arXiv:2305.05326v1 [math.AG] 9 May 2023

某些正交 Deligne–Lusztig 簇的次数

YUTA NAKAYAMA

Abstract. 我们给出一类正交 Deligne–Lusztig 簇及其 Plücker 嵌入的次数公式。这是 Li 关于酉情形的工作的一个类比。

Contents

1. 引言 1 2. 簇与向量丛 3 3. 陈类 8 参考文献 10

1. Introduction

Deligne–Lusztig 簇是定义在某些有限域上的旗簇中具有重要算术意义的子簇。它们起源于 [1] 李型有限群表示的几何构造。它们也出现在 Shimura 簇的特殊纤维中。

在 [3], 中，Li 证明了一类酉 Deligne–Lusztig 簇关于其 Plücker 嵌入的次数公式，其中，纯维数为 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ 的射影簇的次数是其与 $\dim X$ 个一般超平面的几何交数。其证明中的关键内容包括 Tate 猜想的一个特例，以及将 Deligne–Lusztig 簇上的特殊循环与类似的低维簇相识别。该公式与论文中关于 Kudla–Rapoport 猜想的 [4, 引理 6.4.5、6.4.6]有关；该猜想将其视为 Kudla 几何 Siegel–Weil 公式中酉 Shimura 簇常数项公式的有限域类比。事实上，研究这些 Shimura 簇的超奇异轨迹时会出现 Deligne–Lusztig 簇。

本文给出了一个类似于 Li 的公式，适用于 ${}^2D_n$ in [2] 型的 Deligne– Lusztig 簇。该结果，尤其是其证明过程中的命题 3.4，与 [5, 该论文中关于猜想正交变体的第 7.6.5、7.6.6] 条引理有关，正如

2020 年数学主题分类。主分类：11G25；次分类：11G18，14G15

前文所述。在同一篇论文中，作者研究 GSpin 志村簇的超奇异轨迹时也用到了 Deligne–Lusztig 簇。

现在陈述我们的结果。设 p 为奇素数， d 为正整数。令 V 为定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的一个维数为 $2(d+1)$ 的二次空间。假设其二次型非退化且非分裂。令 $\mathrm{OGr}(d, d+1)$ 表示 $\mathbb{F}_{p^2}$ 上两个维数分别为 d 和 $d+1$ 的各向同性子空间 $L_d \subset L_{d+1} \subset V \otimes \mathbb{F}_{p^2}$ 的模空间。它有两个连通分支 $\mathrm{OGr}^{\pm}(d, d+1)$。令 $Y_V^{\pm}$ 表示这些分支中满足以下条件的轨迹：

$$\dim(L_{d+1} + \mathrm{Frob}^* L_{d+1}) = d+2,$$

其中 Frob^* 表示由 p 次幂弗罗贝尼乌斯映射诱导的拉回。

定理 1.1（定理 3.5）。$Y_V^{\pm}$ 经由 L_{d+1} 的 Pl¨ucker 嵌入后的次数为

$$2^d \prod_{i=1}^{d} \frac{-p^i + 1}{-p+1}.$$

我们的证明直接了当，与 [3] 类似，因为它不需要在 [5] 中使用关于局部域的论证。我们借助 Tate 猜想的一个特例，以及所研究的特殊循环和 Deligne–Lusztig 簇的归纳结构。为证明该结果，我们还构建了这些 Deligne–Lusztig 簇的模空间描述，作者未在文献中找到相关描述。该描述对于计算特殊循环的法丛是必要的。进而，我们在过度相交公式中使用该丛。

最后，我们介绍本文的组织结构。在第 2 节中，我们描述所涉及的几何对象，包括 Deligne–Lusztig 簇、它们的特殊循环，以及定义在这些簇上的线丛，例如切丛和法丛。上述关于 $Y_V^+ \amalg Y_V^-$ 的模空间描述也在本节给出。在第 3 节中，我们进行与陈类相关的计算。本文的主要结果也将在本节中给出。

致谢。作者感谢其导师 N. Imai 在整个项目期间给予学术上的支持。作者还感谢 C. Li 就这项工作进行的交流。

1.1. 记号。对于有限集 T，我们用 $\sharp T$ 表示其元素个数。对于环 A 和正整数 n，记号 $\mathrm{M}_n(A)$ 表示 A 上的 $n \times n$ 阶矩阵代数。如果 W 是某个环境二次空间的子空间，则 W 的正交补记为 $W^{\perp}$。如果 $\mathcal{V}$ 是某个概形上的向量丛，则 $V^{\vee}$ 表示其对偶丛。此外，$\mathrm{Gr}(r, \mathcal{V})$ 表示参数化 $\mathcal{V}$ 中秩为 r 的局部直和项的格拉斯曼簇。若模空间函子存在表示对象，则用该对象表示该函子。

如果 $X \to S$ 是概形之间的光滑态射，则 $T_{X/S}$ 表示其切丛。此处及其他地方，我们常省略“Spec”。对于概形之间的正则闭浸入 i，令 N_i 为其法丛。

以下记号取自 $[3, \S1.4]$。设 X 是有限域 k上的光滑射影簇。记号 $\mathrm{Ch}^r(X_{\overline{k}})$表示 $X_{\overline{k}}$上余维为 r 的循环所构成的 Chow 群。若 l 是一个在 k中非零的素数，则 $\mathrm{cl}_r : \mathrm{Ch}^r(X_{\overline{k}})_{\mathbb{Q}} \to H^{2r}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)(r)$表示 l-进循环类映射。余维为 r 的子簇 $Z \subseteq X$ 在 $\mathrm{Ch}^r(X_{\overline{k}})$中的类记为 $[Z]_X$。有时我们简写为 $[Z]$。若 $\mathcal{V}$ 是 X上的向量丛，则 $c_r(\mathcal{V}) \in \mathrm{Ch}^r(X_{\overline{k}})$ 是其第 r 陈类。这些记号也可以表示它们在 $\mathrm{Ch}^r(X_{\overline{k}})_{\mathbb{Q}}$ 中的像。

2. Varieties and vector bundles

我们沿用 $[2, \S3.2]$中的设定。部分记号改为采用 $[5, \S4.7]$中的记法。设 $p > 2$ 是一个素数。取一个非负整数 d。令 V为维数 $2(d+1)$的 $\mathbb{F}_{p}$-向量空间。取一个非退化的非分裂对称形式 $[*, *]\colon V \times V \to \mathbb{F}_{p}$。固定 $V \otimes \mathbb{F}_{p^2}$的一组基 $e_1, \ldots, e_{d+1}, f_1, \ldots, f_{d+1}$，使得 $[e_i, f_j] = \delta_{i,\ j}$ 对于 $1 \leqq i, j \leqq d+1$ 及克罗内克 δ 满足该条件，且 $e_1, \ldots, e_d, f_1, \ldots, f_d \in V$，并且 p次弗罗贝尼乌斯置换 e_{d+1} 和 f_{d+1}。

2.1. Deligne–Lusztig 簇。对于 $0 \leqq r \leqq d+1$，令 $\mathrm{OGr}(r)$ 为从 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形范畴到集合范畴的函子，它将 S映射到 $\mathrm{Gr}(r, V \otimes \mathbb{F}_{p^2})(S)$ 的全各向同性元素集合。该函子由一个光滑的 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形表示，其记号与格拉斯曼簇的情形相同。类似地，令 $\mathrm{OGr}(d, d+1)$ 为光滑的 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形，它表示一个具有相同源和靶的函子，该函子将 S 映射到满足 $\mathcal{L}_r \in \mathrm{OGr}(r)(S)$（对 $d \leqq r \leqq d+1$ 成立）的 $\mathcal{L}_d \subset \mathcal{L}_{d+1}$ 集合。根据 $[2, \text{引理 } 3.4]$,，遗忘函子使我们能够将 $\mathrm{OGr}(d, d+1)$ 视为 $\mathrm{OGr}^+(d, d+1) \amalg \mathrm{OGr}^-(d, d+1)$ 在 $\mathrm{OGr}(d)$ 上的平凡双覆盖。我们约定 $(\langle e_1, \ldots, e_d\rangle, \langle e_1, \ldots, e_{d+1}\rangle) \in \mathrm{OGr}^+(d, d+1)(\mathbb{F}_{p^2})$。

令 $\mathscr{Y}_V$ 为表示从 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形范畴到集合范畴的函子的 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形，该函子将 S 映到满足 $\mathcal{L}_d \subset \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1}$ 且满足如下条件的 $(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{d+1}) \in \mathrm{OGr}(d, d+1)(S)$ 的集合:

$$\mathcal{L}_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1} \subseteq V \otimes \mathcal{O}_S$$

是一个局部直和项，其中 Frob: $S \to S$ 是 p 次幂的 Frobenius。由非分裂条件可知，$\mathcal{L}_{d+1} \neq \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1}$ 在 S 的每一点处成立。

引理 2.1。$\mathbb{F}_{p^2}$-概形 $\mathscr{Y}_V$ 是光滑的。

证明。如下，$\mathscr{Y}_V$ 是形式光滑的。设 $S_0 \to S$ 是仿射 $\mathbb{F}_{p^2}$概形之间的闭浸入，其理想层平方为零。取 $(\mathcal{L}_{0,\ d}, \mathcal{L}_{0,\ d+1}) \in \mathscr{Y}_V(S_0)$。由于 $\mathrm{OGr}(d+1)$ 光滑，存在某个

$\mathcal{L}_{d+1} \in \mathrm{OGr}(d+1)(S)$ 提升了 $\mathcal{L}_{0,\ d+1}$。注意，$\mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1}$ 仅依赖于 $\mathcal{L}_{0,\ d+1}$，因为闭浸入 $S_0 \to S$ 的理想层的 p 次幂为零。由于 $\mathrm{Gr}(d, \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1})$ 光滑，存在某个 $\mathcal{L}'_d \in \mathrm{Gr}(d, \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1})(S)$ 提升了 $\mathcal{L}_{0,\ d}$。此 $\mathcal{L}'_d$ 是全各向同性的。根据[2, 引理 3，4], 存在唯一的 $\mathcal{L}'_{d+1} \in \mathrm{OGr}(d+1)(S)$, 使得 $(\mathcal{L}'_d, \mathcal{L}'_{d+1}) \in \mathrm{OGr}(d, d+1)(S)$ 将 $(\mathcal{L}_{0,\ d}, \mathcal{L}_{0,\ d+1})$ 延拓。

只需证明 $\mathcal{L}'_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}'_{d+1}$ 是 $V \otimes \mathcal{O}_S$ 的局部直和项。通过缩小 S，我们可以假设存在一个截面 $V \otimes \mathcal{O}_{S_0} \to \mathcal{L}_{0,\ d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{0,\ d+1}$。将其提升为 $V \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{L}'_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}'_{d+1}$。它与包含映射的复合

$$\mathcal{L}'_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}'_{d+1} \to V \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{L}'_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}'_{d+1}$$

由中山引理可知是满射。接下来证明单射。由于 $\mathcal{L}_{0,\ d}$ 的正交补是 $\mathcal{L}_{0,\ d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{0,\ d+1}$，因为二者都是 $V \otimes \mathcal{O}_S$ 的局部直和项且秩相同。由中山引理，$\mathcal{L}'_d$ 和 $\mathcal{L}'_{d+1}$ 也具有同样的性质。特别地，$\mathcal{L}'_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}'_{d+1}$ 是一个向量丛。对核应用同一引理，即可得到所需的单射性。□

引理 2.2. 遗忘映射 $\mathscr{Y}_V \to \mathrm{OGr}(d+1)$ 是闭浸入。

证明。首先证明它是单态射。对于一个 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形 S and $(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{d+1}) \in \mathscr{Y}_V(S)$，我们有 $\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_{d+1} \cap \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1}$，因为它们的正交补是 $V \otimes \mathcal{O}_S$ 中秩相同的局部直和项。现在来证明 $\mathscr{Y}_V \to \mathrm{OGr}(d+1)$ 的适当性。我们使用赋值判据。设 R 是 $\mathbb{F}_{p^2}$ 上的一个离散赋值环。取 $L_{d+1} \in \mathrm{OGr}(d+1)(R)$ 和 $(L_{0,d}, L_{d+1} \otimes_R \mathrm{Frac}\, R) \in \mathscr{Y}_V(\mathrm{Frac}\ R)$。令 $L_d := L_{0,d} \cap V \otimes R \subset V \otimes \mathrm{Frac}\, R$。这是一个秩为 d 的自由各向同性 R-模。我们验证 $(L_d, L_{d+1}) \in \mathscr{Y}_V(R)$。条件 $L_d \subset L_{d+1} \otimes_{R, \mathrm{Frob}} R$ 由 $(L_{0,d}, L_{d+1} \otimes_R \mathrm{Frac}\ R)$ 的条件显然成立。剩余条件也很容易验证，例如如下所示。对于一个分裂 $(V \otimes R)/(L_{d+1} \otimes_{R, \mathrm{Frob}} R) \xrightarrow{\sim} M \subset V \otimes R$，我们有 $V \otimes R/(L_{d+1} + L_{d+1} \otimes_{R, \mathrm{Frob}} R) \simeq M/(M \cap L_{d+1})$。右侧无挠，因为 $M \cap L_{d+1} = (M \cap L_{d+1}) \otimes_R \mathrm{Frac}\ R \cap V \otimes R \subset V \otimes \mathrm{Frac}\, R$。□

由引理 2.1 和 2.2，$\mathscr{Y}_V$ 与 $\mathscr{X}$ 中的 [2, §3.2] 相同。

令 $(d, d+1)$, $\mathscr{Y}_V$ 却是通过这些怎样得到的。根据 [2, 命题 3.6]，这些确实是射影且几何不可约的 Deligne–Lusztig 簇。我们固定其中一个 $+$，并且不考虑 $-$，将相应的拉回记作 Y_V。

2.2. 特殊循环。对于 $0 \leqq r \leqq d$，令 $Y_{V,r}$ 为 Y_V 的既约闭子概形，使得

$$Y_{V,r}(k) = \{(L_d, L_{d+1}) \in Y_V(k) \mid L_{d+1}^{(r+1)} = L_{d+1}^{(r+2)}\}$$

对于域 $k \supseteq \mathbb{F}_{p^2}$，其中 $L_{d+1}^{(i)} := L_{d+1} \cap \mathrm{Frob}^* L_{d+1} \cap \cdots \cap (\mathrm{Frob}^i)^* L_{d+1}$，这里 i 为非负整数。我们还记 $Y_{V,\ -1} := \emptyset$。一个描述

通过 Y_V 的 Deligne–Lusztig 子簇给出的 $Y_{V,\,r}$ 见 [2, 命题 3.8]。若 $W \subset V$ 是各向同性子空间，则有一个态射 $j_{W,\,V}\colon Y_{W^\perp/W} \to Y_V$，它将 $Y_{W^\perp/W}(S)$ 中属于一个 $\mathbb{F}_{p^2}$-概形 S 的元素映射为其在映射 $W^\perp \otimes \mathcal{O}_S \to (W^\perp/W) \otimes \mathcal{O}_S$ 下的逆像。

事实上，以下结论与 [6, 命题 5.7]类似成立。

命题 2.3. 对于 $0 \leqq r \leqq d$，$Y_{V,r}\backslash Y_{V,r-1}$ 的不可约分支集合与 V的（$d-r$）维各向同性子空间之间存在唯一的双射，使得对应于 $W \subset V$ 的分支在 Y_V 中的闭包通过上述态射同构于 $Y_{W^\perp/W}$。

由此得到 [5, 定理 6.3.2] 的以下推论。对于素数 $l \neq p$ 和 $0 \leqq r \leqq d$，我们用 $T_l^{2r}(V)$ 表示由 $\mathrm{cl}_r(Y_{W^\perp/W})$ 生成的 $H^{2r}(Y_{V,\,\overline{\mathbb{F}_p}}, \mathbb{Q}_l)(r)$ 的子空间，其中 $W \subset V$ 为 $(d-r)$ 维各向同性子空间。

命题 2.4。Poincar´e 对偶性诱导出一个完美配对

$$T_l^{2r}(V) \times T_l^{2(d-r)}(V) \to \mathbb{Q}_l.$$

2.3. 向量丛。这里我们关注 $N_{j_{W,\,V}}$。它在过度相交公式中发挥着至关重要的作用。记 $(\mathcal{U}_d, \mathcal{U}_{d+1})$ 为 Y_V 上的普遍对象。令 $\mathcal{L}_{Y_V} := \mathcal{U}_{d+1}/\mathcal{U}_d$。注意，对于全各向同性子空间 $W \subset V$，有 $j_{W,\,V}^* \mathcal{L}_{Y_V} \simeq \mathcal{L}_{Y_{W^\perp/W}}$。

命题 2.5。我们有

$$T_{Y_V/\mathbb{F}_{p^2}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{L}_{Y_V}, V \otimes \mathcal{O}_{Y_V}/(\mathcal{U}_{d+1} + \mathrm{Frob}^* \mathcal{U}_{d+1})).$$

证明。左侧是一个 Zariski 层，它将开子集 $S \subseteq Y_V$ 映到开浸入的逆像 $Y_V(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_S[\epsilon]/(\epsilon^2)) \to Y_V(S)$。我们知道，将 $T_{\mathrm{OGr}(d+1)/\mathbb{F}_{p^2}}$ 拉回到 Y_V 后，它与 $\wedge^2(V \otimes \mathcal{O}_S/\mathcal{U}_{d+1})$ 同构；后者是由满足以下条件的截面 l 构成的 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}_{d+1}, V \otimes \mathcal{O}_S/\mathcal{U}_{d+1})$ 的子层

$$[l(u), u'] + [u, l(u')] = 0, \tag{2.6}$$

其中 u 和 u' 是 $\mathcal{U}_{d+1}$ 的截面，并且由于 $\mathcal{U}_{d+1}$ 是各向同性的，配对是良定义的。只需通过最后一个同构，在充分小的仿射 $S \subseteq Y_V$ 上比较命题左右两边的截面即可。

Put

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_d &:= \mathcal{U}_d|_S, \\
\mathcal{L}_{d+1} &:= \mathcal{U}_{d+1}|_S, \\
\mathcal{L} &:= \mathcal{L}_{Y_V}|_S, \\
\mathcal{M} &:= \mathrm{Frob}^* \mathcal{L}_{d+1}/\mathcal{L}_d, \\
\mathcal{M}_d &:= V \otimes \mathcal{O}_S/(\mathcal{L}_{d+1} + \mathrm{Frob}^* \mathcal{L}_{d+1}).
\end{aligned}$$

我们可以假设它们全都是自由的。取分解 $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{d+1}$、$\mathcal{M} \to \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1}$ 和 $\mathcal{M}_d \to V \otimes \mathcal{O}_S$。令 $\mathcal{M}_{d+1} := \mathcal{M}_d \oplus \mathcal{M}$。

令 $\mathcal{L}_{d+1} \in \widetilde{T}_{Y_V/\mathbb{F}_{p^2}}(S)$。这是由某个 $l\colon \mathcal{L}_{d+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{d+1}$ 所确定的。由于 $\epsilon^p = 0$，我们有 $\mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1} = \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[\epsilon]/(\epsilon^2)$。因此，$\mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1}$ 同时包含 $\mathcal{L}_d$ 和 $\mathcal{L}_d \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[\epsilon]/(\epsilon^2)$。我们还拥有 $\mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1} \subset V \otimes \mathcal{O}_S[\epsilon]/(\epsilon^2)$。回想一下，$\mathcal{L}_d$ 由 $\mathrm{id}_{\mathcal{L}_d} + \epsilon l|_{\mathcal{L}_d}$ 的像生成。最后三句话意味着 $l(\mathcal{L}_d) \subseteq \mathcal{M}$。根据这一点、$\mathcal{L} \times \mathcal{M}$ 上 $[*,*]$ 的完美性，以及关于 $\mathcal{L}_d$ 和 $\mathcal{L}$ 的截面的 (2.6)，

$$l|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}_{d+1} \cap \mathcal{L}^\perp \simeq \mathcal{L}_d^\vee \simeq V \otimes \mathcal{O}_S/(\mathcal{L}_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{L}_{d+1})$$

也了解 $l|_{\mathcal{L}_d}$。

这意味着，通过关于 OGr($d+1$) 的类似同构，命题左侧包含于右侧。比较秩，并注意到两侧都是已知同构两侧的局部直和项，即可得到该命题。□

推论 2.7。我们有 $N_{j_{W,V}} \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_{Y_{W^\perp/W}}, (V/W^\perp) \otimes \mathcal{O}_{Y_{W^\perp/W}})$。

证明。注意以下短正合列

$$0 \to T_{Y_{W^\perp/W}/\mathbb{F}_{p^2}} \to j_{W,V}^* T_{Y_V/\mathbb{F}_{p^2}} \to N_{j_{W,V}} \to 0.$$

该推论由命题 2.5 中序列左项和中项的相容同构，以及同构 $j_{W,V}^*\mathcal{L}_{Y_V} \simeq \mathcal{L}_{Y_{W^\perp/W}}$ 得出。□

例 2.8。在 $d = 1$ 的情形下，我们手算 $\mathcal{L}_{Y_V}$。取一个 $\mathbb{F}_p$ 中不是某个元素平方的 $a \in \mathbb{F}_p$。再取满足 $b^2 = a$ 的 $b \in \mathbb{F}_{p^2}$。存在 V 的一组基 $X_1, \dots, X_4$，使得

$$[x_1X_1 + \cdots + x_4X_4, x_1X_1 + \cdots + x_4X_4] = x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 - x_4^2$$

对于 $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{F}_p$ 以及

$$\begin{aligned} e_1 &= X_1 + X_2 \in V, \\ f_1 &= \frac{X_1 - X_2}{2} \in V, \\ e_2 &= X_3 \otimes b^{-1} + X_4 \otimes 1 \in V \otimes \mathbb{F}_{p^2}, \\ f_2 &= \frac{X_3 \otimes b^{-1} - X_4 \otimes 1}{2} \in V \otimes \mathbb{F}_{p^2}. \end{aligned}$$

我们考虑 Spin(V)。令 $\mathrm{Cl}^0(V)$ 为 V 的偶克利福德代数。其中心为 $\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p X_1 \cdots X_4$，通过携带 $X_1 \cdots X_4$ 与 $\mathbb{F}_{p^2}$ 同构。

到 b。此外，$\mathrm{Cl}^0(V)$ 与代数 $M_2(\mathbb{F}_{p^2})$ 同构，且

$$X_1X_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X_1X_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, X_1X_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_2X_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2X_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3X_4 \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

我们将同构两侧对应起来。令 $\Gamma^0 \subset \mathrm{Cl}^0(V)$ 为偶克利福德群。我们也将其视为 $\mathbb{F}_p$ 上的一个代数群。考虑在某个代数上定义的 Γ^0 的一个截面，其旋量范数由其行列式给出。因此，$\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Res}^{\mathbb{F}_{p^2}/\mathbb{F}_p} \mathrm{SL}_2$, ，注意到 Dynkin 图的例外同构 $D_2 \simeq A_1 \times A_1$。

我们通过.....将 V 嵌入到 $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}_{p^2})$ 中。

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_3 \mapsto \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, X_4 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

最后一个 $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}_{p^2})$ 与 $\mathrm{Cl}^0(V)$ 无关。通过嵌入，Γ^0 在 V 上的作用转化为 $\gamma v = \mathrm{Frob}({}^t\gamma)^{-1} v {}^t\gamma$。这意味着 $\mathrm{Spin}(V)^{\mathbb{F}_{p^2}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2^2$ 通过 $(\alpha, \beta)v = {}^t\beta^{-1} v \alpha$ 作用于 $V \otimes \mathbb{F}_{p^2} \simeq \mathrm{M}_2$。

关于 $\mathrm{SO}(V)^{\mathbb{F}_{p^2}}$，回顾 [2, §3.2] 中的 Borel 子群和极大抛物子群

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}(V)^{\mathbb{F}_{p^2}}}(\mathbb{F}_{p^2}e_1) \\ \subset P^+ &= \mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}(V)^{\mathbb{F}_{p^2}}}(\mathbb{F}_{p^2}e_1 \oplus \mathbb{F}_{p^2}e_2). \end{aligned}$$

令 B' 和 P'^+ 分别为 B和 P^+在 $\mathrm{Spin}(V)^{\mathbb{F}_{p^2}} \to \mathrm{SO}(V)^{\mathbb{F}_{p^2}}$ 下的原像。前者是两个行列式为 1 的下三角矩阵群副本的乘积。后者是同一矩阵群与 SL_2的乘积。类似地，我们回顾并定义P^- 和 P'^-，将 e_2 替换为 f_2。我们的 P'^- 调换了 P'^+中直积的顺序。由于 [2, 命题 3.6], 的证明，在我们的情形中，Y_V^+ 是 $\mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{Spin}(V)_{\mathbb{F}_{p^2}}/P'^+ \to \mathrm{Spin}(V)_{\mathbb{F}_{p^2}}/P'^- \simeq \mathbb{P}^1$的图像，其中箭头是相对弗罗贝尼乌斯。此外，$\mathcal{L}_{Y_V^+}$ 是从 $\mathrm{OGr}^+(1,2) \simeq \mathrm{Spin}(V)_{\mathbb{F}_{p^2}}/B' \simeq (\mathbb{P}^1)^2$拉回的。我们计算 $\mathrm{Spin}(V)_{\mathbb{F}_{p^2}}/B'$上的向量丛。一个截面

$$\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & p^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p' & 0 \\ q' & p'^{-1} \end{pmatrix} \right)$$

在某个代数上考虑的 B' 作用于纤维 $\langle e_1, e_2 \rangle / \langle e_1 \rangle$ 将 e_2 映到

$${}^t\begin{pmatrix} p' & 0 \\ q' & p'^{-1} \end{pmatrix}^{-1} e_2 \, {}^t\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & p^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2p^{-1}q' \\ 0 & -2p^{-1}p' \end{pmatrix} = p^{-1}p'e_2$$

模 e_1 后位于同一纤维中。因此，线丛为 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\otimes\mathrm{pr}_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$，其中 pr_i 是 $i=1$ 的第 i 个投影，2。将其拉回得到 $\mathcal{L}_{Y_V^+}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-1)$。我们还有 $\mathcal{L}_{Y_V^-}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-1)$，将 $\langle e_1、f_2\rangle$ 代入 $\langle e_1、e_2\rangle$。

3. Chern classes

这里我们讨论 Kudla 几何 Siegel–Weil 公式中 GSpin 志村簇的次数公式以及常数项公式的有限域版本。论证依赖于特殊循环的归纳结构。我们假设 $d>0$。我们将 $Y_{V,\overline{\mathbb{F}_p}}$ 及其特殊循环的顶维有理 Chow 群与 $\mathbb{Q}$ 识别。

引理 3.1. 设 $W\subset V$ 是一个 $(d-1)$ 维各向同性子空间。那么 $c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^\vee)[Y_{W^\perp/W}]=-p+1$ 属于 $\mathrm{Ch}^d(Y_{V,\overline{\mathbb{F}_p}})_{\mathbb{Q}}$。

证明。根据投影公式和例 2.8，

$$c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^\vee)[Y_{W^\perp/W}]=j_{W,V,*}(c_1(j_{W,V}^*\mathcal{L}_{Y_V}^\vee))=j_{W,V,*}(c_1(\mathcal{L}_{Y_{W^\perp/W}}^\vee))=-p+1.$$

□

命题 3.2. 我们在 $\mathrm{Ch}^1(Y_{V,\overline{\mathbb{F}_p}})_{\mathbb{Q}}$ 中有

$$c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^\vee)=\frac{-p+1}{p^{d+1}+1}\sum_{W\in\mathbb{P}(V)\text{ isotropic}}[Y_{W^\perp/W}].$$

证明。当 $d=1$ 时，该命题由例 2.8 和 [5, 推论 3.2 得出，3]，由此可知 V 中各向同性直线的数量为 p^2+1。

下面讨论 $d>1$ 的情形。由命题 2.4，只需证明：若 $W'\subset V$ 是维数为 $d-1$ 的等距空间，则

$$c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^\vee)[Y_{W'^\perp/W'}]=\frac{-p+1}{p^{d+1}+1}\sum_{W\in\mathbb{P}(V)\text{ isotropic}}[Y_{W^\perp/W}][Y_{W'^\perp/W'}]. \tag{3.3}$$

右侧各项分别有三种情形。

(1) 首先讨论 $W\subseteq W'$ 的情形。结合过度相交公式、推论 2.7 和引理 3.1，

$$\begin{aligned}[Y_{W^\perp/W}][Y_{W'^\perp/W'}]&=j_{W,V,*}(c_1(N_{j_{W,V}})[Y_{W'^\perp/W'}]_{Y_{W^\perp/W}})\\&=j_{W,V,*}(c_1(\mathcal{L}_{Y_{W^\perp/W}}^\vee)[Y_{W'^\perp/W'}]_{Y_{W^\perp/W}})=-p+1.\end{aligned}$$

(2) 其次，我们处理 $W\oplus W'\subset V$ 为各向同性的情况。此时 $Y_{W^\perp/W}\times_{Y_V}Y_{W'^\perp/W'}=Y_{W^\perp\cap W'^\perp/W\oplus W'}\simeq\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_{p^2}$。因此 $[Y_{W^\perp/W}][Y_{W'^\perp/W'}]=1$。(3) 最后，考虑 $W\oplus W'\subset V$ 不是各向同性的情况。此时 $[Y_{W^\perp/W}][Y_{W'^\perp/W'}]=0$，因为相应的交为空。

(1) 中 W的数量为 $\sharp\mathbb{P}(W') = (p^{d-1}-1)/(p-1)$。(2) 中相应的数量是各向同性的 $W \in \mathbb{P}(W'^{\perp}/W')$ 的数量乘以 $\sharp W'$。根据 [5, 推论 3.2.3]，这等于 $(p^2+1)p^{d-1}$。因此，(3.3) 的右侧为

$$\frac{-p+1}{p^{d+1}+1}\left(\frac{p^{d-1}-1}{p-1}(-p+1)+(p^2+1)p^{d-1}\cdot 1\right) = -p+1.$$

根据引理 3.1，这就是左边。 □

命题 3.4. 我们在 $\mathrm{Ch}^d(Y_{V,\overline{\mathbb{F}_p}})_{\mathbb{Q}}$ 中有

$$c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^{\vee})^d = \prod_{i=1}^{d}(-p^i+1).$$

证明。我们对 d 进行归纳。当 $d=1$ 时，结论由例 2.8 得出。当 $d>1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^{\vee})^d &= \frac{-p+1}{p^{d+1}+1}c_1(\mathcal{L}_{Y_V}^{\vee})^{d-1}\sum_{W\in\mathbb{P}(V)\text{ isotropic}}[Y_{W^{\perp}/W}] \\ &= \frac{-p+1}{p^{d+1}+1}\sum_{W\in\mathbb{P}(V)\text{ isotropic}} j_{W,V,*}(c_1(\mathcal{L}_{Y_{W^{\perp}/W}}^{\vee})^{d-1}) \\ &= \frac{-p+1}{p^{d+1}+1}\frac{(p^{d+1}+1)(p^d-1)}{p-1}\prod_{i=1}^{d-1}(-p^i+1) = \prod_{i=1}^{d}(-p^i+1), \end{aligned}$$

其中，第一个等号由命题 3.2 得出，第二个等号由投影公式得出，第三个等号由 [5, 推论 3.2.3] 以及归纳假设得出。□

定理 3.5. Y_V 通过 $\mathcal{U}_{d+1}$ 的 Pl ¨ucker 嵌入表示时，其次数为

$$2^d\prod_{i=1}^{d}\frac{-p^i+1}{-p+1}.$$

证明。与引理 2.1 的证明一样，我们有 $\mathcal{U}_d^{\perp} = \mathcal{U}_{d+1} + \mathrm{Frob}^*\mathcal{U}_{d+1}$。结合 $\mathcal{U}_d^{\perp} \simeq (V\otimes\mathcal{O}_{Y_V}/\mathcal{U}_d)^{\vee}$，可得：

$$\begin{aligned} 0 =& c_1(\mathcal{U}_d^{\perp}) - c_1(\mathcal{U}_d) = c_1(\mathcal{U}_{d+1}+\mathrm{Frob}^*\mathcal{U}_{d+1}) - c_1(\mathcal{U}_d) \\ =& c_1(\mathrm{Frob}^*\mathcal{U}_{d+1}/\mathcal{U}_d) + c_1(\mathcal{U}_{d+1}) - c_1(\mathcal{U}_d) = (p+1)c_1(\mathcal{U}_{d+1}) - 2c_1(\mathcal{U}_d). \end{aligned}$$

这意味着

$$c_1(\mathcal{L}_{Y_V}) = c_1(\mathcal{U}_{d+1}) - c_1(\mathcal{U}_d) = \frac{-p+1}{2}c_1(\mathcal{U}_{d+1}).$$

通过嵌入到 $\mathbb{P}^N$ 中的 Pl¨ucker 嵌入，依据投影公式和命题 3.4,

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))^d[Y_V] = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_{Y_V})^d = c_1(\det \mathcal{U}_{d+1}^\vee)^d = c_1(\mathcal{U}_{d+1}^\vee)^d$$
$$= 2^d \prod_{i=1}^{d} \frac{-p^i+1}{-p+1}.$$

□

References

1. P. Deligne 和 G. Lusztig，《有限域上约化群的表示》，《数学年刊》（第 2 辑）103（1976），第 1 期，103–161。MR 393266 2. B. Howard 和 G. Pappas，关于 GU(2, 2) 志村簇的超奇异轨迹，《代数与数论》8（2014），第 7 期，1659–1699。MR 3272278 3. C. Li，酉 Deligne–Lusztig 簇的次数，arXiv:2301.08886v1（2023）。4. C. Li 和 W. Zhang，Kudla-Rapoport 周期与局部密度的导数，《美国数学会杂志》35（2022），第 3 期，705–797。MR 4433078 5. ，关于 GSpin 志村簇的算术 Siegel-Weil 公式，《数学发明》228（2022），第 3 期，1353–1460。MR 4419634 6. M. Rapoport、U. Terstiege 和 S. Wilson，分歧素数上 GU(1, $n-1$) 的志村簇的超奇异轨迹，《数学杂志》276（2014），第 3–4 期，1165–1188。MR 3175176 7. I. Vollaard 和 T. Wedhorn，GU(1, $n-1$) 的志村簇的超奇异轨迹 II，《数学发明》184（2011），第 3 期，591–627。MR 2800696 Yuta Nakayama 数理科学研究科，东京大学，3-8-1 驹场，目黑区，东京，153-8914，日本 nkym@ms.u-tokyo.ac.jp