arXiv:2305.05319v2 [math.PR] 8 Jan 2024

准静态极限下的时空涨落

C´edric Bernardin*, Patricia Gonçalves[2†] 和 Stefano Olla[3, 4, 5†1*]俄罗斯国立高等经济大学数学学院，6 Usacheva，莫斯科，119048，俄罗斯。[2]数学分析、几何与动力系统中心，Instituto Superior T´ecnico，里斯本大学，Av. Rovisco Pais，里斯本，1049-001，葡萄牙。[3]CEREMADE，巴黎多菲纳大学 - PSL 研究大学，Place duMar´echal De Lattre De Tassigny，巴黎，75775 Cedex 16，法国。[4]法国大学研究院，1 rue Descartes，巴黎，75231 Cedex 05，法国。[5]格兰萨索科学研究所，Viale F. Crispi，7，拉奎拉，67100，意大利。

*通讯作者。电子邮箱：cbernard@unice.fr；共同作者：pgoncalves@tecnico.ulisboa.pt；olla@ceremade.dauphine.fr；

†这些作者对本文的贡献相同。

摘要

我们研究准静态标度极限下，开放对称简单排斥过程的时空密度涨落的宏观极限。我们证明，这些涨落的分布收敛于一个高斯时空场，该场在时间上是δ相关的，但在空间上具有长程关联。

关键词：相互作用粒子系统、输运过程、长程关联

数学主题分类：82C22，82C70，60K35

1 引言

考虑一类相互作用粒子的随机动力学，其中唯一的守恒量是粒子数，并且系统处于可逆平稳（平衡态）吉布斯测度下的平衡态 μ_ρ，ρ 表示此处的平均粒子密度。

给定时刻的粒子密度涨落场 t 定义为在宏观尺度上进行空间平均 N。对空间和时间进行扩散重标度后，粒子密度的空间涨落场收敛到一个分布$\mathscr{Y}_t(u)$，预期其随时间遵循无限维朗之万方程演化（第 II.2.9 节）

$$\partial_t \mathscr{Y}_t(u) = \mathcal{D}_\rho \partial_u^2 \mathscr{Y}_t(u) - \sqrt{2\chi_\rho \mathcal{D}_\rho}\partial_u w(t,u), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{D}_\rho$ 是密度为 ρ时的扩散率， χ_ρ 是静态压缩率，而 $w(t,u)$ 是标准时空白噪声。方程（1）应在弱意义下考虑；为简洁起见，我们将其写成一维形式。（1）的唯一平稳分布是上的中心高斯分布，其协方差为

$$\mathbb{E}\left(\mathscr{Y}_t(u)\,\mathscr{Y}_t(v)\right) = \chi_\rho \delta(u-v), \tag{2}$$

对应于平稳吉布斯测度的静态涨落场，其空间关联通常在微观尺度上呈指数衰减。(1) 的解的时间关联呈指数衰减。

本文研究开放系统在时空区域 $\{1,\dots,\overline{N-1}\}\times[0,N^{2+\alpha}T]$ 上的密度时空涨落。当 $\alpha>0$ as $N\to\infty$ 时，这对应于准静态标度极限，此时的时间尺度大于动力学弛豫至平衡态的典型尺度（即满足 $\alpha=0$ [2] 的扩散时间尺度）。

我们期望极限时空场是一个中心高斯场 $\mathbb{Y}(t,u)$，其协方差为

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{Y}(t,u)\mathbb{Y}(s,v)\right) = \chi_\rho \delta(t-s)(-\partial_u^2)^{-1}(u,v), \tag{3}$$

其中 $(-\partial_u^2)^{-1}(u,v)$ 是 $[0,1]$ 上的拉普拉斯算子的格林函数，并满足狄利克雷边界条件。虽然时间上的 δ 相关性是准静态时间尺度的自然结果，但乍看之下，式 (3) 中出现的空间长程相关性或许令人惊讶。

在本文中，我们证明了离散区间 $\{1,\dots,N-1\}$ 上的开放对称简单排斥过程在宏观尺度上的这种行为，并将结果推广到平衡态之外：储库具有相同密度 ρ 的情形之外，我们还考虑密度不同的储库，即左侧密度为 $\rho_-(t)$、右侧密度为 $\rho_+(t)$ 的情形；这些密度随时间在宏观准静态尺度上变化，情形与[2]中所考虑的相同。当 $\rho_\pm$ 不随时间变化时，存在一个稳态，其密度剖面为$\rho(u) = (\rho_+ - \rho_-)u + \rho_-$，并且具有长程关联。该稳态中的静态涨落场在极限 $N\to\infty$ 下的协方差为 [10, 12]

$$\mathbb{E}\left(\mathscr{Y}(u)\,\mathscr{Y}(v)\right) = \chi_{\rho(u)}\delta(u-v) - (\rho_+-\rho_-)^2\,(-\partial_u^2)^{-1}(u,v). \tag{4}$$

其中 $\chi_\rho = \rho(1-\rho)$。当宏观时间 t 处于 [2] 且 $\rho_\pm(t)$ 随时间变化时，也可以得到密度涨落的类似极限。随后，我们证明在这种情况下，时空涨落场收敛于一个中心高斯场，其协方差由 (15)(16) 定义。

尽管与狄利克雷拉普拉斯算子的格林函数相关的长程空间相关性出现在（3）（及其推广（15））以及（4）中，但

这两个结果之间并无直接联系。注意，在时空涨落的协方差（3）中，即使在平衡态（即$\rho_- = \rho_+$），也会出现长程关联；而在稳态下的空间涨落中，只有当$\rho_- \neq \rho_+$时才会出现长程关联。此外，在（3）中，没有空间狄拉克δ关联项，且长程项为正（而在（4）中为负）。

在第2节中，我们介绍所研究的模型，回顾 [2] 中的水动力学极限以及关联函数的估计（这些对得到我们的结果至关重要），并陈述主定理。我们在第3节中给出开放对称简单排斥过程主定理的完整证明，而在第4节中概述将结果推广到其他对称随机动力学（如零程模型）的方法。

我们相信，本文的结果可以轻易推广到多维情形，例如边长为 N的开放正方形。在平衡态下，若边界上的储库密度为 ρ，我们预计宏观时空涨落服从协方差为

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{Y}(t,u)\mathbb{Y}(s,v)\right) = \chi_\rho \delta(t-s)(-\Delta)^{-1}(u,v), \tag{5}$$

其中（$-\delta^2$）$^{-1}$（u，v）是 $[0,1]^d$ 上的拉普拉斯算子的格林函数，满足狄利克雷边界条件。对于边界密度随时间变化的情形以及非平衡态，在合理条件下，我们预计（15）（16）的相应推广应当成立。

另一个有趣的推广是研究非对称动力学中的时空涨落，例如非对称简单排斥过程（ASEP），其准静态极限已有相关结果 [3]。

2 带边界储库的对称简单排斥过程

2.1 模型

设 $\alpha > 0$。我们考虑区间 $\{1,\dots,N-1\}$ 上的对称简单排斥过程 $\{\eta_t\ ;\ \ t \geq 0\}$，粒子以速率$\rho_-(t)$在 $x = 1$ 产生/消亡，并以速率 $\rho_+(t)$在 $x = N-1$产生/消亡。时间非齐次纯跳马尔可夫过程 $\{\eta_{tN^{2+\alpha}}\ ;\ \ t \geq 0\}$ 的生成元，其状态空间为 $\Omega_N = \{0,1\}^{\{1,\dots,N-1\}}$，定义如下

$$\mathscr{L}_{N,t} = N^{2+\alpha}\left(\mathscr{L}_N^0 + \mathscr{L}_{N,t}^{\pm}\right)$$

其中，上述生成元作用于函数 $f\colon\ \Omega^N \to \mathbb{R}$，如下所示

$$(\mathscr{L}_N^0 f)(\eta) = \sum_{x=1}^{N-2}\ \left[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)\right]$$

and

$$(\mathscr{L}_{N,t}^{-} f)(\eta) = \left[1-\rho_-(t)\right]\eta(1)\ \ \left[f(\eta^1) - f(\eta)\right] + \rho_-(t)(1-\eta(1))\ \ \left[f(\eta^1) - f(\eta)\right]$$

and

$$(\mathscr{L}^{+}_{N,t}f)(\eta) = [1-\rho_+(t)]\,\eta(N-1)\,\left[f(\eta^{N-1})-f(\eta)\right] + \rho_+(t)(1-\eta(N-1))\,\left[f(\eta^{N-1})-f(\eta)\right].$$

上面，$\eta^{x,\,y}$ 是通过交换位置 x 和 y处的占据变量，由 η 得到的构型；而 η^{x} 则是通过翻转位置 x处的占据变量，由 η 得到的构型，即:

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{if } z \notin \{x,y\}, \\ \eta(y) & \text{if } z = x, \\ \eta(x) & \text{if } z = y, \end{cases}$$

and

$$\eta^{x}(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{if } y \neq x, \\ 1-\eta(x) & \text{if } y = x. \end{cases}$$

2.2 水动力学极限

证明了 [2] 以下大数定律：若 $\rho_0 : [0,1] \to [0,1]$ 是一个可测剖面，且在初始时刻，（确定性或随机的）初始概率测度 μ_N 在 Ω 上^N 满足

$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1} G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_0(x) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{prob.}} \int_0^1 G(u)\rho_0(u)\,du, \tag{6}$$

对于任意连续函数 $G : [0,1] \to \mathbb{R}$，在任意时刻 $t \geq 0$ 均有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1} G\left(\frac{x}{N}\right)\eta_{tN^{2+\alpha}}(x) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{prob.}} \int_0^1 G(u)\rho_t(u)\,du, \\ &\text{with} \quad \rho_t(u) = (\rho_+(t)-\rho_-(t))\,u + \rho_-(t). \end{aligned} \tag{7}$$

设 μ_N 是 Ω^N 上的一个概率测度，对于 $t \geq 0$，记

$$\rho_t^N(x) := \mathbb{E}_{\mu_N}\left[\eta_{tN^{2+\alpha}}(x)\right], \quad x \in \{1,\dots,N-1\}, \tag{8}$$

其中 $\rho_t^N(0) := \rho_-(t)$，且 $\rho_t^N(N) := \rho_+(t)$。对任意 u、$v \in [0,1]$ 以及 s、$t \geq 0$，定义

$$\varphi^N(u,v;s,t) := \mathbb{E}_{\mu_N}\left[\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}([Nu]) - \rho_s^N([Nu])\right)\left(\eta_{tN^{2+\alpha}}([Nv]) - \rho_t^N([Nv])\right)\right]. \tag{9}$$

我们假设

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{u,v\in[0,1],u\neq v} N|\varphi^N(u,v;0,0)| \lesssim 1 \tag{10}$$

其中，此处及下文中，$\lesssim$ 表示一个成立到与 N 无关的乘法常数因子的等式。

在 [2] 的定理 2.2 中证明了，对于 $u \neq v$ 和 u， $v \notin \{0,1\}$，

$$\lim_{N\to\infty} N\varphi^N(u,v;t,t) = -\left(\rho_+(t)-\rho_-(t)\right)u(1-v) \tag{11}$$

且对于 $t \neq s$

$$\lim_{N\to\infty} N\varphi^N(u,v;s,t) = 0. \tag{12}$$

我们还注意到，由 [10] 中的引理 4.3 以及式（10）可得

$$\sup_{N\geq 1}\max_{x,y\in\{1,\cdots,N-1\},x\neq y} N|\varphi^N\left(\tfrac{x}{N},\tfrac{y}{N};t,t\right)| \lesssim 1. \tag{13}$$

上文使用了 [10] 的证明，该证明可推广到我们的情形，因为我们的相关函数 $\varphi^N(u,v;t,t)$（见式（9），其中 $s=t$）也满足与 [10] 中式（4.5）类似的方程。完全按照 [10] 中引理 4.3 的证明步骤，我们可得（13）。这些细节留给感兴趣的读者。

2.3 主要结果

固定一个 $T>0$，记开集 $\Omega_T=(0,T)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$。我们定义（中心化的）时空分布值随机场 $\mathbb{Y}^N$，其作用于 $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega_T,\mathbb{C})$ 上，定义如下：

$$\mathbb{Y}^N(f) = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{N^{1-\alpha}}}\sum_{x=1}^{N-1} f(t,\tfrac{x}{N})\left(\eta_{tN^{2+\alpha}}(x)-\rho_t^N(x)\right)dt. \tag{14}$$

令 $\mathbb{Y}$ 为取值于时空分布空间的中心高斯场，使得对于任意函数 f， $\mathbb{Y}(f)$ 的方差 $\mathbb{V}(f)$ 由下式给出

$$\mathbb{V}(f) = 2\int_0^T ds\int_0^1 du\ \rho_s(u)(1-\rho_s(u))\left|\partial_u F(s,u)\right|^2 \tag{15}$$

其中 F 是下列方程的解

$$\begin{cases} \left(\partial_u^2 F\right)(t,u) = f(t,u), \quad u\in[0,1], \\ F(t,0)=F(t,1)=0, \end{cases} \tag{16}$$

对所有 $t\in[0,T]$ 均成立。

我们的主要结果如下。

定理1. 序列 $\{\mathbb{Y}^N;\ N\geq 1\}$ 在 $N\to+\infty$ 时依分布收敛至 $\mathbb{Y}$。

备注 1。我们将 $\mathbb{Y}^N$ 定义为 $\mathcal{C}^\infty(\Omega_T,\mathbb{C})$ 的对偶空间中的元素。在分布理论中，通常记作 $\mathcal{E}(\Omega_T,\mathbb{C}) = \mathcal{C}^\infty(\Omega_T,\mathbb{C})$，以及 $\mathcal{D}(\Omega_T,\mathbb{C}) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_T,\mathbb{C})$。从 $\mathcal{E}'(\Omega_T,\mathbb{C})$ 到 $\mathcal{D}'(\Omega_T,\mathbb{C})$ 的限制映射是单射（参见 *[1]*, 第 8 章）。在小节 *3.2* 中，我们证明 $\{\mathbb{Y}^N;\ N\geq 1\}$ 在 Sobolev空间 $\mathscr{H}_{-m,\ -k}\subset\mathcal{E}'(\Omega_T,\mathbb{C})$ 中是紧的。

3 定理1的证明

定理 1 的证明基于两个要素：有限维分布的收敛和紧性。因此，在命题1 中，我们建立了序列 $\{\mathbb{Y}^N(f)\,;\quad N\geq 1\}$ 对 $\mathbb{Y}(f)$ 的依分布收敛，其中任意测试函数f；在引理 2 中，我们证明序列 $\{\mathbb{Y}^N\,;\quad N\geq 1\}$ 在适当的分布 Sobolev空间中是紧的。

3.1 有限维分布的收敛

命题1。 对于任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 以及任意 $f\in C^\infty(\Omega_T,\mathbb{C})$，序列$\{\mathbb{Y}^N(f);\quad N\geq 1\}$依分布收敛于方差为 $\mathbb{V}(f)$ 的中心复高斯随机变量，其中 $\mathbb{V}(f)$ 定义于(15)。

证明。我们首先声称，只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\theta\mathbb{Y}^N(f)\right\}\right)=\exp\left\{-\tfrac{\theta^2}{2}\mathbb{V}(f)\right\} \tag{17}$$

对于实值函数。事实上，若此结论成立，则令 $f\in C^\infty(\Omega_T,\mathbb{C})$ 被分解为——

分解为 $f=g+ih$ 其中 $g,h\in C^\infty(\Omega_T,\mathbb{R})$。因此，对于任意实数$\lambda,\mu$，(17) 对 $\lambda g+\mu h$ 成立，即实随机变量序列

$$\left\{\mathbb{Y}^N(\lambda g+\mu h)=\lambda\mathbb{Y}^N(g)+\mu\mathbb{Y}^N(h)\,;\ N\geq 1\right\}$$

收敛于一个方差为 $\mathbb{V}(\lambda g+\mu h)$ 的高斯随机变量。我们定义

$$\mathbb{V}(g,h)=2\int_0^T ds\int_0^1 du\ \rho_s(u)(1-\rho_s(u))\partial_u G(s,u)\ \partial_u H(s,u) \tag{18}$$

其中， G 和 H 分别是以下方程的解

$$\begin{cases}\left(\partial_u^2 G\right)(t,u)=g(t,u), & u\in[0,1],\\ G(t,0)=G(t,1)=0,\end{cases} \tag{19}$$

对于所有 $t\in[0,T]$，以及

$$\begin{cases}\left(\partial_u^2 H\right)(t,u)=h(t,u), & u\in[0,1],\\ H(t,0)=H(t,1)=0,\end{cases} \tag{20}$$

对所有 $t\in[0,T]$。根据（ $\mathbb{V}$在（15）中给出的定义，不难验证$\mathbb{V}(\lambda g+\mu h)=\lambda^2\mathbb{V}(g)+\mu^2\mathbb{V}(h)+2\lambda\mu\mathbb{V}(g,h)$ 。这意味着随机向量序列

$$\left\{(\mathbb{Y}^N(g),\mathbb{Y}^N(h))\,;\ N\geq 1\right\}$$

依分布收敛到协方差矩阵为.....的中心高斯随机向量

$$\begin{pmatrix} \mathbb{V}(g) & \mathbb{V}(g,h) \\ \mathbb{V}(g,h) & \mathbb{V}(h) \end{pmatrix}.$$

因此，序列 $\{\mathbb{Y}^N(f) = \mathbb{Y}^N(g) + i\mathbb{Y}^N(h);\quad N \geq 1\}$ 依分布收敛于一个方差为的复中心高斯变量（注意，方程（16）的解为 $F = G + iH$）

$$\mathbb{V}(g) + \mathbb{V}(h) = \mathbb{V}(f)$$

这就证明了该结论。现在，还需对实值函数证明（17）。

注意，由（14）可得

$$\mathbb{Y}^N(f) = N^{\alpha/2} \int_0^T dt\ \mathscr{Y}_t^N(f)$$

其中，空间涨落场 $\{\mathscr{Y}_t^N;\quad t \geq 0\}$ 定义在时空函数f：$[0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 上，如下所示

$$\mathscr{Y}_t^N(f) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N-1} f(t, \tfrac{x}{N}) \left(\eta_{tN^{2+\alpha}}(x) - \rho_t^N(x)\right).$$

约定 $\eta_t(0) = \rho_-(t)$ 且 $\eta_t(N) = \rho_+(t)$ 对所有 $t \in [0,T]$成立，我们注意到

$$\mathscr{L}_{N,t}(\eta_t(x)) = N^{\alpha}(\Delta_N \eta_t)(x), \quad x \in \{1, \ldots, N-1\},$$

其中（$\Delta_N \eta_t$）（x）$= N^2$（η_t（$x+1$）$+ \eta_t$（$x-1$）$- 2\eta_t$（x））。特别地，

$$\partial_t \left[\rho_t^N(x)\right] = N^{\alpha}(\Delta_N \rho_t^N)(x), \quad x \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

令 $G: (t,u) \in [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ be 是一个关于时间的可微函数，并满足狄利克雷边界条件，即对于任意 $t \in [0,T]$

$$G(t,0) = G(t,1) = 0.$$

由于 $\Delta_N \rho_s^N(x) = 0$，由 Dynkin公式可知，过程 $\{\mathscr{M}_t^N(G);\quad t \geq 0\}$定义为

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_t^N(G) = {} & \mathscr{Y}_t^N(G) - \mathscr{Y}_0^N(G) \\ & - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N} \partial_s G(s, \tfrac{x}{N})(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x) - \rho_s^N(x)) ds \\ & - N^{\alpha - 1/2} \int_0^t \sum_{x=1}^{N-1} G(s, \tfrac{x}{N}) \left[\Delta_N \left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x) - \rho_s^N(x)\right)\right] ds \end{aligned} \tag{21}$$

是关于 $\{\eta_{tN^{2+\alpha}}$ 的自然滤过的鞅； $t \geq 0\}$。通过进行分部求和，并注意到 G 满足狄利克雷边界条件，我们得到

$$\mathscr{M}_t^N(G) = \mathscr{Y}_t^N(G) - \mathscr{Y}_0^N(G) - \int_0^t \mathscr{Y}_s^N(\partial_s G + N^\alpha \widetilde{\Delta}_N G)ds,$$

其中 $\widetilde{\Delta}_N$ 由下式定义

$$(\widetilde{\Delta}_N G)(u) = N^2\left[G(u+\tfrac{1}{N}) + G(u-\tfrac{1}{N}) - 2G(u)\right], \quad u \in \{\tfrac{1}{N}, \ldots, \tfrac{N-1}{N}\}.$$

由此可得

$$\mathbb{Y}^N\left(\widetilde{\Delta}_N G + N^{-\alpha}\partial_t G\right) = \frac{1}{N^{\alpha/2}}\left\{\mathscr{Y}_T^N(G) - \mathscr{Y}_0^N(G)\right\} - \frac{1}{N^{\alpha/2}}\mathscr{M}_T^N(G). \tag{22}$$

现在令 $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_T, \mathbb{R})$，并对任意 $N \geq 1$考虑函数 $F^N(t, \frac{x}{N})$ $x \in \{0, \ldots, N\}$，它满足有限维线性微分方程

$$\begin{cases} N^{-\alpha}\partial_t F^N(t, \frac{x}{N}) + \widetilde{\Delta}_N F^N(t, \frac{x}{N}) = f(t, \frac{x}{N}), \quad x \in \{1, \cdots, N-1\}, \quad 0 < t < T, \\ F^N(t, 0) = F^N(t, 1) = 0, \\ F^N(T, \cdot) = F(T, \cdot). \end{cases} \tag{23}$$

鞅 $N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N)$ 的二次变差满足

$$\mathbb{V}^N(f) := N\int_0^T \sum_{x=0}^{N-1}\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x) - \eta_{sN^{2+\alpha}}(x+1)\right)^2 \left|F^N\left(s, \tfrac{x+1}{N}\right) - F^N\left(s, \tfrac{x}{N}\right)\right|^2$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{L}^2} 2\int_0^T ds \int_0^1 du\ \rho(s,u)(1-\rho(s,u))\left|\partial_u F(s,u)\right|^2 = \mathbb{V}(f). \tag{24}$$

为证明前述收敛性，我们使用下文证明的（35）。因此，只需证明

$$\int_0^T \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x) - \eta_{sN^{2+\alpha}}(x+1)\right)^2 \left|(\partial_u F)(s, \tfrac{x}{N})\right|^2 ds$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{L}^2} 2\int_0^T \int_0^1 \rho(s,u)(1-\rho(s,u))|(\partial_u F)(s,u)|^2 du ds, \tag{25}$$

但这是 [2] 中定理 3.1 的直接推论。

现在来证明（17）。回顾一下 $F^N(T,\ \cdot)\ = F(T,\ \cdot)$，我们将 22）中的 G替换为 F^N，得到

$$\mathbb{Y}^N(f) = -N^{-\alpha/2}\left[\mathscr{Y}_0^N(F^N) - \mathscr{Y}_T^N(F) + \mathscr{M}_T^N(F^N)\right].$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\exp\{i\theta\mathbb{Y}^N(f)\}\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\left(\mathscr{Y}_0^N(F^N) - \mathscr{Y}_T^N(F)\right)\Big\} - 1\Big)\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N)\Big\}\Big]\\
&+ \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N) + \frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\}\exp\Big\{-\frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\}\Big].
\end{aligned} \tag{26}$$

上一公式右侧第一项的模上界为

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\Big[\Big(\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\left(\mathscr{Y}_0^N(F^N) - \mathscr{Y}_T^N(F)\right)\Big\} - 1\Big)\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N)\Big\}\Big]\Big|\\
&\le \mathbb{E}\Big[\Big|\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\left(\mathscr{Y}_0^N(F^N) - \mathscr{Y}_T^N(F)\right)\Big\} - 1\Big|\Big]\\
&\lesssim |\theta|N^{-\alpha/2}\left(\mathbb{E}\Big[\Big|\mathscr{Y}_0^N(F^N)\Big|\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big|\mathscr{Y}_T^N(F)\Big|\Big]\right)\\
&\le |\theta|N^{-\alpha/2}\sqrt{\mathbb{E}\Big[\Big|\mathscr{Y}_0^N(F^N)\Big|^2\Big]} + |\theta|N^{-\alpha/2}\sqrt{\mathbb{E}\Big[\Big|\mathscr{Y}_T^N(F)\Big|^2\Big]}\\
&\lesssim |\theta|N^{-\alpha/2}\left[N^{-1}\sum_{x,y=1}^{N-1}F^N\big(0,\tfrac{x}{N}\big)F^N\big(0,\tfrac{y}{N}\big)\varphi^N\big(\tfrac{x}{N},\tfrac{y}{N};0,0\big)\right]^{1/2}\\
&+ |\theta|N^{-\alpha/2}\left[N^{-1}\sum_{x,y=1}^{N-1}F^N\big(T,\tfrac{x}{N}\big)F^N\big(T,\tfrac{y}{N}\big)\varphi^N\big(\tfrac{x}{N},\tfrac{y}{N};T,T\big)\right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{27}$$

其中，时空密度关联函数 φ^N 定义见（9）。根据初始条件的假设，见（10），以及引理 1，我们有

$$\begin{aligned}
&N^{-1}\sum_{x,y=1}^{N-1}F^N\big(0,\tfrac{x}{N}\big)F^N\big(0,\tfrac{y}{N}\big)\varphi^N\big(\tfrac{x}{N},\tfrac{y}{N};0,0\big)\\
&\le N^{-2}\sum_{\substack{x,y=1\\x\neq y}}^{N-1}|F^N\big(0,\tfrac{x}{N}\big)||F^N\big(0,\tfrac{y}{N}\big)| + N^{-1}\sum_{x=1}^{N-1}F^N\big(0,\tfrac{x}{N}\big)^2\varphi^N\big(\tfrac{x}{N},\tfrac{x}{N};0,0\big)\\
&\le \left(N^{-1}\sum_{x=1}^{N-1}\big|F^N\big(0,\tfrac{x}{N}\big)\big|\right)^2 + CN^{-1}\sum_{x=1}^{N-1}F^N\big(0,\tfrac{x}{N}\big)^2 = o(N^{\alpha})
\end{aligned} \tag{28}$$

可得，式（26）右端的第一项在 $N \to +\infty$时趋于 0。涉及 $F(T, \cdot)$ 的项可用类似的方法处理，只需注意到 F有界，并在 $t = T$时使用式（13）。

现在来关注（26）中的剩余量：

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N) + \frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\}\exp\Big\{-\frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\}\Big]. \tag{29}$$

上一个公式可改写为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N) + \frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\}\Big(\exp\Big\{-\frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\} - \exp\Big\{-\frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}(f)\Big\}\Big)\Big]\\ &+\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N) + \frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\}\exp\Big\{\frac{-\theta^2}{2}\mathbb{V}(f)\Big\}\Big].\end{aligned} \tag{30}$$

由于上一个公式的第二项中有指数复鞅

$$\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N) + \frac{\theta^2}{2}\mathbb{V}^N(f)\Big\},$$

其期望恒为 1，因此（30）的第二项实际上等于

$$\exp\Big\{-\tfrac{\theta^2}{2}\mathbb{V}(f)\Big\}.$$

接下来需要估计（30）的第一项，并证明当 $N \to +\infty$ 时它趋于零。该项可改写为

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-i\theta N^{-\alpha/2}\mathscr{M}_T^N(F^N)\Big\}\Big(1 - \exp\Big\{\frac{\theta^2}{2}\left[\mathbb{V}^N(f) - \mathbb{V}(f)\right]\Big\}\Big)\Big]. \tag{31}$$

根据不等式 $|1 - e^x| \le |x|e^{|x|}$，再结合 $\mathbb{V}^N(f) \lesssim 1$, $\mathbb{V}(f) \lesssim 1$ 以及（24），证明得以完成。 □

引理 1. 设 $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_T)$ 为实值函数。设 $F(t,u)$ 为拉普拉斯方程的唯一解

$$\begin{cases}\left(\partial_u^2 F\right)(t,u) = f(t,u), \quad u \in (0,1),\ 0 < t < T,\\ F(t,0) = F(t,1) = 0.\end{cases} \tag{32}$$

对于任意 $N \ge 1$，令 $F^N(t, \frac{x}{N})$，$x \in \{0, \dots, N\}$ 为方程的解

$$\begin{cases}N^{-\alpha}\partial_t F^N(t, \frac{x}{N}) + \widetilde{\Delta}_N F^N(t, \frac{x}{N}) = f(t, \frac{x}{N}), \quad x \in \{1, \dots, N-1\}, \quad 0 < t < T,\\ F^N(t,0) = F^N(t,1) = 0,\\ F^N(T, \frac{x}{N}) = F(T, \frac{x}{N}).\end{cases} \tag{33}$$

Then

$$\frac{1}{N}\sum_{z=1}^{N-1}|F^N(0,\tfrac{z}{N})|^2=o(N^\alpha) \tag{34}$$

and

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^T\frac{1}{N}\sum_{z=0}^{N-1}\left|N\left(F^N(t,\tfrac{z+1}{N})-F^N(t,\tfrac{z}{N})\right)-\partial_uF\left(t,\tfrac{z}{N}\right)\right|^2dt=0. \tag{35}$$

证明。注意， F 可以显式计算，结果为

$$F(t,u)=\int_0^u\left(\int_0^v f(t,w)dw\right)dv-u\left(\int_0^1\left(\int_0^v f(t,w)dw\right)dv\right).$$

令 $G^N=F^N-F$和 $\varepsilon^N=N^{-\alpha}\partial_tF-(\partial_u^2-\widetilde{\Delta}_N)F$。那么 G^N满足

$$\begin{cases} N^{-\alpha}\partial_tG^N(t,\frac{x}{N})+\widetilde{\Delta}_NG^N(t,\frac{x}{N})=-\varepsilon^N(t,\frac{x}{N}),\quad x\in\{1,\dots,N-1\},\quad 0<t<T,\\ G^N(t,0)=G^N(t,1)=0,\\ G^N(T,\cdot)=0. \end{cases} \tag{36}$$

将上一个显示式的第一行乘以 G_N，并对 $x\in\{1,\cdots,N-1\}$求和。由于G^N 满足狄利克雷边界条件，我们有

$$\sum_{x=1}^{N-1}G^N(t,\tfrac{x}{N})\widetilde{\Delta}_NG^N(t,\tfrac{x}{N})=-N^2\sum_{x=0}^{N-1}\left(G^N(t,\tfrac{x}{N})-G^N(t,\tfrac{x+1}{N})\right)^2.$$

进行分部求和，并在时间上从 0 积分到 T，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2N^\alpha}\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1}\left[G^N\left(0,\tfrac{x}{N}\right)\right]^2+\int_0^T\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\left[N\left(G^N\left(t,\tfrac{x+1}{N}\right)-G^N\left(t,\tfrac{x}{N}\right)\right)\right]^2\,dt\\ =\int_0^T\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1}\varepsilon^N\Big(t,\tfrac{x}{N}\Big)G^N\left(t,\tfrac{x}{N}\right)\,dt.\end{aligned} \tag{37}$$

现在令 $E^N\colon\ [0,T]\times\left\{0,\frac{1}{N},\dots,1\right\}\to\mathbb{R}$ 为如下定义的函数

$$E^N\left(t,\tfrac{x}{N}\right)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{x}\varepsilon^N\left(t,\tfrac{x}{N}\right).$$

进行分部求和后，我们得到

$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N-1}\varepsilon^N\Big(t,\tfrac{x}{N}\Big)G^N\left(t,\tfrac{x}{N}\right)=-\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}E^N\Big(t,\tfrac{x}{N}\Big)\left[N\left(G^N\left(t,\tfrac{x+1}{N}\right)-G^N\left(t,\tfrac{x}{N}\right)\right)\right]. \tag{38}$$

上面我们再次利用了这样一个事实： G^N 满足狄利克雷边界条件。由于F是光滑的，对于任意 $x \in \{0, \cdots, N-1\}$，我们有

$$|\varepsilon^N\Big(t, \tfrac{x}{N}\Big)| \lesssim N^{-\alpha} + N^{-2},$$

因此，

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \Big[E^N\Big(t, \tfrac{x}{N}\Big)\Big]^2 dt = 0.$$

因此，由柯西–施瓦茨不等式及 (37)，我们得出

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left[N\left(G^N\left(t, \tfrac{x+1}{N}\right) - G^N\left(t, \tfrac{x}{N}\right)\right)\right]^2 dt = 0.$$

由于 F 是光滑的，这意味着 (35)。将此结果代入 (37)，可得

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^\alpha} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} \left[G^N\left(0, \tfrac{x}{N}\right)\right]^2 = 0,$$

并且由于 F 有界，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^\alpha} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N-1} \left[F^N\left(0, \tfrac{x}{N}\right)\right]^2 = 0.$$

□

3.2 紧性

回顾一下， $T > 0$ 是某个固定的有限时间范围。由下式定义的函数序列 $\{\psi_{n,z}；\ n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{N}^*\}$[1]，定义在 $[0,T] \times [0,1]$上

$$\psi_{n,z}(t,u) = \sqrt{2} \exp\left(2i\pi n \tfrac{t}{T}\right) \sin\Big(\pi z u\Big), \quad t \in [0,T], \quad u \in [0,1], \tag{39}$$

构成 $L^2([0,T] \times [0,1])$ 的一组标准正交基。对于任意 $f \in L^2([0,T] \times [0,1])$，ˆ我们将 $f(n,z) = \langle f, \psi_{n,\ z}\rangle$ 记为 f在此基下的傅里叶系数。上文中， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $L^2([0,T] \times [0,1])$ 中的内积。对于 $m, k \in \mathbb{R}$，令 $\mathscr{H}_{m,\ k}$为 $C^\infty(\Omega_T, \mathbb{C})$ 关于内积[2]完备化后得到的希尔伯特空间。

$$\langle f, g\rangle_{m,k} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ z\in\mathbb{N}^*}} (n^2+1)^m z^{2k} \hat{f}(n,z) \hat{g}^*(n,z).$$

[1] $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$： 这里， w^* 表示复数 w的复共轭。

相应的范数记为$\|\cdot\|_{m,\ k}$。那么对于 $m,k\geq 0$，有

$$\mathscr{H}_{-m,-k}\supset L^2([0,T]\times[0,1])\supset\mathscr{H}_{m,k}$$

以及$\mathscr{H}_{-m,\ -k}$可以相对于 $L^2([0,T]\times[0,1])$的内积，识别为$\mathscr{H}_{m,\ k}$的对偶空间。$\mathscr{H}_{-m,\ -k}$中的内积定义为

$$\langle F,G\rangle_{-m,-k}=\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ z\in\mathbb{N}^*}}(n^2+1)^{-m}z^{-2k}\hat{F}(n,z)\hat{G}^*(n,z). \tag{40}$$

并且我们用$\|\cdot\|_{-m,\ -k}$表示相应的范数。

引理 2. 对于 m、 $k>1/2$，序列 $\{\mathbb{Y}^N;\quad N\geq 1\}$ 在$\mathscr{H}_{-m,\ -k}$中是紧的。

证明。我们需要证明的是。

$$\lim_{A\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty}\mathbb{P}_{\mu_N}(\|\mathbb{Y}^N\|_{-m,-k}>A)=0.$$

回顾（40）中的$\|\cdot\|_{-m,\ -k}$-范数定义。由切比雪夫不等式，只要我们证明即可结束证明，即。

$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}_{\mu_N}(\|\mathbb{Y}^N\|^2_{-m,-k})=\sup_{N\geq 1}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ z\in\mathbb{N}^*}}(n^2+1)^{-m}z^{-2k}\,\mathbb{E}_{\mu_N}\left(|\mathbb{Y}^N(\psi_{n,z})|^2\right)<\infty. \tag{41}$$

注意，根据（39）可得

$$\widetilde{\Delta}_N\psi_{n,z}(t,\tfrac{x}{N})+N^{-\alpha}\partial_t\psi_{n,z}(t,\tfrac{x}{N})=\left[2i\pi\tfrac{n}{T}N^{-\alpha}-4N^2\sin^2\left(\tfrac{\pi z}{2N}\right)\right]\psi_{n,z}(t,\tfrac{x}{N}).$$

应用（22），结合$G=\psi_{n,\ z}$我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}^N(\psi_{n,z})&=\frac{1}{2i\pi\frac{n}{T}N^{-\alpha}-4N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}\mathbb{Y}^N\left(\widetilde{\Delta}_N\psi_{n,z}+N^{-\alpha}\partial_t\psi_{n,z}\right)\\&=\frac{1}{2i\pi\frac{n}{T}N^{-\alpha}-4N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}\left[\frac{1}{N^{\alpha/2}}\left\{\mathscr{Y}^N_T(\psi_{n,z})-\mathscr{Y}^N_0(\psi_{n,z})\right\}-\frac{1}{N^{\alpha/2}}\mathscr{M}^N_T(\psi_{n,z})\right].\end{aligned} \tag{42}$$

由（24）可知，鞅 $\frac{1}{N^{\alpha/2}}\mathscr{M}^N_T(\psi_{n,\ z})$的二次变差为

$$8N\sin^2\left(\tfrac{\pi z}{N}\right)\cos^2\left(\tfrac{\pi zx}{N}+\tfrac{\pi z}{2N}\right)\int_0^T\sum_{x=0}^{N-1}\left(\eta_{tN^{2+\alpha}}(x)-\eta_{tN^{2+\alpha}}(x+1)\right)^2dt\lesssim N^2\sin^2\left(\tfrac{\pi z}{N}\right).$$

回顾（13），并按照（28）中的类似论证，我们得出

$$\mathbb{E}\left[\left\{\mathscr{Y}_T^N(\psi_{n,z})-\mathscr{Y}_0^N(\psi_{n,z})\right\}^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[|\mathscr{Y}_0^N(\psi_{n,z})|^2\right]+2\mathbb{E}\left[|\mathscr{Y}_T^N(\psi_{n,z})|^2\right]\lesssim 1. \quad (43)$$

综合前面的界，我们得到

$$\mathbb{E}\left(|\mathbb{Y}^N(\psi_{n,z})|^2\right)\lesssim \frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{N}\right)+N^{-\alpha}}{n^2N^{-2\alpha}+N^4\sin^4\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}. \quad (44)$$

此时我们需要估计

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ z\in\mathbb{N}^*}}\frac{1}{(n^2+1)^m}\frac{1}{z^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{N}\right)+N^{-\alpha}}{n^2N^{-2\alpha}+N^4\sin^4\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}.$$

由对称性，我们根据 $n=0$ 或 $n\neq 0$ 将求和分为两种情况：

$$S_1:=\sum_{z\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{z^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{N}\right)+N^{-\alpha}}{N^4\sin^4\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}.$$

and

$$S_2:=2\sum_{n,z\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n^2+1)^m}\frac{1}{z^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{N}\right)+N^{-\alpha}}{n^2N^{-2\alpha}+N^4\sin^4\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}.$$

首先注意到，对于 $m>1/2$，我们有

$$S_2\lesssim\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n^2+1)^m}\sum_{z\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{z^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi z}{N}\right)+N^{-\alpha}}{N^4\sin^4\left(\frac{\pi z}{2N}\right)}\lesssim S_1,$$

因此，只需估计 S_1。注意，将 $z=2Np+q$ 写出并利用函数 $\sin(\cdot)$ 的周期性，我们有

$$S_1:=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=1}^{2N-1}\frac{1}{(2Np+q)^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi q}{N}\right)+N^{-\alpha}}{N^4\sin^4\left(\frac{\pi q}{2N}\right)}.$$

现在我们将最后一个求和拆分为

$$S_1^A:=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=1}^{N}\frac{1}{(2Np+q)^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi q}{N}\right)+N^{-\alpha}}{N^4\sin^4\left(\frac{\pi q}{2N}\right)}.$$

$$S_1^B:=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=N+1}^{2N-1}\frac{1}{(2Np+q)^{2k}}\frac{N^2\sin^2\left(\frac{\pi q}{N}\right)+N^{-\alpha}}{N^4\sin^4\left(\frac{\pi q}{2N}\right)}.$$

我们从 S_1^B 开始。我们进行变量代换 $r = q - N$ 并使用三角恒等式，得到

$$S_1^B = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{1}{(2Np + r + N)^{2k}} \frac{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi r}{N}\right) + N^{-\alpha}}{N^4 \cos^4\left(\frac{\pi r}{2N}\right)}.$$

现在利用以下事实：对于 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$，有 $\cos(x) \geq x - \frac{\pi}{2}$，从而得到该界。

$$S_1^B \lesssim \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{1}{(2Np + r + N)^{2k}} \frac{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi r}{N}\right) + N^{-\alpha}}{(r - N)^4}.$$

通过变量替换 $v = r - N$，并再次利用函数 $\sin(\cdot)$ 的周期性，我们可以将上式上界估计为

$$S_1^B \lesssim \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{v=-N+1}^{-1} \frac{1}{(2N(p+1) + v)^{2k}} \frac{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi v}{N}\right) + N^{-\alpha}}{v^4}$$

现在，我们将上一个表达式从上方估计为某个常数乘以

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{v=1}^{N-1} \frac{1}{(2Np+1)^{2k}} \frac{v^2 + N^{-\alpha}}{v^4} \lesssim 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2Np)^{2k}} < +\infty$$

其中我们用到了这一事实： $k > 1/2$。最后请注意,

$$S_1^A \lesssim \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{(2Np+q)^{2k}} \frac{q^2 + N^{-\alpha}}{q^4} \lesssim 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{(2Np)^{2k}} \frac{q^2 + N^{-\alpha}}{q^4} < +\infty.$$

证明到此结束。

□

4 推广与讨论

定理1 可轻易推广至平衡态下周期边界条件的情形，即考虑在离散环面上演化的动力学（无储库） $\mathbb{T}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ 从其平衡态出发。由于系统的质量守恒，我们必须将测试函数空间限制为 f满足 $\int_{\mathbb{T}} f(t,u)du = 0$ 对任意 $t \in [0,T]$均成立的函数。这里 $\mathbb{T}$ 表示一维环面。在这种情况下，序列 $\{\mathbb{Y}^N;\ N \geq 1\}$ 收敛到一个场 $\mathbb{Y}$，其时间上为白噪声，并根据核在空间上相关 $\rho(1-\rho)(-\partial_u^2)^{-1}$，其中 ρ 是极限平均密度。

事实上，在周期性条件下处于平衡态时，定理1 也可以类似地证明适用于多种相互作用粒子系统：Kipnis-Marchioro-Presutti 模型

[9], 具有调和势的对称金兹堡–朗道动力学 [8, 13], 对称包含过程 [5], 独立随机游走（即具有线性速率的对称零程过程）和广义排斥过程 [4]。

接下来，我们简要说明如何将主定理推广到平衡态下的一般对称零范围过程。不过，我们的结果仅适用于时间尺度 $tN^{2+\alpha}$ ，其中 $\alpha < 4$。更确切地说，我们考虑一个零范围过程$\{\eta_{tN^{2+\alpha}}$ ； $t \geq 0\}$ ，其状态空间为 $\Omega^N = \mathbb{N}^{\mathbb{T}_N}$ ，生成元 $\mathscr{L}$ 作用于测试函数 $f : \Omega^N \to \mathbb{R}$ ，如下：

$$(\mathscr{L}f)(\eta) = \sum_{\substack{x,y\in\mathbb{T}_N \\ |x-y|=1}} g(\eta(x))\left[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\right].$$

这里 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 必须满足 [7] 中列出的一些技术假设，以确保二阶玻尔兹曼-吉布斯界（48）成立。详情请参阅 [7] 。我们用 ν_ρ 表示密度为 ρ的平衡概率测度。下面考虑 ν_ρ下的平衡态动力学。

我们定义

$$\mathbb{Y}^N(f) = N^{\alpha/2}\int_0^T \mathscr{Y}_t^N(f)dt$$

其中，随机涨落场 $\{\mathscr{Y}_t^N$； $t \geq 0\}$ 作用于一个时空函数f: $[0,T]\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$，该函数满足 $\int_{\mathbb{T}} f(t,u)du = 0$，对任意 $t \in [0,T]$，有：

$$\mathscr{Y}_t^N(f) := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in\mathbb{T}_N} f(t,\tfrac{x}{N})(\eta_{tN^{2+\alpha}}(x) - \rho).$$

Let

$$V_g(\eta(x)) = g(\eta(x)) - \tilde{g}(\rho) - \tilde{g}'(\rho)(\eta(x) - \rho).$$

根据Dynkin公式可知，过程 $\{\mathscr{M}_t^N(F)$； $t \geq 0\}$ 定义为

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_t^N(F) = {} & \mathscr{Y}_t^N(F) - \mathscr{Y}_0^N(F) \\
& - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in\mathbb{T}_N} \partial_s F(s,\tfrac{x}{N})(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x) - \rho)ds \\
& - N^{\alpha-1/2}\int_0^t \sum_{x\in\mathbb{T}_N} \tilde{g}'(\rho)(\widetilde{\Delta}_N F)(s,\tfrac{x}{N})\left[\eta_{sN^{2+\alpha}}(x) - \rho\right]ds \\
& - N^{\alpha-1/2}\int_0^t \sum_{x\in\mathbb{T}_N} (\widetilde{\Delta}_N F)(s,\tfrac{x}{N})V_g\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x)\right)ds
\end{aligned} \tag{45}$$

是关于 $\{\eta_{tN^{2+\alpha}}$ ； $t \geq 0\}$ 的自然滤过的鞅。

令 $\mathbb{T} = [0,1)$ 为单位环面。现在考虑 f: $(t,u) \in [0,T]\times\mathbb{T}\to f(t,u) \in \mathbb{R}$，它是一个满足 $\int_{\mathbb{T}} f(t,u)du = 0$ 的函数，适用于任意 $t \in [0,T]$ ；并且，对于任意 $N \geq 1$，考虑

满足方程的函数 $F^N\colon (t,u)\in[0,T]\times\frac{1}{N}\mathbb{T}_N\to F^N(t,u)\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&N^{-\alpha}\partial_t F^N(t,\tfrac{x}{N})+\tilde{g}'(\rho)\widetilde{\Delta}_N F^N(t,\tfrac{x}{N})=f(t,\tfrac{x}{N}),\quad x\in\{1,\dots,N-1\},\\&F^N(T,\cdot)=0.\end{aligned}\tag{46}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}^N(f)=&-\frac{1}{N^{\alpha/2}}\mathscr{Y}_0^N(F^N)-\frac{1}{N^{\alpha/2}}\mathcal{M}_T^N(F^N)\\&+N^{(\alpha-1)/2}\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}(\widetilde{\Delta}_N F^N)(s,\tfrac{x}{N})V_g\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x)\right)ds\end{aligned}\tag{47}$$

通过改写[6] 注释 11，我们得出，对于任意 $\ell\geq 1$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}(\widetilde{\Delta}_N F^N)(s,\tfrac{x}{N})V_g\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x)\right)ds\right)^2\right]\\&\lesssim\left[\frac{\ell}{N^{2+\alpha}}+\frac{T}{\ell}\right]\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}\left[(\widetilde{\Delta}_N F^N)\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\right]^2ds.\end{aligned}\tag{48}$$

取 $\ell=N^{1+\alpha/2}$ 并利用（46），可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}(\widetilde{\Delta}_N F^N)(s,\tfrac{x}{N})V_g\left(\eta_{sN^{2+\alpha}}(x)\right)ds\right)^2\right]\\&\lesssim N^{-(1+\alpha/2)}\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}\left[(\widetilde{\Delta}_N F^N)\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\right]^2ds\\&\lesssim N^{-(1+\alpha/2)}\left\{\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}\left[f\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\right]^2ds+N^{-2\alpha}\int_0^T\sum_{x\in\mathbb{T}_N}\left[\partial_s F^N\left(s,\tfrac{x}{N}\right)\right]^2ds\right\}.\end{aligned}\tag{49}$$

因此，（ L^2右端第三项的范数平方47）有上界 $N^{\alpha/2-2}$。当且仅当 $\alpha<4$时，它趋于0。证明至此完成。

致谢。P.G. 感谢 FCT/葡萄牙通过项目 UIDB/04459/2020 和 UIDP/04459/2020 提供资金支持。本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟“地平线 2020”研究与创新计划下的资助（资助协议编号：715734）。

声明

• 资助：UIDB/04459/2020、UIDP/04459/2020、ERC n. 715734。

- 利益冲突/竞争性利益：作者声明不存在利益冲突。

- 数据和材料的可用性：不适用。
- 代码可用性：不适用

参考文献

[1] Duistermaat, J.J., Kolk J.A.C.：《分布：理论与应用》，Cornerstones, DOI 10.1007/978-0-8176-4675-2-8，施普林格，（2010）。[2] De Masi, A., Olla, S.：准静态流体力学极限，《统计物理学杂志》，第161卷，1037–1058（2015）。[3] De Masi, A., Marchesani, S., Olla, S., Xu, Lu：非对称简单排斥过程的准静态极限，《概率论及相关领域》，183，1075–1117（2022）。[4] Franceschini, C., Gon̊calves, P., Salvador, B.：具有开放边界的广义对称排斥过程的流体动力学行为，即将发表于《数学物理分析与几何》。[5] Giardin`a, C., Redig, F., Vafayi, K.：具有对偶性的相互作用粒子系统的相关不等式，《统计物理学杂志》141，第2期，242–263（2010）。[6] Gon̊calves, P., Jara, M.：弱非对称相互作用粒子系统的非线性涨落，《理性力学与分析档案》，第212卷，597–644（2014）。[7] Gon̊calves, P., Jara, M., Sethuraman, S.：一类微观相互作用产生的随机伯格斯方程，《概率年刊》，第43卷第1期，286–338（2015）。[8] Guo, M. Z., Papanicolaou, G. C., and Varadhan, S. R. S.：具有最近邻相互作用的系统的非线性扩散极限，《数学物理通讯》118，31–59（1988）。[9] Kipnis, C., Marchioro, C., Presutti, E.：可精确求解模型中的热流，《统计物理学杂志》27，第1期，65–74（1982）。[10] Landim, C., Milanes, A., Olla, S.：边界驱动排斥过程中的定常与非平衡涨落，《马尔可夫过程及相关领域》，第14卷第2期，165–184（2008）。[11] Spohn, H.：《相互作用粒子的大尺度动力学》，施普林格（1991）。[12] Spohn, H.：非平衡稳态下随机晶格气体的长程关联，《物理学杂志 A：数学与通用》16，4275–4291（1983）。

[13] Yau, H.-T.：金兹堡-朗道模型的相对熵与流体动力学。《数学物理快报》22，第1期，63–80（1991）。