arXiv:2305.05353v1 [cs.DS] 9 May 2023

未知拟阵时随机赋值拟阵秘书问题的常数竞争性*

Richard Santiago‡ Ivan Sergeev§ Rico Zenklusen ¶

摘要

拟阵秘书猜想是在线优化领域一个著名的公开难题。该猜想声称，存在一种 $O(1)$-竞争算法，可用于拟阵秘书问题（MSP）。在该问题中，加权拟阵的元素逐个出现，并在出现时揭示其权重；任务是在线选择元素，以获得权重尽可能大的独立集。迄今为止， $O(1)$-竞争的 MSP 算法仅针对受限的拟阵类别以及 MSP 的变体取得，其中包括随机赋值MSP（RA-MSP）：对手先确定数量与拟阵底集大小相等的一组权重，再将这些权重随机分配给底集中的元素。遗憾的是，这些方法在很大程度上依赖于预先知道完整拟阵。这一要求可以说并不理想，而且有充分理由认为，解决 MSP 猜想的途径不应依赖于这一点。因此，Soto [在 SIAM计算杂志 2013] 以及 Oveis Gharan 和 Vondr´ak[在 Algorithmica 2013] 均提出一个公开问题：即使事先不知道拟阵，RA-MSP 是否仍存在一种 $O(1)$-竞争算法?

在这项工作中，我们对这一问题给出了肯定的回答。我们的结果使 RA-MSP 成为首个已知的 MSP 变体：它具有一个 $O(1)$-竞争性算法，该算法无需预先了解底层拟阵，且对底层拟阵没有任何限制。我们的方法首先近似学习拟阵的秩密度曲线，然后以算法方式加以利用。

1 引言

Babaioff、Immorlica 和 Kleinberg 提出的拟阵秘书问题（MSP） [BIK07],是经典秘书问题 [Dyn63], 一种自然且广为人知的推广，源于其与机制设计之间的紧密联系及其应用。形式上，MSP 是一个在线选择问题：给定一个拟阵$\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$, [1] 其中元素的权重未知 w: $N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 这些元素按均匀随机顺序逐个出现。每当一个元素出现时，它就会揭示其权重，而我们必须立即且不可撤销地决定是否选择它。目标是选出一个元素集合 $I \subseteq N$，使其 (i) 独立，即 $I \in \mathcal{I}$，且 (ii) 权重为 $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$

*本项目获得瑞士国家科学基金会资助（项目编号 200021 184622），并获欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划资助（资助协议编号 No817750）。

‡苏黎世联邦理工学院数学系，瑞士苏黎世。电子邮箱：rtorres@ethz.ch。§苏黎世联邦理工学院数学系，瑞士苏黎世。电子邮箱：isergeev@ethz.ch。

¶苏黎世联邦理工学院数学系，瑞士苏黎世。电子邮箱：ricoz@ethz.ch。[1]拟阵 M 是一对 M $= (N, \mathrm{I})$，其中 N 是有限集合，且 I $\subseteq 2^N$ 是满足以下条件的非空族：1）若$A \subseteq B$ 且 $B \in \mathrm{I}$，则 $A \in \mathrm{I}$；2）若 A、$B \in \mathrm{I}$ 且 $|B| > |A|$，则存在 $\exists e \in B \setminus A$，使得 $A \cup \{e\} \in \mathrm{I}$。

Swiss National Science Foundation

尽可能大。该领域的核心挑战是解决著名的拟阵秘书问题（MSP）猜想：

猜想1.1 ([BIK07])。 存在一个 $O(1)$-竞争性算法用于 *MSP*。

目前已知用于 MSP 的最佳过程具有 $O(\text{loglog}(\text{rank}(\mathcal{M})))$-竞争比 [Lac14； FSZ18]，其中 $\text{rank}(\mathcal{M})$ 是拟阵 $\mathcal{M}$的秩，即最大独立集的基数。

尽管 MSP 猜想仍未解决，但该领域的大量研究已为问题的各种变体和受限情形带来了常数竞争算法。这包括针对特定拟阵类别的常数竞争算法 [BIKK18; KP09; IW11; Sot13; JSZ13; MTW13; DP12; KRTV13; DK13]。此外，对于问题的自然变体，Soto[Sot13] 证明，在所谓的随机分配拟阵秘书问题（简称 RA-MSP）中可以实现常数竞争性。在这种设定下，对手选择 $|N|$ 权重，然后将其均匀随机地分配给拟阵的底集元素 N 。（Soto 的结果后来由 Oveis Gharan 和 Vondr´ak [OV13] 推广到元素到达顺序由对手决定、而非均匀随机的情形。）自由顺序模型中也存在常数竞争算法，在该模型下，算法可以选择元素出现的顺序 [JSZ13]。

值得注意的是，此前针对 MSP 特殊情形及变体的常数竞争算法所取得的进展，其一个关键特点在于，这些算法高度依赖于事先获知拟阵$\mathcal{M}$ 的完整信息。Soto 在 RA-MSP 方面的工作也充分利用了这一点。事实上，如果事先无法完整获知拟阵，目前尚无任何一种自然的 MSP 变体已知存在常数竞争算法。

对预先知晓拟阵 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 的高度依赖（除其规模 $|N|$外）是不利于推进 MSP猜想的，因为通过添加零权重元素，很容易破坏一个 MSP 实例。毫不意外的是，所有先前在一般 MSP 猜想方面取得的进展，例如上述 $O(\text{loglog}(\text{rank}(\mathcal{M})))$-竞争性算法 [Lac14；FSZ18]以及更早的过程 [BIK07；CL12], 都只需要预先知晓 $|N|$ ，并对迄今为止已揭示的元素调用独立性预言机。因此，对于 RA-MSP， [Sot13] 和 [OV13], 均提出了一个开放性问题：在不预先知晓拟阵的情况下，是否存在常数竞争算法。本文的核心贡献是对此问题给出了肯定的回答，使随机分配设置成为首个已知存在常数竞争算法、且无需预先知晓拟阵，也不对底层拟阵施加任何限制的 MSP 变体。

定理 1.2. 对于 *RA-MSP*，即使事先只知道拟阵的基数，也存在一种常数竞争算法。

此外，我们的结果适用于更一般的带样本的对抗性顺序 设置：在这种设置下，我们可以随机抽取一部分元素，其比例为某个常数，其余所有（未抽取的）元素则按对抗性顺序到达。

如前所述，当事先完全知道拟阵时，即使所有元素的到达顺序都是对抗性的，RA-MSP 也已存在一个 O竞争比为 (1) 的算法 [OV13]。有趣的是，对于这种设置，已知若事先不知道拟阵，则不存在常数竞争算法。更具体地说，文献中证明了竞争比的下界为 $\Omega(|N|/\log\log|N|)$ [OV13]。

论文组织结构我们首先在第 2 节简要讨论（拟阵）密度在随机分配模型中的作用，因为我们的算法高度依赖密度。将拟阵分解为密度不同的若干部分，一直是 RA-MSP 相关研究取得进展的核心。然而，这种方法关键在于事先知道拟阵。我们使用第第 3.1 节引入的秩密度曲线；它同样无法事先得知，但我们证明，

通过观察随机常数比例的元素，可以在近似意义上（以一种定义明确的方式）学习这条曲线。第3节概述了我们基于秩密度曲线的方法，并介绍了推导定理 1.2所需的主要组成部分。第4节进一步探讨秩密度曲线，并展示其一些有用性质。第 5 节介绍了主要技术工具，该工具使我们能够根据样本集近似秩密度曲线。最后，第6节将这些组成部分结合起来，给出最终的算法及其分析。

我们强调，我们主要致力于提供一个简单的算法和分析，而不是为了优化我们过程的竞争比而使表述复杂化。

我们假设所有拟阵都是无环的，即每个元素本身都是独立的。这不会造成任何损失，因为在拟阵秘书问题中，可以直接忽略自环。

2 随机分配拟阵秘书问题和密度

MSP 算法设计与分析中的一个主要挑战，是如何保护较重的元素（或离线最优值中的元素），避免它们被算法执行期间较早选中的较轻元素张成。然而，在随机分配设置中，权重被均匀随机地分配给元素，这使我们能够将重点从基于元素权重保护元素，转移到基于元素在拟阵结构中的作用来保护元素。直观地说，未来到达的元素如果属于基数较大且秩较小的拟阵区域（“稠密”区域），则比属于基数较小且秩较大的区域（“稀疏”区域）更有可能被算法此前的选择张成。

这可以通过密度的概念形式化地刻画：拟阵$\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$中集合 $U \subseteq N$ 的密度为 $|U|/r(U)$，其中 r: $2^N \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是$\mathcal{M}$ 的秩函数。[2]

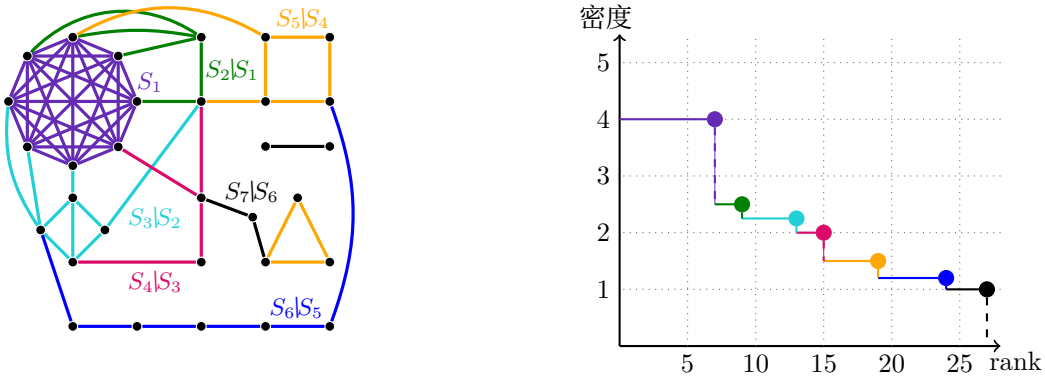
密度在 RA-MSP 中起着至关重要的作用 [Sot13；OV13]。事实上，先前的方法将$\mathcal{M}$ 分解为其主序列，即 $\emptyset \subsetneq S_1 \subsetneq \ldots \subsetneq S_k = N$密度递减的集合链，构造方式如下。 $S_1 \subseteq N$ 是$\mathcal{M}$ 的最稠密集合（若存在并列，则取唯一的极大最稠密集合）， S_2 是 S_1 与收缩$\mathcal{M}$中的 S_1后所得拟阵中的最稠密集合的并集，依此类推，直到得到集合 S_k，满足 $S_k = N$。图 1a 展示了一个图拟阵主序列的示例。

先前的方法随后针对每个 $i \in [k] := \{1, \ldots, k\}$，分别考察拟阵 $\mathbf{M}_i := (\mathbf{M}/S_{i-1})|_{S_i \setminus S_{i-1}}$，即先对 S_{i-1} 进行收缩，再限制到 $S_i \setminus S_{i-1}$ 所得到的拟阵 M。（按照惯例，令 $S_0 := \emptyset$。）这些拟阵也称为 M 的主子拟阵。对于每个主子拟阵中的一个独立集，它们的并集保证是原拟阵 M 中的独立集。先前的方法（详见 [Sot13] ）随后利用了主子拟阵 $\mathbf{M}_i$ 的以下两个关键性质：

(i) $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{M}_i))] = \Omega(\mathbb{E}[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{M}))])$，其中 OPT($\mathcal{M}$)（类似地，OPT($\mathcal{M}_i$)）是 $\mathcal{M}$ 中的（离线）最大权独立集，期望是对所有随机权重赋值取的。（ii）每个拟阵 $\mathcal{M}_i$ 都是均匀稠密的，这意味着$\mathcal{M}_i$ 中（唯一的极大）最稠密集合就是$\mathcal{M}_i$ 的整个底集。

性质 (i) 保证了，要获得一个 O（1）-竞争过程，只需与拟阵$\mathcal{M}_i$的（离线）最优解进行比较。将此与性质 (ii) 结合可知，只需为均匀稠密拟阵设计一个常数竞争算法。由于均匀稠密拟阵在许多方面都与均匀拟阵非常相似，而均匀拟阵是均匀稠密拟阵的一个特例，因此

[2]秩函数 r: $2^N \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$为任意集合 $U \subseteq N$赋予 U 中最大基数独立集的基数，即 $r(U) := \max\{|I|: I \subseteq U, I \in \mathcal{I}\}$。



(a) 主分解。

(b) 秩密度曲线。

图 1： 图 1a 展示了一个表示图拟阵的图及其主序列$\emptyset \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_7 = N$，其中 N是该图的所有边。图 1b 展示了它的秩密度曲线。秩密度曲线中的每个阶跃（以圆圈标出）对应一个 S_i，其 y 坐标等于 $\mathcal{M}_i = (\mathcal{M}/S_{i-1})|_{S_i \setminus S_{i-1}}$ 的密度，而 x 坐标等于 $r(S_i)$。

事实证明，在均匀稠密拟阵上的 MSP 存在一种简单而优雅的 O（1）-竞争算法。（详情请参见 [Sot 13] 。）

3 我们方法的概要

如前所述， [Sot13；OV13]针对 RA-MSP 的既有方法严重依赖于事先已知拟阵，因为它们需要预先构造其主序列。一种自然的方法是观察一个样本集 $S \subseteq N$，其中包含所有元素的一个常数比例，然后尝试利用$\mathcal{M}|_S$（拟阵$\mathcal{M}$ 限制在 S中的元素上）的主序列来模仿现有方法。主要难点在于如何分析这一过程，因为$\mathcal{M}|_S$ 的主序列可能与$\mathcal{M}$的主序列大不相同。特别是，可以构造一些拟阵，使得某些部分的密度很可能被低估一个超常数因子。此外，$\mathcal{M}|_S$可能具有许多$\mathcal{M}$ 中不存在的密度（例如，当$\mathcal{M}$ 是均匀稠密的时）。

我们通过不直接处理主序列，而是使用我们所谓的拟阵秩密度曲线来克服这些问题，该曲线刻画了主序列的某些关键参数。正如我们将要展示的，秩密度曲线具有三个有用的性质：

(i) 它们提供了一种自然的方法，用于推导出一个既与离线最优值相关、又可以轻松用来比较以界定我们的过程的竞争比的量。(ii) 通过观察 N 的 O(1)-比例样本，可以近似学习它们。(iii) 近似秩密度曲线可以算法地用于保护较稠密区域免受较稀疏区域的影响，而无需预先知道拟阵。

第 3.1 节介绍秩密度曲线，并展示如何利用它们方便地推导出一个可与离线最优值进行比较的量。第 3.2 节随后讨论我们关于近似学习秩密度曲线的结果，以及如何在算法中利用这些曲线。

3.1 秩密度曲线

给定一个拟阵$\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$，定义其秩密度曲线 $\rho_{\mathcal{M}}$的一种自然方式是： $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$通过其主子式$\mathcal{M}_1, \ldots,$ $\mathcal{M}_k$，它们根据主序列$\emptyset \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_k = N$定义，详见第 2 节。对于一个值 $t \in (0, \mathrm{rank}(\mathcal{M})],$，令 $i_t \in [k]$ 为

满足以下条件的最小指标 $r(S_{i_t}) \geq t$。值 $\rho_{\mathcal{M}}(t)$ 则由$\mathcal{M}_{i_t}$的密度给出。（参见图 1b中的示例。）此外，我们令 $\rho_{\mathcal{M}}(t) = 0$ 适用于任意 $t >$rank$(\mathcal{M})$。

一种形式上等价、且对我们后续工作更方便的定义 $\rho_{\mathcal{M}}$如下。对于任意的 $S \subseteq N$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们定义

$$D_{\mathcal{M}}(S, \lambda) \in \operatorname*{argmax}_{U \subseteq S} \{|U| - \lambda r(U)\} \tag{1}$$

为 $\max^{U \subseteq S}\{|U| - \lambda r(U)\}$ 的唯一最大极大化者。众所周知，主序列中的每个集合 $S_1, \ldots, S_k$ 都非空，且具有 $D_{\mathcal{M}}(N, \lambda)$ 的形式，其中 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。由此得到如下秩密度曲线的定义方式，也是我们下文采用的定义。

定义 3.1（秩密度曲线）。设 $M = (N, I)$ 为一个拟阵。其秩密度曲线$\rho_{\mathcal{M}}$: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为

$$\rho_{\mathcal{M}}(t) \coloneqq \begin{cases} \max\{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \colon r(D_{\mathcal{M}}(N, \lambda)) \geq t\} & \forall t \in (0, \operatorname{rank}(\mathcal{M})] \\ 0 & \forall t > \operatorname{rank}(\mathcal{M}). \end{cases}$$

当上下文已明确拟阵 M 时，我们也将其秩密度曲线简写为 ρ 而非 $\rho_{\mathcal{M}}$，并将 $D(N, \lambda)$ 简写为 $D_{\mathcal{M}}(N, \lambda)$。注意，$\rho$是分段常数、左连续且非递增的。（示例见图 1b。）若 M 是密度为λ的均匀稠密拟阵，则对于 $t \in (0, \text{rank(M)}]$，有 $\rho(t) = \lambda$；对于 $t \in (\text{rank(M)}\ \infty)$，有 $\rho(t) = 0$。

现在我们进一步阐述 $\rho_{\mathcal{M}}$ 与 RA-MSP 实例的期望离线最优值 $\mathbb{E}[\text{OPT}(\mathcal{M})]$ 之间的关系。为此，我们使用由下式定义的函数 η: $[0, |N|] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\eta(a) \coloneqq \mathbb{E}_{R \sim \text{Unif}(N, \lfloor a \rfloor)} \left[\max_{e \in R} w(e) \right], \tag{2}$$

其中 Unif$(N, \lfloor a \rfloor)$ 是从 N 中均匀随机选取$\lfloor a \rfloor$ 个元素组成的集合（不重复）；并约定，在上述集合为空时，$\eta(a) = 0$ 对于 $a \in [0, 1)$。换言之，$\eta(a)$ 是从所有权重 $\{w_e\}_{e \in N}$ 中均匀随机选取$\lfloor a \rfloor$ 个权重后所得的最大权重的期望。基于这一概念，我们将以下值 $F(\rho)$ 赋予秩密度曲线ρ:

$$F(\rho) \coloneqq \int_0^{\infty} \eta(\rho(t))\, dt = \int_0^{\text{rank}(M)} \eta(\rho(t))\, dt, \tag{3}$$

其中，第二个等式成立是因为 $\rho(t) = 0$ 对于 $t >$ 秩$(\mathcal{M})$。注意，由于 ρ 的图像呈阶梯状，上述积分实际上只是一个有限和。

函数 F的一个关键性质是，它可以作为离线最优值期望值的代理。更准确地说，下面的陈述表明，$F(\rho)$ 至多比离线最优值小一个常数因子——证明细节请参见第4节。这是我们能够将算法的输出与离线最优值进行比较所需要的方向。此外，$F(\rho)$ 也至多比其大一个常数因子，尽管我们的推导并不需要这一点；然而，这尤其可以由以下事实推出：我们的算法返回一个期望权重为 $\Omega(F(\rho))$ 的独立集。*Lemma* 3.2 该结果采用了稍微更一般的形式，因此不仅适用于原拟阵，也适用于其任意拟阵 minor；后文将需要这一点。

引理 3.2。设 $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 n 权重，且 M 是一个底集大小为 $k \leq n$ 的拟阵。假设我们首先从 $w_1, \ldots, w_n$ 中均匀随机选择 k 个权重的子集，然后将这些权重均匀随机地分配给 M 的元素。那么 $\mathbb{E}[w(\text{OPT}(M))] \leq \frac{3e}{e-1} \cdot F(\rho_{\mathcal{M}})$。

因此，要达到常数竞争比，只需提供一种算法，使其返回一个期望权重为 $\Omega(F(\rho))$ 的独立集。

RA-MSP 子实例 我们经常会使用原始 RA-MSP 实例中给定拟阵的 minor，并将某些结果应用于这些 minor，而非原始拟阵。为避免混淆，本文始终固定一个拟阵为$\mathcal{M}^{\text{orig}} = (N_{\text{orig}}, \mathcal{I}^{\text{orig}})$ 的 RA-MSP 实例，其底集大小记为 $n := |N_{\text{orig}}|$，其中元素具有未知但（由对手）固定的权重 w: $N_{\text{orig}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们的目标是为这个实例设计一种 $O(1)$-竞争性算法。我们只考虑原始实例的权重 w，即便是在拟阵 $\mathcal{M}^{\text{orig}}$的 minor 上处理 RA-MSP 子实例时也不例外，因为这些子实例中的元素同样是从 w中均匀随机抽取的。特别地，函数 F（定义于（3））始终是相对于原始权重 n 向量 w定义的。

为了正式描述我们得到的子实例所对应的拟阵类型，我们引入具有 w采样权重的拟阵这一概念。更准确地说，若$\mathcal{M}$ 是一个底集大小为 $k \leq n$ 的拟阵，那么$\mathcal{M}$ 具有 w采样权重就是该拟阵的随机加权版本：我们从 n 个 w 条目中均匀随机选取一个大小为 k 的子集，再将这些条目均匀随机地分配到底集$\mathcal{M}$上。显然，$\mathcal{M}$ 的任意子式都属于这种类型。

即使我们可能有 $k < n$，带有 w 采样权重的拟阵$\mathcal{M}$ 仍可解释为一个 RA-MSP 实例，因为它对应于对手先从中的权重里均匀随机选取 k 个权重，然后再将它们均匀随机地分配给各个元素。

3.2 借助秩密度曲线证明定理 1.2

现在，我们详细说明如何学习秩密度曲线 $\tilde{\rho}$ 的一个近似$\rho_{\mathcal{M}_{\text{orig}}}$，以及如何利用该近似通过算法返回一个期望权重为 $\Omega(F(\rho_{\mathcal{M}_{\text{orig}}}))$ 的独立集；根据引理 3.2，这意味着该过程具有 $O(1)$ 的竞争比。为此，我们先形式化定义近似秩密度曲线的概念，该概念依赖于下移的概念。

定义 3.3。设 $\rho\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是一个非递增函数，且设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$。$\rho$ 的(α, β)-下移 $\rho'\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$通过辅助函数 $\phi\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义如下：

$$\phi(t) := \begin{cases} \frac{\rho(\alpha)}{\beta} & \forall t \in (0,1], \\ \frac{\rho(\alpha \cdot t)}{\beta} & \forall t > 1; \end{cases} \qquad \rho'(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(t) \in (0,1), \\ \phi(t) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

此外，如果函数 $\tilde{\rho}\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是非递增的，且满足 $\rho' \leq \tilde{\rho} \leq \rho$，那么称其为 ρ 的(α, β)-近似，其中 ρ' 是 ρ 的(α, β)-下移。

理解 (α, β)-下移的一个有用方法，是将其视为 $\rho_{(\alpha \cdot t)/\beta}$ 的略微修改版本。这也解释了这个名称的由来：在双对数尺度下，$\rho_{(\alpha \cdot t)/\beta}$相当于将函数 ρ 向左下方平移，对应的因子分别是 α 和β。随后，我们对这个函数做两处修改。首先，当 $t \in (0,1]$, 时，将其值下调至 α/β。这样做是因为我们无法准确估计低秩处的密度。幸运的是，这并不妨碍我们获得常数竞争算法，因为我们可以以一定概率运行经典的单秘书算法，以常数概率选出权重最大的元素。这一点特别可由下文的 引理 3.4 推出，并会在后文紧接着讨论。第二处修改是将 (0,1) 中的值向上取整。这反映了密度值始终至少为 1。

在处理一个关于 ρ 的 $(O(1)\ O(1))$-近似 $\tilde{\rho}$ 时，一个问题是 $F(\tilde{\rho})$ 可能比 $F(\rho)$ 小超过一个常数因子，因此我们无法与 $F(\tilde{\rho})$ 比较来获得一个 $O(1)$-竞争过程。这是由于上述定义 $(\alpha,\ \beta)$-下移的方式所致；更确切地说，$t \in (0,1]$ 的值被向下舍入到了 $\rho_{(\alpha)/\beta}$。然而，正如下一个引理所示，即使在这种情况下，我们也能为值 $F(\tilde{\rho})$ 得到一个简单的下界

根据 $F(\rho)$ 以及 w 中的最大权重 $w_{\max}$ ——该结论的证明见第4节。

引理 3.4。设 M 是一个具有 w-采样权重的拟阵，令 α、$\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$，并且令 $\tilde{\rho}$ 是 $\rho = \rho_{\mathcal{M}}$ 的一个 (α, β)-近似。那么 $F(\rho) \leq 2\alpha\beta F(\tilde{\rho}) + \alpha w_{\max}$。

引理 3.4 的一个关键推论是，只需得到一种算法，该算法能够返回一个独立集，其期望权重为 $\Omega(F(\tilde{\rho}))$，其中 $\tilde{\rho}$ 是 $\rho_{\mathcal{M}_{\text{orig}}}$ 的某个 $(O(1)\ O(1))$-近似。事实上，引理 3.4 随即意味着 $F(\tilde{\rho}) = \Omega(F(\rho_{\mathcal{M}_{\text{orig}}})) - O(w_{\max})$。以某个概率（比如 0.5）运行该算法，否则运行 Dynkin 的 [Dyn63]经典秘书算法（该算法以常数概率选中权重最大的元素），即可得到一种整体算法，返回的独立集的期望权重为 $\Omega(F(\rho_{\mathcal{M}_{\text{orig}}}))$。因此，引理 3.4 有助于为那些竞争比与近似秩密度曲线的 F-值相当的算法提供竞争比界限。以下关键结论也使用了这一技巧：如果我们能获得所处理拟阵的秩密度曲线的一个 $(O(1)\ O(1))$-近似，就能得到具有强保证的算法——证明见第6节。

定理 3.5. 设 M 是一个权重经 w 抽样的拟阵，并令 $\rho_{\mathcal{M}}$ 表示 M 的秩密度曲线。假设给定整数 $\alpha \geq 24$ 和 $\beta \geq 3$，以及 $\rho_{\mathcal{M}}$ 的一个 (α, β)- 近似 $\tilde{\rho}$。那么存在一个高效过程 $\text{ALG}(\tilde{\rho}, \alpha, \beta)$，在给定 M 的 *RA-MSP* 子实例上运行时，会返回 M 的一个独立集 I，其期望权重至少为 $\left(\frac{1}{1440e\alpha^2\beta^2}\right)(F(\rho_{\mathcal{M}}) - \alpha^2 w_{\max})$。

我们方法的最后一个主要组成部分，是证明这种精确的 代理 $\tilde{\rho}$ 可以以常数概率计算出来。更准确地说，我们证明，在观察到一个样本集 S（其中 N_{orig} 的每个元素都以 $1/2$的概率独立地被选中）之后，（已观察到的）$\mathcal{M}_{\text{orig}}|_S$的秩密度曲线

- 接近$\mathcal{M}_{\text{orig}}|_{N^{\text{orig}}\setminus S}$的秩密度曲线，因此我们可以按需使用$\rho_{\mathcal{M}_{\text{orig}}|_S}$ 作为由$\mathcal{M}_{\text{orig}}|_{N^{\text{orig}}\setminus S}$给出的 RA-MSP 子实例的代理；同时，• 接近$\mathcal{M}_{\text{orig}}$的秩密度曲线，这使我们能够将由$\mathcal{M}_{\text{orig}}|_{N^{\text{orig}}\setminus S}$ 给出的 RA-MSP 子实例的离线最优值与$\mathcal{M}_{\text{orig}}$的离线最优值联系起来。

我们强调，下面的结果纯粹是结构性的，因此与权重或 MSP 设置无关。详情请参见第 5 节。

定理 3.6。设 $M = (N, I)$ 是一个拟阵，且 $S \subseteq N$ 是一个随机集合，其中 N 的每个元素都以概率 $1/2$独立地被包含。则，以至少 $1/100$的概率，$\rho_{\mathcal{M}|_S}$ 和$\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$ 都是 $\rho_{\mathcal{M}}$的$(288, 9)$-近似。

结合上述结果，我们得到了所需的 $O(1)$-竞争性算法。

定理 1.2 的证明。为简洁起见，在本证明中记 $\mathrm{M} := \mathrm{M}^{\text{orig}}$，并记 $N := N_{\text{orig}}$。回顾引理 3.2，只需提供一种算法，使其返回一个期望权重为 $\Omega(F(\rho_{\mathcal{M}}))$ 的独立集。考虑以下过程：首先，在不选择任何元素的情况下，独立地以概率 $1/2$ 将 N 中的每个元素纳入集合 $S \subseteq N$，并令 $\tilde{\rho}$ 表示 $\rho_{\mathcal{M}|_S}$ 的 (288, 9)-下移。然后，在 $\mathrm{M}|_{N\setminus S}$ 上运行定理 3.5 中所述的算法，并以 $\tilde{\rho}$ 作为近似秩密度曲线。令 I 表示上述过程的输出，并令 A 表示定理 3.6 中定义的事件，即，

$$\mathcal{A} = \{S \subseteq N \colon \rho_{\mathcal{M}|_S} \text{ and } \rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}} \text{ are } (288, 9)\text{-approximations of } \rho_{\mathcal{M}}\}.$$

我们利用的一个关键性质是，对于任意 $S \in \mathcal{A}$，都有 $\tilde{\rho}$ 是$\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$的一个（$288^2, 9^2$）近似，原因如下。首先，由于 $\tilde{\rho}$是 $\rho_{\mathcal{M}|_S} \leq \rho_{\mathcal{M}}$的（288， 9）下移，而 $\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$

是 $\rho_{\mathcal{M}}$的一个（288, 9）近似，我们有 $\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}} \geq \tilde{\rho}$。此外，近似参数（$288^2, 9^2$）的推导基于这样一个事实：某个秩密度函数先经过（$\alpha_1$， β_1）下移，再经过（α_2， β_2）下移后，所得函数是该秩密度函数的一个（$\alpha_1\alpha_2$， $\beta_1\beta_2$）近似——该性质的证明见引理 4.3。此性质可按如下方式应用。令 $\bar{\rho}$ 为 $\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}} \leq \rho_{\mathcal{M}}$的（ 288,9 ）下移。由于$\rho \mathrm{M}_{|S}$ 是 $\rho_{\mathcal{M}}$的一个（ 288, 9 ）近似，我们有 $\bar{\rho} \leq \rho_{\mathcal{M}|_S}$。因此，由于 $\tilde{\rho}$是$\rho_{\mathcal{M}|S}$的（288, 9）下移，它位于 $\bar{\rho}$的（288, 9）下移之上，而后者本身是$\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$的（288, 9）下移。于是，根据上述性质，我们得到 $\tilde{\rho}$是$\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$ 的一个（$288^2, 9^2$）近似，证毕。

利用这一事实，对于任意固定的 $S \in \mathcal{A}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[w(I) \mid S] &\geq \left(\frac{1}{1440e \cdot 288^4 \cdot 9^4}\right)\left(F\left(\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}\right) - 288^4 w_{\max}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{1440e \cdot 288^4 \cdot 9^4}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 288 \cdot 9}\left(F\left(\rho_{\mathcal{M}}\right) - 288 w_{\max}\right) - 288^4 w_{\max}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{1440e \cdot 288^4 \cdot 9^4}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 288 \cdot 9} F\left(\rho_{\mathcal{M}}\right) - 2 \cdot 288^4 w_{\max}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2880e \cdot 288^5 \cdot 9^5}\right) F\left(\rho_{\mathcal{M}}\right) - \frac{w_{\max}}{720e \cdot 9^4},
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由定理 3.5 以及以下事实得出： $\tilde{\rho}$ 是$288^2, 9^2$的 （$\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$ ）近似，正如上文所讨论的；第二个不等式则由引理 3.4 以及以下事实得出：对于每个 $S \in \mathcal{A}$，曲线$\rho_{\mathcal{M}|_{N\setminus S}}$是 $\rho_{\mathcal{M}}$的（*288*， 9）近似。此外，第一个不等式利用了这样一个事实：对于任意固定的 $S \in \mathcal{A}$ ，条件化不会对权重 w 在元素之间的均匀分配产生任何影响。这是因为事件$\mathcal{A}$ 只取决于采样得到的元素 S ，而不取决于其元素的权重。因此，由$\mathcal{M}|_{N\setminus S}$ 给出的 RA-MSP 子实例上应用定理 3.5 中描述的算法时，确实会将权重 w 均匀随机地分配给元素，正如所要求的。于是，上述过程的输出满足

$$\mathbb{E}[w(I)] \geq \sum_{S \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[w(I) \mid S] \Pr[S] \geq \tfrac{1}{100}\left(\left(\tfrac{1}{2880e \cdot 288^5 \cdot 9^5}\right) F\left(\rho_{\mathcal{M}}\right) - \tfrac{w_{\max}}{720e \cdot 9^4}\right),$$

其中最后一个不等式利用了概率$[\mathcal{A}] \geq 1/100$ ，由 定理 3.6 得出。

由于在$\mathcal{M}^{\mathrm{orig}}$ 上运行经典秘书算法会返回一个期望权重至少为 $w_{\max}/e$ 的独立集，因此，只需以概率 $1/2$ 运行上述过程，否则运行经典秘书算法，即可得到所需结果。

□

4 秩密度曲线及其性质

本节将深入考察秩密度曲线，并证明 引理 3.2 和 3.4。我们先陈述函数的一些有用性质 η。

引理 4.1。 设 η 如 (2)中所定义。那么

(i) η 是非递减的。*(ii)* 对所有 $a \geq 1$ 和 $h \in [1, \frac{n}{a}]$， $\eta(ah) \leq 2a\eta(h)$。(iii) 设 (m, p) 满足 $1 \leq mp \leq m \leq n$。那么 $\mathbb{E}[\eta(X)] \leq 3\eta(mp)$。

证明。 (i) 这直接由 η的定义得出。

(ii) 将 n 权重向量 $w \in \mathbb{R}^n$ 的元素按非递减顺序连续编号，即 $w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_n$。对于每个 $k, i \in [n]$，令 $p(k,i)$ 表示在 k 个样本中，元素 i 为权重最大的元素，且在所有权重最大的元素中具有最小指标（若出现并列）的概率。换言之，$p(k,i)$ 是 w_i 在 k 个采样元素中权重最大，且 w_j 中满足 $j < i$ 的元素均未被采样的概率。因此，对于 $i < k$，有$p(k,i) = 0$；而对于 $i \ge k$，有

$$p(k,i) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = k\frac{(i-1)!(n-k)!}{n!(i-k)!} = \frac{k}{n}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{i-j}{n-j}.$$

接下来，注意对于所有 $h \in [1, \frac{n}{a}]$，我们有

$$\eta(h) = \sum_{i=1}^{n} p(\lfloor h \rfloor, i) w_i, \text{ and}$$
$$\eta(ah) = \sum_{i=1}^{n} p(\lfloor ah \rfloor, i) w_i.$$

我们的目标是证明，对于所有 $i \in [n]$，$p(\lfloor ah \rfloor\ i) \le 2ap(\lfloor h \rfloor\ i)$，这足以证明所需的不等式。为此，注意对于 $i < \lfloor ah \rfloor$，我们有 $p(\lfloor ah \rfloor\ i) = 0 \le ap(\lfloor h \rfloor\ i)$；而对于 $i \ge \lfloor ah \rfloor$，我们有

$$p(\lfloor ah \rfloor, i) = \frac{\lfloor ah \rfloor}{n}\prod_{j=1}^{\lfloor ah \rfloor - 1}\frac{i-j}{n-j} \le \frac{\lfloor ah \rfloor}{n}\prod_{j=1}^{\lfloor h \rfloor - 1}\frac{i-j}{n-j} \le 2a \cdot \frac{\lfloor h \rfloor}{n}\prod_{j=1}^{\lfloor h \rfloor - 1}\frac{i-j}{n-j} = 2ap(\lfloor h \rfloor, i).$$

这里，第一个不等式由 $\mathsf{b}h\mathsf{c} \le \mathsf{b}ah\mathsf{c}$ 以及对任意 $j < n$ 都有 $\frac{i-j}{n-j} \le 1$ 这一事实推出；第二个不等式则利用了 $\mathsf{b}ah\mathsf{c} \le ah \le 2a\mathsf{b}h\mathsf{c}$，因为对于 $h \in \mathbb{R}_{\ge 1}$，$h \le 2\mathsf{b}h\mathsf{c}$。(iii) 注意，根据性质 (ii)，对于所有 $h \in [mp, n]$，$\eta(h) \le {}^{2h}/_{mp} \cdot \eta(mp)$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\eta(X)] &= \sum_{h=0}^{\lfloor mp \rfloor} \eta(h) \cdot \Pr[X = h] + \sum_{h=\lfloor mp \rfloor + 1}^{m} \eta(h) \cdot \Pr[X = h] \\
&\le \eta(mp) \cdot \Pr[X \le \lfloor mp \rfloor] + \sum_{h=\lfloor mp \rfloor + 1}^{m} 2\frac{h}{mp} \cdot \eta(mp) \cdot \Pr[X = h] \\
&= \eta(mp) \cdot \Pr[X \le \lfloor mp \rfloor] + 2\frac{\eta(mp)}{mp} \cdot \sum_{h=\lfloor mp \rfloor + 1}^{m} h \cdot \Pr[X = h] \\
&\le \eta(mp) + 2\frac{\eta(mp)}{mp} \cdot \mathbb{E}[X] = 3\eta(mp).
\end{aligned}$$

□

为了证明引理 3.2，我们使用 [Sot13]，中的以下结果，该结果依赖于与给定拟阵 $\mathbf{M} = (N, \mathbf{I})$ 相关联的随机划分拟阵 $\mathbf{P} = (N, \mathbf{I}')$。后者的构造如下：首先，将每个元素 $e \in N$ 均匀随机且相互独立地分配到 $\mathtt{rank}(\mathbf{M})$ 个类别 $P_1, \ldots, P_{\mathtt{rank}(\mathcal{M})}$ 中的一个类别。若集合 $S \subseteq N$ 至多包含每个类别中的一个元素，则其在 $\mathbf{P}$ 中是独立的，即，对于每个 $i \in [\mathtt{rank}(\mathbf{M})]$，都有 $S \in \mathbf{I}'$，其中 $|S \cap P_i| \le 1$。下一个结果将 $\mathbf{M}$ 的离线最优值与其主子式所关联的随机划分拟阵的离线最优值联系起来。

引理 4.2 ([Sot13，引理 4.2])。 设 $(\mathcal{M}\ w)$ 为一个随机赋值*MSP*实例。设$\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^k$ 为 $\mathcal{M}$ 的主子式，并设 $\mathcal{P}_i$ 分别表示与每个 $\mathcal{M}_i$相关联的随机划分拟阵。那么

$$\mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{M}))\right] \leq \frac{e}{e-1}\mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\oplus_{i=1}^k \mathcal{P}_i))\right],$$

其中，期望是相对于随机权重赋值和随机划分而言的（这仅适用于右侧的期望）。

现在我们可以证明引理 3.2。

引理 *3.2*的证明。设 $(\mathcal{M}'_i)_{i=1}^k$ 是$\mathcal{M}'$ 的主子式，并令n'_i 和r'_i 分别表示每个$\mathcal{M}'_i$的基数和秩。此外，对于每个 $i \in [k]$，令$\mathcal{P}'_i$ 为与$\mathcal{M}'_i$ 相关联的随机划分拟阵，并令 $(P'_{i,\ j})_{j=1}^{r'_i}$ 表示$\mathcal{P}'_i$的（随机）划分。根据引理 4.2 ，有

$$\mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{M}'))\right] \leq \frac{e}{e-1}\mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\oplus_{i=1}^k \mathcal{P}'_i))\right] = \frac{e}{e-1}\sum_{i=1}^k \mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{P}'_i))\right].$$

接下来，注意到对于每个 $i \in [k]$，我们有

$$\mathbb{E}[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{P}'_i))] = \sum_{j=1}^{r'_i}\mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{P}'_i|_{P'_{i,j}}))\right] = \sum_{j=1}^{r'_i}\mathbb{E}\left[\eta_w(|P'_{i,j}|)\right] = r'_i \cdot \mathbb{E}_{X\sim B(n'_i,\,1/r'_i)}[\eta_w(X)],$$

其中，第一个等式由$\mathcal{P}'_i$ 的定义和期望的线性性得出，第二个等式用到了 η_w的定义，第三个等式则因为$|P'_{i,\ j}| \sim B(n'_i,\ 1/r'_i)$ 对每个 $j \in [r'_i]$都成立。因此，应用引理 4.1 ，并利用按构造每个$\mathcal{M}'_i$ 都是密度为 $\lambda'_i = n'_i/r'_i$的均匀稠密拟阵，可得:

$$\mathbb{E}[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{P}'_i))] \leq r'_i \cdot 3\eta(n'_i/r'_i) = 3r'_i\eta(\lambda'_i).$$

因此

$$\mathbb{E}\left[w(\mathrm{OPT}(\mathcal{M}'))\right] \leq \frac{3e}{e-1}\sum_{i=1}^k r'_i\eta(\lambda'_i) = \frac{3e}{e-1}F(\rho_{\mathcal{M}'}),$$

其中等号根据 F_w的定义成立。 □

下面的结果表明，简单来说，就定义 3.3而言，对函数的近似再进行近似，仍然是对原函数的近似，其中近似参数 α 和 β 相乘。

引理 4.3. 设 ρ_1, ρ_2, ρ_3: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是非递增函数，满足 ρ_2是 ρ_1的(α_1, β_1)-近似，且 ρ_3是 ρ_2的(α_2, β_2)-近似，其中参数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$。则 ρ_3 是 ρ_1的$(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2)$-近似。

证明。 令 ρ'_1 为 ρ_1 、α_1和 β_1的下移，并令 ϕ_1 为用于构造ρ'_1 的辅助函数，见 定义 3.3。类似地，令 ρ'_2 和 ϕ_2 分别为 ρ_2 、α_2和 β_2的下移以及相应的辅助函数；再令 ρ''_1 和 ϕ'_1 分别为 ρ_1 、$\alpha_1\alpha_2$和 $\beta_1\beta_2$的下移以及相应的辅助函数。

由于 $\rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1$，因此只需证明 $\rho_3 \geq \rho''_1$。注意，要得到这个界，只需证明以下两个性质（对于取实值的函数 g ，我们用 $\mathrm{supp}(g)$ 表示其定义域中所有满足 $g(t) \neq 0$ 的点 t ）：

(i) $\rho_3(t) \geq \phi_1'(t)$ 对每个 $t > 0$ 都成立，并且

(ii) 对每个 $t \in \in \text{supp}(\rho_1'')$，$\rho_3(t) \geq 1$。

事实上，一方面，对于每个满足 $\phi_1'(t) = \rho_1''(t)$ 的 $t > 0$，第一个性质意味着 $\rho_3(t) \geq \rho_1''(t)$。另一方面，对于每个满足 $\phi_1'(t) \neq \rho_1''(t)$ 的 $t > 0$，我们有 $\rho_1''(t) = 1$，因此由第二个性质可得 $\rho_3(t) \geq \rho_1''(t)$。

首先，我们证明性质 (i)。为此，注意到对每个 $t > 0$，我们都有 $\rho_3(t) \geq \rho_2'(t) \geq \phi_2(t)$ 且 $\rho_2(t) \geq \rho_1'(t) \geq \phi_1(t)$。因此，

$$\rho_3(t) \geq \phi_2(t) = \begin{cases} \frac{\rho_2(\alpha_2)}{\beta_2} & \forall t \in (0,1), \\ \frac{\rho_2(\alpha_2 t)}{\beta_2} & \forall t \geq 1 \end{cases} \geq \begin{cases} \frac{\phi_1(\alpha_2)}{\beta_2} & \forall t \in (0,1), \\ \frac{\phi_1(\alpha_2 t)}{\beta_2} & \forall t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\rho_1(\alpha_1\alpha_2)}{\beta_1\beta_2} & \forall t \in (0,1), \\ \frac{\rho_1(\alpha_1\alpha_2 t)}{\beta_1\beta_2} & \forall t \geq 1 \end{cases} = \phi_1'(t).$$

这里，第一个和第二个不等式由上述观察可得；第一个和最后一个等式分别由 ϕ_2 和ϕ_1'的构造可得；第二个等式则由ϕ_1 的构造以及 $\alpha_2 \geq 1$这一事实可得。

现在，我们来证明性质 (ii)。首先，注意到对每个 $t \in \text{supp}(\rho_2')$，根据构造可得$\rho_3(t) \geq \rho_2'(t) \geq 1$。接下来，注意到根据构造

$$\text{supp}(\rho_2') = \text{supp}(\phi_2) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \alpha_2 \notin \text{supp}(\rho_2) \\ \{t > 0 \colon \alpha_2 t \in \text{supp}(\rho_2)\} & \text{otherwise .} \end{cases}$$

由于 $\text{supp}(\rho_2) \supseteq \text{supp}(\rho_1')$，因此可得

$$\text{supp}(\rho_2') \supseteq \begin{cases} \emptyset & \text{if } \alpha_2 \notin \text{supp}(\rho_1') \\ \{t > 0 \colon \alpha_2 t \in \text{supp}(\rho_1')\} & \text{otherwise .} \end{cases}$$

类似地，注意到

$$\text{supp}(\rho_1') = \text{supp}(\phi_1) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \alpha_1 \notin \text{supp}(\rho_1) \\ \{t > 0 \colon \alpha_1 t \in \text{supp}(\rho_1)\} & \text{otherwise .} \end{cases}$$

因此，条件 $\alpha_2 \notin \text{supp}(\rho_1')$ 等价于以下条件：$\alpha_1 \notin \text{supp}(\rho_1)$ 或 $\alpha_1\alpha_2 t \notin \text{supp}(\rho_1)$。注意，后一个条件限制更严格，因为 $\alpha_2 \geq 1$。因此，我们得到：

$$\text{supp}(\rho_2') \supseteq \begin{cases} \emptyset & \text{if } \alpha_1\alpha_2 \notin \text{supp}(\rho_1) \\ \{t > 0 \colon \alpha_1\alpha_2 t \in \text{supp}(\rho_1)\} & \text{otherwise} \end{cases} = \text{supp}(\rho_1''),$$

其中，等式由 $\text{supp}(\rho_1'')$ 的构造可得。因此，$\rho_3(t) \geq 1$ 对每个 $t \in \text{supp}(\rho_2') \supseteq \text{supp}(\rho_1''$都成立，故性质 (ii) 成立。 □

我们以证明引理 3.4来结束本节。

引理 *3.4*的证明。 首先注意，如果有 $\alpha \geq \text{rank}(\mathcal{M}$，则该命题显然成立，因为 $F(\rho) \leq \alpha w_{\max}$。因此，接下来我们假设 $\alpha < \text{rank}(\mathcal{M}$。

令 $\rho' \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$为 ρ 的 (α, β)-下移。根据函数 F的定义，并且由于$\tilde{\rho} \geq \rho'$，我们得到

$$F(\tilde{\rho}) = \int_0^\infty \eta(\tilde{\rho}(t))\, dt \geq \int_0^\infty \eta(\rho'(t))\, dt = \int_0^{\frac{\text{rank}(\mathcal{M})}{\alpha}} \eta(\rho'(t))\, dt, \tag{4}$$

其中，末尾的等式源于以下事实：$\rho'(t) = 0$ 对于 $t > \text{秩}(\mathcal{M})/\alpha$成立。现在我们区分 $\beta \geq n$ 和 $\beta < n$。

首先考虑 $\beta \geq n$的情况。在这种情况下，我们可以展开如下：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\operatorname{rank}(\mathcal{M})}{\alpha}} \eta(\rho'(t))\,dt &\geq \frac{\operatorname{rank}(\mathcal{M})}{\alpha}\cdot\eta(1) \geq \frac{1}{2\alpha\beta}\operatorname{rank}(\mathcal{M})\cdot 2n\eta(1) \geq \frac{1}{2\alpha\beta}\operatorname{rank}(\mathcal{M})\cdot\eta(n)\\ &= \frac{1}{2\alpha\beta}\operatorname{rank}(\mathcal{M})\cdot w_{\max} \geq \frac{1}{2\alpha\beta}F(\rho),\end{aligned}$$

其中，第一个不等式成立是因为 ρ' 在非零时至少为 1，且 ρ' 在 $[0, \operatorname{rank}(\mathcal{M})/\alpha]$ 内非零，因为 $\alpha \leq$ 秩$(\mathcal{M})$，第二个不等式用到了 $\beta \geq n$，第三个不等式源于 $2n\eta(1) \geq \eta(n)$ ——这是 引理 4.1 (ii) 的推论 —— 之后的等式用到了 $\eta(n) = w_{\max}$，最后一个不等式由秩 $(\mathcal{M})\cdot w_{\max} \geq F(\rho)$ 得出。上述关系结合 公式 (4) 可在 $\beta \geq n$ 时推出所需结果。

现在假设 $\beta < n$。在这种情况下，我们继续如下：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\operatorname{rank}(\mathcal{M})}{\alpha}} \eta(\rho'(t))\,dt &\geq \int_1^{\frac{\operatorname{rank}(\mathcal{M})}{\alpha}} \eta(\rho'(t))\,dt\\ &= \int_1^{\frac{\operatorname{rank}(\mathcal{M})}{\alpha}} \eta\left(\max\left\{\frac{\rho(\alpha t)}{\beta}, 1\right\}\right)\,dt\\ &= \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{\operatorname{rank}(\mathcal{M})} \eta\left(\max\left\{\frac{\rho(t)}{\beta}, 1\right\}\right)\,dt\\ &\geq \frac{1}{2\alpha\beta}\int_\alpha^{\operatorname{rank}(\mathcal{M})} \eta\left(\max\left\{\rho(t), \beta\right\}\right)\,dt\\ &\geq \frac{1}{2\alpha\beta}\int_\alpha^{\operatorname{rank}(\mathcal{M})} \eta(\rho(t))\,dt\\ &= \frac{1}{2\alpha\beta}\left(\int_0^{\operatorname{rank}(\mathcal{M})} \eta(\rho(t))\,dt - \int_0^{\alpha} \eta(\rho(t))\,dt\right)\\ &\geq \frac{1}{2\alpha\beta}(F(\rho) - \alpha w_{\max}),\end{aligned}$$

其中，第一个等式是由 ρ' 是 ρ 的 (α, β)-下移这一事实得出的，第二个等式通过变量替换得到，第二个不等式使用了 $2\beta\eta(\max\{\rho(t)/\beta, 1\}) \geq \eta(\max\{\rho(t)\ \beta\})$，这由引理 4.1 (ii) 成立（此处我们使用 $\beta \leq n$ 来满足该陈述的条件），而在最后一个不等式中，我们使用了 F 的定义以及函数 η 的取值始终不大于 $w_{\max}$ 这一事实。上述关系结合公式 (4) 推出了 $\beta \leq n$ 所需的结果，从而完成了证明。 □

5 从样本中学习秩密度曲线

设计和分析 MSP 算法时，主要挑战之一是理解在观察到实例的一个随机样本后，能够从中学到什么类型的信息，以及能学到多少信息。

在本节中，我们证明：以常数概率，在观察到一个样本集后 S，其中每个元素以概率 0.5 被纳入，我们就能学得出 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}|_{N\setminus S}$的秩密度曲线的良好近似，从而证明定理 3.6。然而，即使已知 $\mathrm{M}|_{N\setminus S}$的精确秩密度曲线（而非近似曲线），由于拟阵事先未知（因此也不知道哪些元素分别对应曲线的不同密度区域），我们事先仍不清楚该如何处理。本节的第二项主要贡献是证明

集合 $N \setminus S$ 中由给定密度的 S 子集张成的元素集合具有良好的结构。具体而言，这将使我们能够构造一个（链）分解 $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{M}_i$，将 $\mathcal{M}|_{N\setminus S}$ 分解为若干部分，其中所有的$\mathcal{M}_i$都以常数概率满足一些理想性质——详见第6.1节。

本节的主要技术贡献是以下结果。

定理 5.1。设 $M = (N, I)$ 是一个拟阵，其中包含 $3h$ 个不相交基，且对某个 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$成立。令$S \sim B(N, 1/2)$。则

$$\Pr\left[|\mathrm{span}(D(S,h)) \setminus S| \leq \frac{|N|}{12}\right] \leq \exp\left(-\frac{|N|}{144}\right), \tag{5}$$

$$\Pr\left[r(D(S,h)) \leq \frac{r(N)}{8}\right] \leq \exp\left(-\frac{r(N)}{48}\right). \tag{6}$$

证明。我们首先证明集中性结果（5）。令 $\mathcal{M}_h = (N, \mathcal{I}_h)$ 表示 h重并的$\mathcal{M}$，并令 r_h 表示其秩函数。考虑 算法 1中描述的过程，该过程大致受 [Kar98]启发。注意，以下三个性质始终成立：W，G，

算法 1： 对 $\mathbb{E}_S[|\mathrm{span}(D(S,h)) \setminus S|]$ 求下界的算法

设置 $W \leftarrow \emptyset$、$G \leftarrow \emptyset$和 $C \leftarrow \emptyset$，**对于** 以任意顺序考虑的每个 $e \in N$ **执行 若** $W \cup \{e\} \in I_h$，**则若** $e \in S$，**则** 更新 $W \leftarrow W \cup \{e\}$；**否则若** $e \in S$，**则** 更新 $C \leftarrow C \cup \{e\}$；**否则** 更新 $G \leftarrow G \cup \{e\}$

且 C 两两不相交；$W \subseteq S$ 和 $C \subseteq S$，而 $G \cap S = \emptyset$；且 $W \in \mathcal{I}_h$。此外，根据构造，在该过程结束时，我们有：

(i) $S = C \uplus W$。此外，随机集合 G 和 C 具有相同的分布，因为每个元素都以概率 $1/2$ 独立于其他元素地属于 S。

(ii) $G \subseteq$ 张成$(D(S,h)) \setminus S$。由于 $G \cap S = \emptyset$，只需证明 $G \subseteq$ 张成$(D(S,h))$。给定任意 $e \in G$，根据构造，我们有 $W \cup \{e\} \notin \mathrm{I}_h$，即 $r_h(W \cup \{e\}) = r_h(W)$。由于$W \subseteq S$，这意味着 $r_h(S \cup \{e\}) = r_h(S)$，进而推出 $e \in$ 张成$(D(S,h))$。后一个推论可由标准的拟阵论证得到；为完整起见，我们在引理 A.1 中给出证明。

由于 $G \subseteq$ 张成$(D(S, h)) \setminus S$，且 G 和 C 具有相同的分布，我们得到

$$\Pr\left[|\mathrm{span}(D(S,h) \setminus S)| \leq \tfrac{|N|}{12}\right] \leq \Pr\left[|G| \leq \tfrac{|N|}{12}\right] = \Pr\left[|C| \leq \tfrac{|N|}{12}\right]. \tag{7}$$

此外，

$$|C| = |S| - |W| \geq |S| - hr(N) \geq |S| - |N|/3, \tag{8}$$

其中，等号由 $S = C \uplus W$ 得出，第一个不等式由 $W \in \mathcal{I}_h$ 得出（这意味着$|W| = r_h(W) \leq hr(N)$），最后一个不等式则源于 $\mathcal{M}$ 包含 $3h$ 多个不相交基（因此 $|N| \geq 3hr(N)$）。

结合（7）和（8，可得

$$\Pr\left[|\mathrm{span}(D(S,h) \setminus S)| \leq \tfrac{|N|}{12}\right] \leq \Pr\left[|S| - \tfrac{|N|}{3} \leq \tfrac{|N|}{12}\right] \leq \Pr\left[|S| \leq \tfrac{5}{6}\mathbb{E}[|S|]\right], \tag{9}$$

其中，第二个不等式由 $\mathbb{E}[|S|] = |N|/2$得到。现在，对（5）右侧的表达式应用切尔诺夫界 概率 $[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] < \exp[-\delta^2\mathbb{E}[X]/2]$，其中 $X = |S|$，并使用 $\mathbb{E}[|S|] = |N|/2$，即可得到关系式（9）.

接下来，我们证明集中性结果（6）。设 B 是 $3h$ 个包含于$\mathcal{M}$中的不相交基的并。首先证明，对于任意集合 $A \subseteq B$，以下不等式成立:

$$r(D(A,h)) \geq \frac{|A| - hr(A)}{2h}. \tag{10}$$

为此，我们首先注意到，由于$\mathcal{M}|_B$ 是一个密度为$3h$的均匀稠密拟阵，因此有

$$3hr(Q) \geq |Q| \qquad \forall Q \subseteq B. \tag{11}$$

观察到：若将 $B = B_1 \cup \cdots \cup B_{3h}$写成 $3h$ 个不相交基的并，则有；由此也可立即得出上述性质

$$|Q| = \sum_{i=1}^{3h} |Q \cap B_i| = \sum_{i=1}^{3h} r(Q \cap B_i) \leq \sum_{i=1}^{3h} r(Q) = 3hr(Q).$$

关系（10）由以下事实得出:

$$2hr(D(A,h)) \geq |D(A,h)| - hr(D(A,h)) \geq |A| - hr(A),$$

其中，第一个不等式由（11）得出，第二个不等式则由 $D(A,h))$的定义得出。现在，为了证明（6），假设事件 $r(D(S,h)) \leq r(N)/8$ 发生。那么

$$\frac{r(N)}{8} \geq r(D(S,h)) \geq r(D(S \cap B,h)) \geq \frac{|S \cap B| - hr(S \cap B)}{2h} \geq \frac{|S \cap B| - hr(N)}{2h},$$

其中，第三个不等式由（10）得出。由于对上述表达式中的各项重新排列可得$|S \cap B| \leq 5hr(N)/4$, 因此有概率 $[r(D(S,h)) \leq r(N)/8] \leq$概率 $[|S \cap B| \leq 5hr(N)/4]$。为了对后一个概率作上界，注意到根据 S的构造， $S \cap B$中的每个元素都以概率 $1/2$ 独立地出现。因此，我们可以应用切尔诺夫界：概率 $[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] \leq \exp(-\delta^2\mathbb{E}[X]/2)$, 其中 $X = |S \cap B|$, $\mathbb{E}[X] = |B|/2 = 3hr(N)/2$, 且 $\delta = 1/6$（选取它使得（$1-\delta$）$\mathbb{E}[X] = 5hr(N)/4$），从而得到

$$\Pr\left[r(D(S,h)) \leq \frac{r(N)}{8}\right] \leq \exp\left(-\frac{hr(N)}{48}\right) \leq \exp\left(-\frac{r(N)}{48}\right),$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $h \geq 1$。 □

定理 定理 3.6 的证明基于集中性结果（6）。简而言之，我们没有直接证明$\rho_{\mathcal{M}|_S}$ 在所有位置都能很好地近似 $\rho_{\mathcal{M}}$，而是在 $\rho_{\mathcal{M}}$ 上考虑一组离散点，这些点对应于$\mathcal{M}$ 中秩按几何级数递增的拟阵 minor。随后，我们将（6）应用于这些拟阵 minor，并使用并集界证明这些网格点都能得到良好的近似。由于这些秩按几何级数递增，且出现在（6）右侧的指数中，因此并集界能够奏效。完整证明如下。

证明 定理 *3.6*。 设 $\{\lambda_i\}^{i\in[m]}$ 表示像 $\rho_{\mathcal{M}}$中的密度（即至少为 1 的值），并设 $\tau :=$最大值$\{t > 0 : \rho_{\mathcal{M}}(t) \geq 1\}$。设 $\rho' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$是由 $\rho_{\mathcal{M}}$得到的曲线，其中每个密度 λ_i 均向下取整到最接近的 3 的幂。也就是说,

$$\rho'(t) = \begin{cases} \max\{3^j : 3^j \leq \rho_{\mathcal{M}}(t), j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} & \text{if } 0 < t \leq \tau, \\ 0 & \text{if } t > \tau. \end{cases}$$

令 $\lambda'_1 > \cdots > \lambda'_\ell$ 表示像 ρ'中的密度，并注意到由构造可知，所有 λ'_i都是 3 的幂。特别地， ρ' 是 $\rho_{\mathcal{M}}$的 (1,3)- 近似。

接下来，令 $r_{\max}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为如下函数：

$$r_{\max}(\lambda) = \begin{cases} \max\{t : \rho'(t) \geq \lambda\} & \text{if } 0 \leq \lambda \leq \lambda'_1, \\ 0 & \text{if } \lambda > \lambda'_1. \end{cases}$$

我们定义 $\{\lambda'_i\}^{i\in[\ell]}$ 的一个密度子集如下。首先，设置 $\mu_1 = \rho'(36)$ 和 $i = 1$。然后，当 $\rho'(36r_{\max}(\mu_i)) \geq 1$ （即， $\rho'(36r_{\max}(\mu_i))$ 属于 ρ' 的非零支撑集）时，设置 $\mu_{i+1} = \rho'(36r_{\max}(\mu_i))$ 并更新 $i = i + 1$。令 Λ 表示由上述过程选出的密度子集，并令 $q := |\Lambda|$。

现在，对于每个 $i \in [q]$，定义 $r_i := r(D(N, \mu_i))$。注意， $r_i = r_{\max}(\mu_i)$。如果一个子集 $S \subseteq N$ *good* 满足以下条件，则称其为良好的：

$$r\left(D\left(S, \frac{\mu_i}{3}\right)\right) \geq \frac{r_i}{8} \qquad \forall i \in [q]. \tag{12}$$

上述定义的动机在于，任何良好的集合 S 都满足：$\rho_{\mathcal{M}|_S}$ 是 $\rho_{\mathcal{M}}$ 的 (288，9)-近似。为证明这一点，首先注意，如果 S 是良好的，则对于所有 $t \in (0, r_i/8]$，都有 $\rho_{\mathcal{M}|_S}(t) \geq \mu_i/3$。接下来，令 μ_{i-1}， $\mu_i \in \Lambda$，并令 $t \in (r_{i-1}/8, r_i/8]$。于是 $288t > 36r_{i-1}$，从而 $\rho'(288t) \leq \rho'(36r_{i-1}) = \mu_i$，其中最后一个等式由 μ_i's 的构造得出。利用 ρ' 是 $\rho_{\mathcal{M}}$ 的 (1，3)-近似这一事实，可得 $\rho_{\mathcal{M}}(288t) \leq 3\rho'(288t) \leq 3\mu_i$。综合以上各点可知：

$$\rho_{\mathcal{M}|_S}(t) \geq \frac{\mu_i}{3} \geq \frac{\rho_{\mathcal{M}}(288t)}{9} \qquad \forall \mu_{i-1}, \mu_i \in \Lambda \text{ and } t \in \left(\frac{r_{i-1}}{8}, \frac{r_i}{8}\right].$$

此外，注意到对于 $t \in (1, r_1/8]$ ，我们有 $\rho'(288t) \leq \rho'(36) = \mu_1$。因此，运用与上文相同的推理可得 $\rho_{\mathcal{M}|_S}(t) \geq \mu_1/3 \geq \rho_{\mathcal{M}}(288t)/9$。最后，考虑 $t > r_q/8$ 的情形。根据 μ_i 的构造，我们有 $\rho'(288t) \leq \rho'(36r_q) = 0$。因此 $\rho_{\mathcal{M}}(288t) = \rho'(288t) = 0$，因为 ρ' 是 $\rho_{\mathcal{M}}$ 的一个 (1, 3)-近似，因而对于任意 $a > 0$， $\rho'(a) = 0 \iff \rho_{\mathcal{M}}(a) = 0$ 。由此可得 $\rho_{\mathcal{M}|_S}(t) \geq 0 = \rho_{\mathcal{M}}(288t)$。这就证明了如下断言：若 S 是良好的，则 $\rho_{\mathcal{M}|_S}$ 是 $\rho_{\mathcal{M}}$ 的一个 (288, 9)-近似。

因此，要证明该定理，只需证明集合 $S \subseteq N$是良好的（即满足条件（12））的概率至少为 $1/100$。下面对此进行讨论。首先注意，根据式（6）和定理 5.1，对于每个 $\mu_i \in \Lambda$ 满足 $\mu_i \geq 3$ 的情形，均有

$$\Pr\left[r\left(D\left(S, \frac{\mu_i}{3}\right)\right) \leq \frac{r_i}{8}\right] \leq \exp\left(-\frac{r_i}{48}\right).$$

当 $\mu_q = 1$时，虽然由于不满足假设，我们无法直接将定理 5.1 中的集中界作为黑箱使用，但仍可如下得到相同的界。注意，若 $\mu_q = 1$，则 $r(D(S, \mu_q/3))$ 就是 $r(S)$，并且 $r_q = r(N)$。令 B 为 $\mathcal{M}$的任意一个基，并注意到$r(S) \geq |S \cap B|$。由于 S 以概率 $1/2$独立地包含 N中的每个元素，我们可以使用切尔诺夫界：概率 $[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] \leq \exp(-\delta^2\mathbb{E}[X]/2)$，其中 $X = |S \cap B|$、 $\mathbb{E}[X] = |B|/2 = r(N)/2$，且 $\delta = 3/4$ （选择它使得 $(1-\delta)\mathbb{E}[X] = r(N)/8$），从而得到

$$\Pr\left[r\left(D\left(S, \frac{\mu_q}{3}\right)\right) \leq \frac{r_q}{8}\right] = \Pr\left[r(S) \leq \frac{r(N)}{8}\right] \leq \exp\left(-\frac{3^2 \cdot r_q}{4^3}\right) \leq \exp\left(-\frac{r_q}{48}\right).$$

最后请注意，根据构造，对于所有 i， $i+1 \in [q]$，我们都有 $r_1 \geq 36$ 和 $r_{i+1} \geq 36r_i$。因此，对于每个 $i \in [q]$，都有 $r_i \geq 36^i$，从而由并集界可得

$$\Pr[S \text{ not good}] \leq \sum_{i=1}^{q} \exp\left(-\frac{r_i}{48}\right) \leq \sum_{i=1}^{q} \exp\left(-\frac{36^i}{48}\right) \leq \left[\exp\left(-\frac{36}{48}\right) + 2\exp\left(-\frac{36^2}{48}\right)\right] \leq \frac{99}{200}.$$

因此，

$$\Pr[S \text{ and } N \setminus S \text{ are both good}] \geq 1 - 2 \cdot \frac{99}{200} = \frac{1}{100},$$

由此完成证明。 □

6 主算法及其分析

本节描述并分析定理 3.5中的过程。分析包含两个主要部分。第一部分是证明：如果近似曲线 $\tilde{\rho}$ 是良构的（以某种明确定义的方式），那么存在一种算法，能够期望获得 $F(\tilde{\rho})$ 的一个常数因子——参见定理 6.1。第二部分则是证明：给定任意初始近似曲线 $\tilde{\rho}$，可以找到一些良构曲线，使其 F 函数值接近 $F(\tilde{\rho})$——参见定理 6.2。

下一个结果在第6节.1中得到证明，将上述第一步形式化。

定理 *6.1.* 设 $M = (N, I)$ 是一个具有 w-采样权重的拟阵，令 r 和 $\rho_{\mathcal{M}}$ 分别表示 M 的秩函数和秩密度曲线。设 $\rho \leq \rho_{\mathcal{M}}$ 是一个秩密度曲线，其密度为 $\{\lambda_i\}_{i\in[m]}$，其中 λ_i 是某个整数 $\beta \geq 3$ 的幂，且满足 $\lambda_1 > \cdots > \lambda_m \geq 1$，并且对于 $i \in [m-1]$，有 $r(D(N, \lambda_{i+1})) \geq 24r(D(N, \lambda_i/\beta))$。那么，存在一个高效过程 $ALG(\rho, \beta)$，当其在由 M 给定的 *RA-MSP* 子实例上运行时，将返回 M 的一个独立集 I，其期望权重至少为 $(1/180e)F(\rho)$。

我们注意到，上述结果假设 λ_i 是 β 的幂，这主要是为了方便（这样 λ_i/β 就是一个整数），但这并非严格必要。

定理 定理 3.5 证明中的第二个主要要素是以下结果。

定理 6.2。 设 $M = (N, I)$ 是一个具有 w-采样权重的拟阵，令 r 和 $\rho_{\mathcal{M}}$ 分别表示 M 的秩函数和秩密度曲线。给定一条 $\rho_{\mathcal{M}}$ 的 $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 24}$ 且满足 $\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$的 (α, β)-近似曲线 $\tilde{\rho}$，存在一个过程 $\mathrm{ALG}(\tilde{\rho}, \alpha, \beta)$，返回秩密度曲线$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$，使得：

(i) ρ 是 $\rho_{\mathcal{M}}$的 (α^2, β^2)-近似。*(ii)* $\sum_{i\in[4]} F(\rho_i) \geq F(\rho)$。*(iii)* 对每个 $i \in [4]$，ρ_i 满足以下性质：设$\{\mu_j\}_{j\in[\ell]}$ 为 ρ_i的密度，则所有μ_j 都是 $\beta \geq 3$的幂，并且对于$j \in [\ell - 1]$，$r(D(N,\mu_{j+1})) \geq \alpha r(D(N, \mu_j/\beta)) \geq 24r(D(N, \mu_j/\beta))$。此外，$\rho_i \leq \rho_{\mathcal{M}}$。

证明。 我们首先讨论如何构造曲线 ρ。一方面，我们的目标是确保曲线的像$\{\lambda_i\}_{i\in[m]}$ 满足其中每个 λ_i 都是 β的幂，并且，与任意两个连续密度λ_i 和 λ_{i+1} 相对应的秩至少相差一个 α 因子（我们将在下文对此进行形式化）。另一方面，在满足$\rho \leq \tilde{\rho}$的同时，我们希望 ρ 尽可能接近 $\tilde{\rho}$。下面我们将讨论如何实现这些目标。

令$\{\tilde{\lambda}_i\}_{i\in[\tilde{m}]}$ 表示 $\tilde{\rho}$的像中的密度（即至少为 1 的值），并令 $\tau := \max\{t > 0 : \tilde{\rho}(t) \geq 1\}$。令 $\rho' : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$表示通过将 $\tilde{\rho}$中的每个密度 $\tilde{\lambda}_i$ 向下取整为最接近的 β的幂而得到的曲线。也就是说，

$$\rho'(t) := \begin{cases} \max\{\beta^j : \beta^j \leq \tilde{\rho}(t), j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} & \text{if } 0 < t \leq \tau, \\ 0 & \text{if } t > \tau. \end{cases}$$

令$\{\lambda'_i\}_{i\in[m']}$ 表示 ρ'像中的密度，并注意到根据构造，所有 λ'_i 都是 β的幂。因此，剩下的就是保证任意两个的几何秩递增性质。

满足连续密度。为实现这一点，我们使用以下定义。给定一条像为 $\lambda_1 > \cdots > \lambda_m$ 的秩密度曲线 ρ，我们定义函数 $r^{\rho}_{\max}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，其定义为

$$r^{\rho}_{\max}(\lambda) := \begin{cases} \max\{t : \rho(t) \geq \lambda\} & \text{if } \lambda \leq \lambda_1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为简洁起见，令 $r'_{\max} := r^{\rho'}{}_{\max}$ 表示与曲线 ρ' 对应的 $r_{\max}$ 函数。

接下来，我们按如下方式构造 ρ。首先，设置 $\lambda_1 = \lambda'_1$ 和 $i = 1$。然后，当 $\rho'(\alpha \cdot r'_{\max}(\lambda_i)) \geq 1$ 时，设置 $\lambda_{i+1} = \rho'(\alpha \cdot r'_{\max}(\lambda_i))$，并更新 $i = i+1$。令 $\Lambda := \{\lambda_i\}_{i \in [m]}$ 表示上述过程选出的密度。我们将 ρ 定义为由 ρ' 得到的曲线，具体做法是进一步将 ρ' 的像中的密度 λ'_i 向下取整到最接近的 $\lambda \in \Lambda$。更精确地说，

$$\overline{\rho}(t) = \begin{cases} \max\{\overline{\lambda} \in \overline{\Lambda} : \overline{\lambda} \leq \rho'(t)\} & \text{if } 0 < t \leq \overline{\tau}, \\ 0 & \text{if } t > \overline{\tau}, \end{cases}$$

其中 $\overline{\tau} := r_{\max}(\lambda_m) \leq \tau$。

我们有 ρ 是 α，β-近似于 $\tilde{\rho}$，这是由 引理 4.3 保证的，因为 ρ' 是 $(1, \beta)$-近似于 $\tilde{\rho}$，并且 ρ 是 $(\alpha, 1)$-近似于 ρ'。结合 $\tilde{\rho}$ 是 α，β-近似于 $\rho_{\mathcal{M}}$ 这一事实，即可证明性质 (i)。

接下来，以及 $\tilde{r}_{\max} := r^{\tilde{\rho}}_{\max}$ 分别表示对应于曲线 $\tilde{\rho}$ 和 ρ的 $r_{\max}$ 函数。我们证明如下结论。

断言 6.3。若 $|\overline{\Lambda}| \geq 5$，则对于任意五个连续密度 $\lambda_i, \ldots, \lambda_{i+4} \in \Lambda$，有

$$r\left(D\left(N, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \leq \alpha \cdot r'_{\max}\left(\overline{\lambda}_{i+2}\right). \tag{13}$$

令 $\kappa := r(D(N, \lambda_i/\beta))$。注意，若 $\kappa \leq \alpha$，则 断言 6.3 成立，因为 $r'_{\max}(\lambda_{i+2}) \geq 1$ 是由构造得到的。现在假设 $\kappa > \alpha$。我们断言在这种情况下有

$$\kappa \leq \alpha \cdot \tilde{r}_{\max}\left(\frac{\overline{\lambda}_i}{\beta^2}\right), \tag{14}$$

这由以下事实得出。由于 $\tilde{\rho}$ 是 ρ的 (α, β)-近似，我们有

$$\tilde{\rho}(t) \geq \frac{\rho(\alpha t)}{\beta} \qquad \forall t \geq 1.$$

将此不等式应用于 $t = \kappa/\alpha$，得到

$$\tilde{\rho}\left(\frac{\kappa}{\alpha}\right) \geq \frac{\rho(\kappa)}{\beta} \geq \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta^2}, \tag{15}$$

其中第二个不等式由 $\kappa := r(D(N, \lambda_i/\beta))$ 得出。最后，等式 (14) 可直接由等式 (15)推出。该结论现由以下内容得出：

$$\kappa \leq \alpha \cdot \tilde{r}_{\max}\left(\frac{\overline{\lambda}_i}{\beta^2}\right) = \alpha \cdot r'_{\max}\left(\frac{\overline{\lambda}_i}{\beta^2}\right) \leq \alpha \cdot r'_{\max}\left(\overline{\lambda}_{i+2}\right),$$

其中，第一个不等式由（14）得出，第一个等式根据 ρ' 的构造以及以下事实得出：λ_i/β^2 是 β 的幂（因为 $\overline{\lambda}_i$ 是 β 的幂，并且 $\lambda_i \geq \beta^4 \lambda_{i+4} \geq \beta^4$），第二个不等式同样根据构造可知 $\lambda_i/\beta^2 \geq \lambda_{i+2}$。

利用断言 6.3，我们可以进一步将 r（D（N，$\frac{\lambda_i}{\beta}$））的上界估计如下

$$r\left(D\left(N,\frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right)\le\alpha\cdot r'_{\max}\left(\overline{\lambda}_{i+2}\right)=\alpha\cdot\overline{r}_{\max}(\overline{\lambda}_{i+2})\le\frac{1}{\alpha}\cdot\overline{r}_{\max}(\overline{\lambda}_{i+4})\le\frac{1}{\alpha}\cdot r(D(N,\overline{\lambda}_{i+4})),\quad(16)$$

其中，第一个不等式由 断言 6.3得出，等式成立是因为 $r'_{\max}(\lambda)=r_{\max}(\lambda)$ 对每个$\lambda\in\Lambda$ 均成立（根据构造），第二个不等式成立是因为根据构造 $r_{\max}(\lambda_{j+1})\ge\alpha\cdot r_{\max}(\lambda_j)$ 对任意两个连续密度 λ_j、$\lambda_{j+1}\in\Lambda$均成立，而最后一个不等式由 $\rho\le\rho$得出。

我们现在按如下方式构造曲线 $\{\rho_i\}^{i\in[4]}$。对于 $i\in[4]$，令

$$\overline{\Lambda}_i:=\left\{\overline{\lambda}_j\in\overline{\Lambda}:j\equiv i-1\pmod 4\right\}.\quad(17)$$

若 $\overline{\Lambda}_i=\emptyset$，则令 ρ_i 为（按约定）由 $\rho_i(t)=1$ （$0<t\le\tau$时）和 $\rho_i(t)=0$ （$t>\tau$时）给出的曲线。否则，我们将 ρ_i 定义为由 ρ 进一步向下取整密度$\lambda\in\Lambda$ 得到的曲线，取整到 Λ_i中最接近的密度。更准确地说，

$$\overline{\rho}_i(t):=\begin{cases}\max\{\mu\in\overline{\Lambda}_i:\mu\le\overline{\rho}(t)\} & \text{if } 0<t\le\overline{\tau}_i,\\ 0 & \text{if } t>\overline{\tau}_i,\end{cases}$$

其中 $\overline{\tau}_i:=\overline{r}_{\max}(\min\{\mu:\mu\in\overline{\Lambda}_i\})$。

为验证性质 (ii)，注意到根据构造，我们有 $\cup_{i\in[4]}\Lambda_i=\Lambda$。令 $r_{\max}(\overline{\lambda}_i)=0$对所有 $i\le 0$ 按约定取值，可得

$$\sum_{i=1}^{4}F(\overline{\rho}_i)=\sum_{i=1}^{\overline{m}}(\overline{r}_{\max}(\overline{\lambda}_i)-\overline{r}_{\max}(\overline{\lambda}_{i-4}))\eta(\overline{\lambda}_i)\ge\sum_{i=1}^{\overline{m}}(\overline{r}_{\max}(\overline{\lambda}_i)-\overline{r}_{\max}(\overline{\lambda}_{i-1}))\eta(\overline{\lambda}_i)=F(\overline{\rho}).$$

最后，为验证性质 (iii)，首先注意到根据构造，对每个 $\rho_i\le\rho\le\rho'\le\rho_{\mathcal{M}}$，我们都有 $i\in[4]$，而且所有曲线 ρ_i 都由 β的幂次密度组成。此外，当 $|\Lambda|\le 4$时，几何秩递增性质显然成立。否则，由式 (16) 以及 $\alpha\ge 24$这一事实可直接推出。

□

现在我们说明，如何将 定理 6.1 和 定理 6.2 结合起来推出定理 3。 5.

定理 *定理 3.5*的证明。 给定一个 (α,β)-近似 $\tilde{\rho}$ 的 $\rho_{\mathcal{M}}$，首先运行定理 6.2 中的过程，得到曲线 $\rho,\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$。然后均匀随机选择一个指标 $i\in[4]$，并对定理 6.1 中的过程运行 ρ_i，得到一个期望权重至少为

$$\frac{1}{180e}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}F(\overline{\rho}_i)\right)\ge\frac{1}{720e}F(\overline{\rho})\ge\frac{1}{1440e\alpha^2\beta^2}\left(F(\rho_{\mathcal{M}})-\alpha^2 w_{\max}\right),$$

其中，最后一个不等式用到了 引理 3.4 以及以下事实：ρ 是α^2,β^2）近似 $\rho_{\mathcal{M}}$。

□

因此，为了证明 定理 3.5，还需要证明定理 6.1。

6.1 定理 6.1 的证明定理 6.1

Th本节中我们始终使用定理 6.1中的记号和假设。

我们分两步证明该定理。首先，我们证明，在观察一个样本集 S后，能够以至少一个常数概率构造出一个满足特定性质的$\mathcal{M}_i$ 链。然后，我们证明，给定这样一条链，存在一个过程可以返回$\mathcal{M}$的一个独立集 I，其 $\mathbb{E}[w(I)] =$ 为 $\Omega(F(\rho))$，从而得到所需结果。我们首先讨论前一个论断。

Gi给定样本集 $S \subseteq N$，我们按如下方式构建一条拟阵链。对于 $i \in [m]$ l et

$$\begin{aligned} N_i &:= \operatorname{span}\left(D\left(S, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \setminus \left(S \cup \operatorname{span}\left(D\left(S, \frac{\overline{\lambda}_{i-1}}{\beta}\right)\right)\right), \text{ and} \\ \mathcal{M}_i &:= \left(\mathcal{M}/\operatorname{span}\left(D\left(S, \frac{\overline{\lambda}_{i-1}}{\beta}\right)\right)\right)\Big|_{N_i}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中约定 $D(S, \lambda_0/\beta) = \emptyset$。

此外，对于每个 $i \in [m]$，令 $\overline{N_i} := D(N, \lambda_i)$，并定义 $\Lambda := \{i \in [m] : r(N_i) \geq 24,\ \lambda_i \geq \beta\}$。注意，$\Lambda$ 以及 N_i 不依赖于样本集 S。此外，根据定理 6.1 的假设可知，$\Lambda \supseteq [m] \setminus \{1, m\}$。下一个结果表明，以常数概率，样本集 S 满足：对于每个 $i \in \Lambda$，集合 N_i 包含一个秩和密度都很大的子集 U_i；更准确地说，$r(U_i) \geq \Omega(r(N_i))$，并且 $|U_i|/r(U_i) \geq \Omega(\lambda_i)$。

引理 6.4. 令 $S \sim B(N, 1/2)$，并令 N_i、N_i 和 Λ 如上所定义。那么，以至少 $1/3$ 的概率，每个满足 $i \in \Lambda$ 的 N_i 都包含 λ_i 个不相交独立集 I_1、……、I_{λ_i}，使得 $\sum_{j=1}^{\lambda_i} |I_j| \geq (1/24)\lambda_i r(N_i)$。

证明。令 $B_i \subseteq \overline{N_i}$ 表示 $\mathcal{M}|_{N_i}$ 的（任意）λ_i 个不相交基的并。若样本集 S 满足以下条件，则称其为良好。

$$\left|\left(\operatorname{span}\left(D\left(S \cap B_i, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \cap B_i\right) \setminus S\right| \geq \frac{1}{12} \cdot |B_i| \qquad \forall i \in \overline{\Lambda}. \tag{19}$$

<escape></escape>上述定义的动机在于，任何良好样本集<escape> S </escape>都会导出一条拟阵链（如<escape></escape>式（18）<escape></escape>中所定义），该链满足引理中所述的性质。为此，注意到对于每个<escape>$i \in \Lambda \cap [m-1]$ </escape>，我们有<escape>

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{span}\left(D\left(S, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \cap B_{i+1}\right| &\leq \left|\operatorname{span}\left(D\left(N, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \cap B_{i+1}\right| \\ &\leq \overline{\lambda}_{i+1} r\left(D\left(N, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \\ &\leq \frac{\overline{\lambda}_{i+1}}{24} r(\overline{N}_{i+1}), \end{aligned}$$

其中最后一个不等式成立，是因为根据定理 6.1 的假设，$r(D(N, \lambda_{i+1})) \geq 24 r(D(N, \lambda_i/\beta))$。此外，由于按照约定，$D(S, \lambda_0/\beta) = \emptyset$，同一上界也适用于 $i = 0$，即 张成 $(D(S, \lambda_0/\beta)) \cap B_1| \leq (\lambda_1/24) r(N_1)$。因此，对于任意 $i \in \Lambda$，我们得到

$$|N_i \cap B_i| \geq \left|\left(\operatorname{span}\left(D\left(S \cap B_i, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \cap B_i\right) \setminus S\right| - \left|\operatorname{span}\left(D\left(S, \frac{\overline{\lambda}_{i-1}}{\beta}\right)\right) \cap B_i\right|$$

$$\geq \frac{1}{12}|B_i| - \frac{1}{24}\overline{\lambda}_i r(\overline{N}_i)$$
$$= \frac{1}{24}\overline{\lambda}_i r(\overline{N}_i).$$

最后，由于 B_i 是 λ_i 个不相交基的并集，因此 $N_i \cap B_i$ 是 λ_i 个不相交独立集的并集（包含于 N_i 中），于是结论得证。

因此，为了证明该引理，只需证明 $\Pr[S \text{ 是良好的}] \geq 1/3$。为此，首先注意到，由于对于所有 $i \in \Lambda$ 均有 $\lambda_i = \beta^j$，且对于某个 $j \geq 1$ 和 $\beta \geq 3$ 成立，因此

$$\frac{\overline{\lambda}_i}{\beta} = \left\lfloor \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\overline{\lambda}_i}{3} \right\rfloor. \tag{20}$$

然后，将定理 5.1中的（5）应用于每个 $\mathcal{M}|_{B_i}$ 且满足 $i \in \Lambda$的情形，我们可以将 S 由于指标 $i \in \Lambda$ 而不良的概率上界为

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\left|\left(\operatorname{span}\left(D\left(S \cap B_i, \frac{\overline{\lambda}_i}{\beta}\right)\right) \cap B_i\right) \setminus S\right| \leq \frac{1}{12}|B_i|\right] \\
&\leq \Pr\left[\left|\left(\operatorname{span}\left(D\left(S \cap B_i, \left\lfloor \frac{\overline{\lambda}_i}{3} \right\rfloor\right)\right) \cap B_i\right) \setminus S\right| \leq \frac{1}{12}|B_i|\right] \\
&\leq \exp\left(-\frac{|B_i|}{144}\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{r(\overline{N}_i)}{48}\right),
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由式 (20)得出，第二个由定理 5.1 以及以下事实得出：对于所有 $i \in \Lambda$，拟阵 $\mathcal{M}|_{B_i}$ 包含 $3h$ 个不相交基，且 $h = \lfloor \lambda_i/3 \rfloor \geq 1$；最后一个不等式成立，是因为 $|\bar{B}_i| = \lambda_i r(N_i)$ 且对于所有 $\lambda_i \geq \beta \geq 3$ $i \in \Lambda$均成立。

现在，我们可以通过对$i \in \Lambda$ 和 $r(N_i) \geq 24$ （对于 $i \in \Lambda$）使用并集界，得到 S 不良的概率上界如下：

$$\sum_{i \in \overline{\Lambda}} \exp\left(-\frac{r(\overline{N}_i)}{48}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \exp\left(-\frac{24^i}{48}\right) \leq \exp\left(-\frac{24}{48}\right) + 2\exp\left(-\frac{24^2}{48}\right) \leq \frac{2}{3}.$$

因此，$\Pr[S \text{ 是 good}] \geq 1 - 2/3 = 1/3$，如所需。 □

证明中的第二个主要要素是证明上述结果可以通过算法加以利用。更准确地说，我们证明如下结论。

引理 6.5. 设 $M = (N, I)$ 是一个具有 w-采样权重的拟阵，其中包含 h 个两两不相交的独立集 $I_1, \ldots, I_h$，满足 $s := (1/h)\sum_{j=1}^{h}|I_j| \geq 1$。那么，存在一个过程，当其在由 M 给出的 *RA-MSP* 子实例上运行，且仅预先给定 h 时，能够返回 M 的一个独立集，其期望权重至少为$(s/2e)\eta(h)$。即使 M 的元素以对抗性（而非均匀随机）的顺序揭示，这一结论仍然成立。

证明。 假设我们在以下实例上运行 算法 2 中描述的在线选择过程（OSP）：给定的 RA-MSP 子实例 $\mathcal{M}$，并以参数 h （如 引理 6.5的陈述中所定义）作为输入。

算法 2： 在线选择过程（OSP）

输入： 一个参数 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，以及一个 RA-MSP 子实例 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 在线揭示于任意顺序。

输出： 独立集 $I \in \mathcal{I}$.

集合 $I \leftarrow \emptyset$ // set of picked elements

只要 M 中还有元素剩余**就执行**

  在 h 个元素上初始化经典 MSP 算法

  令 $C \leftarrow \emptyset$ // input of the classical MSP algorithm

  令 $e \Leftarrow$ 为 None // picked element, if any

  当 $|C| < h$ 且 M 中还有剩余元素时**执行**

    令 $(e, w(e))$ 为下一个在线输入

    若 $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$，**则**

      将 $w(e)$ 输入经典 MSP 算法，并将 e 添加到 C

      若 $w(e)$ 被经典 *MSP* 算法选中，**则**

        选取 e 并设置 $\bar{e} \leftarrow e$

  若 $\bar{e}$ 不为 None，**则** 将 e 添加到 I

返回 I

假设 OSP 已成功完成第 i 次迭代（其中 $i \in \{0, \ldots, r-1\}$），即将开始第 $(i+1)$ 次迭代。令 Z 表示迄今为止已见到的元素集合，令 I 表示迄今为止已选取的元素集合。此外，令 $T := \bigcup_{j=1}^{h} I_j$ 且 $J := \{e \in N : I \cup \{e\} \in \mathcal{I}\}$。首先，注意到根据构造，$I \in \mathcal{I}$。现在，观察到

$$|I_j \cap J| \geq \max\{0, |I_j| - |I|\} \geq |I_j| - i \qquad \forall j \in [h],$$

因为 $I_j, I \in \mathcal{I}$ 且 $|I| \leq i$。因此 $|T \cap J| \geq (s-i)h$。此外，由于经典秘书算法在 i 组、每组包含 h 个元素的情况下运行，我们有 $|(T \cap Z) \cap J| \leq ih$，因此

$$|(N \setminus Z) \cap J| \geq |(T \setminus Z) \cap J| = |T \cap J| - |(T \cap Z) \cap J| \geq (s-2i)h.$$

因此，若 $s \geq 2i+1$，则 $|(N \setminus Z) \cap J|$ 个元素是 算法 2 在第 $i+1$ 次迭代中能够提供给经典 MSP 算法的数量，至少为 h，这意味着它成功完成了第 $i+1$次迭代；因此，成功迭代的总次数至少为 $\lfloor (s-1)/2 \rfloor + 1 \geq \max\{1, s/2\}$。

最后，请注意，每次成功迭代中选取元素的期望权重至少为 $\eta(h)/e$。事实上，尽管到达顺序具有对抗性，但由于权重是随机分配的，经典秘书算法处理的是从 w 中均匀随机抽取的 h 个权重。结合成功迭代次数的下界，即可得到所需结果。

□

现在我们可以结合引理 6.4和6.5 来证明定理 6.1如下。

定理 *6.1* 的证明。令 OSP($\mathcal{M}$ h表示引理 6.5 （即算法 2）中的在线选择过程。此外，对于 $i \in [m]$，令 r_i 表示 $\eta(\lambda_i)$ 在 $F(\rho)$ 中的系数。因此，$F(\rho) = \sum_{i=1}^{m} r_i \eta(\lambda_i)$。考虑以下算法：分别以概率 $12/15$、$2/15$和 $1/15$选择并执行下述三个分支之一。

（i）观察 $S \sim B(N, 1/2)$，构造链 $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{M}_i$，如（18）中所定义，并对每个 $i \in [m]$ 运行 OSP($\mathcal{M}_i$, λ_i)（彼此独立并行运行），返回所有选中的元素。（ii）在 $\mathcal{M}$ 上运行经典秘书算法，并返回选中的元素（若有）。（iii）在不观察任何内容的情况下运行 OSP($\mathcal{M}$, 1)，并返回所有选中的元素。

假设我们执行分支 (i)。根据 引理 6.4，以至少 $1/3$ 的概率，每个 $\mathcal{M}_i$ 满足 $i \in \Lambda$的 引理 6.5 的条件，参数为 $h = \lambda_i$ 和 $s = (1/24)r(N_i)$。注意到，给定 $r(N_i) \geq 24$ 对所有 $i \in \Lambda$均成立，$s \geq 1$也成立。此外，由于链中的所有拟阵构成直和，根据 引理 6.5，执行算法的第一个分支所返回的独立集的期望权重至少为

$$\frac{1}{3}\sum_{i\in\Lambda}\frac{1}{2e}\cdot\frac{r(N_i)}{24}\eta(\lambda_i) = \frac{1}{144e}\sum_{i\in\Lambda} r(N_i)\eta(\lambda_i) \geq \frac{1}{144e}\sum_{i\in\Lambda} r_i\eta(\lambda_i),$$

其中，该不等式由每个 $i \in [m]$ 的 $\rho \leq \rho_{\mathcal{M}}$ 和 $N_i = D(N, \lambda_i)$ 得出。

因此，如果 $i \in \Lambda$，那么 $F(\rho)$ 中对应的项 $r_i\eta(\lambda_i)$ 已由分支 (i) 计入。因此，只需考虑 $i \in [m] \setminus \Lambda \subseteq \{1, m\}$。

首先，假设 $1 \notin \Lambda$。在这种情况下，我们必然有 $r(N_1) < 24$。由于运行经典秘书算法所得到的期望权重至少为 $\eta(|N|)/e$，并且 $\eta(|N|) \geq \eta(\lambda_1)$，因此，通过运行分支 (ii)，输出集合的期望权重至少为

$$\frac{\eta(|N|)}{e} \geq \frac{1}{e}\cdot\frac{r(N_1)\eta(\lambda_1)}{r(N_1)} \geq \frac{1}{23e} r_1\eta(\lambda_1),$$

其中，最后一个不等式由 $r_1 \leq r(N_1) \leq 23$ 得出。

最后，假设 $m \notin \Lambda$。那么 $\lambda_m = 1$，此时运行分支 (iii) 得到

$$\mathbb{E}[w(\mathrm{OSP}(\mathcal{M}, 1))] \geq \frac{1}{2e} r(N)\eta(1) \geq \frac{1}{2e} r(N_m)\eta(\lambda_m),$$

其中第一个不等式由 引理 6.5 结合 $h = 1$ 和 $s = r(N) \geq 1$得到，因为 $\mathcal{M}$的任何一个基都是秩为 $r(N)$ 的独立集，而第二个不等式成立是因为 $r(N) \geq r(N_m)$ 且$\lambda_m = 1$。

将上述结果与执行各个分支的相应概率相结合，即可得到算法返回的集合的期望权重下界。

□

最后，我们讨论主要结果（即定理 1.2）在更一般的带采样设置的对抗性顺序下仍然成立；在这种设置中，我们可以对集合 $S \subseteq N$ 中的每个元素进行独立采样，采样概率为 N，而其余（未采样的）元素则按对抗性顺序到达。 $1/2$

为了说明这一点，首先注意到，在定理 6.1 的证明中，唯一用到未采样元素（即 $N \setminus S$）按随机顺序到达的地方，是为了论证在分支 (ii) 中运行经典秘书算法时，我们能得到至少为 $w_{\max}/e$的期望权重。事实上，分支 (i) 和 (iii)依赖于运行引理 6.5中的过程，而该过程的保证在元素按对抗性顺序到达时仍然成立。不过请注意，在上述对抗性顺序和采样设置下运行经典秘书过程，输出元素的期望权重至少为 $w_{\max}/4$。事实上，在后一种设置下选中 $w_{\max}$ 的概率至少等于以下事件发生的概率： $w_{\max}$ 未被采样，且第二大权重被采样；该事件发生的概率为 $1/4$。因此，定理 6.1 在对抗性顺序和采样设置下仍然成立（但常数可能略差）。

接下来请注意，这意味着定理 3.5 在上述设置下也成立（同样，常数可能略差）。这是因为其证明依赖于结合定理 6.1和6.2中的过程，而后者完全不受元素到达顺序的影响。

最后，注意到，定理 1.2 的证明使用了定理 6.1 中的过程和经典秘书算法。由于（如上所述）这两种算法在带有采样设置的对抗性顺序下，保证与本文针对随机顺序给出的保证非常相似，因此结论成立。

6.2 完整算法与带有采样设置的对抗性顺序

接下来，我们概述用于证明定理 1.2的完整算法。首先，算法均匀随机地执行以下两个分支之一：

(1) 在 N 上运行经典秘书算法。(2) 运行以下过程：

- 构造一个集合 S （不选择任何元素），使其中包含 N 的每个元素的概率均为 $1/2$，且各元素相互独立。
- 将 $\tilde{\rho}$ 定义为 $\rho_{\mathcal{M}|_S}$ 的 $(288, 9)$-下移。
- 在剩余的未采样元素上运行定理 3.5 的过程（即，在拟阵 $\mathcal{M}|_{N\setminus S}$上），使用曲线 $\tilde{\rho}$ 以及参数 $\alpha = 288^2$ 和 $\beta = 9^2$作为输入。

定理 3.5 中的过程由两个主要步骤组成：首先，它运行定理 6.2 中的算法，作用于曲线 $\tilde{\rho}$ ，参数为 $\alpha = 288^2$ 和 $\beta = 9^2$，以找到结构良好的曲线ρ_1、 ρ_2、 ρ_3以及 ρ_4。然后，它从这四条曲线中ρ_j均匀随机选择一条，并运行定理 6.1 中的过程，作用于拟阵$\mathcal{M}|_{N\setminus S}$，将这样的$\rho_j$和 $\beta = 9^2$作为输入。后一个算法以概率 $2/15$、$1/15$和 $12/15$ 分别执行以下三个分支之一：

(2.i) 在 $N \setminus S$上运行经典秘书算法。(2.ii) 运行 OSP($\mathcal{M}|_{N\setminus S}, 1$)。(2.iii) 对集合 S' 进行抽样（不选择任何元素），使其包含 $N \setminus S$ 中的每个元素，概率为 $1/2$，并独立地按照（ $\bigoplus_{i=1}^{m}\mathcal{M}_i$ 的定义构造链（18），以ρ_j 和 $\beta = 9^2$为输入，并对每个$\mathcal{M}_i$,λ_i运行 OSP($i \in [m]$。

以上完成了完整算法的描述。总之，该算法执行以下四个选项之一：以概率(1) 执行分支 $1/2$，以概率(2.i) 执行分支 $1/15$，以概率(2.ii) 执行分支$1/30$，以及以概率(2.iii) 执行分支 $2/5$。因此，执行的要么是经典秘书算法（分支(1) 或(2.i)），要么是算法 2 中的 OSP 过程（分支(2.ii) 或(2.iii)）。即使元素以对抗性顺序到达，后者的保证仍然成立——见引理 6.5。此外，由于这是随机分配设置，经典秘书算法的标准保证在对抗性到达顺序下仍然成立。事实上，由于权重是在到达顺序确定后均匀随机地分配给元素的，因此该设置等价于权重由对手分配给元素、而到达顺序均匀随机的情形。

现在，我们讨论如何将上述过程及其分析调整为带有样本设置的对抗性顺序。在此设置中，算法必须指定一个（可能是随机的）采样概率 $p \in [0, 1]$。随后，实例分两个阶段向算法揭示。首先，向算法提供一个随机集合 S，其中每个元素属于 N 的概率均为 p，且彼此独立。不过，算法不得从 S中选择任何元素。在第二阶段， $N \setminus S$ 中的元素将按对抗性顺序依次揭示。

修改后的算法如下。首先，它按照相应的概率（即 $1/2$、$1/15$、$1/30$ 和 $2/5$）选择四种选项之一。然后：

- 如果选择分支(1)，算法会设置 $p = 1/e$ 用于采样阶段，以获得一个样本集 S。随后，它利用该样本集 S 来选择一个阈值，并选取在 $N \setminus S$ 中到达且权重大于该阈值的第一个元素（如果存在）。如上所述，由于对于经典秘书问题，随机分配的对抗性顺序设置等价于标准的对抗性分配随机顺序设置，因此，该过程输出的元素的期望权重至少为 $w_{\text{最大值}}/e$。因此，这等价于在原始算法中运行分支(1)。

- 如果选择分支 (2.i)，算法将 $p = (e+1)/2e$ 用于采样阶段，以获得样本集 S。这等价于先按照 (2) 中的做法，以概率 $1/2$ 在 N 上进行采样，然后按照 (2.i) 中的做法，在剩余元素中再以 $1/e$ 的比例进行采样。令S' 为通过以概率$1/(e+1)$独立地对 S 中的每个元素进行子采样而从 S 得到的随机子集。注意，此时 S'是一个随机集合，其中 N中的每个元素都以概率 $1/2e$ 独立地出现。然后，我们使用 S' 设定一个阈值，并选择在 $N \setminus S$ 中到达且权重大于该阈值的第一个元素（如果存在）。这一过程等价于运行原算法中的分支 (2.i)。

- 如果选择分支 (2.ii)，算法将 $p = 1/2$ 设为样本集 S，然后在剩余的未采样元素上运行 OSP($\mathcal{M}|_{N\setminus S}$, 1)。这不会对权重 w 在元素间的均匀分配产生任何影响，因为它只取决于采样元素 S，而不取决于这些元素的权重。因此，给定的 RA-MSP 子实例 $\mathcal{M}|_{N\setminus S}$，在其上我们使用 OSP，确实会将 w 权重均匀随机地分配给元素，符合要求。由于 OSP 的保证在对抗性到达顺序下仍然成立，这等价于在原算法中运行分支 (2.ii)。

- 最后，如果选择分支 (2.iii)，算法会设置 $p = 3/4$ 以获得样本集 S。令S' 为从 S 中对每个元素进行独立采样得到的随机子集，采样概率为$2/3$。注意，此时 S' 是一个随机集合，其中 N 的每个元素都以独立的概率 $1/2$ 被包含，而 $S := S \setminus S'$ 是一个随机集合，其中 N的每个元素都以概率 $1/4$被包含。然后，我们使用 S' 来模拟原始算法分支 (2) 中使用的样本集 S，并使用 S 来模拟原始算法分支 (2.iii) 中使用的样本集 S'。如上文所述，这种构造不会对权重 w 均匀分配给各元素产生任何影响。因此，我们使用 OSP 的 RA-MSP 子实例 $\mathrm{M}|_{N\setminus S}$ 确实会将权重 w 均匀随机地分配给各元素，符合要求。最后，利用 OSP 的保证在对抗性到达顺序下仍然成立这一点可知，该过程等价于运行原始算法的分支 (2.iii)。

参考文献

[BIK07] M. Babaioff、N. Immorlica 和 R. Kleinberg。“拟阵、秘书问题和在线机制”。载于：离散算法研讨会 *(SODA)*。2007年，第 434–443 页。[BIKK18] M.Babaioff、N. Immorlica、D.Kempe 和 R. Kleinberg。“拟阵秘书问题”。载于：*ACM*学报 65.6（2018年），第 1–26 页。[CL12] S. Chakraborty 和 O. Lachish。“改进的拟阵秘书问题竞争比”。载于：第*23*届年度 *ACM-SIAM*离散算法研讨会 *(SODA)* 论文集。2012年，第 1702–1712 页。

[DK13] M. Dinitz 和 G. Kortsarz。《正则拟阵与可分解拟阵的拟阵秘书问题》。载于：第24届ACM-工业与应用数学学会离散算法研讨会（SODA）论文集。2013年，第108–117页。[DP12] N. B. Dimitrov 和 C. G. Plaxton。《转置拟阵中的竞争性加权匹配》。载于：Algorithmica 62.1（2012年），第333–348页。[Dyn63] E. B. Dynkin。《停止马尔可夫过程的最佳时刻选择》。载于：苏联数学 4（1963年），第627–629页。[FSZ18] M. Feldman、O. Svensson 和 R. Zenklusen。《拟阵秘书问题的一个简单的 $O(\log\log(\text{秩}))$-竞争性算法》。载于：运筹学数学 43.2（2018年），第638–650页。[IW11] S. Im 和 Y. Wang。《秘书问题：层状拟阵与区间调度》。载于：第22届 ACM-工业与应用数学学会离散算法研讨会（SODA）论文集。2011年，第1265–1274页。[JSZ13] P. Jaillet、J. A. Soto 和 R. Zenklusen。《拟阵秘书问题的进展：自由顺序模型与层状情形》。载于：整数规划与组合优化国际会议（IPCO）。施普林格。2013年，第254–265页。[Kar98] D. Karger。《拟阵优化问题的随机抽样与贪心稀疏化》。载于：数学规划 82（1998年11月）。doi: 10.1007/BF01585865。[KP09] N. Korula 和 M. P´al。《图与超图上的秘书问题算法》。载于：第36届自动机、语言与程序设计国际学术讨论会（ICALP）论文集。2009年，第508–520页。[KRTV13] T. Kesselheim、K. Radke、A. T¨onnis 和 B. V¨ocking。《加权二分图匹配及其在组合拍卖中的扩展的最优在线算法》。载于：第21届欧洲算法研讨会（ESA）论文集。2013年，第589–600页。[Lac14] O. Lachish。《拟阵秘书问题的 $O(\text{loglog}(\text{秩}))$ 竞争比》。载于：2014年 IEEE 第55届计算机科学基础研讨会。电气电子工程师学会。2014年，第326–335页。[MTW13] T. Ma、B. Tang 和 Y. Wang。《用于若干次模拟阵秘书问题的模拟贪心算法》。载于：第30届计算机科学理论方面国际研讨会（STACS）论文集。2013年，第478–489页。[OV13] S. Oveis Gharan 和 J. Vondr´ak。《拟阵秘书问题的变体》。载于：Algorithmica 67.4（2013年），第472–497页。[Sot13] J. A. Soto。《随机分配模型中的拟阵秘书问题》。载于：SIAM计算杂志 42.1（2013年），第178–211页。

A 节省略证明第5节

以下结果用于证明5中证明的性质（ii），见定理 5.1。

引理 *A.1.* 设 $M = (N, I)$ 为一个拟阵，设 $M_h = (N, I_h)$ 表示其 h 重并，其中 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为某个值，并设 r_h 表示 M_h 的秩函数。设 $Q \subseteq N$ 和 $e \in N \setminus Q$ 满足 $r_h(Q \cup \{e\}) = r_h(Q)$。则 $e \in$ 张成$(D(Q, h))$，其中 $D(Q, h)$ 的定义见式 *(1)*。

证明。 设 r 表示$\mathcal{M}$的秩函数。根据 Nash-Williams 的拟阵划分定理，我们有

$$r_h(U) = \min_{B \subseteq U} \{|U \setminus B| + hr(B)\} \qquad \forall U \subseteq N. \tag{21}$$

令 $B^* \subseteq Q$ 满足 $r_h(Q \cup \{e\}) = |(Q \cup \{e\}) \setminus B^*| + hr(B^*)$。注意， $e \in B^*$，否则

$$r_h(Q) \leq |Q \setminus B^*| + hr(B^*) = |(Q \cup \{e\}) \setminus B^*| - 1 + hr(B^*) = r_h(Q \cup \{e\}) - 1,$$

其中，第一个不等式由（21）得出；然而，这与 r_h（$Q \cup \{e\}$） $= r_h$（Q）矛盾。此外，注意到 r（$B^* \setminus \{e\}$） $= r$（B^*），否则

$$\begin{aligned} r_h(Q) &\leq |Q \setminus (B^* \setminus \{e\})| + hr(B^* \setminus \{e\}) = |(Q \cup \{e\}) \setminus B^*| + 1 + h(r(B^*) - 1) \\ &= r_h(Q \cup \{e\}) - h + 1, \end{aligned}$$

其中，第一个不等式再次利用了（21）；这再次与 $r_h(Q \cup \{e\}) = r_h(Q)$ 矛盾。此外，将 $r_h(Q \cup \{e\}) = r_h(Q)$ 与 $e \in B^*$ 和 $r(B^* \setminus \{e\}) = r(B^*)$ 结合起来，我们得到：

$$r_h(Q) = r_h(Q \cup \{e\}) = |(Q \cup \{e\}) \setminus B^*| + hr(B^*) = |Q \setminus (B^* \setminus \{e\})| + hr(B^* \setminus \{e\}$$

根据 (21)，这意味着，在所有 $A \subseteq Q$ 中，集合 $A^* := B^* \setminus \{e\}$ 是 $|Q \setminus A| + hr(A) = |Q| - (|A| - hr(A))$ 的一个最小化解。等价地， A^* 因此是所有 $A \subseteq Q$ 中 $|A| - hr(A)$ 的最大化解；因此， $A^* \subseteq D(Q, h)$，因为 $D(Q, h)$ 是同一表达式唯一的极大最大化解。回想起 $e \in$ 张成(A^*)，由此我们得到 $e \in$ 张成$(D(Q, h))$，这正是所需结果。 □