，从而能够利用欧几里得平面中的一个 Kakeya 型集合。

3 粗三角形（I）

假设我们有 $\bar{A} \subset S_{0}$。对于任意 $x \in \mathbf{H}^2,$，考虑由 $\mathcal{B}(x)$ 定义的族：

$$\mathcal{B}(x) := \{T \in \mathcal{B} : x \in T\}.$$

换句话说，$\mathcal{B}(x)$ 由 $\mathcal{B}$ 中所有包含点 x 的三角形 T 组成。我们提出以下结论。

结论 1。如果 $A \subset S_0$，那么存在 $r = r(\mathcal{B}) > 0$，使得对于任意 $T \in \mathcal{B}(x)$，都有 $T \subset B(x, r)$，并且还有 $\mu(T) \simeq_{\mathcal{B}} \mu(B(x, r))$。

有了这个命题，结论便很容易得出：对于任意 f，我们有

$$\int_{\mathbb{H}^2} M_{\mathcal{B}} f(x) d\mu(x) \lesssim_{\mathcal{B}} \int_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2} |f|(y) \mathbb{1}_{d(x,y) \leq r} d\mu(y) d\mu(x).$$

事实上，对于任意 $x \in \mathbf{H}^2,$，都存在 $T \in \mathcal{B}(x)$，使得

$$M_{\mathcal{B}} f(x) \leq \frac{2}{\mu(T)} \int_T |f| \lesssim_{\mathcal{B}} \int_{B(x,r)} |f|$$

因为我们有 $T \subset B(x, r)$，且这两个集合的体积相当。按照预期，利用富比尼定理可得

$$\int_{\mathbb{H}^2} M_{\mathcal{B}} f(x) d\mu(x) \lesssim_{\mathcal{B}} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

4 粗三角形（II）

我们假设这一族 $\mathcal{B}$ 满足 $\bar{A} \subset S_1$ 和 $\bar{A} \cap S_1 \neq \emptyset$。这一条件意味着 $\mathcal{B}$ 中三角形的离心率有一致的下界，但目前我们无法控制其体积。下面的断言成立。

断言 2. 对于任意三角形 $T \in \mathcal{B}$，都存在一个球 $B(T)$ 包含 T 并满足

$$\mu(B(T)) \simeq_{\mathcal{B}} \mu(T).$$

特别地，存在一个仅依赖于 $\mathcal{B}$ 的常数 $R < \infty$，使得

$$\sup_{T \in \mathcal{B}} \operatorname{diam}(B(T)) < R.$$

现在回顾在度量空间中成立的 Vitali 覆盖定理。

定理 9 (Vitali 覆盖定理)。 给定任意一族半径由常数 $R < \infty$统一限定的球 $\mathcal{F}$，存在一个子族$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ 满足以下性质：一方面， $\mathcal{F}'$ 中的球两两不相交；另一方面，有

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B'\in\mathcal{F}'} 5B'.$$

这里， $5B$ 表示球 $B(x,5r)$，若 $B = B(x,r)$。

有了命题 2 和定理 9，我们可以证明 $M_{\mathcal{B}}$ 是弱型 (1,1)。固定 f 为定义在 $\mathbb{H}^2$ 上的函数，并令 $t > 0$：根据定义，水平集$\{M_{\mathcal{B}} f > t\}$ 是由满足以下条件且属于 T 的三角形组成的并集 $\mathcal{B}$：满足

$$\int_T |f| > \mu(T)t.$$

我们用 $\mathcal{F}$ 表示这个三角形族，并对每个 2 在 T 中的 $\mathcal{F}$应用命题9，然后将定理应用于每个球 $B(T)$。这给出 $\mathcal{F}'$的一个子族 $\mathcal{F}$，满足以下包含关系

$$\{M_{\mathcal{B}} f > t\} \subset \bigcup_{T'\in\mathcal{F}'} 5B(T')$$

此外，对于 $T' \in \mathcal{F}'$，球 $B(T')$ 两两不相交。由于所考虑的所有球的半径都有一致上界，因此有

$$\mu\left(5B(T')\right) \simeq_{\mathcal{B}} \mu\left(B(T')\right)$$

因此有以下估计

$$\mu\left(\bigcup_{T'\in\mathcal{F}'} 5B(T')\right) \leq \sum_{T'\in\mathcal{F}'} \mu\left(5B(T')\right) \lesssim_{\mathcal{B}} \sum_{T'\in\mathcal{F}'} \mu\left(B(T')\right).$$

现在我们还有 $\mu(B(T')) \simeq_{\mathcal{B}} \mu(T')$，因此得到

$$\sum_{T'\in\mathcal{F}'} \mu\left(B(T')\right) \lesssim_{\mathcal{B}} \sum_{T'\in\mathcal{F}'} \frac{1}{t}\int_{B(T')} |f|.$$

由于这些球 B' 两两不相交，因此我们得到预期结果

$$\mu\left(\{M_{\mathcal{B}} f > t\}\right) \lesssim_{\mathcal{B}} \frac{1}{t}\int |f|.$$

5 部分理想三角形

现在我们假设这一族 $\mathcal{B}$ 满足 $\bar{A} \cap S_2 \neq \emptyset$。我们固定一个元素 $\boldsymbol{\alpha} \in A \cap S_2$，不失一般性地假设它具有形式 $\boldsymbol{\alpha} = (0,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$。我们证明以下命题。

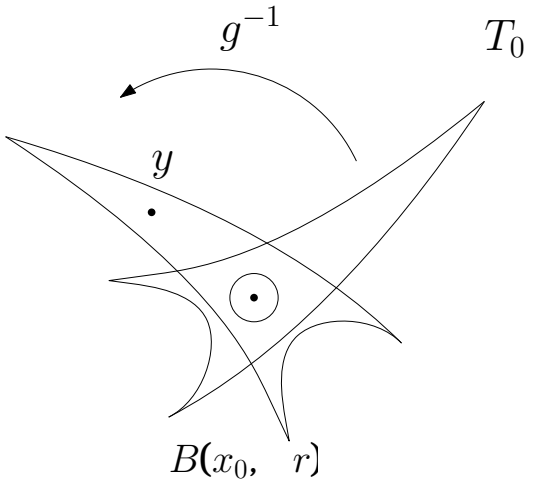

图1：定理证明示意图 1.

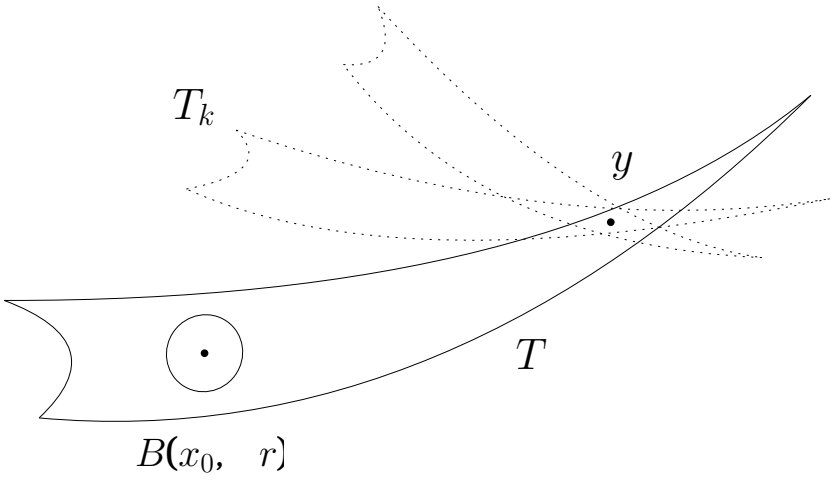

图2：序列 $\{T_k : k \geq 1\}$ 的存在源于 $\boldsymbol{\alpha}$ 属于 A。

命题 1. 对于任意 $x_0 \in \mathbb{H}^2$,，存在 $r > 0$，使得对于任意 $y \in \mathbb{H}^2$,，存在一个三角形 T，满足 $\boldsymbol{\alpha}_T = (0,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，$y \in T$ 且 $B(x_0,\ r) \subset T$。

证明。令 $x_0 \in \mathrm{H}^2$，并考虑一个角度为 $(0, \alpha_2, \alpha_3)$ 的三角形 T_0。由于 G 在 H^2 上的作用是传递的，我们可以假设 T_0 的内部包含 x_0：于是固定 $r > 0$，使得 T_0 包含球 $B(x_0, r)$。

给定任意点 $y \in \mathrm{H}^2$,，其在 x_0 的稳定子作用下的轨道恰好是圆 $C(x_0,\ d(x_0,\ y))$。由于根据假设，T_0 至少有一个角等于 0，因此它

是非紧的，并且与 $C(x_0,\ d(x_0,\ y))$ 有非平凡交集。因此存在 $g \in G$ 使得 $g(x_0) = x_0$ 且 $g(y) \in T_0$ 即 $y \in T := g^{-1}T_0$，从而我们得到

$$B(x_0, r) \subset T.$$

□

命题 1 得出如下结论。考虑 $\mathbf{H}^2$ 上的一个非零函数 f：存在一个球 $B(x_0, r)$，使得 $\int_{B(x_0,r)} |f| > 0$；根据标准的紧致性论证，我们可以令 r 任意小。固定 $\mathbf{H}^2$ 中的任意一点 y，并应用定理 1，得到一个三角形 T，满足 $\boldsymbol{\alpha}_T = (0, \alpha_2, \alpha_3)$，$y \in T$ 且 $B(x_0, r) \subset T$。最后，只需注意到 $\boldsymbol{\alpha} \in A \cap S_2$，因此存在一个三角形序列 $\{T_k :\ k \geq 1\} \subset \mathcal{B}$，其中每个三角形都包含 y，并且满足

$$\int_{T_k} |f| \to \int_T |f|.$$

特别地，我们有

$$M_{\mathcal{B}} f(y) \geq \frac{1}{\mu(T)} \int_T |f| \geq \frac{1}{\pi} \int_{B(x_0,r)} |f|.$$

由于积分 $\int_{B(x_0,\ r)} |f|$ 与点 y 无关（它只取决于 f 和 $\mathcal{B}$），因此得到了所需的结论。

6 瘦三角形和小三角形

现在我们假设族 $\mathcal{B}$ 满足 $\bar{A} \cap S_3 \neq \emptyset$。我们将证明，对于任意常数 $C \gg 1$，存在 $\mathbf{H}^2$ 中的一个有界集合 E，使得

$$\mu\left(\left\{M_{\mathcal{B}} \mathbb{1}_E \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \geq C\mu(E).$$

特别是，这一性质意味着算子 $M_{\mathcal{B}}$ 在空间 $L^p(\mathbf{H}^2)$ 上对任意 $p < \infty$都无界。为了构造集合 E，思路是用族 $\mathcal{B}$ 中的三角形构造 Kakeya 膨胀：这之所以可行，恰恰是因为族 $\mathcal{B}$ 中包含任意薄且几乎是欧几里得的三角形。为了使这一论证严谨，我们需要在切空间 $T_{x_0}\mathbf{H}^2$ 中进行研究，并通过指数映射精确描述邻域 x_0 中小三角形的像。

我们引入以下记号：给定两个三角形 T 和 T'（欧几里得三角形或双曲三角形），记♀♀♀♀♀♀

$$T \sim T'$$

如果存在一个等距变换 g 使得 $T = g(T')$。下文中，我们固定任意一点$x_0 \in \mathbf{H}^2$，并令 $\exp_{x_0}$ 为 $\mathbf{H}^2$ 与 $T_{x_0}\mathbf{H}^2$之间的指数映射。我们还

假设我们在 x_0 的一个足够小的邻域 $B(x_0, r)$ 中工作，使得对于任意开集 $U \subset B(x_0, r)$ 以及 $h = \frac{1}{1000}$，都有以下估计

$$(1-h)\left|\exp_{x_0}(U)\right| \leq \mu(U) \leq (1+h)\left|\exp_{x_0}(U)\right|.$$

我们考虑三角形的局部族：给定任意 $r > 0$ 和一个三角形 T，我们考虑以下三角形族

$$\mathcal{L}_r(T) := \{T' \in \mathcal{T} : T' \sim T, T' \subset B(x_0, r)\}.$$

由于我们希望能够在球 $B(x_0, r)$ 中移动三角形 T，因此假设我们有

$$\frac{r}{10} > \operatorname{diam}(T).$$

以下命题表明，在欧几里得平面中，定义在局部细三角形族上的极大算子可以利用 Kakeya 型集合。

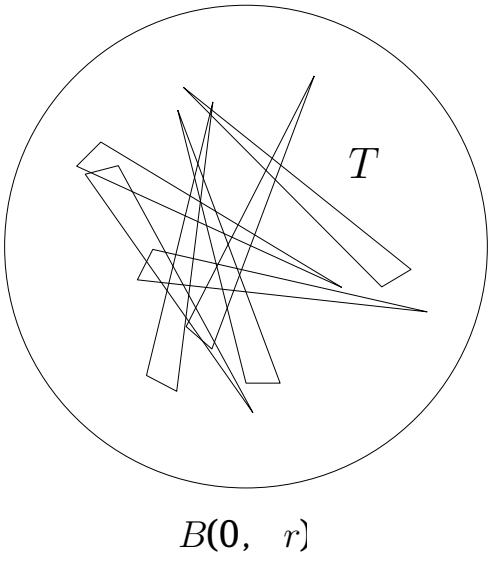

图 3：欧几里得平面中局部族 $\mathcal{L}_r(T)$ 的示意图。

命题 2. 对于任意大的常数 $C \gg 1$，存在 $0 < \epsilon \ll 1$，使得如果 T_i 是一个足够细的欧几里得三角形（即满足 $p(\boldsymbol{\alpha}_{T_i}) < \epsilon$），那么定义在非空局部族上的任意极大算子 $M_{\mathcal{L}_r(T_i)}$

$$\mathcal{L}_r(T_i) := \{T' \in \mathcal{T} : T' \sim T, T' \subset B(0, r)\}$$

存在一个 *Kakeya* 型集合 F，包含于 $B(x_0, r)$，并满足

$$\left|\left\{M_{\mathcal{L}_r(T_i)} \mathbb{1}_F \geq \frac{1}{4}\right\}\right| \geq C|F|.$$

命题2是文献中众所周知的事实，故略去证明。为了完成定理 8的证明，我们需要以下命题。该命题仅指出：给定一个由小三角形生成的局部族 T，它位于 $\mathbb{H}^2$,，其在指数映射下的像与由一个三角形生成的局部族相容 T_i；根据它们的角度集合，该三角形与 T 接近。

命题 3. 固定任意精度 $\delta > 0$：存在 $0 < r, \epsilon \ll 1$（可任意小），使得对于任何满足 $|\pi - s(\boldsymbol{\alpha}_0)| \leq \epsilon$ 的角集合 $\boldsymbol{\alpha}_0 \in S$，都存在一个满足 $\|\boldsymbol{\alpha}_0/\boldsymbol{\alpha}_1 - 1\|_1 \leq \delta$ 的欧几里得角集合 $\boldsymbol{\alpha}_1$，并且对于任何包含于 $B(x_0, r)$ 且满足以下条件的三角形 T

$$\boldsymbol{\alpha}_T = \boldsymbol{\alpha}_0,$$

存在一个欧几里得三角形 $\varphi(T)$，它依赖于满足以下条件的 T

$$\varphi(T) \subset \exp_{x_0}(T) \tag{1}$$

$$|\varphi(T)| \geq \frac{1}{10}|T| \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\varphi(T)} = \boldsymbol{\alpha}_1. \tag{3}$$

最后，存在 $0 < r' \ll 1$，使得以下包含关系成立

$$\emptyset \neq \mathcal{L}_{r'}(\varphi(T)) \subset \varphi(\mathcal{L}_r(T)).$$

证明。 众所周知，指数映射在 0 点的微分是恒等映射。因此，给定 $\epsilon > 0$，存在 $r > 0$ sich，使得指数映射限制在 $B(0, r)$ 上是 $(1+\epsilon)$ 双Lipschitz且拟共形的。特别地，$\exp_{x_0}$ 将与某个等距变换一致地接近，因此，角度为 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的双曲三角形 T 在 $B(x_0, r)$ 中的原像将包含一个角度为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 且满足 $\|\boldsymbol{\alpha}_1/\boldsymbol{\alpha}_0 - 1\|_1 \leq \epsilon$ 的欧几里得三角形。令 ϵ 足够小，即可得到所声称的性质。

□

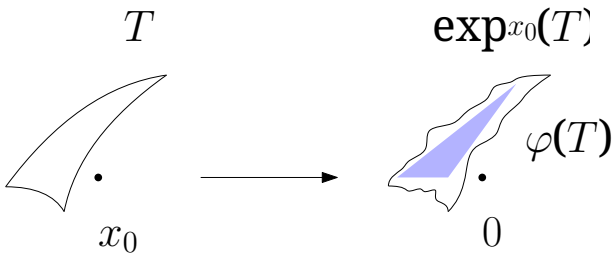

图 4：给定一个接近 x_0 的三角形 T，我们断言，其像 $\exp_{x_0}(T)$ 包含一个三角形 $\varphi(T)$，该三角形相对于 T 不会太小，同时也足够瘦。

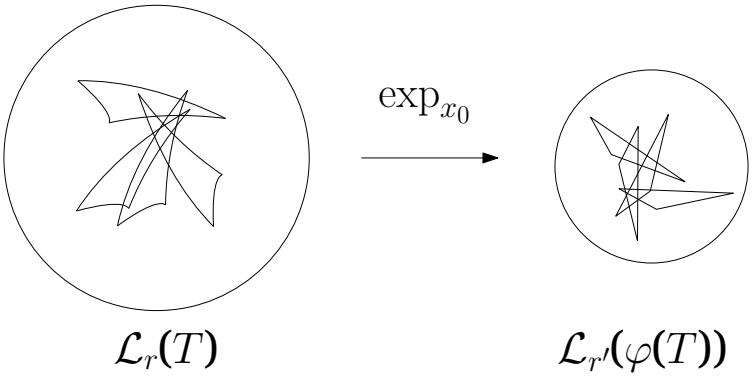

图5：我们还声称，局部族 $\mathcal{L}_r(T)$ 在指数映射下的像将包含一个局部族 $\mathcal{L}_{r'}(\varphi(T))$：这个第二个族现在包含在欧几里得平面中，因此我们可以使用命题 2。

有了命题 2 和 3，我们可以完成定理 8的证明。取一个较大的常数 $C \gg 1$，并令 $\epsilon \ll 1$ 如命题 2中所述。由于我们假设 $\bar{A} \cap S_3 \neq \emptyset$，因此可以选取一组角 $\boldsymbol{\alpha}_0 \in A$，使得若 $\boldsymbol{\alpha}_1$是命题 3中所描述的欧几里得角集合，则

$$p(\boldsymbol{\alpha}_1) < \epsilon.$$

在这种情况下，命题 3 给出的局部族 $\mathcal{L}_{r'}(\varphi(T)$ 满足命题 2的条件：因此存在一个 Kakeya 型集合 F 满足

$$\left|\left\{M_{\mathcal{L}_{r'}(\varphi(T))}\mathbb{1}_F \geq \frac{1}{4}\right\}\right| \geq C\left|F\right|.$$

现在，将集合 E 定义为 $\mathbf{H}^2$ 中 F 在指数映射下的原像

$$E := \exp_{x_0}^{-1}(F)$$

接下来看看为什么我们可以利用集合 E 和极大算子 $M_{\mathcal{B}}$。固定 $\varphi(T') \in \mathcal{L}_{r'}(\varphi(T))$，使得

$$|\varphi(T') \cap F| \geq \frac{1}{4}|\varphi(T')|$$

并注意到在 $\mathbf{H}^2$ 中，我们有

$$\mu\left(T' \cap E\right) \simeq \left|\exp_{x_0}(T' \cap E)\right| \geq |\varphi(T') \cap F| \geq \frac{1}{4}|\varphi(T')| \simeq \frac{1}{40}\mu\left(T'\right).$$

最后，下述估计由包含关系得出。

$$\mu\left(\left\{M_{\mathcal{B}}\mathbb{1}_E \geq \frac{1}{40}\right\}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{T'} T'\right) \simeq \left|\bigcup_{T'} \varphi(T')\right| \geq C\left|E\right| \simeq C\mu\left(F\right).$$

这就完成了定理8证明的最后一部分

参考文献

[1] M. A. Alfonseca，沿方向的极大算子族的强型不等式与近似正交原理R^2《伦敦数学学会杂志》67 卷第 2 期（2003），208-218.[2] Bateman Michael，平面上的 *Kakeya* 集与方向极大算子，《杜克数学杂志》147:1，（2009），55–77.[3] M. D. Bateman 和 N.H. Katz，*Cantor* 方向上的 *Kakeya* 集，《数学研究快报》15（2008），73–81.[4] C´orboda，A. 和 R. Fefferman。强极大定理的几何证明，《数学年刊》102.1（1975）：95-100.[5] C. Fefferman 球的乘子问题，《数学年刊》（1971）。[6] Ionescu, Alexandru D.《非紧对称空间上的一个极大算子和覆盖引理》。《数学研究快报》7.1（2000）：83-93.[7] A. Nagel、E. M. Stein 和 S. Wainger，稀疏方向上的微分，《美国国家科学院院刊》75:3，（1978），1060–1062.[8] Stromberg Jan Olov，弱型 L^1 非紧对称空间上极大函数的估计，《数学年刊》（1981），114(1)，115–126。