arXiv:2305.05316v1 [math.GT] 9 May 2023

指定弧图

MICHAEL C. KOPRESKI

Abstract. 给定一个带边界的紧曲面 Σ 以及定义在$\pi_0(\partial\Sigma)$上的关系 Γ，我们将 *prescribed arc graph* $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 定义为弧图 $\mathscr{A}(\Sigma)$ 的诱导子图，其中仅包含 Γ 中边界分支之间的弧的同伦类。我们证明，$\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是连通的且具有无限直径（如果Σ 不是具有三个边界分支的球面），并对其为 Gromov 双曲的情形进行了分类：特别地，$\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 为 Gromov 双曲，当且仅当 Γ 不是二部的，但存在一些零星例外情形。

1. Introduction、 definitions and main results

给定一个带边界的紧曲面 Σ，我们回顾弧图 *arc graph* $\mathscr{A}(\Sigma)$，其顶点是本质简单弧的同伦类，其边由在同伦意义下不相交的关系确定。我们提出将指定弧图 *prescribed arc graph* 作为弧图的推广，将其定义为诱导子图 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)\subset\mathscr{A}(\Sigma)$：该图由 Γ 中边界分支之间的弧的同伦类生成，其中$\pi_0(\partial\Sigma)$上的关系是对称关系：

定义 1.1. 设 Σ 是一个紧致可定向带边界曲面。给定Γ 一个具有 $V(\Gamma)=\pi_0(\partial\Sigma)$ 的图，称本质简单弧 α 为 Γ-允许的，若 α其端点落在边界分支 a_-，a_+ （不一定不同）上，且满足 $(a_-,a_+)\in E(\Gamma)$。定义 Γ-指定弧图 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$如下：

$$V(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma))=\{a \text{ an unoriented isotopy class of } \Gamma\text{-allowed arcs}\}$$
$$E(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma))=\{(a,a'):a,a' \text{ have disjoint representatives}\}$$

我们称 Γ 为 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 的指定图。注意，若 Γ 是 $\pi_0(\partial\Sigma)$ 上带环的完全图，则 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是通常的弧图。

以下令 Σ_g^b 表示亏格为 g 且有 b 个边界分支的紧致可定向曲面。我们证明关于$\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 几何性质的一些初步结果，包括以下结论：

定理 1.2. 假设 $\chi(\Sigma)\leq -1, E(\Gamma)\neq\varnothing$，且 $\Sigma\neq\Sigma_0^3$。那么 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$是连通的，并且具有无限直径。

定理 1.3。假设 $\chi(\Sigma)\leq -1, E(\Gamma)\neq\varnothing$，且 $\Sigma\neq\Sigma_0^3$。那么，若 $\Sigma=\Sigma_0^{n+1}$且 Γ 是一个 n 点星形图，或者若 $\Sigma=\Sigma_1^2$ 且 Γ 是一条非环边，则 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$是 δ-双曲的。否则，$\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是 δ-双曲的，当且仅当 Γ 不是二部图。

E-mail address: kopreski@math.utah.edu。

第 2 节证明定理 1.2，但不包括若干零星低复杂度情形，并给出了 $d(a,b)$ 在 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 中的距离上界，该上界以交数 $i(a,b)$ 表示。第 3 节证明，若 Γ 不是二部图，则 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是 δ-双曲的，同样不包括若干零星情形。

为完成定理 1.3 的证明，我们诉诸于不相交的 见证子曲面 的存在性。与通常的弧图一样，我们将见证子曲面定义为被每条 Γ-允许弧切割的子曲面：

定义 1.4。 本质连通真子曲面 $W \subset \Sigma$ 是一个（Γ-）见证子曲面，对于 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$ 而言，如果每条 Γ-允许弧都与 W 相交。

第 4 节证明了（再次忽略一些零星情形）， Γ是二部的，当且仅当存在一对不相交的 Γ-见证子曲面；后者蕴含 $\mathbb{Z}^2$ 的准等距嵌入。最后，第 5 节讨论前述各节中遗漏的零星情形。

按照 [MS13], 的精神，我们可以预期， $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$ 是 δ-双曲的，当且仅当不存在任何一对不相交的 Γ-见证子曲面。事实上，这一假设成立，尽管我们没有直接证明它。根据第 3 节和第 4 节的结果，以及第 5 节中的零星情形，我们得到：

定理 1.5. 假设 $\chi(\Sigma) \leq -1, E(\Gamma) \neq \varnothing$，且 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$。那么， $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是δ-双曲的，当且仅当 Σ 不含有两个不同且不相交的 Γ-见证子曲面，并且它们不同胚于 Σ_0^3。

我们指出，在 Γ 无环的情况下，也就是说，每条 Γ-允许的弧都终止于两个不同的边界分支，上述证明（尤其是第 2 节中的证明）会大大简化。

1.1. **动机**。 尽管近几十年来曲线复形 $\mathscr{C}(\Sigma)$或许掩盖了弧图 $\mathscr{A}(\Sigma)$的光芒，但在对有限拓扑型曲面（即紧致且具有有限多个标记点的曲面）及其映射类群的经典研究中，弧图一直是一个本身就备受关注的对象。例如，有限型曲面 Σ 的弧复形可将其 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(\Sigma)$ [Har86], 三角剖分，且自然坐标源自（带尖点的）双曲度量中的 horodisk [BE88]; 较早的工作 [Mos83] 则利用 $\mathscr{A}(\Sigma)$研究 Mod(Σ) 的共轭类。

然而，本研究实际上源于为无限拓扑型曲面定义的组合对象（即亏格无限，或边界分支或标记点有无穷多个，且其基本群不是有限生成的曲面）。对于此类曲面，我们有 $\operatorname{diam}(\mathscr{C}(\Sigma)) = 2$; 同样，只要标记点或边界分支的数量无限，$\operatorname{diam}(\mathscr{A}(\Sigma)) = 2$ 也成立。许多作者都提出了适用于无限型情形的组合模型（例如具有无限直径、连通且为 δ- 双曲），映射类群 Mod(Σ) 在这些模型上连续作用；这类似于有限型情形中的 $\mathscr{C}(\Sigma)$ 和 $\mathscr{A}(\Sigma)$。Danny Calegeri 于 2009年在其关于无限型曲面映射类群的原始博客文章中 [Cal09] 定义了康托尔集上的射线图 $\mathbb{R}^2\setminus$, Juliette Bavard 在 [Bav16]中证明该图具有无限直径、连通且为 δ-双曲。最近，我们注意到 Fanoni、Ghaswala,

和 McLeay [FGM21] 定义的全域弧图，以及 Bar-Natan 和 Verberne[BNV22]定义的宏弧图。我们特别关注宏弧图 $\mathscr{G}(\Sigma)$，其中只考虑不同类型的极大端之间的弧；这里的类型是按照 [MR20]中定义的 End(Σ) 上的偏序来理解的。

可以观察到，在上述定义中，通过限制所考虑的 Σ 中的弧，组合模型变得“足够稀疏”。我们提出了指定弧图，作为有限型情形下通常的弧图 $\mathscr{A}(\Sigma)$ 的类似一般化；这一想法既受到上文所讨论的无限型曲面的组合模型的启发，也由其推动。例如，设 Σ 是一个无限型曲面。那么，对于有限型子曲面 $\Sigma_i \subset \Sigma$ 的适当紧耗竭，以及在 $\pi_0(\partial\Sigma_i)$ 上指定的图 Γ_i， $\mathscr{A}(\Sigma_i, \Gamma_i)$ 旨在“逼近” $\mathscr{G}(\Sigma)$。首先，可以证明，对于适当的 (Σ_i, Γ_i)， $\mathscr{A}(\Sigma_i, \Gamma_i)$ 粗嵌入到$\mathscr{G}(\Sigma)$中，因此 例如 asdim $\mathscr{G}(\Sigma)$ $\geq$ asdim $\mathscr{A}(\Sigma_i, \Gamma_i)$，借此我们旨在证明 $\mathscr{G}(\Sigma)$ 的渐近维数是无限的。我们将在未来的工作中讨论这些论证。

最后，我们回顾 Aramayona 和 Valdez [AV21], 的研究成果，该研究对无限型曲面 Σ 的弧与曲线图 $\mathscr{AC}(\Sigma)$ 中一大类“充分不变”子图的连通性、直径及 δ-双曲性进行了分类。在这里，假设弧的端点位于一组标记点 Π 上，并且如果存在一个子集 $P \subset \Pi$，使得 $\mathscr{G}$ 在相对映射类群 Mod(Σ, Π) 中保持 P 集合不变的子群作用下也保持集合不变，则称子图 $\mathscr{G} \subset \mathscr{AC}(\Sigma)$ 为 充分不变 。将我们的结果推广到无限型曲面 Σ 上的弧图（例如 那些由紧曲面 Σ_i 上指定弧图的直极限 $\mathscr{A}(\Sigma_i, \Gamma_i)$ 所产生的弧图），也将以类似的方式扩展 [AV21], 的工作，即所得的弧子图仅在保持 Π 上某个特定对称关系 Γ 不变的 Mod(Σ, Π) 子群作用下保持不变。

1.2. **平凡情形与标记点**。如果 Σ 是闭环带或圆盘，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 要么为空，要么只含一个元素。我们将忽略这些平凡情形，并假设 Σ 不属于上述情形。如果 $E(\Gamma) = \varnothing$ 或 $\Sigma = \Sigma_0^3$，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 同样为空或有限；我们通常也排除这些情形。

我们指出，在弧图的定义中省略标记点或穿孔只是为了方便；同样，选择让弧终止于边界分支而非标记点也只是出于便利。特别地，不失一般性，我们假设所考虑的每个曲面都没有标记点：若 Σ 是带标记点的曲面，而 Σ' 是通过删去每个标记点的一个邻域得到的，则 $\mathscr{A}(\Sigma) \cong \mathscr{A}(\Sigma')$，并且可以将指定弧图视为 $\mathscr{A}(\Sigma')$ 的相应诱导子图。此外，定义 1.1 也完全可以基于连接标记点的弧来给出，此时 $V(\Gamma)$ 中对应的是标记点而非边界分支。在更适合的情况下，我们偶尔会采用这一观点。

我们还定义一些便于使用的记号：

记号。设 α 是曲面 Σ 的边界分支之间的一条定向本质弧。我们用 α_-, α_+ 表示包含初始端点的边界分支,

分别为 α 的终端端点。如果 a 是此类弧的同伦类，那么对于弧代表元 α 的一个选取， $a_\pm := \alpha_\pm$。令 $\partial\alpha := \{\alpha_\pm\}$ 且 $\partial a := \{a_\pm\}$。

备注。 为简便起见，在证明中，只要良定义，我们通常会将弧与其同伦类混为一谈。例如，尽管 $a \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$ 表示Γ-允许弧的一个同伦类，但我们可以通过（隐式地）选取一个代表元 $\alpha \in a$，对其应用交点或拼接等拓扑运算，或赋予其横截性和最简位置等性质。反过来，给定一个 Γ-允许弧 δ，我们可以通过（隐式地）转而考虑其同伦类 $[\delta]$，来理解$\delta \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$。

我们以一个重要的最后定义和一些有助于后续工作的初步讨论来结束本节。

1.3. 典范收缩。考虑任意子图 $\Gamma' \subset \Gamma$；不失一般性，假设 $V(\Gamma') = V(\Gamma) = \pi_0(\partial\Sigma)$，否则为其余顶点添加单点集。若 a 是 Γ'-允许弧的同伦类，那么它同样是 Γ-允许的。令 $\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma') \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 为由 $V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma'))$ 到 $V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$ 的包含映射得到的单纯映射；由于 π 是单纯的，它是 1-利普希茨。此外，如果Γ 无环，那么每条 Γ-允许弧 $a \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$ 都是非分离的；特别地，如果 $(u, v) \in E(\Gamma')$，那么存在一条连接 u, v 且与 a不相交的 Γ'-允许弧：

引理 1.6。 假设 Γ 是无环的，并且 $\Gamma' \subset \Gamma$ 包含一条边。那么$\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma') \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 1-粗满射。□

最后，我们证明一个在第 2 节和第 3 节中很重要的技术引理：

引理1.7。 假设 $\ell_0 \subset \Gamma$ 是一个环，且 $w \subset \partial\Sigma$ 是 ℓ_0中的边界分支。那么顶点集 $X_2 := \{a \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)\colon\ d(a, \pi\mathscr{A}(\Sigma, \ell_0)) > 1\}$ 在 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 中是独立的，并且仅包含其环形补分支包含 w的弧。

证明。 只需证明，如果 $a \in X_2$，那么 a 有一个包含 w 的环形补分支：注意，任意两条这样的非同伦弧必相交。令 $\Sigma_\pm$ 表示 a 的补分支的闭包。由于a 是本质的，典范映射 $\Sigma_\pm \to \Sigma$ 是 π_1-单射的，因此，任何一条终止于 $w \cap \partial\Sigma_\pm$ 的本质弧 $\delta \subset \Sigma_\pm$ 都会下降为 Σ 中一条与 a 不相交的本质 ℓ_0-允许弧，而 $d(a, \pi\mathscr{A}(\Sigma, \ell_0)) = 1$，这就产生了矛盾。因此，这样的 δ 不存在，于是 $\Sigma_\pm$ 要么都是圆盘，但这与 Σ 不是圆盘相矛盾；要么其中一个分支是包含 w 的环带。□

定义 1.8。 我们将顶点集 X_2 例外的称为。

2. Connectedness of $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$

我们首先定义由 [HPW13] 引入的独角兽弧的一种推广：

定义 2.1。 设 a, b 是 Γ-允许弧的同伦类。那么， Γ-独角兽 ofa, b 是由子弧 $\alpha_0 \subset \alpha \in a$ 和 $\beta_0 \subset \beta \in b$ 构成的一个 Γ-允许拼接 $\alpha_0 * \beta_0$（的同伦类）。 Γ-独角兽子图 $\mathscr{U}(a, b) \subset \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是由 a, b 的 Γ-独角兽张成的诱导子图。

此外，我们规定 a，$b \in \mathscr{U}(a,\ b)$；我们将称独角兽为 $proper$if $x \neq a$，b。不同于通常的弧图，$\mathscr{U}(a,\ b)$ 并不总是连通的。例如，由于 a，b 之间的任意 proper 独角兽都有一个端点在 ∂a，另一个在 ∂b，如果 ∂a 在 Γ 中与 ∂b 没有公共边，那么没有这样的弧是 Γ-允许的：如果 a，b 相交，则 $\mathscr{U}(a,\ b)$ 由两个单点集组成。事实上，这是 $\mathscr{U}(a,\ b)$ 不连通的唯一情形：

命题 2.2. 设 $a, b \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$。若 ∂a 与 ∂b 在 Γ中共享一条边，则$\mathscr{U}(a, b)$ 是连通的。此外，$d(a, b) \leq i(a, b) + 1$，其中 i 表示几何交数。

证明。设 $x \in \mathscr{U}(a, b)$；不妨交换 a, b，假设 $x \neq a$。对 a, b和 x 定向，使得 $b_+ = x_+$和 $(a_-, b_+) \in E(\Gamma)$。假设 a, b处于最简位置；若 $x = b$，则令 $\beta_0 = b$；否则固定子弧 $\alpha_0 \subset a$和 $\beta_0 \subset b$，使得 $x = \alpha_0 * \beta_0$。只需找到一个 Γ-独角兽 γ，它属于 a, b，与 x不相交，且满足 $i(\gamma, a) < i(x, a)$；根据交数归纳法，即得结论。

令 $s \in a \cap x$为沿着 a遇到的第一个横截交点；注意 $s \in \beta_0$。令γ 为沿着 a从 a_-到 s 的子弧与沿着 x从 s到 x_+ 的子弧的拼接；后一个子弧位于 β_0 中，且 $\partial\gamma = (a_-,\ b_+) \in E(\Gamma)$，因此若 γ 是本质的，则它是一条 Γ-独角兽。然而，如果 γ 围成一个半圆盘，那么 a，b 共有一个双边形或半双边形，故不处于最简位置。最后，我们注意到（在同伦意义下）γ，x 不相交，且 $i(\gamma,\ a) \leq i(x,\ a) - 1$。□

尽管某些独角兽路径不存在，我们现在仍可证明：若 Γ 无环，则 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$ 是连通的。特别地，只需证明对于某条边 $e \in \Gamma$，$\mathscr{A}(\Sigma,\ e)$ 连通：由引理 1.6，$\pi\mathscr{A}(\Sigma,\ e) \subset \mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$ 因而是一个连通的 1-稠密子图。注意，对于任意边 e 和 a，$b \in V(\mathscr{A}(\Sigma,\ e))$ $\partial a = \partial b, \mathscr{A}(\Sigma,\ e)$ 由命题 2.2 可知是连通的。

如果 Γ 包含一个环 ℓ_0，类似的论证几乎 同样适用：根据命题 2.2$\mathscr{A}(\Sigma,\ \ell_0)$ 是连通的，并且根据引理 1.7 $V(\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma))\backslash X_2$ 位于 $\pi(\Sigma,\ \ell_0)$ 的连通的 1-邻域内。然而，要证明例外顶点 X_2 并非孤立，我们必须留待第 2.1 节，在那里我们将证明命题 2.2 中的一般距离估计。此外，这一结果也将有助于我们在第 3 节中的讨论。

最后，我们注意到，命题 2.2 的证明蕴含以下结论：

推论 2.3。设 α、β 是定向的 Γ-允许弧，使得 α_+ 和 β_+ 位于 Σ 的同一边界分支中。如果 α、β 处于最简位置，那么通过对 α、β 进行定向手术得到的任何简单弧都是 Γ-独角兽。□

2.1. **距离上界**。我们将证明，除某些低复杂度情形外，$d(a, b) \leq i(a, b) + 1$，从而将命题 2.2 关于一般弧的结果加以推广。我们首先研究具有一个或两个交点的弧。

引理 2.4. 假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$ 且若 $\Sigma = \Sigma_1^2$，则 Γ 包含一条非环边。若 a, b是 Γ-允许弧的无向同伦类，且 $i(a, b) = 1$，则$d(a, b) = 2$属于 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$。

证明。 假设 a, b处于最简位置。如果 $\partial a \cap \partial b \neq \varnothing$那么 ∂a, ∂b在 Γ 中共享一条边，同样地根据假设如果 $\Sigma = \Sigma_1^2$：根据命题 2.2, $d(a, b) \leq i(a, b) + 1 = 2$。我们假设两者均不成立，并考虑三种情况：

(i) a 和 b 都不是环（即 $a_+ \neq a_-$、$b_+ \neq b_-$）。令 N 为 $a \cup b \cup b_\pm$的正则邻域，并令 δ 为 ∂N的一个分支。[1] 那么 δ 是本质的，且与 a、b不相交；由于 $\delta_\pm = a_\pm$, δ 是 Γ-允许的。(ii)（不失一般性） a 是一个环，但 b 不是（$a_+ = a_-$、$b_+ \neq b_-$）。我们如上处理，并令 δ_1、δ_2 表示 ∂N的分支。如果其中一个是本质的，则可如上得出结论；否则二者都围成半圆盘，且$\Sigma = \Sigma_0^3$。(iii) a 和 b 都是环（$a_+ = a_-$、$b_+ = b_-$）。令 N 为 $a \cup b \cup b_+$的正则邻域。由于 a和 b 相交于一点， $N \cup N$（a_+）是一个三孔环面；令 $\delta = \partial N$。如果 δ 是本质的，则可如上得出结论；否则 δ 围成一个半圆盘，且 $\Sigma = \Sigma_1^2$。

由此可得 $d(a, b) = 2$。 □

引理2.5. 假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$，并且若 $\Sigma = \Sigma_1^2$，则 Γ 包含一条非环边。若 a, b 是 Γ-允许弧的无向同伦类，且 $i(a, b) = 2$，那么 $d(a, b) \leq 3$ 属于 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$。

证明. 假设 a, b 处于最简位置，且 $\partial a \cap \partial b = \varnothing$，否则如上所述由命题 2.2 得出结论。令 $\{s, t\} = a \cap b$，并令 α_0, β_0 分别表示 a, b中位于 s 与 t之间的子弧；对 a 定向，使得 s 更靠近 a_-，对b也同样处理。令 $\alpha^\pm \subset a \setminus \mathring{\alpha}_0$ 表示与 $a_\pm$相接的子弧，对 $\beta^\pm \subset b \setminus \mathring{\beta}_0$也同样处理。我们考虑两种情况：

(i) a、b 不能同时是环；或者 $\hat{\imath}(a, b) = \pm 2$，其中 $\hat{\imath}$ 表示代数交数。不失一般性，假设只有当 a 是环时， b 才是环。令 δ 为 β^-、α_0和 β^+的拼接。我们注意到，δ 和b 在同伦意义下不相交，且 $i(\delta, a) \leq 1$；当 $\hat{\imath}(a, b) = \pm 2$时取等号。因此，若 δ 是本质的，断言便得证：因为 $\partial\delta = \partial b$, δ 是 Γ-允许的，并且根据引理 2.4, $d(\delta, a) \leq 2$，所以 $d(a, b) \leq d(a, \delta) + d(\delta, b) \leq 3$。最后，为了验证 δ 是本质的，我们注意到，要么 b （因此 δ）不是环，要么 a、b都是环且$\hat{\imath}(a, b) = \pm 2$，因此 $i(\delta, a) = 1$。两种情况下，都可推出 δ 是非分离的。

(ii) 二者均为环 a, b是环且$\hat{\imath}(a, b) = 0$。令 N_a为$a \cup b \cup b_\pm$ 的正则邻域，并令 N_b为 $a \cup b \cup a_\pm$的正则邻域。令 $\mathscr{D}_a$ 为 ∂N_a的弧分支集合，同理令 $\mathscr{D}_b$ 为 ∂N_b的弧分支集合。对于任意 $\rho \in \mathscr{D} := \mathscr{D}_a \cup \mathscr{D}_b$, ρ 与 a不相交，并且或者为 $\partial\rho \in \partial a$，或者为 $\partial\rho \in \partial b$。因此，如果 ρ 是本质的，则 ρ 是 Γ-允许的，并且 $d(a, b) = 2$。

> 假设 $\mathscr{D}$ 中的每条弧都界定一个半圆盘。那么（例如，通过欧拉示性数论证），简单闭曲线 $\alpha_0 \cup \beta_0$ 将 $\Sigma = \Sigma_0^3 \cup_{\alpha_0 \cup \beta_0} \Sigma'$分隔开，其中 Σ' 是边界为 $\alpha_0 \cup \beta_0$ 且不包含 $a_\pm$ 和 $b_\pm$的子曲面。如果 Σ' 是一个圆盘，那么 a、b 不处于最简位置；如果 Σ' 是一个环带，那么 $\Sigma = \Sigma_0^3$，这两种情况都与我们的假设矛盾。因此存在

[1]备注： ∂N 表示 *topological* 边界，因此不包含 $b_\pm$ 或$a_\pm$的任何子弧。

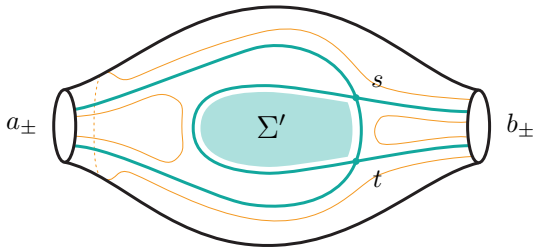


FIGURE 1. 在$\mathscr{D}$中，一组极大的不相交弧（橙色、细线），每条弧都围成一个半圆盘。

一条连接 s和$t \in \partial\Sigma'$ 的简单弧 $\gamma \subset \Sigma'$，它在 Σ'中不界定半圆盘。令 $\alpha' = \alpha^- * \gamma * \alpha^+$和 $\beta' = \beta^- * \gamma * \beta^+$。如果 α'在 Σ中界定一个半圆盘，那么同样地，γ 在 Σ'中也界定一个半圆盘；对 β'也同理： α' 和 β' 都是本质的。由于 $\partial\alpha' = \partial a$ 和 $\partial\beta' = \partial b$、 α'以及β' 是 Γ-允许的，并且我们观察到， a和 α'、 α' 和 β'以及 β' 和 b 在同伦意义下不相交。 $d(a, b) \leq 3$。□

对于 $i(a, b) > 2$，我们构造一列交数严格递减的弧，并通过归纳法继续证明。

命题2.6。 假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$，并且若 $\Sigma = \Sigma_1^2$，则 Γ 包含一条非环边。若 a、b是 Γ-允许弧的无向同伦类，且 $i(a, b) = n$，则 $d(a, b) \leq n+1$位于 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 中。

证明。如上所述，我们可以假设 $\partial a \cap \partial b = \varnothing$，否则由命题 2.2 得出结论。假设 a、b 处于最简位置。只需找到一条与 b 不相交的 Γ-允许弧 δ，使得 $i(\delta, a) < i(a, b)$，或者交换 a 和 b后同理；然后我们对交数进行归纳即可得出结论，同时注意到情形 $i(a, b) \leq 2$ 可由引理 2.4 和 2.5 得出。假设 $i(a, b) \geq 3$，令 $s \in a \cap b$ 为沿 b遇到的第一个交点；令 t 为沿 a遇到的下一个交点。令 α_0、β_0 分别表示 a、b中位于 s和 t之间的子弧。令 $\beta^\pm \subset b \setminus \mathring{\beta}_0$表示与$b_\pm$相邻的子弧。我们分两种情况讨论：

(i) s，t是同号交点。 令 $\delta = \beta^- * \alpha_0 * \beta^+$。经过同伦， δ和 b彼此不相交，且 $i(\delta, a) \leq i(a, b) - 1$。由于 $\delta_\pm = b_\pm$，若 δ是本质的，则它是 Γ-允许的。若 b 不是环，则 δ 也不是环，因此是本质的。假设 b 是一个环。将 δ 同伦至与 b不相交后，我们观察到， δ 的端点在 $b_\pm$上分隔了 b 的端点： δ 是非分离的，因此是本质的。

(ii) s、t 是异号交点。令 δ 如上； δ 与 b 在同伦意义下不相交，且 $i(\delta, a) \leq i(a, b) - 2$，因此若 δ是本质的，则结论成立。反之，假设 δ 围成一个半圆盘 D，于是 δ 和 b 是环。由于 $\beta^- \cap a = \{s\}$，我们有 $\beta^+ \cap a = \{t\}$；否则， a、b共享一个双边形，因而不处于最简位置。令 N为 $a \cup D \cup b_\pm$的正则邻域，并令ξ 为 ∂N 中不与 a平行的弧分支。我们注意到， ξ 与 a 不相交，且 $i(\xi, b) \leq i(a, b) - 2$； $\partial\xi = \partial a$，因此若 ξ是本质的，则 ξ是Γ-允许的。假设 ξ 围成一个半圆盘，并注意到 b 与

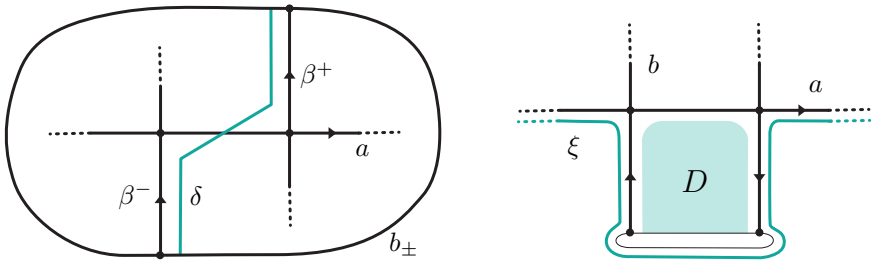


FIGURE 2. (a) δ 在*(i)*的情况下分隔 b 的端点。(b) 在*(ii)* 的情况下，当 δ 围成一个半圆盘时，弧 ξ 。

ξ 仅在与 a平行的子弧上相交。因此 b 与 ξ 不相交，否则 b 会与 ξ 共享一个双边形或半双边形，而该双边形或半双边形仅在 $\xi \cap a$中的子弧上与其相交，因而也会与 a 共享。由于 $a \setminus \mathring{\alpha}_0$ 与 ξ平行， a 仅在 s处与 b 相交， t，这与$i(a,\ b) \geq 3$矛盾。□

备注 2.7。 注意，如果 Γ 是无环的，那么在命题和前两个引理的陈述中，我们可以省略关于(Σ, Γ)的假设。

$\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 的连通性可立即推得：

定理 2.8。 假设 Γ 无环，或者 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$ 并且如果 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 那么Γ 包含一条非环边。$\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是连通的。□

备注2.9。 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$的连通性使我们能够扩展引理1.7。假设 $\ell_0 \subset \Gamma$ 是一个环，且 $X_2 \subset V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$表示不在 $\pi_{\mathscr{A}}(\Sigma, \ell_0)$的1-邻域内的例外顶点集合，并且进一步假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$，且若 $\Sigma = \Sigma_1^2$ ，则 Γ 包含一条非环边。我们注意到，对于任意 $v \in X_2$, $d(v, \pi_{\mathscr{A}}(\Sigma, \ell_0)) = 2$。特别地，由于根据引理1.7， X_2 在 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$中是离散的，且 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$是连通的，因此 v 必定与 $a \notin X_2$相邻；根据 X_2的定义， $a \notin X_2$位于 $\pi_{\mathscr{A}}(\Sigma, \ell_0)$的1-邻域内。//

命题2.6还使我们能够推广引理 1.6：

引理2.10. 假设 $\Gamma' \subset \Gamma$ 包含一条边，并令 $\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma') \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 表示由包含映射 $\Gamma' \hookrightarrow \Gamma$诱导的单纯映射。那么：

(i) 如果 Γ 无环，那么 π 是1-粗满射。此外，只有当 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$ 和 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 满足 Γ 包含一条非环边时，才有：*(ii)* 如果 Γ' 有一条非环边，那么 π 是 2- 粗满射；否则 *(iii)* π 是 3- 粗满射。

证明。 (i) 即引理 1.6。通过坐标变换，对于任意 $a \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)) \setminus V(\pi_{\mathscr{A}}(\Sigma, \Gamma'))$, 存在一条 Γ'-允许的弧 ρ，当 ρ不是环时，它与 a 至多相交一次；当 ρ 是环时，则至多相交两次。由命题2.6即可得出结论。□

定理 2.11。 假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$。如果 $\mathscr{A}(\Sigma)$ 具有无限直径，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$也同样如此。□

3. (Σ, Γ) FOR WHICH $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ IS HYPERBOLIC

在下文中，我们假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$ ，并且如果 $\Sigma = \Sigma_1^2$，那么 Γ 包含一条非环边。为了证明 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 的双曲性，我们应用 [Bow14]的以下命题：

定理3.1 (猜测测地线引理)。 假设Ω 是一个连通单纯图，并且存在$\{\mathscr{U}_{a,b}\}_{a,\ b\in V(\Omega)}$ 一族连通子图，使得$a,b \in \mathscr{U}_{a,\ b}$ 且 $\Delta \geq 0$ 满足

(I) 对于 $a, b \in V(\Omega)$，若 $d(a, b) \leq 1$，则直径$\mathscr{U}_{a,\ b} \leq \Delta$;
并且 *(II)* 对于 $a, b, c \in V(\Omega)$，$\mathscr{U}_{a,\ c} \subset N_\Delta(\mathscr{U}_{a,\ b} \cup \mathscr{U}_{b,\ c})$。
那么对于某个 $\delta = \delta(\Delta) \geq 0$，$\Omega$ 是 δ-双曲的。 □

根据命题 2.2，对于 $a,\ b \in V(\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma))$，只有当 ∂a 和 ∂b 在 Γ中共享一条边时，Γ-独角兽子图 $\mathscr{U}(a,\ b)$才是连通的。我们的子图将改为选取增广独角兽子图 $\mathscr{U}^+(a,\ b)$，它们位于某个连通的 Γ-独角兽子图 $\mathscr{U}(a',\ b')$的统一有界距离内。

我们首先证明 Γ 包含一个环时的 δ-双曲性，然后证明 Γ 包含一个奇圈时的无环情形。

命题3.2。 假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$ ，并且若 $\Sigma = \Sigma_1^2$，则 Γ 包含一条非环边。若 Γ 包含一个环，则 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是一致 δ-双曲的。

命题 3.3. 如果 Γ 是无环且包含一个奇圈，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是统一的 δ-双曲的。

注意到 Γ 是二部的，当且仅当它是无环的且不包含奇圈，因此我们得出以下结论：

定理 3.4. 假设 Γ 是无环的，或者 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$ 并且如果 $\Sigma = \Sigma_1^2$，那么 Γ 包含一条非环边。如果 Γ 不是二部的，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是统一的 δ-双曲的。□

3.1. Γ **包含一个环**。我们首先考虑 Γ 是单个环的情形；此时所有 Γ-允许弧都共享同一个边界分支，因此通常的独角兽子图已足够。

引理 3.5。如果 Γ 由一条单独的带环边构成，那么 $\{\mathscr{U}（a、b）\}_{a、b}$ 在 $\mathscr{A}（\Sigma、\Gamma）$ 中构成 *1*-薄的三角形。

证明。令 $x \in \mathscr{U}(a,\ b)$，并设 x 由子弧 $\alpha' \subset a$、$\beta' \subset b$ 构成，其中有 $x_- = \alpha'_- = a_-$ 和 $x_+ = \beta'_+ = b_+$。令 $c \in V(\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma))$，并假设 c 与 x 处于最简位置。

只需找到与 x 不相交的 $y \in \mathscr{U}(a,\ c) \cup \mathscr{U}(b,\ c)$。不失一般性，假设 c last 与 x 在 $s \in \alpha'$ 处相交。令 y 为沿 a 从 x_- 到 s 的子弧与沿 c 从 s 到 c_+ 的子弧的拼接。由于 c 和 x 处于最简位置，且 $x_+,\ c_+ = b_\pm$，根据推论 2.3 $y \in \mathscr{U}(a,\ c)$ 是 Γ-允许的。经过同伦，y 与 x 不相交。□

我们注意到，若 $d(a,\ b)\ =\ 1$，则 $a,\ b$ 不相交，因此 $\mathscr{U}(a,\ b)\ =\ \{a,b\}$ 的直径为 1，且定理3.1 对 $\Delta = 1$ 成立。

推论 3.6。 如果 Γ 由单条带环边组成，那么 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是 δ-双曲的。□

事实上，只需 Γ 包含一个环即可。我们假设 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$，并且如果 $\Sigma = \Sigma_1^2$，那么 Γ 包含一条非环边。令 $\ell_0 \subset \Gamma$ 为 Γ 中的一个环，并回顾引理1.7，例外顶点集合 X_2 在 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$中是离散的。令 $\mathscr{A}'$ 为从 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)\ \setminus X_2$得到的度量图，其中赋予通常图度量，并在每个 $v \in X_2$对应的顶点 v 的所有邻居之间添加长度为 2的边。由于 $\mathscr{A}'$ 和 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$在一族两两不相交且一致有界的子集之外等距，因此它们是一致拟等距的。我们注意到，$\pi\mathscr{A}(\Sigma,\ \ell_0)$作为一个1-稠密子图等距地嵌入 $\mathscr{A}'$中。

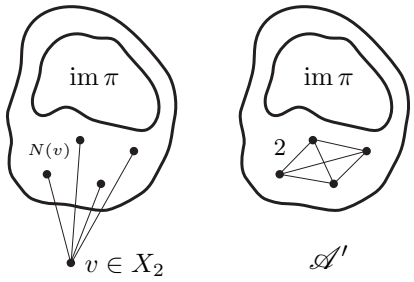


FIGURE 3. 从 $\mathscr{A}$（$\Sigma,\ \Gamma$）获得 $\mathscr{A}'$。

我们证明 $\mathscr{A}'$ 是 δ-双曲的。令 $\xi\colon \mathscr{A}' \to \pi\mathscr{A}$（$\Sigma,\ \ell_0$）为一个最近点投影。对于 $a,\ b \in V$（$\mathscr{A}$（$\Sigma,\ \Gamma$））， 令

$$\mathscr{U}^+(a,b) := [a,\xi a] \cup \mathscr{U}_{\ell_0}(\xi a,\xi b) \cup [\xi b,b]$$

其中 例如， $[a,\xi a]$ 表示一条边，而 $\mathscr{U}_{\ell_0}$ 表示相应独角兽子图在 $\mathscr{A}'$ 中的 π-像。由于 π 是一个压缩映射，引理 3.5 蕴含 $\{\mathscr{U}_{\ell_0}(\xi a,\ \xi b)\}_{a,\ b}$ 中的三角形同样是 1-细的，因此增广独角兽 $\mathscr{U}^+(a,\ b)$ 中的三角形也如此。要应用定理3.1，我们只需验证条件 (I) 得到满足：

引理 3.7. 对于任意不相交的 $a,b \in V(\mathscr{A}')$，直径 $\mathscr{U}^+(a,b) \leq 10$。

证明。令 w 表示 ℓ_0 中的边界分支以及 $a' = \xi a, b' = \xi b$。由于$d(a,a')\ d(b,b')\ \leq\ 1$，$a,a'$和 b,b'在同伦意义下不相交。若 $a,b\ \in\pi\mathscr{A}(\Sigma,\ell_0)$均成立，则 $a'\ =\ a$和 $b'\ =\ b$不相交：$\mathscr{U}_{\ell_0}(a',b')\ =\ \{a,b\}$。否则，不失一般性，设 $b \notin \pi\mathscr{A}(\Sigma,\ell_0)$。于是 $\partial b \neq \{w\}$；对 b定向，使得 $b_- \neq w_-$。只需证明，对于任意 $x \in \mathscr{U}_{\ell_0}(a',b')$，$d(x,a)\ \leq 5$ 属于$\mathscr{A}'$。

令 $s \in b \cap x$ 为沿着 b遇到的第一个交点；由于 $b,\ b'$ 不相交，$s \subset a'$。令 b_0 表示 b 上位于 b_- 和 s之间的子弧，并令 a'_0 表示x 沿着 a' 位于 $a'_\pm$ 和 s之间的子弧。令 N 为 $a'_0 \cup b_0 \cup b_-$的一个正则邻域。

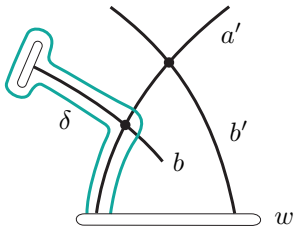


FIGURE 4. 引理 3.7 证明中的弧 δ。

那么 $\delta = \partial N$ 与 x 至多相交一次，并且必定是本质的，否则 Σ 是一个环带：$d(x, \delta) \leq 2$。由于 $\partial\delta = \{w\}$，δ 是 Γ-允许的，且根据引理1.7不位于 X_2中：$\delta \in V(\mathscr{A}')$。最后，由于 a' 与 a不相交，只有当 a 终止于b_-上时，δ 才与 a 相交，因此至多相交两次。应用命题2.6，$d(a, \delta) \leq 3$，因此 $d(x, a) \leq 5$，如所需。□

命题3.2的证明由定理3.1以及 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma) \simeq_{\text{q.i.}} \mathscr{A}'$ 得出。

3.2. Γ **含有一个奇圈**。假设 Γ 无环且含有一个长度为 $n = 2k+1$ 的奇圈 C_n。固定 $e_0 \in E(C_n)$。由引理2.10，典范映射 $\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma, e_0) \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 1-粗满射。如上所述，令 $\xi\colon \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma) \to_\pi \mathscr{A}(\Sigma, e_0)$ 为一个最近点投影的选取，并对于 $a, b \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$，令

$$\mathscr{U}^+(a,b) := [a, \xi a] \cup \mathscr{U}_{e_0}(\xi a, \xi b) \cup [\xi b, b].$$

我们首先验证，$\{\mathscr{U}_{e_0}(a, b)\}_{a,\, b \in V(\pi\mathscr{A}(\Sigma,\, e_0))}$ 中的三角形在 $\mathscr{A}(\Sigma, C_n)$ 中是薄的；由于 π 经由 1-利普希茨诱导映射 $\mathscr{A}(\Sigma, C_n) \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 分解，增广独角兽 $\mathscr{U}^+(a, b)$ 同样在 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 中构成薄三角形，满足定理3.1的 (II)。

引理3.8。$\{\mathscr{U}_{e_0}$中的三角形$(a,b)\}_{a,b \in V(\pi\mathscr{A}(\Sigma, e_0))}$ 是4-薄的，在 $\mathscr{A}(\Sigma, C_n)$中。

证明。令 $e_0 = (w_1, w_n)$，并令 w_i 表示 C_n中其余的边界分支，按邻接顺序排列。令 $a, b, c \in V(\pi\mathscr{A}(\Sigma, e_0))$，并令$x \in \mathscr{U}_{e_0}(a, b)$。只需找到$y \in \mathscr{U}_{e_0}(a, c) \cup \mathscr{U}_{e_0}(c, b)$，使得 $d(x, y) \leq 4$。将 a, b, c定向，使其初始点（分别为终止点）位于 w_1（分别为 w_n）。若 $x = a, b$，则分别可由 $y = a, b$ 得出结论。因此，不失一般性，设 x 由子弧 $\alpha_0 \subset a$ 和 $\beta_0 \subset b$ 的拼接表示，其中 α_0 在 a 中为初始的，且 β_0 在 b中为终止的，否则交换 a, b的角色。

假设 C_n 中相邻的边界分支被 $c \cup x$ 分隔，否则存在一条与 x 不相交的 C_n 允许弧，c 以及 $d(x, c) \leq 2$。对于 $i \notin \{1, n\}$，令$D_i \supset w_i$ 表示包含w_i的 $c \cup x$ 的补分支的闭包，并令 D_1，D_n 表示分别与 w_1、$^\circ$ $^\circ$相交的各分支之并的闭包。注意，D_i 不一定彼此不同，尽管根据假设，D_i，D_{i+1} 是不相交的。我们证明以下断言，由此即可得到该结果：

断言。若 $D_i \cap \alpha_0 \neq \varnothing$ 且 $D_{i+1} \cap \alpha_0 \neq \varnothing$，则存在 $y \in \mathscr{U}_{e_0}(a$、$c)$ 使得 $d(y$、$x) \leq 4$，对于 β_0、b 也同样成立。

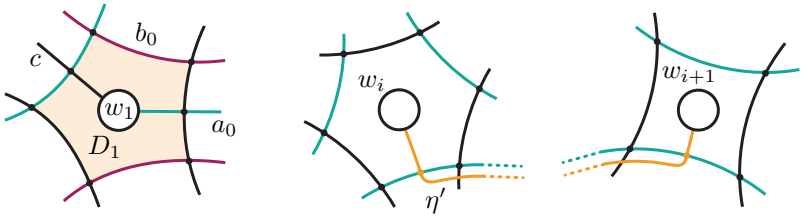


FIGURE 5. 该区域 D_1；该弧 η' 在命题证明中。

断言的证明。我们考虑 α_0 的情形；另一种情形是类似的。固定简单互不相交弧 ρ、δ，它们分别从 w_i 和 w_{i+1} 延伸到 α_0，二者均与 c 不相交，并且除一个端点外与 x 不相交；若 $i=1$，则允许 ρ 为点 $\alpha_0 \cap a_-$。令 η' 为由 ρ、δ 以及 α_0 在 ρ 与 δ 之间的子弧进行 C_n-允许的拼接所得的弧。令 $\gamma_0 \subset c$ 表示 w_n 与同 α_0 的第一个交点之间的子弧；若不存在这样的交点，则令其为 c；令 y 表示将 α_0 的一段初始弧与 γ_0 拼接形成的 e_0-独角兽，若 $\gamma_0 = c$，则令其为 c。我们注意到，y、η' 与 η'、x 的交点数均至多为一次。应用命题2.6，$d(x, y) \leq d(x, \eta') + d(\eta', y) \leq 4$。□

特别地，我们注意到 $\alpha_0 \cap D_1 \neq \varnothing$ 和 $\beta_0 \cap D_n \neq \varnothing$，而且一般来说，$\partial D_i \cap x \neq \varnothing$否则 c 不是简单的，因此要么 $D_i \cap \alpha_0 \neq \varnothing$，要么 $D_i \cap \beta_0 \neq \varnothing$。由于 n 是奇数，命题的假设必定对某个 i成立。□

要应用定理3.1，只需验证 (I) 成立即可：

引理3.9。 对于任意不相交的 $a, b \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$，直径 $\mathscr{U}^+(a, b) \leq 7$。

证明。令 w_i 表示 C_n中的边界分支，如引理3.8的证明中所述。只需证明，对于任意$x \in \mathscr{U}_{e_0}(\xi a, \xi b)$，$d(x, \{a, b\}) \leq 3$。令 $a' = \xi a, b' = \xi b$定向，使它们的起点（分别为终点）位于 w_1（分别位于 w_n）。我们假设 $x \neq a', b'$，否则 $d(x, \{a, b\}) \leq 1$。因此，不失一般性，令 x 表示为子弧 $\alpha_0' \subset a'$ 和 $\beta_0' \subset b'$ 的拼接，使得 α_0' 在 a' 中为起始弧，且 β_0' 在 b'中为终止弧，否则交换 a, b的角色。

对于 $i \neq \{1, n\}$，令 ρ_i' 为从 w_i 到 $X = a \cup x \cup b$ 的最短路径，并令 p_i' 表示 $\rho_i \cap X$ 的交点。若 $p_i' \in a$，b，则令 ρ_i 为 ρ_i' 与沿 a 分别连接 p_i' 和 x 的最短子弧的拼接；否则令 $\rho_i = \rho_i'$。令 p_i 表示沿 x 的 ρ_i 的端点，并注意到若 $p_i \in \alpha_0'$，则由于 a，a' 与 $p_i \in b \cup \alpha_0'$ 和 $\rho_i \cap X \subset a' \cup b$ 不相交。a，b 同样不相交，因此 ρ_i 与 a 不相交；类似地，若 $p_i \in \beta_0'$，则 ρ_i 与 b 不相交。设 $p_2 \in \alpha_0'$，并令 δ 为 ρ_2 与沿 α_0' 连接 p_2 和 c_1 的子弧的拼接。由于 δ 连接了 w_1，w_2 这两个在 C_n 中相邻的边界分支，δ 是 Γ-允许的；此外，δ 与 a 和 x 在同伦意义下不相交，因此 d（x，a）$= 2$。因此设 $p_2 \notin \alpha_0'$，并通过类似论证得到 $p_{n-1} \notin \beta_0'$。

我们断言，若 $p_i, p_{i+1} \in \alpha_0'$，则存在一条 Γ-允许弧 δ，使得δ 与 a 不相交，且与 x 至多相交一次；对于 β_0' 和 b也同样如此。特别地，在 α_0' 的情形下，令 δ 为 ρ_i, ρ_{i+1}的拼接，以及子弧

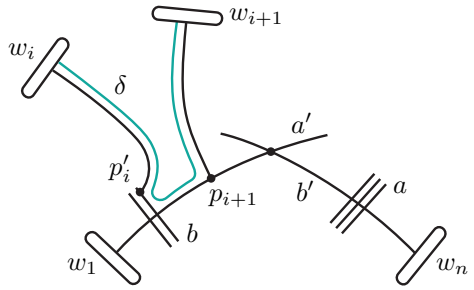


FIGURE 6. 引理3.9的证明中的弧 δ，当 $p_i, p_{i+1} \in \alpha_0'$。

沿着 α_0' 在 p_i, p_{i+1}之间； δ 满足该断言，而 β_0' 的其余情形类似。最后，由于 n 为奇数且 $p_2 \in \beta_0'$ 和 $p_{n-1} \in \alpha_0'$，该断言的假设对某个 i成立。应用命题2.6， $d(x, \{a, b\}) \leq d(x, [\delta]) + d([\delta], \{a, b\}) \leq 3$。□

命题3.3由定理3.1得出。

4. (Σ, Γ) FOR WHICH $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ IS NOT HYPERBOLIC

我们旨在证明定理 3.4 的逆命题，即除了一些低复杂度情形外，如果 Γ 是二部的，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 就不是双曲的。我们首先引入见证子曲面的概念：

定义 4.1. 本质连通真子曲面 $W \subset \Sigma$ 是 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 的一个（Γ-）见证，如果每条 Γ-允许弧都与 W 相交。

当 Γ 是二部图时，我们构造两个独立的双曲作用，每个作用都支撑在一个不相交的见证子图上，由此推出一个拟等距嵌入 $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$。在考虑此类作用时，我们注意到，通常的映射类群一般不会作用于 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$：如果 Γ 包含一条非环边且不是完全图，或者如果 Γ 包含一个环但并非所有顶点都有环，那么就存在一个映射类，其在 $\pi_0(\partial\Sigma) = V(\Gamma)$ 上诱导的置换不保留 Γ 中的邻接关系。我们作如下定义：

定义 4.2。令 $\mathrm{Mod}(\Sigma, \Gamma) \leq \mathrm{Mod}(\Sigma)$ 表示映射类$\varphi \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ 的子群，其诱导映射 $\varphi_* \colon \pi_0(\partial\Sigma) \to \pi_0(\partial\Sigma)$ 在 Γ 上定义了一个图自同构。

由于 $\mathrm{Mod}(\Sigma, \Gamma)$ 将 Γ-允许的弧映射为 Γ-允许的弧，并保持不相交性，以下陈述是显然的：

命题 4.3. 映射类群(Σ, Γ) 在 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$上作单纯作用。 □

备注。 纯映射类群 $\mathrm{PMod}(\Sigma)$ 是 $\mathrm{Mod}(\Sigma, \Gamma)$ 的一个子群。

4.1. 子曲面投影。 对于见证子曲面 $W \subset \Sigma$，我们可以将弧图通常的子曲面投影定义扩展（或者更准确地说，限制）到规定弧图 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 上。特别地：

定义 4.4。设 $W \subset \Sigma$ 是一个 Γ-见证子曲面。令 $\sigma_W = \rho_W \circ \pi\colon \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma) \to \mathscr{A}(W)$ 表示到 W 的子曲面投影，其中 $\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma) \to \mathscr{A}(\Sigma)$ 是典范单纯映射，而 $\rho_W\colon \mathscr{A}(\Sigma) \to \mathscr{A}(W)$ 是通常的子曲面投影。

备注 4.5。我们将 ρ_W 视为一个真正函数的选取，而非粗函数；我们注意到，对于 $a \in \mathscr{A}(\Sigma)$，像 $\rho_W(a) \in \mathscr{A}(W)$ 的选取在相差一致有界直径 D 的意义下是典范的。因此 ρ_W 是粗1-Lipschitz的；同样，由于 π是1-利普希茨的，σ_W是粗1-Lipschitz的，即 $d_{\mathscr{A}(W)}(\sigma_W(a)\ \sigma_W(b)) \leq d_{\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)}(a,\ b) + 2D$ 对于 $a,\ b \in V(\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma))$。

关键的是，子曲面投影使我们能够将作用于 $\mathscr{A}(W)$ 的 $\mathrm{PMod}(W)$ 中的双曲元素扩展为 $\mathrm{PMod}(\Sigma) \leq \mathrm{Mod}(\Sigma,\ \Gamma)$ 中的双曲元素。我们有以下引理：

引理 4.6. 设 $W \subset \Sigma$ 是一个 Γ-见证子曲面，且存在一个双曲元素 $\varphi \in \mathrm{PMod}(W)$ 作用于 $\mathscr{A}(W)$。那么，任意扩张 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Mod}(\Sigma,\Gamma)$ 都以双曲方式作用于 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$。

证明。 σ_W对于对的同胚 $(\Sigma, W) \to (\Sigma, W)$ 是粗略自然的，因此下图粗略交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_W} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_W} \\ \mathscr{A}(W) & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathscr{A}(W) \end{array}$$

其中，$\tilde{\varphi}_*, \varphi_*$ 分别是由 $\tilde{\varphi}, \varphi$ 诱导的映射。特别地，由于 φ_* 以洛克德罗米方式作用于 $\mathscr{A}(W)$，且 σ_W 是粗1-Lipschitz的，因此 $\tilde{\varphi}_*$ 以洛克德罗米方式作用于 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$。□

因此，我们主要关注具有伪阿诺索夫映射类（不失一般性，可假设为纯映射类）的见证子曲面 $W \subset \Sigma$，它们以洛克德罗米方式作用于 $\mathscr{A}(W)$。特别地，我们通常假设 $W \neq \Sigma_0^3$。

作为上述结果的第一个应用，我们证明，对于 $\Gamma' \subsetneq \Gamma$，典范粗满射 $\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma') \to \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 几乎从来都不是拟等距。令$e \in E(\Gamma) \setminus E(\Gamma')$。如果 e 不是环，或 Σ 的亏格为 $g \geq 1$ 或至少有一个边界分支，或存在一个顶点与相邻于 e的顶点不相邻，那么就存在一个 Γ'-见证子曲面 $W \subset \Sigma$，它不是 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 的见证，并且满足 $\chi(W) \leq \chi(\Sigma) + 1$。我们观察到如下事实：

命题 4.7。令 $\Gamma' \subsetneq \Gamma$，并假设 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是连通的。如果存在一个子曲面 $W \neq \Sigma_0^3$，它是 Γ'-见证曲面，但不是 Γ-见证曲面，那么 $\pi\colon \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma') \to \mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 不是准等距嵌入。

证明。固定一个与 W不相交的 Γ-允许弧 a。令 φ 为 $\mathrm{PMod}(W)$ 中的伪阿诺索夫映射类，并令 $\tilde{\varphi}$ 为 φ 到 Σ 的一个扩张，其在 $\Sigma \setminus W$ 上为恒等映射。由于 φ_* 在 $\mathscr{A}(W)$ 上以洛克德罗米方式作用，根据引理 4.6 $\tilde{\varphi}_*$ 在 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma')$ 上以洛克德罗米方式作用。因此，对于任意 $b \in V(\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma'))$，$\{\tilde{\varphi}_*^k(b)\}$ 在 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma')$ 中具有无限直径，

因此，如果 π 是一个准等距嵌入，那么同样地，$\{\pi\tilde{\varphi}_*^k(b)\} = \{\tilde{\varphi}_*^k(\pi b)\}$ 在 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$中也具有无限直径，其中等式由 π的自然性得出。但是，a 由 $\tilde{\varphi}$固定，因此 $\operatorname{diam}\{\tilde{\varphi}_*^k(\pi b)\} = 2d(a,\pi b) < \infty$，这就产生了矛盾。□

在上面列出的情形中，如果 $\mathscr{A}(\Sigma,\ \Gamma)$ 是连通的，且 $\chi(\Sigma) \leq -3$ 那么命题的假设成立：$\chi(W) \leq -2$ 因此 $W \neq \Sigma_0^3$。π 不是拟等距。//

4.2. **不相交的见证子曲面**。我们证明，除了一些低复杂度情形外，二部的 Γ 等价于存在不同且不相交的见证子曲面 W_i，它们支撑映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma,\ \Gamma)$ 的双曲元素。

引理 4.8。假设 $\chi(\Sigma) \leq -3$，且 Γ 包含一条边；若 $\Sigma = \Sigma_0^{n+1}$，则 Γ 不是一个 n-尖点星形图。那么，Γ 是二部的，当且仅当存在两个不相交且不同的 Γ-见证子曲面 $W_i \neq \Sigma_0^3$。

证明。我们先证明反向。假设存在两个不相交的Γ-见证子曲面 W_1、$W_2 \subset \Sigma$。令 $\mathscr{C}_i$、$_j \subset \pi_0(\partial\Sigma)$ 表示包含在 j 第 C_i 个补分支中的 Σ 的边界分支。由于 W_i 是本质的，每个 $\mathscr{C}_i$、$_j$ 都必须是 Γ 中无环的独立集，否则存在一条 Γ-允许弧，位于 C_i、$_j$ 中且与 W_i 不相交。令 $\mathscr{W}_1 = \pi_0(\partial W_1) \cap \pi_0(\partial\Sigma)$，并注意到 $V(\Gamma) = \mathscr{W}_1 \sqcup \bigsqcup_j \mathscr{C}_1$、$_j$。由于 W_1、W_2 不相交且连通，每个都包含在对方的唯一一个补分支中：不失一般性，假设 $W_1 \subset C_2$、$\mathbf{1}$ 和 $W_2 \subset C_1$、$\mathbf{1}$，并注意到 $W_1 \cup \bigcup_{j\neq 1} C_1$、$_j$ 连通且与 $W_2 \subset C_1$、$\mathbf{1}$ 不相交，因此同样包含在 C_2、$_1 \supset W_1$ 中。于是 $\mathscr{W}_1$、$\bigcup_{j\neq 1} \mathscr{C}_1$、$_j \subset \mathscr{C}_1$、$\mathbf{1}$，因此 $\mathscr{D} = \mathscr{W}_1 \cup \bigcup_{j\neq 1} \mathscr{C}_1$、$_j$ 是 Γ 中的独立集，而 $\mathscr{C}_1$、$_1 \sqcup \mathscr{D} = V(\Gamma)$ 将 $V(\Gamma)$ 划分为两个独立集。

反过来，假设 $V(\Gamma)$可分成两个独立集X_1、X_2，并且不失一般性地假设二者均非空；否则，Γ 不含边。此外，我们可以假设仅当 $|X_2| = 1$时 $|X_1| = 1$，且仅当 Γ 时 $|X_2| = 1$是一个中心位于 X_2的星形图；否则，将任意孤立顶点加入 X_2。令$\zeta \subset \Sigma$ 为一条将 X_1、X_2 分隔开的简单闭曲线，其补区域为$Z_1 \supset X_1$、$Z_2 \supset X_2$。我们注意到 $\chi(Z_1)$、$+\chi(Z_2)$、$=\chi(\Sigma)$，并且 ζ 是本质的，当且仅当 Z_1、Z_2 均不是环带；等价地，$\chi(Z_1)\ \chi(Z_2) < 0$均成立。只需找出本质的 ζ，使得某个 $\chi(Z_i) \leq -2$：特别地，我们可以取$W_1 = Z_i$，并令 W_2 为 ζ的闭正则邻域；因为 $\chi(W_1) \leq -2$、$\neg\ W_1 \neq \Sigma_0^3$。

如果 ζ 是本质的，那么我们可以得出：由于 $\chi(Z_1) + \chi(Z_2) \leq -3$，因此$\chi(Z_1)\ \chi(Z_2) \leq -2$中至少有一个成立。反设不然，则 ζ是周边的，并且 Z_1、Z_2中恰有一个是环带。根据我们对 X_1、X_2的假设，无论哪种情况，$|X_2| = 1$ 和 Γ 都是星形，因此 Σ 具有亏格。取一个包含 X_2 且具有一个亏格的子曲面 $Z_2' \cong \Sigma_1^2$。令 $\zeta' = \partial Z_2' \setminus \partial\Sigma$ 和$Z_1' = (\Sigma \setminus Z_2')$。于是 ζ' 是一条将X_1、X_2 与 $\chi(Z_1') = \overline{\chi(\Sigma) - \chi(Z_2')} = \chi(\Sigma) + 2 \leq -1$分隔开的简单闭曲线，因此 ζ' 是本质的。□

我们最后证明，支撑在不相交见证子曲面上的双曲元素的存在性意味着 $\mathbb{Z}^2$.[2] 的一个拟等距嵌入。

[2]这一结论类似于 [Sch], 中的练习 3.13，只是针对我们的情形做了些微调整。

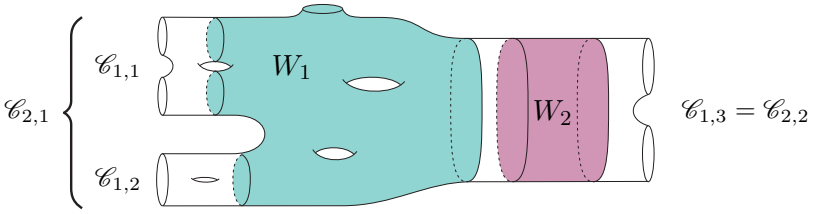


FIGURE 7. 不相交见证与边界组分的集合 $\mathscr{C}_{i,j}$。

命题4.9。 假设存在互不相同且不相交的 Γ-见证子曲面 $W_1, W_2 \subset \Sigma$，它们支撑作用于 $\mathscr{A}(W_i)$并以洛克德罗米方式作用的映射类 $\varphi_i \in \mathrm{PMod}(W_i)$ 。那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 不是 δ-双曲的，特别地，存在一个准等距嵌入 $\psi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$。

证明。令 τ_i 表示 φ_{i*}的平移长度，并令 $\tilde{\varphi}_i \in$PMod(Σ) 表示从 φ_i 通过在 $\Sigma \setminus W_i$ 上延拓为恒等映射所得到的映射类。定义$\eta\colon (n,m) \mapsto \tilde{\varphi}_{1*}^n \tilde{\varphi}_{2*}^m \in$ Isom($\mathscr{A}$(Σ, Γ))。由于 W_i 与 $\tilde{\varphi}_{3-i}$ 的支撑不相交， $\tilde{\varphi}_1$、 $\tilde{\varphi}_2$ 可交换，并且 η 是 $\mathbb{Z}^2$ 通过等距变换作用于 $\mathscr{A}$(Σ, Γ) 的作用。固定一个Γ-允许的弧 $\alpha \subset \Sigma$，并令 $\ell_i = d(\alpha, \tilde{\varphi}_{i*}(\alpha))$；令 $\psi(n,m) = \eta(n,m)(\alpha)$ 表示在 α 处的轨道映射。于是 $d(\psi(n,m)\ \psi(n',m')) \leq \ell_1|n-n'| + \ell_2|m-m'|$。

对于下方的拟等距界，注意到由于 W_i 与 supp($\tilde{\varphi}_{3-i}$) 不相交， $\sigma_{W_i}(\psi(n_1,n_2))$ 粗略等于 $\varphi_{i*}^{n_i}(\sigma_{W_i}(\alpha))$：特别地，存在一个常数 D，使得 $d(\sigma_{W_i}(\psi(n_1,n_2))\varphi_{i*}^{n_i}(\sigma_{W_i}(\alpha))) \leq D$。那么 $d(\sigma_{W_i}(\psi(n_1,n_2))\,\sigma_{W_i}(\psi(n_1',n_2'))) \geq \tau_i|n_i - n_i'| - 2D - M$，其中 $M > 1$ 满足 $d(\sigma_{W_i}(\alpha)\ \varphi_{i*}^k(\sigma_{W_i})) \geq k\tau_i - M$。由于子曲面投影 σ_{W_i} 粗利普希茨，断言得证。□

本节的主要定理可由引理 4.8 和命题4.9立即得到：

定理 4.10。 假设 $\chi(\Sigma) \leq -3$ 和 Γ 包含一条边，并且如果 $\Sigma = \Sigma_0^{n+1}$，那么 Γ 不是 n-尖点星。如果 Γ 是二部的，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 不是 δ-双曲的。□

5. SPORADIC CASES

我们首先注意到，对于 $\chi(\Sigma) \geq 0$ 或 $E(\Gamma) = \varnothing$， $\mathscr{A}$(Σ，Γ) 要么为空，要么是单元素集。类似地，我们注意到 $\mathscr{A}(\Sigma_0^3)$ 是有限的，并且 $\mathscr{A}(\Sigma_0^3$，Γ) 是 $\mathscr{A}(\Sigma_0^3)$ 的诱导子图。假设 $\chi(\Sigma) \leq -1$、 $E(\Gamma) \neq \varnothing$，且 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$，我们列举出前几节未涉及的低复杂度情形：

(i) 无限直径。每当 $\chi(\Sigma) \leq -2$ 时，PMod(Σ) 中就存在一个伪阿诺索夫类，以洛克德罗米方式作用于 $\mathscr{A}(\Sigma)$，因此 $\mathscr{A}(\Sigma)$ 的直径为无限；根据定理 2.11， $\mathscr{A}$(Σ， Γ) 的直径也同样为无限。因此，我们只需考虑 $\Sigma = \Sigma_1^1$ 中 Γ 为一个环的情形；此时， $\mathscr{A}(\Sigma_1^1$， Γ) $= \mathscr{A}(\Sigma_1^1) \simeq \mathscr{C}(\Sigma_1)$ 是环面通常的曲线图。特别地，$\mathscr{A}(\Sigma_1^1)$ 是 Farey 图，其直径为无限。//

(ii) 连通性与 δ-双曲性。定理 2.8 表明，$\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是连通的，但 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 和 Γ 均仅由环组成时除外；若 Γ 是单个环，则由命题 2.2 可得其连通性，因此只剩下 Γ 为两个不相交的环的情形。同样，若 Γ 不是二部的，则定理 3.4 和推论 3.6 表明，$\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 δ- 双曲的，但 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 和 Γ 为两个不相交的环时除外。引理 5.2 将证明此情形下的连通性和 δ-双曲性。

(iii) 非双曲性。如果 Γ 是二部的，那么定理 4.10 意味着，除非 $\chi(\Sigma) \geq -2$ 或 $\Sigma = \Sigma_0^{n+1}$且 Γ 是一个 n尖点星形图，否则 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是非-δ-双曲的。我们在后一种情形下于第 5.2 节证明 δ-双曲性。对于前一种情形，只需考虑 $\Sigma = \Sigma_0^4$ 或 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 且 Γ 是非环边的情况；在第二种情形下，我们在引理 5.3 中证明 δ-双曲性。

如果 $\Sigma = \Sigma_0^4$，那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 $\mathscr{A}(\Sigma_0^4)$ 的诱导子图，而后者与 Farey 图拟等距，因此是拟树；同样，$\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 也是拟树，因而是 δ-双曲的。//

结合这些零星情形的结果与第 2、3、4 节的一般结果，我们证明了定理 1.2：

定理 1.2。假设 $\chi(\Sigma) \leq -1$、$E(\Gamma) \neq \varnothing$，且 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$。则 $\mathscr{A}(\Sigma、\Gamma)$ 是连通的，并且具有无限直径。□

我们注意到，如果 $\Sigma = \Sigma_0^{n+1}$且 Γ是一个以 c为中心的 n-尖点星，则每个见证子曲面都必须包含 c：Σ不容许不相交的 Γ-见证子曲面。类似地，如果$\Sigma = \Sigma_0^4$ 或Σ_1^2，则 Σ 不容许两个不相交、不同的 Γ-见证子曲面，且它们不 Σ_0^3。因此我们得出以下结论，从而证明定理 1.3 和 1.5：

定理 5.1。假设 $\chi(\Sigma) \leq -1$、$E(\Gamma) \neq \varnothing$，且 $\Sigma \neq \Sigma_0^3$。则

(*i*) $\mathscr{A}(\Sigma、\Gamma)$ 是 δ-双曲的，当且仅当 Σ 不容许两个不同的、不相交的Γ-见证子曲面，且它们不同胚于 Σ_0^3。

特别地，若 $\Sigma = \Sigma_0^{n+1}$和 Γ 是一个 n-标记的星，或者若 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 和 Γ 是非环边，则 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 δ-双曲的。除这些偶然情形外，*(i)* 等价于以下命题：

(ii) $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 δ-双曲的，当且仅当 Γ 不是二部的。 □

最后，我们讨论 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 和 Γ 是两个环或一条非环边，以及 $\Sigma = \Sigma_0^{n+1}$和 Γ 是一个 n-标记的星的情形。

5.1. $\Sigma = \Sigma_1^2$ 和 Γ 是两个环或一条非环边。

引理 5.2. 假设 $\Sigma = \Sigma_1^2$和 Γ 是两个不相交的环。那么 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是连通且 δ-双曲的。

证明。令 ℓ_1, ℓ_2 表示 Γ 中的两个环，并令 w_i 表示 ℓ_i 中的边界分支。令 π_i：$\mathscr{A}(\Sigma, \ell_i) \to \mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 为相应的典范映射；注意，im π_1 和 im π_2 将 $V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$ 分成两部分。我们证明 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 是 $\mathscr{A}(\Sigma, \ell_1)$ 与一条非环边的图乘积，因此拟等距于 $\mathscr{A}(\Sigma, \ell_1)$。由于根据命题 2.2 和推论 3.6，$\mathscr{A}(\Sigma, \ell_1)$ 是连通的且为 δ- 双曲的，断言得证。

注意，每条弧 $a \in \operatorname{im}\pi_i$ 都恰好与一条弧 $a' \in \operatorname{im}\pi_{3-i}$ 相邻。特别地，若 例如 a 是一条 ℓ_1-允许弧，那么沿 a 切开后，我们得到一个三孔球面 $\Sigma' = \Sigma_0^3$：存在唯一一条端点位于 w_2 上的本质简单弧 $a' \subset \Sigma'$，其中唯一性在同伦意义下成立。令 $\tau\colon V(\mathscr{A}(\Sigma,\ell_1)) \to V(\mathscr{A}(\Sigma,\ell_2))$ 为双射，它将每条 ℓ_1-允许弧 a 映到与之不相交的唯一一条 ℓ_2-允许弧 a'。由于每个 π_i 都是图嵌入，只需证明 τ 是等距变换。特别地，只需找到一个对偶同胚 $(\Sigma, w_1) \to (\Sigma, w_2)$，使其诱导出 τ。

为方便起见，注意到我们可以通过将环面上的标记点 p_i 替换 Σ 的边界分支 w_i，来实现 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$。在 $\Sigma \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上固定一个平坦度量，使得 $p_1 = (0, 0)$ 且 $p_2 = (\theta, 0)$，其中 $\theta \in (0, 1)$ 为某个无理数，并定义同胚 $\xi\colon (a, b) \mapsto (a + \theta, b)$；我们注意到 $\xi\colon p_1 \mapsto p_2$。对于任意 ℓ_1-允许的弧 a，我们可以假设 a 是一个斜率非零且基点为 p_1 的测地环，因此 ξa 是一个与 a 不相交且基点为 p_2 的测地环。因此 ξa 是 ℓ_2-允许的，并且由唯一性，$\xi a = a'$：ξ 在 $V(\mathscr{A}(\Sigma,\ell_1))$ 上诱导映射 τ，如所求。□

引理 5.3. 假设 $\Sigma = \Sigma_1^2$ 和 Γ 是一条非环边。那么 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 是 δ-双曲的。

证明。如引理 5.2 中所述，不失一般性，我们可以将 Σ替换为$\Sigma_{1,2}$，即将边界分支替换为环面上的标记点 q_1, q_2。令$\Sigma' = \Sigma_{1,1}$ 带有标记点 q_0；固定本原生成元 α，$\beta \in \pi_1(\Sigma', q_0)$ 及一个度量，使得 α, β 是测地线。令 $p : \Sigma \to \Sigma'$ 为对应于子群 $\langle 2\alpha, \beta\rangle < \pi_1(\Sigma', q_0)$、保持标记点不变的正规覆盖。我们将证明，$p$定义了一个拟等距 $p_*\colon V(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)) \to V(\mathscr{A}(\Sigma',\ell_0))$，其中$\ell_0$ 是标记点 q_0 上的环，而 p_* 映射 $\gamma \mapsto [p\hat{}\gamma]$，其中 $\hat{}\gamma \in \gamma$ 是唯一的（简单）测地代表。由于 $\mathscr{A}(\Sigma',\ell_0) = \mathscr{A}(\Sigma_1^1) \cong \mathscr{C}(\Sigma_1)$ 是δ-双曲的，我们得出结论。

我们首先验证 p_* 是良定义的。设 $\gamma \in V(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma))$；不失一般性，假设 $\gamma_- = q_1$。由于 p 在 $\mathsf{st}(\bar{q_1}) \subset \Pi(\Sigma)$ 上是 Π-单射的，$p\hat{}\gamma$是本质的，因此我们只需检查 $p\hat{}\gamma$ 是否简单。特别地，我们注意到 $V(\mathscr{A}(\Sigma',\ell_0))$ 与 $\pi_1(\Sigma', q_0)$ 中的本原元素一一对应；取 a, b 使得 $[p\hat{}\gamma] = a\alpha + b\beta \in \pi_1(\Sigma', q_0)$，并假设 $p\hat{}\gamma$ 不是简单的，或等价地，$[p\hat{}\gamma]$不是本原的。由于 $p\hat{}\gamma$ 不能提升为 Σ中的一个环，a 必为奇数，因此 $\gcd(a, b) = k \geq 3$。取 $\omega \in \pi_1(\Sigma', q_0)$ 使得 $k \cdot \omega = [p\hat{}\gamma]$，于是 $\hat{}\gamma$是 $\hat{}\omega$的 k 个提升的拼接。由于 $\hat{}\omega$ 恰有两个不同的提升，至少有两个提升重合，因此 $\hat{}\gamma$ 不是简单的，这就产生了矛盾。

对于下拟等距界，我们注意到，对于任意 $\eta, \nu \in \operatorname{im} p_*$，$p_*^{-1}(\{\eta, \nu\})$ 中的提升弧两两不相交。因此，任何顶点位于 $\operatorname{im} p_* \subset V(\mathscr{A}(\Sigma',\ell_0))$ 中的路径，都会提升为 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 中的一条路径，且 p_* 是非收缩的。对于上拟等距界，只需证明：若 γ，ρ 是互不相交的 Γ-允许弧，则 $d(p_*\gamma, p_*\rho) \leq 2$。我们先考虑特殊情形：$\gamma = \alpha$ 是 α 的一个提升，且满足 $\alpha_- = q_1$。令 ψ 为交换 q_1, q_2 的覆盖变换。若 $\alpha, p_*\rho$ 不相交，则 α, ρ不相交，但 $\alpha, \psi\rho$不相交这一条件不成立。因此，对某个$m \neq 0$，有 $p_*\rho = \alpha + m\beta$，从而 $p_*\alpha = \alpha$ 和 $p_*\rho$ 都与 β 不相交：断言得证。

我们考虑 $\mathrm{Mod}(\Sigma';q_0)\cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 在 $\pi_1(\Sigma',q_0)$ 上诱导的作用；令 $H=\langle 2\alpha,\beta\rangle<\pi_1(\Sigma',q_0)$，并令 $\mathrm{stab}(H)<\mathrm{Mod}(\Sigma';q_0)$ 表示满足 $\varphi_*(H)=H$ 的映射类子群 φ。$V(\mathscr{A}(\Sigma',\ell_0))$ 对应于 H 和 H^c 中本原元素集合的不交并，分别为：$=\pi_1(\Sigma_1,1,q_0)\setminus H$；我们注意到，$\mathrm{stab}(H)$ 在这两个集合上均以等距变换作用。此外，$\mathrm{im}\,p_*$ 恰好是 H^c中的本原元素集合。要证明 p_* 在一般情形下是 2-利普希茨的，只需证明 $\mathrm{stab}(H)$ 在 $\mathrm{im}\,p_*$ 上传递。特别地，若 γ 是 Σ中的一条 Γ-允许弧，则令 $\varphi\in\mathrm{stab}(H)$ 满足 $\varphi:p_*\gamma\mapsto\alpha$。于是存在一个提升 $\varphi:\Sigma\to\Sigma$，使得 $\varphi:\hat{}\gamma\to\alpha$;注意到 φ 在 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 上以等距变换作用，并且 p_*交织了 φ在 $\mathscr{A}(\Sigma',\ell_0)$ 上的等距作用，因此我们归结到上面的特殊情形。最后，我们验证传递性。令 $\omega=a\alpha+b\beta\in H^c$；注意到 a,b互素且 a为奇数。由于 a,b互素，存在 $c,d\in\mathbb{Z}$使得 $ad-bc=1$。此外，我们可以选择 c为偶数，否则将 c替换为 $c+a$，并将 d替换为 $d+b$。令

$$\varphi=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mod}(\Sigma';q_0)\cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

注意，$\det(\varphi)=ad-bc=1$，且由于 a 为奇数、c 为偶数，$\varphi\in\mathrm{stab}(H)$。$\varphi(\alpha)=a\alpha+b\beta=\omega$，因此按所需方式映射 $\alpha\mapsto\omega$。

只剩下检查 p_* 是否为粗满射。我们证明 $\mathrm{stab}(H)$ 在 H 中的本原元素上具有传递作用，因此 $\mathrm{stab}(H)\setminus V(\mathscr{A}(\Sigma,\ell_0))$ 恰有两个顶点，其中一个的纤维为 $\mathrm{im}\ p_*$：$\mathrm{im}\ p_*$ 在 $V(\mathscr{A}(\Sigma,\ell_0))$ 中是 2- 粗稠密的。设 $\nu=c\alpha+d\beta\in H$ 为本原元素，则 c 为偶数，并且存在 a,b 使得$ad-bc=1$。因此 ad 必须为奇数，a 同样如此。设

$$\xi=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}.$$

如上所述，我们可以验证 $\xi\in\mathrm{stab}(H)$ 和 $\xi:\ \beta\mapsto\nu$。 □

5.2. $\Sigma=\Sigma_0^{n+1}$且 Γ 是一个 n点星，$n\geq 3$。</style}当 Σ 是一个（$n+1$）孔球面且 Γ 是一个 n 点星时，情况与 [Bav16], 中的射线图类似；不过，我们只考虑有限多个穿孔，而不是康托尔集。下面我们重述 Bavard 关于 δ-双曲性的论证，并根据我们的目的作适当简化。

引理 5.4。设 $\Sigma=\Sigma_0^{n+1}$ 和 Γ 是一个以 c 为中心的 n 点星。那么 $\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma)$ 与 $\mathscr{A}(\Sigma,\ell_0)$ 拟等距，其中 ℓ_0 是 c 上的一个环。

证明。只需定义一个拟等距映射 $\xi:\ V(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma))\to V(\mathscr{A}(\Sigma,\ell_0))$。给定一个 Γ-允许弧 $a\in V(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma))$ 的同伦类，我们总是假设其定向满足 $a_-=c$。令 N 为 $\alpha\cup a_+$ 的一个正则邻域，其中 $\alpha\in a$ 是所选的一个代表元；令$\hat{a}$ 表示 ∂N 的同伦类。由于 $n\geq 3$，$\hat{a}$ 是本质的；$\partial\hat{a}=\{c\}$，因此$\hat{a}$ 是一个 ℓ_0-允许弧的同伦类。注意，$\hat{a}$ 独立于 α 和 N 的选择，并令 $\xi:\ a\mapsto\hat{a}$。

若 $\alpha\in a,\beta\in b$ 是不相交的 Γ-允许弧，则我们可以分别选取 $\alpha\cup a_+$ 和 $\beta\cup b_+$ 的正则邻域，使得 $i(\hat{a},b)\leq 2$。因此，根据命题 2.6 $d(\xi a,\xi b)\leq 3$，一般而言 ξ 是 3-利普希茨的。对于拟等距变换的下界，考虑 $a,b\in V(\mathscr{A}(\Sigma,\Gamma))$，使得 $d(\xi a,\xi b)=m$，并令

$u_1 = \xi a, u_2, \dots, u_m = \xi b$ 是互不相同的 ℓ_0-允许弧，它们在 $\mathscr{A}(\Sigma, \ell_0)$ 中构成一条测地路径。我们构造一条由 Γ-允许弧组成的路径 $v_1 = a, v_2, \dots, v_m = b$，位于 $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$ 中，因此 $d(a, b) \leq d(\xi a, \xi b)$，正如所需。

我们注意到，每个 u_i 都将 Σ分隔为两个分别同胚于Σ_0^k,1,Σ_0^{n-k}1的补分支，并且对于 $i \neq 1, m$， u_{i-1}和 u_{i+1} 都必须位于同一分支中：由于(u_i)是测地线， u_{i-1}和 u_{i+1} 不能在$\mathscr{A}(\Sigma, \ell_0)$中相邻，因此必须相交。令 $S_i \subset \Sigma$ 表示包含 u_{i-1} 或 u_{i+1}的 u_i 的补分支；令 S_i' 表示另一个既不包含 u_{i-1} 也不包含 u_{i+1}的分支。我们注意到， S_i 必须包含 Σ 的至少两个边界分支（它们不为 c），否则 S_i 中的每条 ℓ_0-允许的弧都属于 u_i 和 $u_{i-1} = u_i$或 $u_{i+1} = u_i$，这与每个 u_i 都各不相同相矛盾。同样，由于 u_i 是本质的， S_i' 至少包含一个边界分支 $d_i \neq c$；我们还断言，S_i'和 S_{i+1}' 不相交，否则例如 $u_i = \partial S_i' \subset S_{i+1}'$，这与我们对$S_{i+1}'$的选择相矛盾。最后，选取 v_i 为 S_i'中连接 c 和 d_i 的一条弧。由于 S_i' 与 S_{i+1}'不相交， v_i 与 v_{i+1}不相交，并且注意到我们可以选择 $v_1 = a$ 和 $v_m = b$，因为包含 a 的 u_1 的补分支只包含 Σ 的一个边界分支，因此 $a \not\subset S_1$，同样地 $b \not\subset S_m$。（v_i）就是所需的路径。

粗满射性可由类似的论证得出：如上所述，一个（本质的） ℓ_0-允许弧 u 的补分支 S 必须包含 $\partial\Sigma$的至少一个分支$d \neq c$ 。从 c 到 d 、位于 S （内部）中的任意简单弧 α 都是 Γ-允许的，并且具有一个正则邻域 $N \subset S$。因此 $a = [\alpha] \in V(\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma))$，且$\xi a = \hat{a}$ 与 u不相交： ξ 是1-粗满射的。□

根据推论3.6 $\mathscr{A}(\Sigma, \ell_0)$是 δ-双曲的，因此我们可以得出结论， $\mathscr{A}(\Sigma, \Gamma)$同样是 δ-双曲的。//

6. 致谢

作者谨此感谢Mladen Bestvina提供了许多有益的讨论。本研究部分得到了美国国家科学基金会第1840190号资助：犹他大学代数、几何与拓扑学培训研究小组。

References

[AV21] Javier Aramayona 和 Ferr´an Valdez, *On the geometry of graphs associated to infinite-type surfaces*, 2021年。[Bav16] Juliette Bavard, *Hyperbolicité du graphe des rayons et quasi-morphismes sur un grosgroupe modulaire*, 《几何与拓扑》**20** (2016)，第1期，491–535。[BE88] B.H. Bowditch 和 D.B.A. Epstein, *Natural triangulations associated to a surface*, 《拓扑学》**27** (1988)，第1期，91–117。[BNV22] Assaf Bar-Natan 和 Yvon Verberne, *The grand arc graph*, 2022年。[Bow14] Brian H. Bowditch, *Uniform hyperbolicity of the curve graphs*, 《太平洋数学杂志》**269** (2014)，269–280。[Cal09] Danny Calegari, *Big mapping class groups and dynamics*, 博客文章，2009年。[FGM21] Federica Fanoni、Tyrone Ghaswala 和 Alan McLeay, *Homeomorphic subsurfaces and the omnipresent arcs*, 《亨利·勒贝格年刊》**4** (2021)，1565–1593。[Har86] John Harer, *The virtual cohomology dimension of the mapping class group of an ori-entable surface*, 《数学新进展》**84** (1986)，157–176。

[HPW13] Sebastian Hensel、PiotrPrzytycki 和 Richard C. H. Webb, *Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs*, 2013年。[Mos83] Lee Mosher, *Pseudo-anosovs on punctured surfaces*, 博士论文, 普林斯顿, 1983年。[MR20] Kathryn Mann 和 Kasra Rafi, *Large scale geometry of big mapping class groups*, 2020年。[MS13] Howard Masur 和 Saul Schleimer, *The geometry of the disk complex*, 美国数学会杂志 **26** (2013), 第1期, 1–62。[Sch] Saul Schleimer, *Notes on the complex of curves*, `http://homepages.warwick.ac.uk/~masgar/Maths/notes.pdf`。