arXiv:2305.05304v2 [math.CO] 7 Jul 2023

自由半群中k-无积集的结构与密度

Freddie Illingworth† Lukas Michel† Alex Scott†

2023年7月7日

摘要

有限字母表 $\mathcal{A}$ 上的自由半群 $\mathcal{F}$ 是由来自 $\mathcal{A}$ 的字母构成的所有有限词的集合，并配备连接运算。若S 是 $\mathcal{F}$ 的一个子集，且S 中没有元素能由S中的k 个词连接而成，则称S 为k-乘积自由；若S 中没有元素是S中至多k 个词的（非平凡）连接，则称其为强k-乘积自由。

我们证明， $\mathcal{F}$ 的k-乘积自由子集的上 Banach 密度至多为 $1/\rho(k)$，其中 $\rho(k) = \min\{\ell : \ell \nmid k - 1\}$。我们还确定了所有 $k \in \{3,5,7,13\}$下极值k-乘积自由子集的结构；其中一个特例证明了 Leader、Letzter、Narayanan 和 Walters 的猜想。我们进一步确定了所有具有最大密度的强k-乘积自由集合的结构。最后，我们证明自由群的k-乘积自由子集的上 Banach 密度至多为 $1/\rho(k)$，从而证实了 Ortega、Rué 和 Serra 的猜想。

1 引言

一个子集合 S是（半）群 G 的乘积自由，如果$x \cdot y \notin S$ 对所有$x,y \in S$均成立。由此自然会提出两个问题。

> **密度：** G 的最大乘积自由子集可以有多高的密度？**结构：** G的最稠密乘积自由子集具有什么结构？

过去五十年来，这些问题得到了广泛研究。在有限阿贝尔情形中，Green 和 Ruzsa [GR05] 解决了密度问题，Balasubramian、Prakash 和 Ramana [BPR16]解决了结构问题，研究由此达到高潮。Babai 和 Sós [BS85]最早研究了有限非阿贝尔情形。这种情形的表现截然不同：正如 Gowers [Gow08]关于拟随机群的开创性工作所示，最大的无积子集可能具有趋于零的密度。近期的重要突破包括对交错群的研究：Eberhard [Ebe16] 解决了密度问题（精确到对数因子），而 Keevash、Lifshitz 和 Minzer [KLM22] 解决了结构问题。有关该领域的综述，请参阅[Ked09、TV17]。

*2020*年数学主题分类：20M05（自由半群），05D05（极值集合论）。

†数学研究所，牛津大学，英国({illingworth,michel,scott}@maths.ox.ac.uk). FI 和 AS 的研究得到了英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/V007327/1。

在无限非阿贝尔情形中，Leader、Letzter、Narayanan 和 Walters [LLNW20]解决了自由半群[1] $\mathcal{F}$ 上的密度问题；该自由半群定义在有限字母表 $\mathcal{A}$ 上，并采用如下测度：对每个长度为 $|\mathcal{A}|^{-n}$ n的词赋予相同权重。这是通过从 $\mathcal{F}$ 中均匀随机抽取词所诱导的自然测度，并使长度为n的词的总权重为 1。正如 [LLNW20], 所指出的，计数测度会导致退化结果（尤其是，直观上很小的无积集却具有接近 1 的密度）。Leader、Letzter、Narayanan 和 Walters 解决了密度问题，并证明了以下结论，其中d^* 表示上 *Banach* 密度（形式化定义见第 2 节）。

定理 1.1 ([LLNW20])。 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限集， $\mathcal{F}$ 是以 $\mathcal{A}$为字母表的自由半群。如果 $S \subset \mathcal{F}$ 是乘积自由的，那么 $d^*(S) \leqslant 1/2$。

存在一类简单的例子，它们是 $\mathcal{F}$ 的大型乘积自由子集，说明 定理 1.1 中的 1/2 是最优的。对于非空子集 $\Gamma \subset \mathcal{A}$，由其生成的奇数次出现集$\mathcal{O}_\Gamma \subset \mathcal{F}$ 是由以下词构成的集合：其中来自 Γ 的字母出现总次数为奇数（注意，如果 $\Gamma = \mathcal{A}$，那么 $\mathcal{O}_\Gamma$ 由所有奇数长度的词组成）。显然，这些集合是乘积自由的，且密度为 1/2。Leader、Letzter、Narayanan 和 Walters 猜想，这些是唯一的例子。

猜想 1.2 ([LLNW20])。 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限集， $\mathcal{F}$ 是以 $\mathcal{A}$为字母表的自由半群。如果 $S \subset \mathcal{F}$ 是乘积自由的，且 $d^*(S) = 1/2$，那么对于某个非空子集 $\Gamma \subset \mathcal{A}$，$S \subset \mathcal{O}_\Gamma$。

我们确认了猜想 1.2，事实上还证明了一个更一般的结果（定理 1.4）。Calkin 和 Erd˝os [CE96] 以及 Łuczak 和 Schoen [ŁS97] 将（半）群的子集 S 定义为 k- 乘积自由的（$k \geqslant 2$），如果对于所有 $x_1, \ldots, x_k \in$，都有 $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \not\in S$；如果对于每个 $\ell = 2, \ldots, k$，它都是 ℓ- 乘积自由的，则称其为强 k- 乘积自由。Ortega、Rué 和 Serra 将定理 1.1 推广到了强 k-乘积自由集以及自由群。

定理 1.3 ([ORS23])。 设 $k \geqslant 2$ 为一个整数， $\mathcal{A}$ 为一个有限集，且 $\mathcal{F}$ 为以 $\mathcal{A}$ 为字母表的自由(半)群。如果 $S \subset \mathcal{F}$ 是强 k-乘积自由集，则 $d^*(S) \leqslant 1/k$。

我们的第一个主要定理解决了自由半群的结构问题，描述了密度为 $1/k$的强 $k \subset \mathcal{F}$ -乘积自由集合 S。这证实了猜想 1.2。奇数次出现集 $\mathcal{O}_\Gamma$ 的另一种理解方式如下：给 Γ 中的每个字母标上 1，其余每个字母标上 0，并令一个词的和等于其字母标签之和； $\mathcal{O}_\Gamma$ 就是和为奇数的词所构成的集合。将这一方法自然推广到 $k \geqslant 3$，便可得到 k-乘积自由的强子集，它们在 $\mathcal{F}$中的密度为 $1/k$ (参见备注 1.5)。我们证明，这些是仅有的例子。

定理 1.4。设 $k \geqslant 2$ 为整数， $\mathcal{A}$ 为有限集， $\mathcal{F}$ 为以 $\mathcal{A}$为字母表的自由半群。若 $S \subset \mathcal{F}$ 是强 k-乘积自由的，且 $d^*(S) = 1/k$，则有如下结论。可以给 $\mathcal{A}$ 中的每个字母标上 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$中的一个标签，使得 S 是强 k-乘积自由集合的子集

$$T := \{w \in \mathcal{F} : \textit{the sum of the labels of letters in } w \textit{ is } 1 \bmod k\}.$$

备注 1.5。 如果有素数整除k 以及 $\mathcal{A}$ 中赋予每个字母的标签，那么T 将为空集。如果不存在这样的素数，那么根据贝祖引理，T 将非空。如果T 非空，那么$d^*(T) = 1/k$。事实上，设 $\alpha_1\alpha_2\cdots$ 是一个无限随机词，其中

[1]字母表 $\mathcal{A}$ 上的自由半群是由所有字母属于 $\mathcal{A}$ 的有限词构成的集合，配备结合运算连接，其单位元为空词。

α_i 是从 $\mathcal{A}$ 中独立且均匀随机选取的字母，并令 X_n 为 α_1、α_2、……、α_n 的标签之和。那么 (X_n) 是 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 上的马尔可夫链，且不可约（因为 $T \neq \varnothing$）。π 在 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 上的均匀分布是该链的平稳分布。令 d 为 (X_n) 的周期：根据马尔可夫收敛定理，对于每个固定的 $r \in \{1,\ldots,k-1\}$，子序列 (X_{nd+r}) 依分布收敛到 π，因此在长区间上取平均的 $|I|^{-1}\sum_{n\in I} X_n$ 依分布收敛到 π。特别地，$d^*(T) = \pi(1) = 1/k$。

现在我们转而讨论 k-无积集。在特殊情形 $|\mathcal{A}| = 1$下，自由半群 $\mathcal{F}$ 在加法运算下同构于非负整数。在这种情形下，使用“和自由”一词代替“乘积自由”。Calkin 和 Erd˝os [CE96]猜想，一个 k-和自由的非负整数子集的密度至多为 $1/\rho(k)$，其中 $\rho(k)$ 是

$$\rho(k) := \min\{\ell \in \mathbb{Z}^+ : \ell \nmid k-1\}.$$

注意，模 $\rho(k)$ 余 1 的整数构成一个 k-乘积自由集合，因此 $1/\rho(k)$应是最优界。Łuczak 和 Schoen [ŁS97] 证实了这一猜想，并解决了非负整数情形下的结构问题。我们通过解决自由半群中 k-乘积自由子集的密度问题（对所有 $k \notin \{3,5,7,13\}$）和结构问题（在 k-乘积自由子集的情形下，扩展了他们的结果。

定理 1.6。令 $k \geqslant 2$ 为一个整数，$\mathcal{A}$ 为一个有限集，$\mathcal{F}$ 为以 $\mathcal{A}$ 为字母表的自由半群。若 $S \subset \mathcal{F}$ 是 k-乘积自由的，则 $d^*(S) \leqslant 1/\rho(k)$。

定理 1.7表明，极值 k-乘积自由集合的结构与强 k-乘积自由集合的结构非常相似，只是所有内容都模 $\rho(k)$。关于 第 9 节中 k 为 3、5、7 或 13 时的情形，详见相关讨论。

定理 1.7。令 $k \geqslant 2$ 为一个整数，且 $k \notin \{3,5,7,13\}$，$\rho = \rho(k)$。令 $\mathcal{A}$ 为一个有限集，$\mathcal{F}$ 为以 $\mathcal{A}$ 为字母表的自由半群。若 $S \subset \mathcal{F}$ 是 k-乘积自由的，且 $d^*(S) = 1/\rho$，则以下结论成立。可以为 $\mathcal{A}$ 中的每个字母指定一个来自 $\mathbb{Z}/\rho\mathbb{Z}$ 的标签，使得 S 是该 k-乘积自由集合的子集

$$T := \{w \in \mathcal{F} : \textit{the sum of the labels in } w \textit{ is } 1 \bmod \rho\}.$$

注意，正如备注 1.5中所述，如果某个素数整除 ρ，并且整除 $\mathcal{A}$ 中赋给每个字母的所有标签，那么T 就是空集。否则，T 非空、是k-乘积自由集，且密度为 $1/\rho(k)$。

最后，我们考虑自由群。定理 1.3 解决了强乘积自由的 k-集合的密度问题。Ortega、Rué 和 Serra [ORS23] 提出了一个猜想，对应于 Calkin 和 Erd˝os 关于 k-乘积自由集合的猜想。我们证明了这个猜想。

定理 1.8。令 $k \geqslant 2$ 为一个整数，$\mathcal{A}$ 为一个有限集，且 F 为以$\mathcal{A}$为字母表的自由群。如果 $S \subset F$ 是 k-乘积自由的，则 $d^*(S) \leqslant 1/\rho(k)$。

论文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们给出密度的形式化定义。在第 3 节中，我们证明一些重要的技术引理，并陈述主要的密度结果定理 3.5，由此可得定理 1.6。在证明定理 3.5之前，我们先得到结构性结果；这些结果的证明更简单，并且已经包含了一些关键思想。定理 1.4的证明见第 4 节，而定理 1.7的证明见第 5 节。在第 6 节中，我们构建用于证明定理 3.5的工具，证明将在第 7 节中给出。在第 8 节中，我们将论证推广到自由群。最后，在第 9 节中，我们提出一些开放问题。

2 密度

在整篇论文中，$\mathcal{F}$ 表示由有限字母表 $\mathcal{A}$生成的自由半群。为了说明并帮助理解这些记号，我们从随机生成的词这一角度来看待问题。设 $\mathrm{W} = \alpha_1\alpha_2\cdots$ 是一个随机无限词，其中每个 α_i 都是 $\mathcal{A}$中的独立均匀随机字母。取 $\mathrm{W}_n = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，我们可以将 (W_n) 看作无限 $|\mathcal{A}|$叉树上的随机游走。若随机游走经过集合 $\mathrm{B} \subset \mathcal{F}$，就称 W 命中 B（等价地，W 有一个前缀属于 B）；否则称 W 避开 B。我们在 $\mathcal{F}$ 上赋予测度 μ，使得对每个词 $\mathrm{w} \in \mathcal{F}$,

$$\mu(w) = \mathbb{P}(\mathbf{W} \text{ hits } w) = |\mathcal{A}|^{-|w|}.$$

注意，对于 $B \subset \mathcal{F}$，$\mu(B) = \sum_{w\in B}\mu(w)$ 表示 $\mathbf{W}$ 命中B的期望次数。这有一个有用的推论。集合 $C \subset \mathcal{F}$ 是前缀无关的，如果不存在不同的词a、$b \in C$ 使得 a 是 b的前缀。 $\mathbf{W}$ 至多命中前缀无关集一次。

观察 2.1。如果 $C \subset \mathcal{F}$ 是前缀无关的，那么 $\mu(C) \leqslant 1$。

对于正整数 n 和集合 $B \subset \mathcal{F}$，B 的长度为 n 的层 为

$$B(n) := \{w \in B\colon |w| = n\},$$

而对于区间 $I \subset \mathbb{Z}^+$,

$$B(I) := \{w \in B\colon |w| \in I\}.$$

注意，测度 μ 的定义方式使得 $\mu(\mathcal{F}(n)) = 1$。集合 B 在第 n 层上的密度为$|B(n)|/|\mathcal{F}(n)| = \mu(B(n))$，这就是 $\mathbf{W}_n$ 属于集合 B的概率。集合 B 在区间 I 上的密度为

$$d^I(B) := \frac{\mu(B(I))}{\mu(\mathcal{F}(I))} = |I|^{-1}\sum_{n\in I}\mu(B(n)).$$

有了这些定义，我们便可以给出标准的密度概念。 上渐近密度的 B 为

$$\bar{d}(B) := \limsup_{m\to\infty} d^{\{1,2,\ldots,m\}}(B) = \limsup_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\mu(B(n))/m.$$

上 *Banach* 密度的 B 为

$$d^*(B) := \limsup_{I\to\infty} d^I(B) = \limsup_{I\to\infty}|I|^{-1}\sum_{n\in I}\mu(B(n)),$$

其中 I 是一个区间，记号 $I \to \infty$ 表示 $|I|$ 和 $\min I$ 都趋于无穷[2]。现在，$d^*(B) \geqslant \bar{d}$（B）对任意集合 B 均成立，因此我们的所有结果也适用于渐近密度。

需要注意的是，上极限仅具有次可加性（而非可加性）。特别是，对于不相交的集合 A,$B \subset \mathcal{F}$，我们有 $d^*(A \cup B) \leqslant d^*(A) + d^*(B)$，且等号成立。

[2]定义中通常省略条件 $\min I \to \infty$。然而，简单的分析表明，无论是否包含这一条件，得到的密度都相同。

可能并不成立。例如，这些集合

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}(\{(2n-1)!+1, (2n-1)!+2, \ldots, (2n)!\}),$$
$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}(\{(2n)!+1, (2n)!+2, \ldots, (2n+1)!\})$$

互不相交，且二者的密度均为 1。

尽管如此，在非负整数群 $\mathcal{F} = \mathbb{Z}^+$ 中，$d^*(B)$ 仍满足一些有用的性质。例如，有 $|d^I(x+B) - d^I(B)| \leqslant x/|I|$。这意味着 $d^*(x+B) = d^*(B)$。更重要的是，如果 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}^+$ 满足条件，使得 x_1+B，...，x_n+B 两两不相交，那么 $d^I(x_1+B) + \cdots + d^I(x_n+B) \leqslant 1$，由此可知

$$n \cdot d^I(B) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(d^I(x_i+B) + \frac{x_i}{|I|} \right) \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|I|}$$

因此$n \cdot d^*(B) \leqslant 1$。这不仅能给出 B 的密度上界，而且如果我们知道 $d^*(B) > 1/n$，便可得出集合 x_1+B，.....，x_n+B 不可能全部互不相交，从而推导出关于 B 的一些结构信息。Łuczak 和 Schoen [Łuc95，ŁS97]在研究非负整数的和自由子集时使用了这类论证。

如果 $|\mathcal{A}| > 1$，这些论证就不再成立。例如，如果 $w \in \mathcal{F}$，很容易看出 $d^*(wB) = |\mathcal{A}|^{-|w|} \cdot d^*(B)$，其中 $wB := \{wb : b \in B\}$。此外，w_1B、.....、w_nB 两两不交这一事实，并不能给出 B 的密度的一般上界。即使考虑嵌套集合 B、wB、.....、w^nB，取 $B := \mathcal{F} \setminus (w\mathcal{F})$ 也能得到一个例子：这些集合两两不交，但 $d^*(B) = 1 - |\mathcal{A}|^{-|w|}$，且其值可以任意接近 1。

我们将在下一节处理这些问题。通过修改我们所考虑的密度，可以确保密度是可加的。重要的是，我们想要给其上 Banach 密度设定上界的集合 $S \subset \mathcal{F}$ 的密度不会改变。此外，在某些情况下，我们证明，n 个两两不交的 B 的嵌套副本意味着 B 的密度至多为 $1/n$。这对于证明我们的结构性结果至关重要。

3 对角化与相对密度

在整篇论文中，$S \subset \mathcal{F}$ 将是一个固定集合，我们希望对其上 Banach 密度进行界定（例如，S 可能是k-乘积自由的）。存在一个区间序列(I_j)，使得$I_j \to \infty$ 并且

$$d^{I_j}(S) \to d^*(S), \quad \text{as } j \to \infty.$$

设 $B \subset \mathcal{F}$ 是另一个集合。序列 $(d^{I_j}(B))$ 有界（所有项都属于 $[0,1]$），因此根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，它有一个收敛子序列。特别地，通过取 (I_j) 的一个子序列，我们可以假设 $d^{I_j}(S) \to d^*(S)$，且 $(d^{I_j}(B))$ 收敛到某个极限，我们将其记为 $d^{I_\infty}(B)$。给定 $\mathcal{F}$ 的一个子集可数集合，我们可以通过对角化论证，假设存在一个子序列 (I_j)，使得对于该集合中每个满足 $d^{I_\infty}(S) = d^*(S)$ 的 B，都有 $d^{I_j}(B) \to d^{I_\infty}(B)$。在整篇论文中，我们只会考虑可数多个序列，因此这种收敛对我们考虑的所有集合都成立。这些极限与相应的

上 Banach 密度不同，它们是可加的。事实上，如果集合 A 和 B 不相交，那么 d^{I_j}(A ∪B) $=\mathrm{d}^{I_j}$(A) $+\mathrm{d}^{I_j}$(B)，因此 d^{I_∞}(A ∪B) $=\mathrm{d}^{I_\infty}$(A) $+\mathrm{d}^{I_\infty}$(B)。需要注意的是，尽管 d^{I_∞}(S) $=$ d^*(S)，对于我们考虑的其他集合，我们只有 d^{I_∞}(B) $\leqslant \mathrm{d}^*$(B)。

对于我们的结构性证明，我们不仅需要给乘积自由集合 S 的密度设定上界，还需要给 S 在子树上的密度设定上界。现在我们开始定义这一概念。

两个集合A和B的乘积 $\subset \mathcal{F}$ 是

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

集合 B^k 是由 B 的 k 个副本相乘得到的。注意，当且仅当 $B \cap B^k = \varnothing$时，B 是 k-乘积自由的。一个特别重要的乘积例子是 $w\mathcal{F}$，其中 $w \in \mathcal{F}$是一个词：这恰好是 $\mathcal{F}$中所有以 w 开头的词所构成的子树。类似地，$B\mathcal{F}$ 恰好是所有具有以 B 中某个词为前缀的词所组成的集合。

对于有限集 $B \subset \mathcal{F}$，我们用 $\min B$ 和 $\max B$ 分别表示 B 中最短词和最长词的长度。注意，如果 B 是有限的，那么对于满足 $\geqslant \max B$ 的 n，随机无限词 $\mathbf{W}$ 命中$(B\mathcal{F})(n)$，当且仅当它命中B。

观察 3.1。 如果 $n \geqslant |w|$，那么 $\mu((w\mathcal{F})(n)) = \mu(w)$。如果 $C \subset \mathcal{F}$ 是前缀无关且有限的，那么 $\mu((C\mathcal{F})(n)) = \mu(C)$，其中 $n \geqslant \max C$。

定义 3.2 （相对密度）。 设 $w \in \mathcal{F}$ 且$B \subset \mathcal{F}$。对于$n \geqslant |w|$，B 在$w\mathcal{F}$ 的第n 层上的相对密度为

$$\frac{|B(n) \cap w\mathcal{F}|}{|\mathcal{F}(n) \cap w\mathcal{F}|} = \frac{\mu(B(n) \cap w\mathcal{F})}{\mu(\mathcal{F}(n) \cap w\mathcal{F})} = \frac{\mu(B(n) \cap w\mathcal{F})}{\mu(w)}$$

这表示在$\mathbf{W}$ 命中w这一事件发生的条件下，$\mathbf{W}_n$ 属于B 的概率。若$n < |w|$，则按惯例将相对密度取为 0。

此外，若 I 是一个区间，且其最小值$I \geqslant |w|$，则 B 在 w 中的相对密度$\mathcal{F}$ 在区间 I上为

$$d^I_{w\mathcal{F}}(B) := \frac{\mu(B(I) \cap w\mathcal{F})}{\mu(\mathcal{F}(I) \cap w\mathcal{F})} = |I|^{-1}\mu(w)^{-1} \sum_{n \in I} \mu(B(n) \cap w\mathcal{F}) = \mu(w)^{-1} \cdot d^I(B \cap w\mathcal{F}).$$

若 $\min I < |w|$，则按惯例将相对密度取为 0。

注意，若w 是空词，则此相对密度就是$d^I(B)$。

考虑上文给出的区间序列(I_j)，其中$d^{I_j}(B) \to d^{I_\infty}(B)$对可数集合中的每个集合$B$ 都成立。对于每个词$w \in \mathcal{F}$ 以及集合族中的每个集合，序列$(d^{I_j}{}_{w\mathcal{F}}(B))$ 有界（所有项都属于 $[0,1]$），因此根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，它有一个收敛子序列。由于 $\mathcal{F}$ 是可数的（它只由有限词构成），我们可以通过对角化论证，取子序列(I_j) 使得，

对于每个 $w \in \mathcal{F}$，以及可数集合中的每个 B，$(d^{I_j}{}_{w\mathcal{F}}(B))$ 都收敛到某个极限 $d^{I_\infty}{}_{w\mathcal{F}}(B)$。总之，在整篇论文中，我们可以假设，对于遇到的任意集合 B，以及所有 $w \in \mathcal{F}$，都有

$$d^{I_j}_{w\mathcal{F}}(B) \to d^{I_\infty}_{w\mathcal{F}}(B),$$

其中 $d^{I_\infty}(B) \leqslant d^*(B)$ 以及$d^{I_\infty}(S) = d^*(S)$，其中S是一个固定的集合。和之前一样，这些极限是可加的。它们满足一个有用的性质：我们可以去掉前缀。

引理 3.3。 如果 $w,\ v \in \mathcal{F}$，则 $d^{I_\infty}{}_{wv\mathcal{F}}(wB) = d^{I_\infty}{}_{v\mathcal{F}}(B)$。

证明。 设 I 是任意一个区间，且其最小值$I > |wv|$。现在

$$d^I_{wv\mathcal{F}}(wB) = |I|^{-1}\mu(wv)^{-1}\sum_{n\in I}\mu((wB)(n)\cap wv\mathcal{F}).$$

从 (wB)(n) ∩ wv$\mathcal{F}$ 中的每个词删去开头的 w，可得 μ((wB)(n) ∩wv$\mathcal{F}$) = μ(w) · μ (B(n − |w|) ∩v$\mathcal{F}$)。又有 μ(wv) = μ(w)μ(v)，因此

$$d^I_{wv\mathcal{F}}(wB) = |I|^{-1}\mu(v)^{-1}\sum_{n\in I-|w|}\mu(B(n)\cap v\mathcal{F}),$$

其中 $I - |w|$ 是将I中的每个元素减去 $|w|$ 后得到的区间。因此

$$|d^I_{wv\mathcal{F}}(wB) - d^I_{v\mathcal{F}}(B)| = |I|^{-1}\mu(v)^{-1}\cdot\left|\sum_{n\in I-|w|}\mu(B(n)\cap v\mathcal{F}) - \sum_{n\in I}\mu(B(n)\cap v\mathcal{F})\right|$$

但是，对每个整数n， $\mu(B(n)\cap v\mathcal{F})\in[0,1]$，因此

$$|d^I_{wv\mathcal{F}}(wB) - d^I_{v\mathcal{F}}(B)| \leqslant |I|^{-1}\mu(v)^{-1}\cdot|w|$$

令$I = Ij$，并令j 趋于无穷，即得所需结果。 □

现在我们可以给出一个重要定义，用以刻画集合B沿着某棵子树所能达到的最大稠密程度。

定义 3.4 （上确界密度）。 对于 B 这个可数集合中的一个集合，B 的上确界密度定义为

$$d^{I_\infty}_{\sup}(B) := \sup_{w\in\mathcal{F}} d^{I_\infty}_{w\mathcal{F}}(B).$$

显然，上确界密度满足 $d^{I_\infty}\sup(B) \geqslant d^{I_\infty}(B)$（注意，空词属于 $\mathcal{F}$），因此 $d^{I_\infty}\sup(S)$ $\geqslant d^*(S)$。

We 将在第 7 节证明以下对定理 1.3 和1.6 的强化。

定理 3.5。 设 $k \geqslant 2$ 是一个整数， $\mathcal{A}$ 是一个有限集，且 $\mathcal{F}$ 是以 $\mathcal{A}$ 为字母表的自由半群。

(a) 若 $S \subset \mathcal{F}$ 是强 k-乘积自由的，则 $d^*(S) \leqslant 1/k$。此外，若 $d^*(S) = 1/k$，则 d^{I_∞} $sup(S) = 1/k$。*(b)* 若 $S \subset \mathcal{F}$ 是 k-乘积自由的，则 $d^*(S) \leqslant 1/\rho(k)$。此外，若 $d^*(S)$ $= 1/\rho(k)$，则 $d^{I_\infty}sup(S) = 1/\rho(k)$。

这一加强对于我们的结构性结果定理 1.4 和1.7是必要的。例如，若$S \subset \mathcal{F}$ 是强k-乘积自由的，且$d^*(S) = 1/k$，则由(a)可得，$d^{I_\infty}(S) = d^*(S) = d^{I_\infty}\sup(S)$。这表明$S$ 沿子树均匀分布，以下引理将对此作出精确说明。

引理 3.6。 如果 $d^{I_\infty}(B) = d^{I_\infty\text{上确界}}(B)$，那么 $d^{I_\infty}w_{\mathcal{F}}(B) = d^{I_\infty}(B)$ 对于每个词 $w \in \mathcal{F}$。

证明。令 ℓ 为非负整数，并令 I 为一个区间，其最小值为$I > \ell$。长度大于 ℓ 的每个词恰好属于一个 $w\mathcal{F}$（其中 $w \in \mathcal{F}(\ell)$）。因此，

$$d^I(B) = \sum_{w\in\mathcal{F}(\ell)} d^I(B \cap w\mathcal{F}) = \sum_{w\in\mathcal{F}(\ell)} \mu(w)\cdot d^I_{w\mathcal{F}}(B).$$

令$I = Ij$ 并令j 趋于无穷，得到

$$d^{I\infty}(B) = \sum_{w\in\mathcal{F}(\ell)} \mu(w)\cdot d^{I\infty}_{w\mathcal{F}}(B).$$

现在，$\sum_{w\in\mathcal{F}(\ell)} \mu(\mathrm{w}) = \mu(\mathcal{F}(\ell)) = 1$，且每个满足条件的 $\mathrm{w} \in \mathcal{F}(\ell)$ 都满足 $\mathrm{d}^{I\infty}\mathrm{w}\mathcal{F}(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{d}^{I\infty}\mathrm{sup(B)} = \mathrm{d}^{I\infty}\mathrm{(B)}$。因此，对于每个 $\mathrm{w} \in \mathcal{F}(\ell)$，必有 $\mathrm{d}^{I\infty}\mathrm{w}\mathcal{F}\mathrm{(B)} = \mathrm{d}^{I\infty}\mathrm{(B)}$。整数 ℓ 是任意的，因此我们得到了所需的结果。 □

接下来的两个引理是我们结构性证明的关键技术结果。我们指出，对于非负整数（也就是说，当 $|\mathcal{A}| = 1$ 时），这些结果显而易见得多。

引理 3.7. 设 $S \subset \mathcal{F}$ 满足 $d^{I\infty}(S) = d^{I\infty\mathrm{sup}}(S) > 1/n$。那么，对于任意 $w_1,\dots,w_n \in \mathcal{F}$，这些集合

$$w_1S, \quad w_1w_2S, \quad \dots, \quad w_1w_2\cdots w_{n-1}S, \quad w_1w_2\cdots w_nS$$

不可能两两不交。

证明。假设这些集合两两不交。那么，对于任意词 $w \in \mathcal{F}$，

$$d^{I\infty}_{w\mathcal{F}}(w_1S) + \cdots + d^{I\infty}_{w\mathcal{F}}(w_1\cdots w_nS) = d^{I\infty}_{w\mathcal{F}}((w_1S)\cup\cdots\cup(w_1\cdots w_nS)) \leqslant 1.$$

选取 $w = w_1\cdots w_n$。对每一项应用 引理 3.3 可得

$$d^{I\infty}_{w_2\cdots w_n\mathcal{F}}(S) + \cdots + d^{I\infty}_{w_n\mathcal{F}}(S) + d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(S) \leqslant 1.$$

根据 引理 3.6，每一项都是 $d^{I\infty}(S)$，这与 $d^{I\infty}(S) > 1/n$ 矛盾，证毕。 □

引理 3.8。设 $S \subset \mathcal{F}$ 满足 $d^{I\infty}(S) = d^{I\infty\mathrm{sup}}(S) > 2/(2n-1)$。那么，对于任意 $w_1,\dots,w_n,v_1,\dots,v_n \in \mathcal{F}$ 以及 $C \subset S$，以下集合要么

$$w_1S, \quad w_1w_2S, \quad \dots, \quad w_1\cdots w_{n-1}S, \quad w_1\cdots w_nC$$

要么这些集合

$$v_1S, \quad v_1v_2S, \quad \dots, \quad v_1\cdots v_{n-1}S, \quad v_1\cdots v_n(S\setminus C)$$

并非两两不交。

证明。假设这两族集合都两两不交。于是，与引理 3.7的证明一样，

$$d^{I\infty}_{w_2\cdots w_n\mathcal{F}}(S) + \cdots + d^{I\infty}_{w_n\mathcal{F}}(S) + d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(C) \leqslant 1$$

and

$$d^{I\infty}_{v_2\cdots v_n\mathcal{F}}(S) + \cdots + d^{I\infty}_{v_n\mathcal{F}}(S) + d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(S\setminus C) \leqslant 1.$$

注意，$d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(S\setminus C) = d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(S) - d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(C)$。应用这一点并将两个不等式相加，得到

$$d^{I\infty}_{w_2\cdots w_n\mathcal{F}}(S) + \cdots + d^{I\infty}_{w_n\mathcal{F}}(S) + d^{I\infty}_{v_2\cdots v_n\mathcal{F}}(S) + \cdots + d^{I\infty}_{\mathcal{F}}(S) \leqslant 2.$$

然而，根据引理 3.6，每一项都是$d^{I\infty}(S)$，这与$d^{I\infty}(S) > 2/(2n-1)$矛盾，证毕。

□

4 强乘积自由集合的结构

本节假设定理 3.5 成立，并据此证明定理 1.4。因此，设 S $\subset \mathcal{F}$ 是强 k-乘积自由的，且满足 d*(S) = 1/k。注意，由定理 3.5，d$^{I\infty}$(S) =1/k = d$^{I\infty}$sup(S)，因此我们可以并且将会频繁地应用引理 3.7 和引理 3.8，其中 n = k + 1。

我们希望证明，可以为 $\mathcal{A}$ 中的每个字母标记一个 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 中的标签，使得 S 是以下集合的子集

$$T := \{a \in \mathcal{F} : \text{the sum of the labels of letters in } a \text{ is } 1 \bmod k\}.$$

假设每个 $a \in \mathcal{F}$ 都标记为这个和。为了推导 S 的结构，我们希望确定所有词 $a \in \mathcal{F}$的这些标签。显然，S 中的所有元素都应标记为 1。对于任何其他 $a \in \mathcal{F}$，在其后追加一个来自 S 的词应使标签增加 1。因此，如果 a 的标签为 ℓ，并在 a 后追加 i = $-\ell \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 个来自 S 的词，我们应得到标签 0；再追加一个来自 S 的词，则应得到标签 1，而这个词本身可能来自 S。另一方面，对于任何其他的 $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$，在 a 后追加 $j+1$ 个来自 S 的词，应得到一个不同于 1 的标签，因此绝不会产生来自 S的词。

基于这一直觉，对于$i = 0, 1, \ldots\ldots, k-1$，定义

$$T_i := \{a \in \mathcal{F} : S \cap aS^{i+1} \neq \varnothing\}.$$

那么，T_i 中的所有元素都应具有标签 $-i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$。因此，我们预期$S \subset T_{k-1}$，并且$T_iT^j \subset T^{i+j}$。这正是我们将要证明的结论，它使我们能够推导出$T_{k-1}$的结构，也就是上文的集合$T$。

注 4.1. 在全文中，我们将T_i 的指标视为 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 中的元素；特别地，指标相加均按模k计算。
请注意，我们对T_i 的定义略显任意。无论是将S 中的词附加在某个$a \in \mathcal{F}$之前还是之后，a 的标签变化都应相同。因此，我们也可以将T_i 定义为集合 $\{a \in \mathcal{F} : S \cap S^{i+1}a \neq \varnothing\}$。幸运的是，下面的结果表明这两种定义是等价的。

命题 4.2. 对于任意正整数 r 和任意 $a \in \mathcal{F}$,

$$S \cap S^r a \neq \varnothing \Leftrightarrow S \cap S^{r-1}aS \neq \varnothing \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow S \cap SaS^{r-1} \neq \varnothing \Leftrightarrow S \cap aS^r \neq \varnothing.$$

证明。我们首先证明 \(r = 1\) 的情形。假设 \(S ∩ Sa ≠ ∅\)。那么存在某个 \(x\)，使得 \(x, xa ∈ S\)。考虑集合 \(S, xS, x^2S, \ldots, x^{k-1}S, x^{k-1}aS = x^{k-2}(xa)S\)。根据引理 3.7，这些集合不可能全部两两不交。由于 \(S\) 是强 k-乘积自由的，且 \(x ∈ S\)，因此集合 \(S, xS, \ldots, x^{k-1}S\) 两两不交。由于 \(S\) 是强 k-乘积自由的，且 \(xa ∈ S\)，因此集合 \(S, xS, \ldots, x^{k-2}S, x^{k-2}(xa)S\) 两两不交。因此，\(x^{k-1}S\) 和 \(x^{k-1}aS\) 不相交这一条件不成立，从而 \(S ∩ aS ≠ ∅\)。

令 f: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 为反转映射，它将 $\mathcal{F}$ 中的每个词反转（即从右向左读取）。函数 f 是一个保测对合。令 S = f(S)。于是，S 是 $\mathcal{F}$ 的强 k-乘积自由子集，且 d*(S) = d*(S) = 1/k。特别地，上一段表明 S ∩ Sa ≠ ∅ ⇒ S ∩ aS ≠ ∅。现在，S ∩ Sa = f(S ∩ aS)，且 S ∩ aS = f(S ∩ Sa)，因此 S ∩ aS ≠ ∅ ⇒ S ∩ Sa ≠ ∅，从而得出 r = 1 的情形。

对于一般情形，只需证明对所有非负整数 i、j：$S \cap S^{i+1}aS^j \neq \varnothing \Leftrightarrow S \cap S^iaS^{j+1} \neq \varnothing$。设 $S \cap S^{i+1}aS^j \neq \varnothing$。那么存在 $x_i \in S^i$ 和 $x^j \in S^j$，使得 $S \cap Sx_iax_j \neq \varnothing$。将 $r = 1$ 的情形应用于词 x_iax^j，可得 $S \cap x_iax^jS \neq \varnothing$，因此 $S \cap S^iaS^{j+1} \neq \varnothing$。另一方向的证明类似。

□

如果集合 $T_1, \ldots, T_{k-1}$ 旨在正确标记所有词 $a \in \mathcal{F}$，那么每个 a 都应恰好属于这些集合中的一个，并且 S 应满足 $S \subset T_{k-1}$。以下命题证明了这一点。

命题 4.3。 集合 $T_0, T_1, \ldots, T_{k-1}$ 划分了 $\mathcal{F}$，且 $S \subset T_{k-1}$。

证明。设 $a \in \mathcal{F}$ 且 $x \in S$。考虑集合 S、aS、axS、ax^2S、…、$ax^{k-1}S$。根据引理 3.7，这些集合不可能两两不交。由于 S 是强 k-乘积自由的，且 $x \in S$，集合 aS、axS、…、$ax^{k-1}S$ 两两不交。因此存在某个 $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$，使得 $S \cap ax^rS \neq \varnothing$，从而 $S \cap aS^{r+1} \neq \varnothing$。也就是说，$\cup_{r=0}^{k-1} T_r = \mathcal{F}$。

接下来证明这些T_i两两不交（因此构成 $\mathcal{F}$的一个划分）。假设$a \in T_i \cap T^j$，其中 $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$。由于$a \in T_i$，$S \cap SaS^i \neq \varnothing$，因此存在$x \in S$和$y \in S^i$，使得$xay \in S$。令

$$C := \{s \in S : ays \in S\} \subset S.$$

考虑这些$k+1$集合

$$S, \quad xS, \quad x^2S, \quad \ldots, \quad x^{k-1}S, \quad x^{k-1}ay(S \setminus C).$$

由于S 是强k-乘积自由的，且$x \in S$，这些集合中的前k 个两两不交。同理，注意到$x^{k-1}ay = x^{k-2}(xay)$ 且$xay \in S$，可知最后一个集合与前$k-1$个集合均不相交。最后，根据C的定义，最后两个集合互不相交。因此，全部$k+1$ 个集合两两不交。

由于$a \in T^j$，存在z_1,、...、$z^{j+1} \in S$，使得$z_1 \cdots z^{j+1}a \in S$。考虑$k+1$ 个集合 ts

$$S, \quad z_1S, \quad z_1^2S, \quad \ldots, \quad z_1^{k-j}S, \quad z_1^{k-j}z_2S, \quad \ldots, \quad z_1^{k-j}z_2 \cdots z^jS, \quad z_1^{k-j}z_2 \cdots z^{j+1}ayC。$$

由于 S 是强 k-乘积自由的，这些集合中的前 k 个两两不交。同样，注意到 $z_1z_2 \cdots z^{j+1}a \in S$，最后一个集合与 S、$z_1S$、…、$z_1^{k-j-1}S$ 均不相交。现在，根据 C 的定义，$ayC \subset S$。利用这一点以及乘积自由性可知，最后一个集合与 $z_1^{k-j}S$、$z_1^{k-j}z_2S$、…、$z_1^{k-j}z_2 \cdots z^jS$ 均不相交。因此，所有 k 个集合两两不交。这与引理 3.8 矛盾，因此 T_i 不构成 $\mathcal{F}$ 的划分。

还需证明 $S \subset T_{k-1}$。由于 S 是强 k-乘积自由的，对于任意 $x \in S$，集合 S 与 xS、$xS^2, \ldots, xS^{k-1}$ 均不相交，因此 $x \not\in T_0 \cup \cdots \cup T_{k-2}$。由于 T_i 是 $\mathcal{F}$ 的划分，我们必有 $x \in T_{k-1}$，这正是所需。

□

根据这两个结果，我们已经知道，$a \in T_i$ 应标记为 $-i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$。接下来，我们想证明，乘积 ab 的标签应为a 和 b的标签之和。我们先证明，每当我们从S中追加一个词时，这一结论都成立。

命题 4.4。 以下结论对所有 $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$均成立。

(a) *If $ax \in T_j$ and $x \in S$, then $a \in T_{j+1}$.*

(b) $T^{j+1}S \subset T^j$。

证明。我们先证明(a)。假设 $0 \leqslant j \leqslant k-2$。我们有$S \cap axS^{j+1} \neq \varnothing$ 且$x \in S$，因此$S \cap aS^{j+2} \neq \varnothing$，从而$a \in T^{j+1}$。

现在假设 $j = k-1$。考虑集合 S、aS、axS、ax^2S、……、$ax^{k-1}S$。根据引理 3.7，这些集合不可能两两不交。由于 S 是强 k-乘积自由的，且 $x \in S$，因此集合 aS、axS、……、$ax^{k-1}S$ 两两不交。此外，由于 $ax \in T_{k-1}$（因此根据命题 4.3，ax 不属于 $T_0 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_{k-2}$），S 与 axS、$ax^2S$、……、$ax^{k-1}S$ 均不相交。因此 S 与 aS 不相交的说法不成立，从而 $a \in T_0$，证毕。

我们现在证明(b)。设$a \in T^{j+1}$ 且$x \in S$。假设$ax \in T_i$（这样的i 由命题 4.3可知存在）。根据(a)，$i+1 = j+1$ 模 k，因此$i = j$ 模 k，如所需。 □

现在很容易得出结论，所有T_i 的标签在乘积方面都具有良好的性质。

命题 4.5。对所有 i、$j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$，$T_iT^j \subset T^{i+j}$。

证明。设 $a \in T_i$ 且 $b \in T^j$。由于 $b \in T^j$ 存在 $x_1, x_2, \ldots, x^{j+1} \in S$ 使得$bx_1x_2 \cdots x^{j+1} \in S$。根据 命题 4.4(b)，

$$abx_1 \cdots x_{j+1} = a(bx_1 \cdots x_{j+1}) \in T_{i-1}.$$

应用 命题 4.4(a) $j+1$ 次，每次去掉一个 x_ℓ，得到 $ab \in T^{i-1+(j+1)} = T^{i+j}$，如所需。 □

最后，这使我们得以完成定理 1.4的证明。

定理 *1.4*的证明。对于每个字母 $\alpha \in \mathcal{A}$，根据命题 4.3，存在唯一的$i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$使得 $\alpha \in T_i$。将 α 标记为i。根据命题 4.5，对于每个i，

$$T_i = \{w \in \mathcal{F}\colon w \text{ 中各字母的标签之和模} k\}\text{后为} i\ 。$$

特别地，根据命题 4.3，

$$S \subset T_{k-1} = \{w \in \mathcal{F}\colon \text{the sum of the labels of letters in } w \text{ is } -1 \bmod k\}.$$

注意，T_{k-1} 是强k-乘积自由的：如果w 是T_{k-1}中的 ℓ 个词的连接，那么w 中各字母的标签之和模 k后为 $-\ell$。

要得到定理 1.4陈述中的结果（即模 k 下为 1，而非-1 模 k），只需将每个字母的标签乘以 -1。 □

5 自由半群中 \(k\)-乘积自由集合的结构

本节假设定理 3.5 成立，并证明定理 1.7。设 $k \geqslant 2$ 为满足 $k \notin \{3,5,7,13\}$ 的整数，令 $\rho = \rho(k)$，且设 $S \subset \mathcal{F}$ 为 k-乘积自由，满足 $d^*(S) = 1/\rho$。注意，由定理 3.5 可知，$d^{I_\infty}(S) = 1/\rho = d^{I_\infty}\sup(S)$，因此我们可以并且将会经常在 $n = \rho + 1$ 时应用引理 3.7。

我们将证明，事实上，S 是强 ρ-乘积自由的，因此结论可由定理 1.4推出。为此，我们作如下定义。

定义 5.1. 对于集合 $A \subset \mathbb{Z}^+$，集合 $S_A \subset \mathcal{F}$ 是

$$S_A := \bigcap_{i \in A} S^i,$$

这里我们省略集合的括号，例如，$S_1 = S$ 和 $S1,3 = S \cap \mathcal{S}^3$。

由于S 是k-乘积自由的，$S1,k = \varnothing$。我们只需证明$S1,2 = S1,3 = \cdots = S1,\rho = \varnothing$，这样$S$ 就是强 ρ-乘积自由的。注意，$k = 2$ 的情形显然成立，因此从现在开始我们假设$k \geqslant 3$。

我们需要一个关于 ρ大小的简短技术性引理。

引理 5.2。 设 $k \geqslant 3$ 是一个整数，满足 $k \notin \{3,5,7,13\}$，并令 $\rho = \rho(k)$。n

$$k - 1 \geqslant \max\{(\rho - t)t(t+1) : t \in \{1,2,\ldots,\rho-1\}\}. \tag{1}$$

证明。 根据算术-几何平均不等式，对于任意$t \in [0,\rho]$ ，

$$(\rho - t)t(t+1) = 4(\rho - t)\tfrac{t}{2}\tfrac{t+1}{2} \leqslant 4\left(\tfrac{\rho+1/2}{3}\right)^3 = 4/27 \cdot (\rho + 1/2)^3.$$

另一方面，Lev [Lev03，引理 18] 证明，对于所有正整数$k \geqslant 2$,

$$\rho(k) \leqslant 2\log_2 k + 2.$$

现在，对于所有 $k \geqslant 2400$,

$$k - 1 \geqslant 4/27 \cdot (2\log_2 k + 5/2)^3,$$

因此，式（1）成立。现在，若 $\rho \geqslant 10$，则 $k - 1 \geqslant 5 \times 7 \times 8 \times 9 = 2520$，因此式（1）成立。我们还需检验其余情形。

- 如果 $\rho = 2$，那么（1）的右边是 2。最小的$k \geqslant 3$ 满足 $\rho = 2$ 的值是 4。
- 如果 $\rho = 3$，那么（1）的右边是 6。唯一的 $k \leqslant 6$ 满足 $\rho = 3$ 的值是 3 和 5。
- 如果 $\rho = 4$，那么（1）的右边是 12。唯一的 $k \leqslant 12$ 满足 $\rho = 4$ 的是 7。
- 如果 $\rho = 5$，那么（1）的右边是 24。唯一的 $k \leqslant 24$ 满足 $\rho = 5$ 的是 13。
- ρ 总是素数的幂，因此不存在满足 $\rho = 6$ 的k。
- 若 $\rho = 7$，则（1）的右端为 60。满足 $\rho = 7$ 的最小 k 为 61。
- 若 $\rho = 8$，则（1）的右端为 90。满足 $\rho = 8$ 的最小 k 为 421。
- 若 $\rho = 9$，则（1）的右端为 126。满足 $\rho = 9$ 的最小 k 为 841。 □

我们首先证明$S1,\rho$ 为空集。

命题 5.3. $S_{1,\rho} = \varnothing$。

证明。 假设$S1,\rho \neq \varnothing$，并令$t \in \mathbb{Z}^+$ 取最大值，使得$S1,\rho,2\rho-1,\ldots,t(\rho-1)+1 \neq \varnothing$，其中指标构成公差为 $\rho - 1$的等差数列。这样的t 必定存在，因为$k \equiv 1$ 模 $\rho - 1$ 且$S1,k = \varnothing$。

令$w \in S1,\rho,2\rho-1,\ldots,t(\rho-1)+1$。

将 $t = \rho - 1$ 放入（1）中的最大值内，可得 $k - 1 \geqslant \rho(\rho - 1)$。根据 k 的大小分两种情况讨论。

首先，假设 $k-1>2\rho(\rho-1)$。令 $\alpha\in\mathbb{Z}^+$ 为满足 $(\alpha-1)\rho(\rho-1)\geqslant k-1$ 的最小值。注意 $\alpha\geqslant 4$。写作 $\rho=2a+b$，其中 $a=\lfloor\rho/2\rfloor$，且 $b\in\{0,1\}$。考虑以下集合

$$\begin{aligned}&S,\quad w^{\rho-1}S,\qquad w^{\alpha(\rho-1)}S,\quad w^{(\alpha+1)(\rho-1)}S,\qquad w^{2\alpha(\rho-1)},\quad w^{(2\alpha+1)(\rho-1)}S\quad\ldots,\\&w^{(a-1)\alpha(\rho-1)}S,\quad w^{((a-1)\alpha+1)(\rho-1)}S,\qquad w^{a\alpha(\rho-1)}S,\quad w^{(a\alpha+b)(\rho-1)}S.\end{aligned}$$

我们指出，这些集合是通过从 S 开始，然后交替前置 $w^{\rho-1}$ 和 $w^{(\alpha-1)(\rho-1)}$而形成的。仅相差前置 $w^{\rho-1}$ 的两个集合称为一对：这些对依次是第一和第二个集合、第三和第四个集合，.....。所列集合的数量是 $2a+b+1=\rho+1$，因此根据 引理 3.7，它们不可能两两不交。

我们首先证明不同对中的集合互不相交。若两个这样的集合相交，则对某个满足 $\alpha-1\leqslant\ell\leqslant a\alpha+b$ 的整数 ℓ，有 $S\cap w^{\ell(\rho-1)}S\neq\varnothing$。我们将证明，对于这样的 ℓ，$w^{\ell(\rho-1)}\in S^{k-1}$，这与 $S_{1,k}=\varnothing$ 矛盾。由于 $w\in S_{1,\rho,2\rho-1,\ldots,t(\rho-1)+1}$，我们有 $w^{\ell(\rho-1)}\in S_{\ell(\rho-1),(\ell+1)(\rho-1),\ldots,\ell(\rho-1)(t(\rho-1)+1)}$，其中指标构成一个公差为 $\rho-1$ 的等差数列。只需证明 $k-1$ 属于这个等差数列。由于 $k-1$ 是 $\rho-1$ 的倍数，只需证明，对于所有满足 $\alpha-1\leqslant\ell\leqslant a\alpha+b$ 的整数 ℓ，都有$\ell(\rho-1)\leqslant k-1\leqslant\ell(\rho-1)(t(\rho-1)+1)$。现在，

$$\ell(\rho-1)(t(\rho-1)+1)\geqslant\ell(\rho-1)\rho\geqslant(\alpha-1)\rho(\rho-1)\geqslant k-1$$

and

$$\begin{aligned}\ell(\rho-1)&\leqslant(a\alpha+b)(\rho-1)=(a\alpha+\rho-2a)(\rho-1)\\&=a(\alpha-2)(\rho-1)+\rho(\rho-1)\leqslant\rho/2\cdot(\alpha-2)(\rho-1)+\rho(\rho-1)\\&=\alpha/2\cdot\rho(\rho-1)\leqslant(\alpha-2)\rho(\rho-1)<k-1,\end{aligned}$$

这里分别在最后一个和倒数第二个不等式中用到了 α 的极小性以及 $\alpha\geqslant 4$ 这一事实。

其次，我们证明同一对中的集合彼此不相交，由此得到所需的矛盾，从而完成对 $k-1>2\rho(\rho-1)$ 情形的论证。如果同一对中的两个集合不相交，则 $S\cap w^{\rho-1}S\neq\varnothing$。但是 $w^{\rho-1}\in S_{\rho-1,2(\rho-1),\ldots,(t(\rho-1)+1)(\rho-1)}$，因此，如果$S\cap w^{\rho-1}S\neq\varnothing$，那么 $S_{1,\rho,2\rho-1,\ldots,(t(\rho-1)+1)(\rho-1)+1}\neq\varnothing$，这与 t 的极大性矛盾。

其次，假设 $2\rho(\rho-1)\geqslant k-1\geqslant\rho(\rho-1)$。考虑以下 $\rho+1$ 个集合

$$S,\quad w^{\rho-1}S,\quad w^{2(\rho-1)}S,\quad\ldots,\quad w^{\rho(\rho-1)}S.$$

由于 t 是极大的，连续的集合与前一种情况一样互不相交。如果非连续的集合并非互不相交，则对于某个满足$2\leqslant\ell\leqslant\rho$的整数 ℓ s，有 $S\cap w^{\ell(\rho-1)}S\neq\varnothing$。与之前一样，$w^{\ell(\rho-1)}\in S_{\ell(\rho-1),(\ell+1)(\rho-1),\ldots,\ell(\rho-1)(t(\rho-1)+1)}$，因此只需证明，对于这样的 ℓ，$\ell(\rho-1)\leqslant k-1\leqslant\ell(\rho-1(t(\rho-1)+1)$。这是成立的，因为

$$\ell(\rho-1)(t(\rho-1)+1)\geqslant\ell(\rho-1)\rho\geqslant 2\rho(\rho-1)\geqslant k-1$$

and

$$\ell(\rho-1)\leqslant\rho(\rho-1)\leqslant k-1.$$

因此，al 1 $\rho+1$ 集合互不相交，这与引理 3.7 矛盾，因此$S_{1,\rho}$ 确实为空 y. □

现在我们证明$S_{1,2}, \ldots, S_{1,\rho-1}$均为空。

命题 5.4. 对于所有 $1 \leqslant d \leqslant \rho - 1$，$S_{1,d+1} = \varnothing$。

证明。 我们对 d 进行递减归纳，基例 $d = \rho - 1$ 由命题 5.3给出。令 $1 \leqslant d \leqslant \rho - 2$ 为满足 $S_{1,d+1} \neq \varnothing$ 的最大值，并令 $t \in \mathbb{Z}^+$ 为满足 $S_{1,d+1,2d+1,\ldots,td+1} \neq \varnothing$ 的最大值。这样的 t 存在，因为 $k \equiv 1$ 模 d。令 $w \in S_{1,d+1,2d+1,\ldots,td+1}$。

根据 ρ 的定义，d 和 $d+1$ 都整除 $k-1$。由于 d 和 $d+1$ 互素，我们可以将 $k - 1 = \alpha$ 写成 $d(d+1)$，其中 α 是某个正整数。令 $s \in \mathbb{Z}^+$ 为满足 $ds \leqslant \rho - 1$ 的最大值。写作 $\rho = a(s+1) + b$，其中 $a = \lfloor \rho/(s+1) \rfloor$，且 $b \in \{0, 1, \ldots\ldots, s\}$。考虑以下集合 $\rho + 1$。

$$\begin{array}{llll} S, & w^d S, & \ldots, & w^{sd} S, \\ w^{2(\alpha+s)d} S, & \ldots, & w^{2(\alpha+s)d+sd} S, & \\ & & \ldots, & \\ & & w^{a(\alpha+s)d} S, & \ldots, \quad w^{a(\alpha+s)d+bd} S. \end{array} \qquad \begin{array}{llll} & & w^{(\alpha+s)d} S, & w^{(\alpha+s)d+d} S, \quad \ldots, \quad w^{(\alpha+s)d+sd} S, \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

我们注意到，这些集合是通过从 S 开始，然后前置 w^d s 次，前置 $w^{\alpha d}$，再前置 w^d s 次，前置 $w^{\alpha d}$，如此继续得到的。我们将这些集合分组：1^{st} 至 d^{th} 集合属于第一组；$(d+1)^{\text{th}}$ 至 $(2d)^{\text{th}}$ 集合属于第二组；依此类推。

我们首先证明不同群中的集合互不相交。如果两个这样的集合有交集，那么对于某个满足 $\alpha \leqslant \ell \leqslant a(\alpha + s) + b$ 的整数 ℓ，有 $S \cap w^{\ell d} S \neq \varnothing$。现在 $w^{\ell d} \in S_{\ell d,(\ell+1)d,\ldots,\ell d(td+1)}$，因此，由于 $k - 1$ 是 d 的倍数，只需证明对于所有这样的 ℓ，$\ell d \leqslant k - 1 \leqslant \ell d(td + 1)$。首先，

$$\ell d(td + 1) \geqslant \alpha d(d + 1) = k - 1.$$

Now,

$$\begin{aligned} \ell d &\leqslant (a(\alpha + s) + b)d = (a(\alpha + s) + \rho - a(s + 1))d \\ &= (a(\alpha - 1) + \rho)d \end{aligned}$$

并且我们希望证明该值至多为 $k - 1 = \alpha d(d+1)$，因此只需证明 $a(\alpha - 1) + \rho \leqslant \alpha(d + 1)$。由 s 的极大性可知，$d(s+1) \geqslant \rho$，因此 $d \geqslant \rho/(s+1) \geqslant a$。因此，只需证明 $d(\alpha - 1) + \rho \leqslant \alpha(d+1)$，或者等价地，$\rho \leqslant \alpha + d$。但根据引理 5.2,

$$\begin{aligned} \alpha d(d + 1) = k - 1 &\geqslant \max\{(\rho - t)t(t + 1) : t \in \{1, 2, \ldots, \rho - 1\}\} \\ &\geqslant (\rho - d)d(d + 1), \end{aligned}$$

因此我们确实有 $\rho \leqslant \alpha + d$。

接下来，我们证明同一组中的集合两两不相交。如果同一组中两个相邻的集合相交，则 $S \cap w^d S \neq \varnothing$。但是 $w^d \in S_{d,2d,\ldots,(td+1)d}$，因此若 $S \cap w^d S \neq \varnothing$，则 $S_{1,d+1,2d+1,\ldots,(td+1)d+1} \neq \varnothing$，这与 t 的极大性矛盾。如果同一组中两个不相邻的集合相交，则对于某个满足 $2 \leqslant \ell \leqslant s$ 的整数 ℓ，有 $S \cap w^{\ell d} S \neq \varnothing$。但是 $w^{\ell d} \in S_{\ell d}$，因此 $S_{1,\ell d+1} \neq \varnothing$。然而，$d < 2d \leqslant \ell d \leqslant ds \leqslant \rho - 1$，因此这与 d 的极大性矛盾。

因此，所有 $\rho + 1$ 集合两两不交，这与引理 3.7矛盾，结论得证。 □

命题 5.3和 5.4共同表明，S 是强 ρ-乘积自由的。 定理 1.7由此可从定理 1.4推出。

6 障碍赛

本节将推导一些结果，供下一节使用，以便界定（强）k-乘积自由集合 S 的密度，并由此证明定理 3.5。为说明我们的方法，假设 S 是强 3-乘积自由的。为了界定 S 的密度，我们或许可以设法证明 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S) = \mathrm{d}^{I_\infty}(S^2) = \mathrm{d}^{I_\infty}(S^3)$。由于这些集合两两不相交，这将推出 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S \cup S^2 \cup S^3) = 3 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，进而得到 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S) \leqslant 1/3$，正如所需。

如果 S 均匀分布，这样的论证就成立。事实上，注意到对所有 $w \in S$，都有 $\mathrm{d}^{I_\infty} w_{\mathcal{F}}(S^2) \geqslant \mathrm{d}^{I_\infty} w_{\mathcal{F}}(wS) = \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，因此 S^2 在 $S\mathcal{F}$ 中的相对密度至少为 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S)$。如果 $S\mathcal{F}$ 覆盖了整个 $\mathcal{F}$，这就意味着 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S^2) \geqslant \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，所以 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S \cup S^2) \geqslant 2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$。要将 S^3 纳入并集中，只需重复上述论证。对 $w \in S$，有 $\mathrm{d}^{I_\infty} w_{\mathcal{F}}(S^2 \cup S^3) \geqslant \mathrm{d}^{I_\infty} w_{\mathcal{F}}(w(S \cup S^2)) = \mathrm{d}^{I_\infty}(S \cup S^2) \geqslant 2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，从而得到 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S^2 \cup S^3) \geqslant 2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，进而 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S \cup S^2 \cup S^3) \geqslant 3 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，如所需。

如果S 的分布并不均匀，我们希望忽略 $\mathcal{F}$ 中S 密度非常低的部分。在其余部分中，S 的密度应至少为$d^{I_\infty}(S)$，并且S 的分布应具有一定的均匀性。然后，在这一部分中，我们希望证明 $S \cup S^2$ 的密度为$2 \cdot d^{I_\infty}(S)$，且$S \cup S^2 \cup S^3$的密度为 $3 \cdot d^{I_\infty}(S)$，从而再次得到所需的结果。

虽然可以像之前一样计算 $S \cup S^2$ 的密度，但这种方法不再适用于 $S \cup S^2 \cup S^3$。我们只知道 $S \cup S^2$ 在 $\mathcal{F}$ 的某一部分中具有较高的密度，例如，对于某个 $v \in \mathcal{F}$，$\mathrm{d}^{I_\infty} v_{\mathcal{F}}(S \cup S^2) \geqslant 2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$。这不足以在上述计算中得到 $\mathrm{d}^{I_\infty} w_{\mathcal{F}}(S^2 \cup S^3)$ 的下界。

相反，注意到 $\mathrm{d}^{I_\infty} wv_{\mathcal{F}}(S^2 \cup S^3) \geqslant \mathrm{d}^{I_\infty} wv_{\mathcal{F}}(w(S \cup S^2)) = \mathrm{d}^{I_\infty} v_{\mathcal{F}}(S \cup S^2) \geqslant 2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，这告诉我们，$S^2 \cup S^3$ 在 $Sv\mathcal{F}$ 中的相对密度至少为 $2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$。如果现在能够证明 $Sv\mathcal{F}$ 基本覆盖了 $S\mathcal{F}$的全部，那么这将意味着 $S^2 \cup S^3$ 在 $S\mathcal{F}$ 中的密度至少为 $2 \cdot \mathrm{d}^{I_\infty}(S)$，进而足以证明 $\mathrm{d}^{I_\infty}(S) \leqslant 1/3$。

本节中的技术论证主要致力于证明这一点，至少在允许一些小误差的情况下成立。其思路是将 S 划分为前缀无关集合 (C_k)，使得 $C_{k+1} \subset C_k\mathcal{F}$。在某个时刻，$C_k$ 的测度将不再下降。这意味着，$C_{k+1}\mathcal{F}$ 几乎覆盖了 $C_k\mathcal{F}$的所有子树。

现在，$C_kv\mathcal{F}$ 将覆盖$C_k\mathcal{F}$中比例为 $|\mathcal{A}|^{-|v|}$ 的部分。我们还知道，所有未覆盖的子树都由$C_{k+1}\mathcal{F}$覆盖。因此，$C_{k+1}v\mathcal{F}$ 将覆盖$C_k\mathcal{F}$中仍未覆盖子树里比例为 $|\mathcal{A}|^{-|v|}$ 的部分，而剩余的子树则由$C_{k+2}\mathcal{F}$覆盖。用$C_{k+2}v\mathcal{F}$、$C_{k+3}v\mathcal{F}$等重复这一论证，最终我们可以用$\bigcup_{\ell \geqslant k} C_\ell v\mathcal{F}$覆盖$C_k\mathcal{F}$中几乎所有部分。因此，删去对$S$进行划分的最初几层后，可得$S\mathcal{F}$由$Sv\mathcal{F}$覆盖，这正是我们所需要的。

这促使我们给出以下定义。

定义 6.1(障碍赛)。一个无限序列 (C_k) 是 $\mathcal{F}$ 的子集 障碍赛当且仅当对每个正整数 k，

- 每个C_k 都是前缀无关且有限的，
- C_{k+1} 中的每个词都有一个C_k 中的真前缀（特别是，$C_{k+1}\mathcal{F} \subset C_k\mathcal{F}$）。

障碍赛(C_k) 若 $\max C_k < \min C_{k+1}$ 对所有 k 都成立，则称其具有 spread；若对所有 m、n，$|\mu(C_m) - \mu(C_n)| \leqslant \varepsilon$，则称其为 ε-紧的 。

每个障碍赛都包含一个具有 spread 的障碍赛。事实上，注意到 $\min C_k \geqslant k$，因为C_k 中的每个词都有一个真前缀属于C_{k-1}。令 $\ell_1 = \max C_1$。于是 $\min C_{\ell_1+1} > \ell_1 = \max C_1$。令 $\ell_2 = \max C_{\ell_1+1}$。于是 $\min C_{\ell_2+1} > \max C_{\ell_1+1}$。如此迭代便得到一个具有 spread 的障碍赛$C_1, C_{\ell_1+1}, C_{\ell_2+1}, \ldots$

由于C_k 是前缀无关的，$\mu(C_k) \in [0,1]$。此外，对于每个k，$C_{k+1}\mathcal{F} \subset C_k\mathcal{F}$，因此序列$(\mu(C_k))$ 是非增的。特别地，该序列趋于一个极限。因此，该序列是柯西序列：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个K，使得对于所有 ℓ，$k \geqslant K$，$|\mu(C_k) - \mu(C_\ell)| \leqslant \varepsilon$。因此，忽略前几个$C_k$，便得到一个 ε-紧的障碍赛。

特别地，给定任意障碍赛(C_k)，我们可以通过取一个子序列，假设(C_k) 既是 spread 的，又是 ε-紧的。

下面的引理表明，对于任意集合$B \subset \mathcal{F}$，都存在一个障碍赛，能够捕获B中几乎所有的元素。

引理 6.2. 设 $\varepsilon > 0$ 且 $B \subset \mathcal{F}$。存在一个 ε-紧的 *spread* 障碍赛(C_k)，使得

- $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \subset B$,
- 对所有 k 以及所有充分大的 n（以 k 表示），$\mu((B \setminus Ck\mathcal{F})(n)) \leqslant \varepsilon$,
- 对所有 k，$\mu(Ck) \geqslant dI^{\infty}(B) - \varepsilon$。

证明。 对于 $x \in B$，令其首项数 为 x 的

$$h(x) = |\{b \in B : b \text{ is a prefix of } x\}|.$$

对于每个正整数k，令$D_k = \{x \in B : h(x) = k\}$。注意，每个$D_k$ 都是前缀无关的，因此对所有k，$\mu(D_k) \leqslant 1$。对每个正整数k，迭代执行以下过程。

1. 令 ℓ_k 满足 $\mu(D_k(\{\ell_k+1, \ell_k+2, \ldots\})) \leqslant \varepsilon/2^k$。2. 令$C_k = D_k(\{1, 2, \ldots, \ell_k\})$。3. 从$B$ 中移除$(D_k \setminus C_k)\mathcal{F}$（包括从所有后续的$D_i$中移除）。

令 B' 为该过程结束时剩余的集合。注意，在步骤 3 中，词的计数要么保持不变，要么这些词会完全从 B 中移除。特别地，C_k 中的每个词在C_{k-1}中都有一个真前缀。此外，根据构造，C_k 是B的有限子集。因此，(C_k) 是一个障碍赛，并且$C_1 \cup C_2 \cup \cdots \subset B$。

固定k，令$n > \max\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$。长度为$n$ 的任何词在B' 中都不在$C_1 \cup \cdots \cup C_k$ 中，因此其词数大于k，所以属于$C_k\mathcal{F}$。因此，$B'(n) \subset C_k\mathcal{F}(n)$。接下来注意到$B'$ 是通过从B 中删除所有$(D_t \setminus C_t)\mathcal{F}$ 而得到的，因此，

$$\mu((B \setminus C_k\mathcal{F})(n)) \leqslant \mu((B \setminus B')(n)) \leqslant \sum_t \mu((D_t \setminus C_t)(n)) \leqslant \sum_t \mu(D_t \setminus C_t) \leqslant \varepsilon.$$

最后，这意味着 $\mu(B(n)) \leqslant \mu(C_k\mathcal{F}(n)) + \varepsilon \leqslant \mu(C_k) + \varepsilon$。对$n \in Ij$ 取平均，并令 $j \to \infty$，得到 $d^{I\infty}(B) \leqslant \mu(C_k) + \varepsilon$。

因此，(C_k) 是满足全部三个条件的障碍赛。如上所述，通过取一个子序列，我们可以假设(C_k) 是 spread 且 ε-紧的。取子序列不会影响这三个条件。

□

We c由引理 6.2 给出的所有障碍赛 (C_k) 是一个 ε-捕获障碍赛 B.

引理 6.3。 设(C_k) 是一个 ε-紧的 *spread* 障碍赛。对于每个 $w \in \mathcal{F}$，存在一个 N，使得下述结论成立。若 $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_N$ 且 $n \geqslant$ 最大$C_N + |w|$，则

$$\mu((C_1\mathcal{F} \setminus Cw\mathcal{F})(n)) \leqslant 2\varepsilon.$$

证明。 设 N 相对于 $|w|$ 和 $|\mathcal{A}|$ 足够大，并令 n 为 $\geqslant \max C_N + |w|$。现在

$$\mu((C_1\mathcal{F} \setminus C_N\mathcal{F})(n)) = \mu((C_1\mathcal{F})(n)) - \mu((C_N\mathcal{F})(n)) = \mu(C_1) - \mu(C_N) \leqslant \varepsilon,$$

由于$C_N\mathcal{F} \subset C_1\mathcal{F}$ 且(C_k) 是 ε-紧的。因此，只需证明

$$\mu((C_N\mathcal{F} \setminus Cw\mathcal{F})(n)) \leqslant \varepsilon.$$

令 X 为以下有限前缀无关集

$$X = \{s \in C_N : s \text{ has no prefix in } Cw\}.$$

注意，$(C_N\mathcal{F} \setminus Cw\mathcal{F})(n) \subset (X\mathcal{F})(n)$ 等等。

$$\mu((C_N\mathcal{F} \setminus Cw\mathcal{F})(n)) \leqslant \mu((X\mathcal{F})(n)) = \mu(X).$$

回想一下第 2 节中定义的随机无限词 $W = \alpha_1\alpha_2\cdots$ 及相应的随机游走。由于 X 是前缀无关的，$\mu(X) = \mathbb{P}(W$ 命中 $X)$，因此只需证明此概率至多为 ε。令 K 为满足 $1 + K|w| \leqslant N - |w|$的最大整数。如果 W 命中 X，则 W 命中 C_N，因此，由于 (C_k) 是一场障碍赛，W 会命中 $C_1, C^{1+|w|}, \ldots, C^{1+K|w|}$。此外，要命中 X，W 必须避开 C_1w、$C^{1+|w|}w$、……、$C^{1+K|w|}w$。

我们逐个揭示 W 的字母。我们一直等到 W 命中/避开 C_1（到 W 的长度达到 $\max C_1$ 时，这一点肯定已经知晓）。如果 W 避开 C_1，，那么 W 就会避开 X。如果 W 命中 C_1，，那么我们揭示 W 接下来的 $|w|$ 个字母，并检查它们是否拼成 w（这件事发生的概率为 $|\mathcal{A}|^{-|w|}$）。如果拼成了，那么 W 会避开 X。如果没有拼成，那么我们就等到 W 命中/避开 $C^{1+|w|}$：注意，由于 (C_k) 是 spread，因此这件事此前尚未发生，所以 $\min C_{1+|w|} \geqslant \max C_1 + |w|$。如果 W 避开 $C^{1+|w|}$，那么 W 就会避开 X。如果 W 命中 $C^{1+|w|}$，那么我们揭示 W 接下来的 $|w|$ 个字母，并检查它们是否拼成 w（这件事发生的概率为$|\mathcal{A}|^{-|w|}$）。我们继续这一过程，最后一次检查是：W 命中 $C^{1+K|w|}$ 后，接下来的 $|w|$ 个字母是否拼成 w。注意，每次检查发生的概率都是 $|\mathcal{A}|^{-|w|}$，且彼此独立（每次检查都涉及新的字母）。如果 W 命中 X，那么 W 必须未通过其中的每一次拼写检查，因此 W 命中 X 的概率至多为

$$(1 - |\mathcal{A}|^{-|w|})^{K+1}.$$

通过取足够大的N（因此K也足够大），使其相对于 $|w|$ 和 $|\mathcal{A}|$ 足够大，我们可以确保该值至多为 ε，如所需。 □

在证明密度证明中的关键技术结果（引理 6.5）之前，我们需要定义 B 在 $C\mathcal{F}$上的相对密度。若 $C \subset \mathcal{F}$ 是有限集，且区间 I 满足 $\min I \geqslant \max C$，则 *B 在 C 中的相对密度$\mathcal{F}$ 在区间 I 上* 为

$$d^I_{C\mathcal{F}}(B) := \frac{\mu(B(I) \cap C\mathcal{F})}{\mu(\mathcal{F}(I) \cap C\mathcal{F})}.$$

假设 C 也是前缀无关的。那么，根据 观察 3.1, $\mu(\mathcal{F}(I)\cap C\mathcal{F}) = |I|\mu(C)$。此外$(c\mathcal{F} : c \in C)$ 将 $C\mathcal{F}$划分。特别地，

$$\begin{aligned} d^I_{C\mathcal{F}}(B) &= |I|^{-1}\mu(C)^{-1}\sum_{n\in I}\mu(B(n)\cap C\mathcal{F}) \\ &= \sum_{c\in C}|I|^{-1}\mu(C)^{-1}\sum_{n\in I}\mu(B(n)\cap c\mathcal{F}) \\ &= \sum_{c\in C}\frac{\mu(c)}{\mu(C)}\cdot d^I_{c\mathcal{F}}(B) \\ &= \mu(C)^{-1}\sum_{c\in C}d^I(B\cap c\mathcal{F}) \\ &= \mu(C)^{-1}\cdot d^I(B\cap C\mathcal{F}). \end{aligned}$$

对于每个 B （我们在本文中考虑的集合）以及每个词 c，序列 $d^{I_j}{}_{c\mathcal{F}}(B)$收敛（至 $d^{I_\infty}{}_{c\mathcal{F}}(B)$）。因此，序列 $d^{I_j}{}_{C\mathcal{F}}(B)$ 收敛至极限 $d^{I_\infty}{}_{C\mathcal{F}}(B)$。同样，这些极限都是可加的。

观察 6.4. 设 $C \subset \mathcal{F}$ 有限且前缀无关。那么

$$d^{I_\infty}_{C\mathcal{F}}(B) = \sum_{c\in C}\frac{\mu(c)}{\mu(C)}\cdot d^{I_\infty}_{c\mathcal{F}}(B) = \mu(C)^{-1}\cdot d^{I_\infty}(B\cap C\mathcal{F}).$$

现在介绍我们关于密度结果的关键技术引理。

引理 6.5。 设 $\varepsilon > 0$ 且令 A，$B \subset \mathcal{F}$。若(C_k) 是 A 的一个 ε-捕获障碍赛，且 $\mu(C_1) \geqslant 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3}$，则

$$d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(AB) \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(B) - 3\varepsilon^{1/3}.$$

证明。 设$w \in \mathcal{F}$满足如下条件。

$$d^{I_\infty}_{w\mathcal{F}}(B) \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(B) - \varepsilon^{1/3}.$$

应用 引理 6.3 于 (C_k) 和 w，从而得到一个 N，使得当令 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_N$，若$n \geqslant \max C_N + |w|$，则

$$\mu((C_1\mathcal{F} \setminus Cw\mathcal{F})(n)) \leqslant 2\varepsilon.$$

~ ~我们可以采用贪心方式选取 $\widetilde{C} \subset C$ （从较短的词开始），使得 $\widetilde{C}w$ 是前缀无关的，并且 $\widetilde{C}w\mathcal{F} = Cw\mathcal{F}$。注意，

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &\geqslant \mu((C_1\mathcal{F} \setminus \widetilde{C}w\mathcal{F})(n)) \geqslant \mu((C_1\mathcal{F})(n)) - \mu((\widetilde{C}w\mathcal{F})(n)) \\ &= \mu(C_1) - \mu(\widetilde{C}w) \geqslant 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3} - \mu(\widetilde{C}w) \end{aligned}$$

因此 $\mu(\widetilde{C}w) \geqslant \varepsilon^{1/3}$。

令 I为 ~一个最小值为 $I \geqslant$、最大值为 $C_N + |w|$ 的区间，并令 $X \subset \mathcal{F}$。注意，$Cw\mathcal{F} \subset C_1\mathcal{F}$

因此

$$\begin{aligned} d^{I}_{C_1\mathcal{F}}(X) &= |I|^{-1}\mu(C_1)^{-1}\sum_{n\in I}\mu(X(n)\cap C_1\mathcal{F}) \\ &\geqslant |I|^{-1}\mu(C_1)^{-1}\sum_{n\in I}\mu(X(n)\cap \widetilde{C}w\mathcal{F}) \\ &\geqslant |I|^{-1}\sum_{n\in I}\frac{\mu(X(n)\cap \widetilde{C}w\mathcal{F})}{\mu(\widetilde{C}w)+2\varepsilon}. \end{aligned}$$

利用$x/(y+2\varepsilon)\geqslant x/y-2\varepsilon x/y^2\geqslant x/y-2\varepsilon^{1/3}$对于$\varepsilon>0$、$x\in[0,1]$和$y\geqslant\varepsilon^{1/3}$这一事实，我们得到

$$d^{I}_{C_1\mathcal{F}}(X)\geqslant d^{I}_{\widetilde{C}w\mathcal{F}}(X)-2\varepsilon^{1/3}.$$

令$X=AB$，$I=Ij$，并令j趋于无穷，得到

$$d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(AB)\geqslant d^{I_\infty}_{\widetilde{C}w\mathcal{F}}(AB)-2\varepsilon^{1/3}. \tag{2}$$

Now,

$$\begin{aligned} d^{I_\infty}_{\widetilde{C}w\mathcal{F}}(AB) &= \sum_{c\in\widetilde{C}}\frac{\mu(c)}{\mu(\widetilde{C})}\cdot d^{I_\infty}_{cw\mathcal{F}}(AB) \\ &\geqslant \sum_{c\in\widetilde{C}}\frac{\mu(c)}{\mu(\widetilde{C})}\cdot d^{I_\infty}_{cw\mathcal{F}}(cB) \\ &= \sum_{c\in\widetilde{C}}\frac{\mu(c)}{\mu(\widetilde{C})}\cdot d^{I_\infty}_{w\mathcal{F}}(B) \\ &= d^{I_\infty}_{w\mathcal{F}}(B)\geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(B)-\varepsilon^{1/3}, \end{aligned}$$

其中，第一个等式用到了观察 6.4，第一个不等式用到了以下事实：$\widetilde{c}\in C\subset C\subset A$，第二个等式用到了引理 3.3，第二个不等式则源于w的选取。将此与（2）结合，即得所需结果。□

7 （强）k-乘积自由集合的密度

本节我们将证明定理 3.5，并使用上一节建立的工具。部分(a) 有一个简单的迭代证明，该证明利用了强k-乘积自由S 与以下各集合互不相交这一事实：$S^2, S^3, \ldots\ldots, S^k$。

定理 3.5(a) 的证明。设 S $\subset\mathcal{F}$ 是强 k-乘积自由的，且 $\varepsilon>0$ 充分小。设 (C_k) 是 S 的一个 ε-捕获障碍赛，如引理 6.2 所述。若 μ(C$_1$) $<2\varepsilon+\varepsilon^{1/3}$，则 d*(S) $=$ d$^{I_\infty}$(S) $\leqslant\mu($ C$_1$) $+\varepsilon<3\varepsilon+\varepsilon^{1/3}$，小于 1/k。否则，根据引理 6.5，d$^{I_\infty}C_1\mathcal{F}$(S^2) $\geqslant$ d$^{I_\infty}$sup(S) $-3\varepsilon^{1/3}$。由于 S 是强 k-乘积自由的，S 与 S^2 不相交，因此

$$d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S\cup S^2)\geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S)+d^{I_\infty}_{\sup}(S)-3\varepsilon^{1/3}.$$

现在，根据观察 6.4，

$$d^{I_\infty}_{\sup}(S\cup S^2)\geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S\cup S^2)\geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S)+d^{I_\infty}_{\sup}(S)-3\varepsilon^{1/3},$$

因此，根据引理 6.5，

$$d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S^2 \cup S^3) \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(S \cup S^2) - 3\varepsilon^{1/3} \geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S) - 6\varepsilon^{1/3}.$$

因此，

$$d^{I_\infty}_{\sup}(S \cup S^2 \cup S^3) \geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S \cup S^2 \cup S^3) \geqslant 2d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S) - 6\varepsilon^{1/3}.$$

重复应用这一论证可得

$$1 \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(S \cup S^2 \cup \cdots \cup S^k) \geqslant (k-1)d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S) - 3(k-1)\varepsilon^{1/3}.$$

但是，由于 (C_k) 对 S 具有 ε-捕获性，$d^{I_\infty}C_1\mathcal{F}(S) = \mu(C_1)^{-1} \cdot d^{I_\infty}(S \cap C_1\mathcal{F}) \geqslant d^{I_\infty}(S \cap C_1\mathcal{F}) \geqslant d^{I_\infty}(S) - \varepsilon$。因此，$(k-1)d^{I_\infty}(S) + d^{I_\infty}\sup(S) \leqslant 1 + (k-1)\varepsilon + 3(k-1)\varepsilon^{1/3}$。由于 ε可以任意小，

$$1 \geqslant (k-1)d^{I_\infty}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

但是 $d^{I_\infty}\sup(S) \geqslant d^{I_\infty}(S)$，因此 $d^*(S) = d^{I_\infty}(S) \leqslant 1/k$。此外，若 $d^*(S) = 1/k$，则 $d^{I_\infty}(S) = 1/k$，从而 $d^{I_\infty}\sup(S) \leqslant 1/k$，正如所需。 □

第 (b)(k-乘积自由集合）部分的论证更加复杂。无需跟踪依赖于 ε 的误差项（因为最终我们会令 ε 趋于零）。为简化论证，我们引入一些记号。写作 $x \lesssim y$ 表示$x \leqslant y + f(\varepsilon)$，其中误差项$f(\varepsilon)$ 仅依赖于k 和 ε，并且当 ε 趋于零时也趋于零（在所有情况下，$f(\varepsilon)$ 都是关于 $\varepsilon^{1/3}$的多项式）。

为使论述更清晰并说明证明思路，我们先简要概述 定理 3.5(b) 在$k = 3$ 情形下的证明。完整细节见下文的证明 命题 7.1 。

定理 定理 3.5(b)在 $k = 3$ 情形下的证明。 设 $S \subset \mathcal{F}$ 是一个 3-乘积自由集合，并令 $\varepsilon > 0$ 充分小。设 (C_k) 是一个针对 ε 的捕获型障碍赛，满足 $S_{1,2} = S \cap S^2$（回顾 定义 5.1），由 引理 6.2 给出。由于 S 是 3-乘积自由的，$S_{1,2}$ 是强 3-乘积自由的。

我们断言 $d^{I_\infty}(S \cap C_1\mathcal{F}) \lesssim 1/3 \cdot \mu(C_1)$。如果 $\mu(C_1) < 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3}$，则结论显然成立。否则 $\mu(C_1) \geqslant 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3}$，因此根据引理 6.5，$d^{I_\infty}C_1\mathcal{F}(S_{1,2}S) \gtrsim d^{I_\infty}\sup(S)$。由于 S 是 3-乘积自由的，S 与 $S_{1,2}S$ 不相交，因此

$$d^{I_\infty}_{\sup}(S \cup S_{1,2}S) \geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S \cup S_{1,2}S) \gtrsim d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

那么，根据引理 6.5，

$$d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S_{1,2}S \cup S^2_{1,2}S) = d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S_{1,2}(S \cup S_{1,2}S)) \gtrsim d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

由于S 是 3-乘积自由的，S 与$S_{1,2}S \cup S^2_{1,2}S$ 不相交，因此

$$1 \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(S \cup S_{1,2}S \cup S^2_{1,2}S) \geqslant d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S \cup S_{1,2}S \cup S^2_{1,2}S) \gtrsim 2d^{I_\infty}_{C_1\mathcal{F}}(S) + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

但是 $d^{I_\infty}\sup(S) \geqslant d^{I_\infty}{}_{C_1\mathcal{F}}(S)$，因此 $d^{I_\infty}{}_{C_1\mathcal{F}}(S) \lesssim 1/3$。观察 6.4 于是给出 $d^{I_\infty}(S \cap C_1\mathcal{F}) \lesssim 1/3 \cdot \mu(C_1)$，如所声称。

我们已经界定了在 \(S\) 稠密的那部分 $\mathcal{F}$ 上 \(S\) 的密度。现在我们来界定其余部分上 \(S\) 的密度。令 \(S' = S \setminus (S1,_2 \cup C_1\mathcal{F})\) 和 \((D_k)\) 为 \(S'\) 的一个 ε-捕获型障碍赛，如引理 6.2 所述。通过取一个子序列，我们可以并且将假设 \(\min D_1 > \max C_1\)。由于 \(S\) 是 3-乘积自由的，且 \(S' \cap S^2 = \varnothing\)，因此 \(S' \) 是强 3-乘积自由的。

我们断言，$d^{I\infty}(S' \cap D_1\mathcal{F}) \lesssim 1/3 \cdot \mu(D_1)$。若 $\mu(D_1) < 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3}$，则此结论显然成立。否则，根据引理 6.5，$d^{I\infty}D_1\mathcal{F}(S'S) \gtrsim d^{I\infty}\sup(S)$。现在，$S'$ 和 $S'S$ 不相交，因为 $S' \cap S^2 = \varnothing$。因此

$$d^{I_\infty}_{\sup}(S' \cup S'S) \geqslant d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}(S' \cup S'S) \gtrsim d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}(S') + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

那么，根据引理 6.5，

$$d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}((S')^2 \cup (S')^2S) = d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}(S'(S' \cup S'S)) \gtrsim d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}(S') + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

由于S 是 3-乘积自由的，且$S' \cap S^2 = \varnothing$，$S'$ 与$(S')^2 \cup (S')^2S$ 不相交，因此

$$1 \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(S' \cup (S')^2 \cup (S')^2S) \geqslant d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}(S' \cup (S')^2 \cup (S')^2S) \gtrsim 2d^{I_\infty}_{D_1\mathcal{F}}(S') + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

但 \(d^{\mathrm{sup}}(S)\) $\geqslant$ \(d^{\mathrm{sup}}(S')\) $\geqslant$ \(d^{\mathrm{D}}(S')\)，因此 \(d^{\mathrm{D}}(S')\) $\lesssim 1/3$。观察 6.4 随即给出 \(d(S' \cap ^{\mathrm{D}})\) $\lesssim 1/3 \cdot \mu(D_1)$，如所述。

根据S' 的定义，并且由于 $\min D_1 > \max C_1$，，可知$C_1\mathcal{F}$ 与$D_1\mathcal{F}$ 不相交（更多细节见命题 7.1 的证明）。特别地，C_1 与D_1 不相交，且它们的并集是前缀无关的。因此 $\mu(C_1) + \mu(D_1) \leqslant 1$。于是，

$$d^{I\infty}(S \cap C_1\mathcal{F}) + d^{I\infty}(S' \cap D_1\mathcal{F}) \lesssim 1/3 \cdot (\mu(C_1) + \mu(D_1)) \leqslant 1/3.$$

由于 (C_k) 和 (D_k) 是 ε-捕获的，因此可知（见下文断言 7.1.2 的证明）S 中位于 $(S \cap C_1\mathcal{F}) \cup (S' \cap D_1\mathcal{F})$ 之外的部分很少。特别地，$d^{I\infty}(S) \lesssim 1/3$。由于 ε可以任意小，我们有 $d^*(S) = d^{I\infty}(S) \leqslant 1/3$。至于此外部分，请见下文命题 7.1 的证明。 □

对于一般的 k，论证是上述方法的一个更复杂的版本。我们先考虑某个 S^{A_1}，取一个针对 S^{A_1} 的 ε-捕获障碍赛 $(C^{(1)}\ k)$，并证明 S 相对于 $C_1\mathcal{F}$ 的密度至多为 $1/\rho$。然后对某个 S^{A_2}、S^{A_3}、..... 重复这一步。在后续步骤中，我们可以利用已经处理过先前 S^{A_i} 这一事实。命题 7.1 表明，如果我们选取了合适的序列 A_1, A_2,....., 那么就能得到 $d^*(S)$ 所需的上界；命题 7.2 则表明，对于每个 k，都存在合适的 A_i序列。结合这两者即可完成定理 3.5(b) 的证明。

请注意，在下面的陈述中，dA_ℓ 是和集

$$dA_\ell := \{a_1 + \cdots + a_d : a_1, \ldots, a_d \in A_\ell\}.$$

命题 7.1。令 $k \geqslant 2$ 为一个整数，$A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{N}$ 为一个集合序列，且 $A_m = \{1\}$。假设对于所有 $\ell \in [m]$，都存在正整数 $d_1, \ldots, d_{\rho-1}$，使得对于所有 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \rho - 1$，以下两者之一成立：

- $k \in \{1\} \cup (1 + (d_i + d_{i+1} + \cdots + d_j)A_\ell)$ *or*

- $A_{\ell'} \subset \{1\} \cup (1 + (d_i + d_{i+1} + \cdots + d_j)A_\ell)$ *for some* $1 \leqslant \ell' < \ell$.

若 $S \subset \mathcal{F}$ 是 k-乘积自由的，则 $d^*(S) \leqslant 1/\rho$。此外，如果 $d^*(S) = 1/\rho$，则 d^{I_∞}上确界$(S) = 1/\ \rho$.

证明。 设 $\varepsilon > 0$ 充分小。我们定义以下集合和障碍赛。取 $S^{(1)} := S$，$R^{(1)} := S_{A_1} \cap S^{(1)}$，并令 $(C^{(1)}{}_k)$ 为 ε-捕获障碍赛 $R^{(1)}$，如 引理 6.2所给出。对于 $\ell = 2$、3、.....、m，迭代执行以下操作：

- 设 $S(\ell) := S \setminus (S_{A_1} \cup \cdots \cup S_{A_{\ell-1}} \cup (C(1)_1 \ \cup \cdots \cup C(\ell-1)_1)\mathcal{F})$，且 $R(\ell) := S_{A_\ell} \cap S(\ell)$。
- 取 $(C_{(\ell)k})$ 为 ε-捕获障碍赛，作用于 $R_{(\ell)}$。通过取该障碍赛的一个子序列，我们可以并将假设 $\min C_{(\ell)1} \ > \max C_{(\ell-1)1}$。

断言 7.1.1。 对于每个 $\ell \in [m], d^{I_\infty}(S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F}) \lesssim 1/\rho \cdot \mu(C_1^{(\ell)})$。

证明。 首先，如果 $\mu(C_1^{(\ell)}) < 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3}$，那么

$$d^{I_\infty}(S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F}) \leqslant d^{I_\infty}(C_1^{(\ell)}\mathcal{F}) = \mu(C_1^{(\ell)}) \lesssim 1/\rho \cdot \mu(C_1^{(\ell)}).$$

因此，从现在起不妨假设 $\mu(C_1^{(\ell)}) \geqslant 2\varepsilon + \varepsilon^{1/3}$。考虑集合 $S^{(\ell)}$和 $(R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S$。注意到 $(R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}} \subset S_{d_{\rho-1}}A_\ell$。因此，如果 $S^{(\ell)}$和 $(R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S$ 相交，则 $S^{(\ell)} \cap S_{1+d_{\rho-1}}A_\ell \neq \varnothing$。根据命题陈述，这意味着 $S^{(\ell)} \cap S_k \neq \varnothing$ 或 $S^{(\ell)} \cap S_{A_{\ell'}} \neq \varnothing$ （对于 $\ell' < \ell$）。k-乘积自由性排除了前者，而 $S^{(\ell)}$ 的定义排除了后者。因此，$S^{(\ell)}$ 和 $(R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S$ 不相交，从而，

$$\begin{aligned} d^{I_\infty}_{\sup}(S^{(\ell)} \cup (R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S) &\geqslant d^{I_\infty}_{C_1^{(\ell)}\mathcal{F}}(S^{(\ell)} \cup (R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S) \\ &= d^{I_\infty}_{C_1^{(\ell)}\mathcal{F}}(S^{(\ell)}) + d^{I_\infty}_{C_1^{(\ell)}\mathcal{F}}((R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S). \end{aligned}$$

注意，$(C^{(\ell)}{}_k)$ 是一个针对 ε 的捕获型障碍赛，适用于 $R^{(\ell)}$，因此根据引理 6.5，

$$d^{I_\infty}_{\sup}(S^{(\ell)} \cup (R^{(\ell)})^{d_{\rho-1}}S) \gtrsim d^{I_\infty}_{C_1^{(\ell)}\mathcal{F}}(S^{(\ell)}) + d^{I_\infty}_{\sup}(S).$$

完全按照定理 3.5(a) 和上述 $k = 3$ 情形的证明来迭代这一过程，可得

$$\begin{aligned} 1 \geqslant d^{I_\infty}_{\sup}(S^{(\ell)} \cup (R^{(\ell)})^{d_1}S^{(\ell)} \cup \cdots \cup (R^{(\ell)})^{d_1+\cdots+d_{\rho-2}}S^{(\ell)} \cup (R^{(\ell)})^{d_1+\cdots+d_{\rho-1}}S) \\ \gtrsim (\rho-1)d^{I_\infty}_{C_1^{(\ell)}\mathcal{F}}(S^{(\ell)}) + d^{I_\infty}_{\sup}(S). \end{aligned} \tag{3}$$

现在，$d^{I_\infty}\sup(S) \geqslant d^{I_\infty}\sup(S^{(\ell)}) \geqslant d^{I_\infty} C(\ell)_1 \ \mathcal{F}(S^{(\ell)})$，因此 $d^{I_\infty} C(\ell)_1 \ \mathcal{F}(S^{(\ell)}) \lesssim 1/\rho$。由观察 6.4 可得结论。 □

接下来我们证明，S 中尚未被前述结论捕获的部分非常少。

断言 7.1.2. 对于所有足够大的 n，$\mu(S(n) \setminus \bigcup_\ell (S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F})) \leqslant m\varepsilon$。

证明。因此 对于每个 ℓ，$(C^{(\ell)}{}_k)$ 是一个针对 $R^{(\ell)}$ 的 ε-捕获型障碍赛，因此，对于所有足够大的 n，

$$\mu(R^{(\ell)}(n) \setminus C_1^{(\ell)}\mathcal{F}) \leqslant \varepsilon.$$

因此，只需证明 $S \setminus \bigcup_\ell (S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F})) \subset \bigcup_\ell (R^{(\ell)} \setminus C_1^{(\ell)}\mathcal{F})$。取 $w \in S \setminus \bigcup_\ell (S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F}))$. 令 ℓ 为满足 $w \in S^{(\ell)}$ 的极大元（这样的 ℓ 存在，因为 $S^{(1)} = S$）。由于 $w \in S \setminus \bigcup_\ell (S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F}))$，故 $w \notin C_1^{(\ell)}\mathcal{F}$。我们断言 $w \in S^{A_\ell}$。若 $\ell = m$，则结论显然成立（$S^{A_m} = S_1 = S$）。若 $\ell < m$，则由 ℓ的极大性，必有 $w \in S_{A_\ell} \cup C_1^{(\ell)}\mathcal{F}$，从而 $w \in S^{A_\ell}$。因此，$w \in (S_{A_\ell} \cap S^{(\ell)}) \setminus C_1^{(\ell)}\mathcal{F} = R^{(\ell)} \setminus C_1^{(\ell)}\mathcal{F}$，如所需。

□

现在注意到，$C_1^{(1)}\mathcal{F}$、……、$C_1^{(m)}\mathcal{F}$两两不交。否则，某个 $w_i \in C_1^{(i)}$ 就会是某个 $wj \in C_1^{(j)}$ 的前缀（其中 $i \neq j$）。根据构造，对所有 ℓ，都有 $\min C_1^{(\ell)} > \max C_1^{(\ell-1)}$，因此 $i < j$。另一方面，$wj \in C_1^{(j)} \subset R^{(j)} \subset S^{(j)}$，因此 $wj \notin C_1^{(i)}\mathcal{F}$，这就产生了矛盾。特别地，$C_1^{(\ell)}$、……、$C_1^{(m)}$ 两两不交，且它们的并集是前缀无关的。

现在我们可以证明 $d^*(S) \leqslant 1/\rho$。对 断言 7.1.1 求和 ℓ 可得

$$d^{I\infty}(\bigcup_\ell (S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F})) \lesssim 1/\rho \cdot \mu(C_1^{(1)} \cup \cdots \cup C_1^{(m)}) \leqslant 1/\rho. \tag{4}$$

然后，根据 断言 7.1.2，我们得到 $d^{I\infty}(S) \lesssim 1/\rho$。注意到 ε 可以任意小，我们有 $d^*(S) = d^{I\infty}(S) \leqslant 1/\rho$。

最后，假设 $d^{I\infty}(S) = d^*(S) = 1/\rho$。那么断言 7.1.1 和 (4) 中必须取等号。也就是说，对于所有 $\ell \in [m]$，都有 $\mu(C_1^{(1)} \cup \cdots \cup C_1^{(m)}) \gtrsim 1$ and $d^{I\infty}(S^{(\ell)} \cap C_1^{(\ell)}\mathcal{F}) \gtrsim 1/\rho \cdot \mu(C_1^{(\ell)})$。取 ℓ 使得 $\mu(C_1^{(\ell)}) \geqslant 1/(2m)$。那么，根据观察 6.4，$d^{I\infty}{}_{C(\ell)_1}{}^{\mathcal{F}}(S^{(\ell)}) \gtrsim 1/\rho$。但此时由 (3) 得 $d^{I\infty}\sup(S) \lesssim 1/\rho$。由于 ε 可以任意小，因此 $d^{I\infty}\sup(S) \leqslant 1/\rho$，证毕。

□

现在我们证明，总存在一个满足命题 7.1的集合序列。这里选择的序列受到命题 5.3 和5.4的证明的启发。

命题 7.2。 对于每个整数 $k \geqslant 2$，都存在一个序列 $A_1, \ldots, A_m$ 满足 命题 7.1的假设。

证明。 我们首先处理 $k = 2$、3、5、7、13 的情形。

- $k = 2$: 取 $A_1 = \{1\}$（其中$d_1 = 1$），
- $k = 3$: 取 $A_1 = \{1,2\}$（其中 $d_1 = d_2 = 1$）和 $A_2 = \{1\}$（其中 $d_1 = d_2 = 1$），
- $k = 5$: 取 $A_1 = \{1,3\}$（其中 $d_1 = d_2 = 2$）和 $A_2 = \{1\}$（其中 $d_1 = d_2 = 2$），
- $k = 7$: 取

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,3\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = 2), \\ A_2 &= \{1,2\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = 1), \\ A_3 &= \{1,4\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = 1), \text{ and} \\ A_4 &= \{1\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = 1), \end{aligned}$$

- $k = 13$：取

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1,4\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3),\\
A_2 &= \{1,2\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3),\\
A_3 &= \{1,3,5,7\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1),\\
A_4 &= \{1,3\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1),\\
A_5 &= \{1,5\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1), \text{ and}\\
A_6 &= \{1\} && (\text{with } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1).
\end{aligned}$$

现在我们转而讨论$k \notin \{2,3,5,7,13\}$。对于正整数d和t，令$B_{d,t} := \{1, d+1, 2d+1, \ldots, td+1\}$。我们通过依次取所有满足$1 \leqslant d \leqslant \rho - 1$且$1 \leqslant t < (k-1)/d$的集合$B_{d,t}$来构造$A_1, A_2, \ldots\ldots$；顺序为先按$d$递减，再按$t$递减，最后将集合$\{1\}$添加到末尾。

考虑集合$A_\ell = B_{d,t}$。我们需要证明A_ℓ满足命题 7.1。令$s \in \mathbb{Z}^+$为满足$ds \leqslant \rho - 1$的最大值，并令$\alpha \in \mathbb{Z}^+$为满足$\alpha d(d+1) \geqslant k-1$的最小值。对于$1 \leqslant i \leqslant \rho - 1$，定义

$$d_i = \begin{cases} \alpha d & \text{if } i \equiv 0 \bmod s+1 \text{ and } \alpha \neq 2,\\ d & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于任意$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \rho - 1$，我们有$d_i + d_{i+1} + \cdots + d_j = \beta d$，其中某个整数$\beta$满足$1 \leqslant \beta \leqslant \rho - 1 + (\alpha-1)(\rho-1)/(s+1)$。此外，根据$d_i$的定义，要么是$\beta \geqslant \alpha$，要么是$\beta \leqslant s$。注意

$$1 + (d_i + d_{i+1} + \cdots + d_j)A_\ell = \{1+\beta d, 1+(\beta+1)d, \ldots, 1+\beta d(td+1)\}.$$

如果$\beta = 1$，那么$\mathrm{B}_{d,t+1} \subset \{1\} \cup (1 + (\mathrm{d}_i + \mathrm{d}_{i+1} + \cdots + \mathrm{d}j)\mathrm{A}_\ell)$。现在，要么$\mathrm{k} \in \mathrm{B}_{d,t+1}$，要么$\mathrm{B}_{d,t+1} = \mathrm{A}_{\ell'}$，其中某个$\ell' < \ell$，因此$\mathrm{A}_\ell$满足命题 7.1。

如果$1 < \beta \leqslant \rho - 1$，$\beta d\,1 \subset \{1\} \cup 1 + {}_i + {}_{i+1} + \cdots + {}_j$，$\beta d\,1 = {}_{\ell'}$，$\ell' < \ell$，${}_\ell < \beta \leqslant 7\,1 \leqslant s$，那么$B$，$((ddd)A)$。由于$d\,d\,ds$，可得$B$，$A$对于某个，因此$A$满足命题。。

若$\beta \geqslant \alpha$，我们断言$k \in 1 + (d_i + d_{i+1} + \cdots + dj)A_\ell$。由于$k-1$是$d$的倍数，只需证明$\beta d \leqslant k - 1 \leqslant \beta d(td+1)$。首先，

$$\beta d(td+1) \geqslant \alpha d(d+1) \geqslant k - 1.$$

对于第二个不等式，若$d \leqslant \rho - 2$，则有$\alpha d(d+1) = k-1$，正如命题 5.4 的证明中所观察到的那样。此外，我们有

$$\beta d \leqslant (\rho + (\alpha-1)\rho/(s+1))d \leqslant (\rho + (\alpha-1)d)d.$$

其中第二个不等式由$d(s+1) \geqslant \rho$得出。这小于$k - 1 = \alpha d(d+1)$，若$d(\alpha-1) + \rho \leqslant \alpha(d+1)$，这对$k \notin \{2,3,5,7,13\}$成立，正如命题 5.4 的证明中所示。另一方面，若$d = \rho - 1$，则有

$$\beta d \leqslant (d + (\alpha-1)d/(s+1))d \leqslant ((\alpha+1)/2)d^2 \leqslant ((\alpha+1)/2)d(d+1).$$

若$\alpha \geqslant 3$，则其至多为$(\alpha-1)d(d+1) < k-1$，符合要求。若$\alpha \leqslant 2$，我们可以观察到$\beta \leqslant \rho - 1$，从而得到$\beta d \leqslant \rho(\rho-1) \leqslant k-1$，其中最后一个不等式已证明

在 命题 5.3的证明中。在所有情况下，我们都有 $\beta d \leqslant k-1$，符合要求。因此，$k \in 1+(d_i+d_{i+1}+\cdots+dj)A_\ell$，因此 A_ℓ 满足 命题 7.1。
最后，对于 $A_\ell = \{1\}$，我们只需取 $d_1 = \cdots = d_{\rho-1} = 1$。于是得到 $B_{j-i+1,1} \subset \{1\} \cup (1+(d_i+d_{i+1}+\cdots+dj)A_\ell)$。由于 $1 \leqslant j-i+1 \leqslant \rho-1$，可知 $B_{j-i+1,1} = A_{\ell'}$ 对于某个 $\ell' < \ell$ 成立，因此 A_ℓ 满足命题 7.1。 □

命题 7.1 和 7.2结合可得定理 3.5(b)，因此我们确实证明了本节中承诺的定理 3.5。

8 自由群中的无积集

现在我们将这些方法应用于自由群，并证明 定理 1.8。在全文中，F表示有限字母表上的自由群 $\mathcal{A}$，并且 $S \subset F$ 是一个 k-乘积自由集合，其密度是我们希望加以界定的。我们始终假设所有词均为约化形式。此外，AB 表示两个集合 A、$B \subset F$ 在无消去情况下的乘积，即

$$AB := \{\text{词 } \in F : \text{存在一个子串分解 } w = ab, \text{ 其中 } a \in A \text{ 且 } b \in B\}.$$

特别地，CF 由所有具有前缀且该前缀属于C的词组成。我们赋予F 测度μ，定义为 $\mu(w) = 1/|F(|w|)|$。若$\mathbf{W} = \alpha_1\alpha_2\cdots$是一个随机无限词，其中每个$\alpha_{i+1}$ 都是独立且均匀随机选取的字母，但不等于 $\alpha^{-1}{}_i$，那么

$$\mu(w) = \mathbb{P}(\mathbf{W} \text{ hits } w) = \begin{cases} (2|\mathcal{A}|)^{-1}(2|\mathcal{A}|-1)^{-(|w|-1)} & \text{if } w \text{ is not the empty word,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

与之前一样，对于$B \subset F$，$\mu(B) = \sum_{w\in B}\mu(w)$ 是$\mathbf{W}$ 命中B的期望次数。因此，我们可以作出与观察 2.1 和3.1相对应的以下观察。

观察 8.1。 如果 $C \subset F$ 是前缀无关的，那么对于所有 n，$\mu(C) \leqslant 1$, $\mu(CF(n)) \leqslant \mu(C)$；若 C 有限且 $n \geqslant \max C$，则$\mu(CF(n)) = \mu(C)$。

现在我们定义F 的子集的相对密度如下。

定义 8.2 （相对密度）。 设 $B \subset F$，且 G 是 F 的子半群，满足$G(n) \neq \varnothing$ 对所有充分大的 n均成立。若 I 是一个区间，则 B 在 G 中关于区间 I 的相对密度 为

$$d_G^I(B) := \frac{\mu(B(I)\cap G)}{\mu(G(I))} = \mu(G(I))^{-1}\sum_{n\in I}\mu(B(n)\cap G).$$

若$G(I) = \varnothing$，按照约定，我们将相对密度取为 0，并且$d^I(B) := d_F^I(B)$。

B 的上 Banach 密度为 $d^*(B) = \limsup_{I\to\infty} d^I(B)$。现在，我们可以再次进行对角化，得到一个序列 (I_j)，使得对于我们在证明中考虑的每个 G 和 B，$(d^{I_j} G(B))$ 都收敛到某个极限 $d^{I_\infty} G(B)$，并且 $d^{I_\infty}(S) = d^*(S)$。这些极限再次具有可加性。另请注意，$d_G^I(B) = d^I(B \cap G)/d^I(G)$，因此，如果 $d^{I_\infty}(G) > 0$，则 $d^{I_\infty} G(B) = d^{I_\infty}(B \cap G)/d^{I_\infty}(G)$。我们定义上确界密度如下。

定义 8.3 (上确界密度)。 对于集合 B，B 在 G 中的上确界密度 为

$$d^{I_\infty}_{\sup G}(B) := \sup_{w\in G} d^{I_\infty}_{wF\cap G}(B).$$

从现在起，令 $G = F^{\alpha\beta} \subset F$ 为 F 的子半群，由所有以 α 开头并以 β 结尾的词组成，其中 α、$\beta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ 和 $\alpha \neq \beta^{-1}$。随机序列论证表明如下结论。

观察 8.4。 设 $C \subset G$ 有限且前缀无关。那么，对于所有 $n \geqslant \max C + 2$ ，

$$\mu((CF \cap G)(n)) \geqslant \frac{\mu(C)}{(2|\mathcal{A}| - 1)^2}.$$

特别是，$d^{I_\infty}(wF \cap G) > 0$ 对于所有 $w \in G$。如引理 3.3所示，G的子树密度满足这样的性质：我们可以去掉前缀。

引理 8.5。 若 $w,v \in G$，则 $d^{I_\infty}{}_{wvF \cap G}(wB) = d^{I_\infty}{}_{vF \cap G}(B)$。

证明。 对于 $u \in G$，注意到 $\mu(wu) = a \cdot \mu(u)$ 其中 $a = (2|A| - 1)^{-|w|}$。因此，若 $X \subset G$ 有限，则 $\mu(wX) = a \cdot \mu(X)$。设 I 是任意一个区间，且 $\min I > |wv|$。那么

$$d^I_{wvF \cap G}(wB) = \frac{\mu((wB)(I) \cap wvF)}{\mu((wvF \cap G)(I))} = \frac{\mu(B(I - |w|) \cap vF)}{\mu((vF \cap G)(I - |w|))}.$$

这里我们用到了 $wvF \cap G = w(vF \cap G)$。对于任意 $X \subset G$，事实 $\mu(X(n)) \in [0,1]$意味着

$$|\mu(X(I)) - \mu(X(I - |w|))| = \left| \sum_{n \in I} \mu(X(n)) - \sum_{n \in I - |w|} \mu(X(n)) \right| \leqslant |w|.$$

因此，

$$\frac{\mu(B(I) \cap vF) - |w|}{\mu((vF \cap G)(I)) + |w|} \leqslant d^I_{wvF \cap G}(wB) \leqslant \frac{\mu(B(I) \cap vF) + |w|}{\mu((vF \cap G)(I)) - |w|}.$$

取集合 $I = Ij$ 并令 j 趋于无穷。由 $d^{I_\infty}(vF \cap G) > 0$ 可得 $\mu((vF \cap G)(Ij)) \to \infty$。因此，上述两个界都趋于 $d^{I_\infty}vF \cap G(B)$，从而 $d^{I_\infty}wvF \cap G(wB) = d^{I_\infty}vF \cap G(B)$。 □

我们还可以得到以下与观察 6.4 类似的结果。

观察 8.6. 设 $C \subset G$ 是有限且前缀无关的。那么

$$d^{I_\infty}_{CF \cap G}(B) = \sum_{c \in C} \frac{d^{I_\infty}(cF \cap G)}{d^{I_\infty}(CF \cap G)} \cdot d^{I_\infty}_{cF \cap G}(B) = \frac{d^{I_\infty}(B \cap CF)}{d^{I_\infty}(CF \cap G)}.$$

证明。 由于 $d^{I_\infty}(cF \cap G) > 0$对所有 $c \in C$均成立，因此 $d^{I_\infty}(CF \cap G) > 0$也成立，即

$$d^{I_\infty}_{cF \cap G}(B) = \frac{d^{I_\infty}(B \cap cF)}{d^{I_\infty}(cF \cap G)} \quad \text{and} \quad d^{I_\infty}_{CF \cap G}(B) = \frac{d^{I_\infty}(B \cap CF)}{d^{I_\infty}(CF \cap G)}.$$

由于d^{I_∞} 是可加的，这意味着

$$d^{I_\infty}_{CF \cap G}(B) = \frac{d^{I_\infty}(B \cap CF)}{d^{I_\infty}(CF \cap G)} = \sum_{c \in C} \frac{d^{I_\infty}(B \cap cF)}{d^{I_\infty}(CF \cap G)} = \sum_{c \in C} \frac{d^{I_\infty}(cF \cap G)}{d^{I_\infty}(CF \cap G)} \cdot d^{I_\infty}_{cF \cap G}(B). \quad \square$$

Ste自由群中的追逐序列可以像自由半群中那样定义 .

定义 8.7 （障碍赛）。 一个无限序列 (C_k) 的子集，取自 G，是一个 障碍赛，如果对于每个正整数 k,

- 每个Ck 都是前缀无关且有限的,
- $Ck+1$ 中的每个词在Ck 中都有一个真前缀（特别地，$Ck+1F \subset CkF$）。

障碍赛 (C_k) 是*spread*，如果对所有k都有 $\max C_k < \min C_{k+1}$，并且当对所有m、n时，满足 $|\mu(C_m) - \mu(C_n)| \leqslant \varepsilon$，则是 ε-紧 的。
下面的引理类似于 引理 6.2。

Lemma 8.8。 设 $\varepsilon > 0$ 和 $B \subset G$。存在一个 ε-紧的 *spread* 障碍赛 (C_k)，使得

- $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \subset B$,
- 对所有 k 以及所有充分大的 n（以 k 为参数）， $\mu((B \setminus Ck\,F)(n)) \leqslant \varepsilon$,
- 对所有 k， $\mu(Ck)/dI^{\infty}(G) \geqslant dI^{\infty}G\,(B) - \varepsilon$。

证明。 这与引理 6.2的证明非常相似。对每个正整数k，令$D_k = \{x \in B\colon\ h(x) = k\}$。对每个正整数$k$，迭代执行以下步骤。

1. 令 ℓ_k 使得 $\mu(D_k(\{\ell_k + 1, \ell_k + 2, \ldots\})) \leqslant \varepsilon \cdot d^{I^{\infty}}(G)/2^k$。2. 令 $C_k = D_k(\{1, 2, \ldots, \ell_k\})$。3. 从$B$ 中移除$(D_k \setminus C_k)F$ （包括从所有后续的D_i中移除）。

那么 (C_k) 是一个障碍赛，并且 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \subset B$。固定 k，令 $n > \max\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$。于是，

$$\mu((B \setminus C_kF)(n)) \leqslant \sum_t \mu(((D_t \setminus C_t)F)(n)) \leqslant \sum_t \mu(D_t \setminus C_t) \leqslant \varepsilon \cdot d^{I^{\infty}}(G) \leqslant \varepsilon.$$

最后，这意味着 $\mu(\mathrm{B(n)}) \leqslant \mu(\mathrm{C_kF(n)}) + \varepsilon \cdot \mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{G}) = \mu(\mathrm{C_k}) + \varepsilon \cdot \mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{G})$。对 $\mathrm{n} \in \mathrm{I}j$ 取平均，并令 $\mathrm{j} \to \infty$，得到 $\mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{B}) \leqslant \mu(\mathrm{C_k}) + \varepsilon \cdot \mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{G})$，因此 $\mathrm{d}^{I^{\infty}}\mathrm{G}\,(\mathrm{B}) = \mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{B})/\mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{G}) \leqslant \mu(\mathrm{C_k})/\mathrm{d}^{I^{\infty}}(\mathrm{G}) + \varepsilon$。通过取一个子序列，我们可以假设 $(\mathrm{C_k})$ 是 spread 且 ε-紧的。 □

我们将由(C_k) 给出的引理 8.8称为 ε-捕获 B 的障碍赛。此外，引理 6.3也有一个类似的版本。

引理 8.9。 设(C_k) 是一个 ε-紧的 *spread* 障碍赛。对每个 $w \in G$，都存在一个 N，使得以下结论成立。若 $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_N$ 且 $n \geqslant \max C_N + |w|$，则

$$\mu(((C_1F \cap G) \setminus (CwF \cap G))(n)) \leqslant 2\varepsilon.$$

证明。注意到 $(\mathrm{C_1F} \cap \mathrm{G}) \setminus (\mathrm{CwF} \cap \mathrm{G}) = (\mathrm{C_1F} \setminus \mathrm{CwF}) \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{C_1F} \setminus \mathrm{CwF}$，因此只需证明 $\mu((\mathrm{C_1F} \setminus \mathrm{CwF})(\mathrm{n})) \leqslant 2\varepsilon$。
我们可以完全按照引理 6.3的证明来说明这一点，只需令$\mathbf{W}$ 为本节开头所定义的随机游走。因此，如果$\mathbf{W}$ 命中C_i，那么接下来的 $|w|$ 个字母恰好拼成w 的概率为$(2|\mathcal{A}| - 1)^{-|w|}$。重要的是，这里用到了$C_i$ 中的词的最后一个字母是 β、而w 的第一个字母是 α这一事实，以及 $\alpha \neq \beta^{-1}$。 □

现在我们可以证明密度结果所需的关键技术引理，它对应于引理 6.5。

引理 8.10. 令 $\varepsilon > 0$，且 $A,B \subset G$。若 (C_k) 是 A 的一个 ε-捕获障碍赛，满足 $\mu(C_1) \geqslant (2|\mathcal{A}|-1)^2(2\varepsilon+\varepsilon^{1/3})$，则

$$d^{I_\infty}_{C_1F\cap G}(AB) \geqslant d^{I_\infty}_{\sup G}(B) - 3\varepsilon^{1/3}.$$

证明。观察 8.4 意味着 $\mu((C_1F \cap G)(n)) \geqslant \mu(C_1)/(2|\mathcal{A}|-1)^2 \geqslant 2\varepsilon+\varepsilon^{1/3}$对 $n \geqslant \max C_1 + 2$成立。我们按照 引理 6.5 的证明进行。令 $w \in G$ 满足

$$d^{I_\infty}_{wF\cap G}(B) \geqslant d^{I_\infty}_{\sup G}(B) - \varepsilon^{1/3}.$$

将引理 8.9 应用于 (C_k) 和 w，可得一个 N，使得令 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_N$ 后，若 $n \geqslant \max C_N + |w|$，则 $\mu(((C_1F \cap G) \setminus (CwF \cap G))(n)) \leqslant 2\varepsilon$。我们可以贪心地选取 $\widetilde{C} \subset C$，使得 Cw 为前缀无关，且 $CwF = CwF$。注意到

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &\geqslant \mu(((C_1F\cap G)\setminus(\widetilde{C}wF\cap G))(n)) \\ &\geqslant \mu((C_1F\cap G)(n)) - \mu((\widetilde{C}wF\cap G)(n)) \\ &\geqslant 2\varepsilon+\varepsilon^{1/3} - \mu((\widetilde{C}wF\cap G)(n)) \end{aligned}$$

因此 $\mu((\widetilde{C}wF \cap G)(n)) \geqslant \varepsilon^{1/3}$ 以及 $\mu((C_1F \cap G)(n)) \leqslant \mu((\widetilde{C}wF \cap G)(n)) + 2\varepsilon$。

设 I 是一个区间，且 $\min I \geqslant \max C_N + |w|$，于是 $\mu((\widetilde{C}wF \cap G)(I)) \geqslant |I|\varepsilon^{1/3}$ 且 $\mu((C_1F \cap G)(I)) \leqslant \mu((CwF \cap G)(I)) + |I|2\varepsilon$。设 $X \subset G$。注意，$CwF \subset C_1F$，因此

$$d^{I}_{C_1F\cap G}(X) = \frac{\mu(X(I)\cap C_1F)}{\mu((C_1F\cap G)(I))} \geqslant \frac{\mu(X(I)\cap \widetilde{C}wF)}{\mu((C_1F\cap G)(I))} \geqslant \frac{\mu(X(I)\cap \widetilde{C}wF)}{\mu((\widetilde{C}wF\cap G)(I)) + |I|2\varepsilon}.$$

利用 $x/(y+|I|2\varepsilon) \geqslant x/y - |I|2\varepsilon x/y^2 \geqslant x/y - 2\varepsilon^{1/3}$ 这一事实，对于 $\varepsilon > 0, 0 \leqslant x \leqslant |I|$ 且 $y \geqslant |I|\varepsilon^{1/3}$，可得

$$d^{I}_{C_1F\cap G}(X) \geqslant d^{I}_{\widetilde{C}wF\cap G}(X) - 2\varepsilon^{1/3}.$$

令 $X = AB$、$I = Ij$，并令 j 趋于无穷大，得到

$$d^{I_\infty}_{C_1F\cap G}(AB) \geqslant d^{I_\infty}_{\widetilde{C}wF\cap G}(AB) - 2\varepsilon^{1/3}. \tag{5}$$

Now,

$$\begin{aligned} d^{I_\infty}_{\widetilde{C}wF\cap G}(AB) &= \sum_{c\in\widetilde{C}} \frac{d^{I_\infty}(cwF\cap G)}{d^{I_\infty}(\widetilde{C}wF\cap G)} \cdot d^{I_\infty}_{cwF\cap G}(AB) \\ &\geqslant \sum_{c\in\widetilde{C}} \frac{d^{I_\infty}(cwF\cap G)}{d^{I_\infty}(\widetilde{C}wF\cap G)} \cdot d^{I_\infty}_{cwF\cap G}(cB) \\ &= \sum_{c\in\widetilde{C}} \frac{d^{I_\infty}(cwF\cap G)}{d^{I_\infty}(\widetilde{C}wF\cap G)} \cdot d^{I_\infty}_{wF\cap G}(B) \\ &= d^{I_\infty}_{wF\cap G}(B) \geqslant d^{I_\infty}_{\sup G}(B) - \varepsilon^{1/3}, \end{aligned}$$

其中，第一个等式用到了观察 8.6，第一个不等式用到了以下事实：$\widetilde{c} \in C \subset C \subset A$，第二个等式用到了引理 8.5，第二个不等式则源于w的选取。将此与（5）结合，即得所需结果。□

至此，我们已经得到了界定自由半群中（强）k-乘积自由集密度所需的所有重要技术结果。现在，我们只需完全沿用第 7 节中的论证。要证明下面这个定理 3.5 的对应版本，我们只需将 $C_i\mathcal{F}$替换为 $C_iF \cap G$，将 $\mu(C_i)$ 替换为 $d^{I_\infty}(C_iF \cap G)$，将 $d^{I_\infty}\sup$ 替换为 $d^{I_\infty}\sup G$，并将所有引用改为引用本节中的相应结果。

定理 8.11。设 $k \geqslant 2$ 是一个整数，$\mathcal{A}$ 是一个有限集，F 是字母表为 $\mathcal{A}$的自由群，$G = F^{\alpha\beta}$ 是 F 的子半群，由所有以 α 开头且以β 结尾的词组成，其中 α，$\beta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ 且 $\alpha \neq \beta^{-1}$。

(a) 若 $S \subset G$ 是强 k-乘积自由的，则 $d^{I_\infty}G(S) \leqslant 1/k$。此外，若 $d^{I_\infty}G(S) = 1/k$，则 $d^{I_\infty}\sup G(S) = 1/k$。*(b)* 若 $S \subset G$ 是 k- 乘积自由的，则 $d^{I_\infty}G(S) \leqslant 1/\rho(k)$。此外，若 $d^{I_\infty}G(S) = 1/\rho(k)$，则 $d^{I_\infty}\sup G(S) = 1/\rho(k)$。

Ortega、Rué 和 Serra 的论证 [ORS23] 表明，对 k-乘积自由集合（强）的密度界$F^{\alpha\beta}$可直接转化为 F中的密度界。因此，定理 1.3和1.8 是 定理 8.11的直接推论。

9 开放问题

留下的第一个自然问题是确定极值k-乘积自由集合在$k \in \{3,5,7,13\}$时的结构。对于$k = 5$、7、13，我们猜想，极值集合恰好如定理 1.7所述。$k = 3$ 时的极值集合会稍微复杂一些。事实上，$1 + 3\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $2 + 3\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 都是非负整数集中的极大 3-和自由子集，密度为 1/3；此外，$\{1,2\} + 6\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 和 $\{5,6\} + 6\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (Łuczak 和 Schoen [ŁS97] 证明了不存在其他这样的集合）。我们猜想，自由半群中也成立相应的结果。

猜想 9.1。令 $\mathcal{A}$ 为一个有限集，$\mathcal{F}$ 为字母表为 $\mathcal{A}$的自由半群。若 $S \subset \mathcal{F}$ 是 *3*-乘积自由且 $d^*(S) = 1/3$，则以下情形之一成立。要么可以给 $\mathcal{A}$ 中的每个字母都标上一个来自 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的标签，使得 S 是

$$\{w \in \mathcal{F} : \textit{the sum of the labels of letters in } w \textit{ is } 1 \bmod 3\},$$

或者，可以为 $\mathcal{A}$ 中的每个字母标上 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 中的一个标签，使得 S 是.....的子集

$$\{w \in \mathcal{F} : \textit{the sum of the labels of letters in } w \textit{ is } 1, 2 \bmod 6\}.$$

Łuczak [Luc95] 证明，非负整数中密度大于 2/5 的每个和自由子集都是奇整数的子集（Łuczak 和 Schoen 对（强）k-和自由集合也证明了类似结果）。对于自由半群子集，这类加强结论并不成立，因为定理 *1.4* 中的$1/\rho(k)$ 以及定理 1.7中的 $1/k = 2$都不能替换为更小的数。例如，令$k = 2$，T 为奇数长度词构成的集合，并令x 为任意偶数长度的词。令

$$\begin{aligned} T' :=& \{w \in T : \text{neither } x \text{ nor } w \text{ is a prefix or suffix of the other}\} \\ &\cup \{xwx : xwx \text{ has length } 1 \bmod 3\}. \end{aligned}$$

那么，T' 是乘积自由的，密度至少为 $1/2 - 2|\mathcal{A}|^{-|x|}$，且不是某个奇数次出现集的子集（事实上，要使其成为这种情况，必须先移除一个正密度的集合）。尽管如此，T' 只是对奇数次出现集T的小幅扰动。因此，自然会问是否存在某种稳定性。

猜想 9.2. 对于每个 $\delta > 0$，是否存在某个 $\varepsilon > 0$，使得如果 $S \subset \mathcal{F}$ 是乘积自由的，且 $d^*(S) > 1/2 - \varepsilon$，那么就存在一个奇数次出现集 $\mathcal{O}_\Gamma$，使得 $d^*(S \setminus \mathcal{O}_\Gamma) < \delta$?

定理 1.4 和 1.7 给出了自由半群中极值（强）k-乘积自由集的结构。自由群的情形仍未解决。最简单的开放情形如下

猜想 9.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限集，F 是字母表为 $\mathcal{A}$ 的自由群。如果 $S \subset F$ 是乘积自由的，且 $d^*(S) = 1/2$，则以下结论成立。可以给 $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ 中的每个字母标上 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的一个标签，使得对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}$，α^{-1} 的标签都是 α 的相反数，并且 S 是.....的子集

$$T := \{w \in F : \textit{the sum of the labels of letters in } w \textit{ is } 1 \bmod 2\}.$$

对于强k-乘积自由情形，我们预期上述猜想在将 2 替换为k后仍成立。对于k-乘积自由情形，我们预期其行为与自由半群中的情形相同。

我们指出，我们的方法确实能给出一些结构。类似于第 4 节中的论证表明，可以为子半群$F^{\alpha\beta}$（定义见第 8 节）中的所有词赋予标签，使得连接所得词的标签等于各词标签之和，并且$S \cap F^{\alpha\beta}$ 中的所有词的标签均为 1。尚未解决的问题是，字母在连接过程中发生抵消时，这些标签如何相互作用。

参考文献

[BPR16] R. BALASUBRAMANIAN、GYAN PRAKASH 和 D. S. RAMANA（2016 年 11 月）。III 型有限阿贝尔群中的无和子集。《欧洲组合学杂志》58，181–202。 ↑1[BS85] LÁSZLÓ BABAI 和 VERA T. SÓS（1985 年 6 月）。群中的 Sidon 集与 Cayley 图的诱导子图。《欧洲组合学杂志》6(2)，101–114。 ↑1[CE96] NEIL J. CALKIN 和 PAUL ERD ˝OS（1996 年 7 月）。关于一类非周期无和集。《剑桥哲学学会数学论文集》120(1)，1–5。 ↑2，3[Ebe16] SEAN EBERHARD（2016 年 2 月）。交错群中的乘积混合。《离散分析》，论文第 2 号，19。 ↑1[Gow08] W. T. GOWERS（2008 年 5 月）。拟随机群。《组合学、概率与计算》17(3)，363–387。 ↑1[GR05] BEN GREEN 和 IMRE Z. RUZSA（2005 年 12 月）。阿贝尔群中的无和集。《以色列数学杂志》147，157–188。 ↑1[Ked09] KIRAN S. KEDLAYA（2009）。群的无积子集：过去与现在。《数学交流》，《当代数学》第 479 卷，169–177。 ↑1[KLM22] PETER KEEVASH、NOAM LIFSHITZ 和 DOR MINZER（2022 年 5 月）。关于交错群中最大的无积子集。arXiv:2205.15191。 ↑1[Lev03] VSEVOLOD F. LEV（2003 年 2 月）。无和集数量的精确估计。《纯粹与应用数学杂志》555，1–25。 ↑12[LLNW20] IMRE LEADER、SHOHAM LETZTER、BHARGAV NARAYANAN 和 MARK WALTERS（2020 年 1 月）。自由半群中的无积集。《欧洲组合学杂志》83，103003。 ↑2[ŁS97] TOMASZ ŁUCZAK 和 TOMASZ SCHOEN（1997 年 10 月）。关于自然数的无限无和集。《数论杂志》66(2)，211–224。 ↑2，3，5，29

[Łuc95] TOMASZ ŁUCZAK（1995年5月）。关于无和集密度的一则札记。组合理论杂志。A辑 70(2), 334–336。 ↑5, 29[ORS23] MIQUEL ORTEGA 、 JUANJO RUÉ 和 ORIOL SERRA （ 2023年2月）。自由群中的无积集。arXiv:2302.03748。 ↑2, 3, 29[TV17] TERENCE TAO 和 VAN VU（2017年6月）。群中的无和集：一篇综述。组合学杂志 8(3), 541–552。 ↑1