arXiv:2305.05361v1 [math.CT] 9 May 2023

变差函子：启发式自然性及其与端的联系

David Forsman

2023年5月10日

摘要

本文将范畴上的变差概念引入为一种双侧严格分解系统。借助变差，我们在比通常所考虑的情形更一般的背景下定义变差函子，从而不再需要其定义域为积范畴。在定义域通过一个跨度相连的变差函子之间，定义启发式自然变换。启发式自然性涵盖了多种已知的自然性类型，例如对角线自然性、特殊自然性和扭曲自然性。

我们展示启发式自然性与广义逗号范畴之间的联系，揭示启发式自然变换与从广义逗号范畴到遗忘函子的截面之间的一一对应关系。此外，我们引入相对于启发式变换概念的极限概念。这就是端的概念。我们证明，端可以通过积和等化子计算，并且富比尼定理对端仍然成立。

引言

范畴论的创立很大程度上受到了自然性的启发，自然性可以看作是对以规范方式构造的函数族这一概念的形式化。例如，由二元积中到第一分量的投影所组成的函数族，就是自然变换的一个例子。然而，有些映射族并不具备传统意义上的自然性。例如，考虑实希尔伯特空间与其对偶空间之间的线性同构。这一族线性映射的相容性由扭曲自然性所刻画。

此外，求值映射族构成关于一个变量的自然变换，并且关于另一个变量具有额外自然性。对角自然性使我们能够恢复前面提到的这些自然性概念。不过，对角自然性的处理往往会丢失原始情境中的过多信息。在他们的论文[1], 中，Eilenberg 和 Kelly 刻画了额外自然变换的垂直复合何时通常是良定义的。要从二自然变换的推广框架中重新得到这样的定理颇具挑战。出于实际考虑，许多数学家在端理论等领域更倾向于研究额外自然变换，而非二自然变换。额外自然性的视角使得在丰范畴的背景下对端作出适当推广成为可能。

第一节探讨严格分解系统，尤其是作为双侧严格分解系统的变差。范畴 C 上的严格分解系统 $(E,\ M)$ 是一对子范畴，它们都包含 C 的所有对象，并且每个态射 f 都等于 me，其中 m 是 M 中唯一的态射，e 是 E 中唯一的态射。如果 $(M,\ E)$ 也是一个严格分解系统，那么就称 $(E,\ M)$ 是 C 上的一个变差。我们证明，定义在 C 的一个变差 $(E,\ M)$ 上的任意相容函子对，都唯一确定一个以 C 为定义域的函子。此外，我们定义了变异函子的概念。变差 $(E,\ M)$ 上的函子 $C \to D$ 可刻画为一个相容对，其中包括一个协变函子 $E \to D$ 和一个反变函子 $M \to D$。相容性只要求这些函子在对象上的作用相同，并且尊重态射的分解。

第二节将专门探讨启发式自然性，这是我们范畴论框架中的一个核心概念。范畴中的跨度是联系定义域不同的两个变差函子的一种重要方式。启发式变换的一般理论以跨度为核心；而在定义域为范畴积这一特殊情形下，我们引入参数划分的概念。借助参数划分，我们能够有效地重新获得对角自然性、额外自然性和扭曲自然性等已有的自然性概念。参数划分可以从带标签态射的形式表达式中读出。这便是“启发式自然性”这一名称的由来。

考虑表达式

$$F(x,x,x,y,z) \xrightarrow{f_{x,y,z}} G(x,z,z)$$

分别由各自范畴中的对象标记的态射 $x,\ y,\ z$。为便于说明，假设 F和G 是函子，其中 F 在位置 2 和 5 上反变，G 在位置 1 上反变，而二者在其他位置上均为

协变。我们将态射族（$f_{x,\ y,\ z}$）$_{x,\ y,\ z}$ 的启发式自然性条件定义为图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F(x,x,x,y,z) & \xrightarrow{f_{x,y,z}} & G(x,z,z) \\ {\scriptstyle F(id,s,id,id,v)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(id,v,v)} \\ F(x,x',x,y,z') & & G(x,z',z') \\ {\scriptstyle F(s,id,s,t,id)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(s,id,id)} \\ F(x',x',x',y',z') & \xrightarrow[f_{x',y',z'}]{} & G(x',z',z') \end{array}$$

对于相应范畴中的任意态射 $s\colon\ x \to x'$、 $t\colon\ y \to y'$ 和 $v\colon\ z \to z'$。该图表基本上由以下要求唯一构造：存在两条平行路径，分别包含表达式 $f_{x,\ y,\ z}$ 和$f_{x',\ y',\ z'}$。

第三节将注意力引向逗号范畴这一概念；逗号范畴在理解函子与启发式自然变换之间的相互作用方面发挥着关键作用。启发式变换可以看作从相应广义逗号范畴到一个遗忘函子的截面。这为我们提供了一个新的视角，用于理解逐分量自然性蕴含自然性与函子的提升之间的关系。

最后，我们将关注端和余端的定义与性质；它们与启发式自然性的概念密切相关。我们证明，在这一广义设定下，端的 Fubini 定理仍然成立，并且当等化子和积存在时，可以通过它们计算端。

1 函子的变差

考虑函子 $F\colon\ C \times C \to D$，它对第一个参数反变，对第二个参数协变。我们的目标是讨论函子 F，而无需要求 F 的定义域是积范畴。为此，我们在 F 的定义域上指定一种结构，以协调地选定哪些态射是协变的，哪些是反变的。然后可以定义函子 F 在协变态射上协变，在反变态射上反变。对协变态射 E 和反变态射 M 的选定，将定义一个双侧严格分解系统（$E,\ M$）。这种结构使我们能够建立一套关于混合变异函子的理论。

1.1 严格分解系统与变差

严格分解系统最早由 Grandis 在论文 [2] 中引入。我们使用严格分解系统来形式化范畴上的变差概念以及混合变性函子的概念。

定义 1.1. 设 C是一个范畴，其子范畴为 E和 M。若满足以下条件，则称这一对 (E, M) 为**严格分解系统**

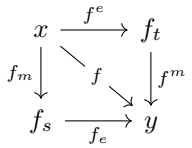
- 子范畴 E 和 M 是**宽**的，即它们包含 C的所有对象；
- C 中的每个态射 f 都有唯一的分解 $f = me$，其中 e 和 m 分别是 E 和 M中的态射。

若 (E, M) 和 (M, E) 是 C上的严格分解系统，则称这一对 (E, M) 是 C上的**变差**。如果 (E, M) 是 C上的变差，我们称子范畴 E 中的态射为**协变态射**，而 M 中的态射为**反变态射**。设协变函子 $C \to D$ 的定义域 C 和陪域 D 都是带变差的范畴。若它将协变态射和反变态射分别映射为协变态射和反变态射，则称其保变差。我们用$\mathbf{CatV}$ 表示由配备变差的小范畴及它们之间的保变差函子构成的范畴。

范畴 $\mathbf{CatV}$ 是一个具有小余积的完备范畴。通过直接验证可以发现，遗忘函子 $\mathbf{CatV} \to \mathbf{Cat}$ 严格创建并保持极限和余积。回顾一下，若函子$F\colon\ A \to C$满足以下条件，则称其严格创建图表 $D\colon\ I \to A$的极限：每个 FD上的极限锥 θ'都有唯一一个 D 上的锥 θ 映射到它 $F\ \theta'$；此外， θ 是一个极限锥。若每个 D上的极限锥经由 F映为 FD上的极限锥，则称函子 F保持 D的极限。若 F对 A中的每个图表都保持／严格创建极限，则称 F保持／严格创建极限；余极限也类似。

考虑一个具有严格分解系统（$E,\ M$）的范畴 C。注意，子范畴 E和 M在取逆下封闭。一般而言， E 和 M 分别满足相对右消去律和相对左消去律。因为，如果 rs 是 E中的一个态射，其中 r 是 C 中的一个态射，且 s 是 E中的一个态射，那么对于某些 M 中的态射 m 和 E中的态射 e，有 $r = me$，因此 $rs = mes$。于是，根据唯一分解， m 必为恒等态射。因此，态射 $r = e$ 属于 E。对偶地，子范畴 M 满足相对左消去律。

定义 1.2. 设 C是一个具有变差（$E,\ M$）的范畴。考察 C中一个态射 f 的唯一分解： $x \to y$



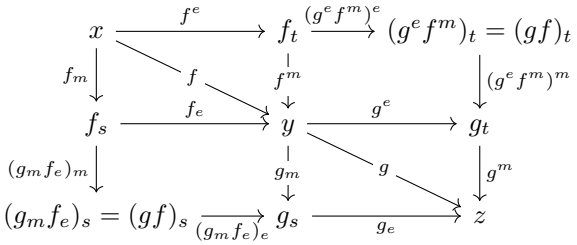
其中 f^e, f_e和 f^m, f_m分别是 E和 M中的态射。我们称分解 $f = f^m f^e$为 f的**终止分解**，称 $f = f_e f_m$为 f相对于 C 上的变差（ E, M ）的**起始分解** 。对象 f_s 和 f_t 分别称为与 f 相关联的**起始**对象和**终止对象**。

值得注意的是，群胚上的每个严格分解系统都可以视为一种变差。为此，考虑一个配备严格分解系统（E, M）的群胚 G。固定 G中的一个态射 g。由于对于某些态射 m （属于 M）和 e （属于 E），有 $g^{-1} = me$，因此我们得到 $g = e^{-1}m^{-1}$，从而得到 g的一个（M, E）分解。由于交集 $E \cap M$ 是一个离散范畴，这个分解是唯一的。

现在转向范畴 C带有变差（E, M）的情形。设 f和 g是 C中的态射，其中 f是协变的， g 是反变的。在这种情况下，我们有以下等式:

$$\begin{aligned} &f = f^e = f_e, && f^m = id_y, && f_m = id_x, && f_s = x, && f_t = y, \\ &g = g^m = g_m, && g^e = id_x, && g_e = id_y, && g_s = y, && g_t = x. \end{aligned}$$

考虑范畴 C 中具有变差 $(E,\ M)$ 的态射 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$。态射 f 和 g 导出一个交换图表



(1)

由唯一分解，我们立即得到

$$(gf)^m = g^m(g^e f^m)^m \qquad (gf)^e = (g^e f^m)^e f^e \tag{2}$$

$$(gf)_m = (g_m f_e)_m f_m \qquad (gf)_e = g_e(g_m f_e)_e \tag{3}$$

因此，$(gf)_m$ 的余域与 $(g_m f_e)_m$ 的余域相同，所以 $(g_m f_e)_s = (gf)_s$。关于终止对象的等式可类似地得到：$(gf)_t = (g^e f^m)_t$。图表 (1) 的一个重要事实是，每个向右的态射都是协变的，而每个向下的态射都是反变的。稍后我们会定义什么是变异函子。这种函子将态射 $f\colon x \to y$ 映射为态射 $F(f)\colon F(f_s) \to F(f_t)$。因此，反变态射的方向会反转，而协变态射的方向则保持不变。

例 1.3. 变差这一概念在数学的许多领域中普遍存在:

- 每个范畴 A 都有一种**协变变差**，其中每个态射都是协变的；也有一种**反变变差**，其中每个态射都定义为反变的。

- 带变性的范畴的积范畴具有典范变异结构。我们将积范畴中的态射定义为协变（反变）的，当且仅当每个投影都是协变（反变）的。此构造直接源于前面关于遗忘函子$\mathbf{CatV} \to \mathbf{Cat}$ 严格创建并保持极限的观察。

- 设 N是一个视为单对象范畴的幺半群。 N上的一种变差是由一对子幺半群组成的（$E,\ M$），其中对于 N的每个元素 n，都存在唯一的元素 $e,\ e\prime \in E$和 $m,\ m\prime \in M$，使得 $n = me$和$n = em\prime$。若 N 是一个群，则如先前对群胚所述， N 上的任何严格分解系统都是一种变差，并且两个子幺半群 E 和 M 都是子群。

  – 考察带有乘法结构的严格正整数集合。将素数划分为 P_1, P_2，并将生成的子幺半群分别记为 $\overline{P}_1$和 $\overline{P}_2$。根据算术基本定理，$(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ 是正整数乘法幺半群上的一个变差。

– 设 H和 N为群。假设 H作用于 N。考虑相应的外半直积 $H \ltimes N$。在这里， H 和 N 可以视为外半直积的子群。二元组 (N, H) 在 $H \ltimes N$上定义了一个变差。群 N是 $H \ltimes N$的正规子群。

– 群上的变差概念严格地比内部半直积更为一般：考虑四个元素的置换对称群 S_4。群 S_4 分别具有多个阶为 8 和 3 的非唯一子群。由于 3 和 8 是互质整数，且 $|S_4| = 3 \times 8$，因此所有的对 (E, M) 都在 S_4 上形成一个变差，其中 E 和 M 分别是阶为 8 和 3 的子群。阶为 3 和 8 的子群均不唯一，且这两个阶数互质，这一事实意味着子群 E和 M 都不可能是正规子群。

• 设 C 为任意范畴。设 J 为 C 的路分支的并。我们可以通过将定义域位于 J 中的所有态射设为协变，而将其余态射设为反变，来唯一确定 C 上的一个变差。

• 设 I 为一个集合。设 A 是一族范畴 A_i（$i \in I$），也称为范畴的 I-**列表**。设 $v\colon I \to \{0, 1\}$ 为一个函数。我们称 v 为 A 上的一个**指标变差**；若 $v(i) = 0$，则称指标 $i \in I$ 是**协变** 的，否则称为**反变** 的。考虑积范畴 $\prod A = \prod_{i \in I} A_i$。对于每个 $i \in I$，当 i 是协变（反变）指标时，函数 v 通过将 A_i 设为具有协变（反变）变差，在$\prod A$ 上定义了一个变差。因此，积范畴 $\prod A$ 通过积，从范畴 A_i（$i \in I$）中获得一个变差。我们称 $\prod A$ 上的这个变差为关于 v 的指标变差。

– 如果 $A_1, \ldots, A_n$ 是范畴，且 $s_1, \ldots, s_n \in \{0, 1\}$，我们称元组 $v = (s_1, \ldots, s_n)$ 在范畴上定义了指标变差。

$$A_1 \times \cdots \times A_n.$$

• 设 C是一个带有变差（E, M）的范畴。若子范畴 R对变差下的分解封闭，则 C继承 C的变差：若 f是 R中的一个态射，那么 f^m, f^e, f_m, f_e都是 R中的态射。于是，将 E 和 M 限制到 R 上，就定义了 R上的一个变差。

– 考虑一个带有变差 A 的范畴列表 I。积范畴 $\prod A$ 具有一个由**有限支撑的**态射构成的子范畴。若态射 f 属于 $\prod A$，且对于至多有限个 $i \in I$，f_i 不是恒等态射，则称其为有限支撑的态射。$\prod A$ 的有限支撑态射子范畴继承了来自 $\prod A$ 的变差。

范畴上的变差有一项重要性质：定义域带有变差的函子，可以由仅定义在反变和协变态射上的一对相容函子重构。

定理 1.4 (分解定理)。设 C是一个具有变差(E, M)的范畴。假设 $G\colon E \to D$和$H\colon M \to D$ 是相容的函子：函子 G 和 H 将对象映射到相同的对象，并且

$$H(f^m)G(f^e) = G(f_e)H(f_m)$$

对于 C 中的每个态射 f。那么存在唯一的函子 $F\colon C \to D$，扩展 G 和 H。

证明。 F 的唯一性显然。我们证明其存在性。定义一个函子 $F\colon C \to D$，其对象映射与 G相同。对于 C中的态射 f，我们定义 $F(f) = H(f^m)G(f^e)$。恒等态射经由 F映为恒等态射。剩下要证明的是与复合的相容性。设 C中的态射为 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$。现在

$$\begin{aligned}
F(gf) &= H((gf)^m)G((gf)^e) \\
&= H(g^m(g^e f^m)^m)G((g^e f^m)^e f^e) \\
&= H(g^m)H((g^e f^m)^m)G((g^e f^m)^e)G(f^e) \\
&= H(g^m)G((g^e f^m)_e)H((g^e f^m)_m)G(f^e) \\
&= H(g^m)G(g^e)H(f^m)G(f^e) \\
&= F(g)F(f)
\end{aligned}$$

□

设 C 是一个带有变差（E， M）的范畴。子范畴 E 和 M 定义了典范函子 $E + M \to C$。设 D 为余切片范畴 $(E + M)$ /**范畴** 的全子范畴，它由满足以下条件的函子组成：对于 C 中的每个态射 f，其广义核（定义见 [3],）都包含这对态射序列（（f^m， f^e），（f_e， f_m））。前一个定理表明，函子 $E + M \to C$ 是 D 中的初始对象。

现在，给定 C 的一对子范畴（A， B），我们要问，能否定义 $(A + B)/C$ 的一个子范畴，使得当典范函子 $A + B \to C$ 是该子范畴的始对象时，子范畴对（A， B）便定义了 C 上的变差。若答案为肯定，我们就可以将变差的概念从小范畴范畴**Cat** 推广到更广泛的一类范畴。

1.2 混合变性函子

考虑分解定理 1.4：协变函子 $A \to C$ 可由一对相容的协变函子 $E \to C$ 和 $M \to C$ 重构，这对函子定义在范畴 A 上的一个变差（E, M）上。在本小节中，我们考察函子 $M \to C$ 是否可以改为反变函子。借助相容性的概念，我们将混合变差函子刻画为一个相容函子对，该对由协变函子 $E \to C$ 和反变函子 $M \to C$ 组成。

定义 1.5（混合变差函子）。设 A 和 C 为范畴，且 (E, M) 是 A 上的一个变差。一个变差为 (E, M) 的函子 $A \xrightarrow{F} C$ 由两个函数组成，分别将 A 的对象和态射映射到 C 的对象和态射，且这两个函数都记作 F：

- 恒等态射在 F 下保持不变。
- 设 $f\colon x \to y$ 是 A 中的一个态射。那么 $F(f)\colon F(f_s) \to F(f_t)$，其中 f_s 和 f_t 是相对于变差 (E, M) 与 f 关联的起始对象和终止对象。

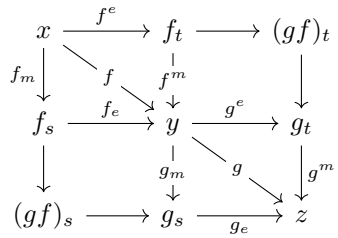
此外，我们要求满足**复合相容性**：设 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ 为 A 中的态射。图表

$$\begin{array}{ccc} F(f_s) & \xrightarrow{F(f)} & F(f_t) \\ {\scriptstyle F((g_m f_e)_m)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle F((g^e f^m)^e)} \\ F(gf)_s & \xrightarrow{F(gf)} & F(gf)_t \\ {\scriptstyle F((g_m f_e)_e)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F((g^e f^m)^m)} \\ F(g_s) & \xrightarrow[F(g)]{} & F(g_t) \end{array}$$

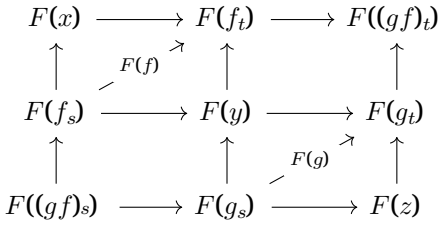
可交换。我们记录下这些等式：

$$\begin{aligned} F(gf) &= F((g^e f^m)^e) F(f) F((g_m f_e)_m) \\ F(gf) &= F((g^e f^m)^m) F(g) F((g_m f_e)_e) \end{aligned} \tag{4}$$

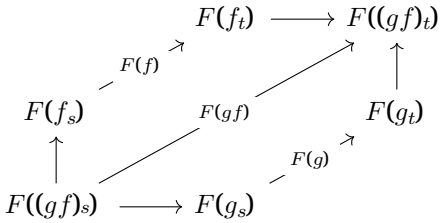
考虑一个带有变差 $(E,\ M)$ 的范畴 A。设 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ 是 A 中的态射。我们得到交换图



这个图表与 (1) 相同。再次注意，所有竖直和水平箭头分别是反变和协变的。应用一个变差为 $(E,\ M)$ 的函子 $F\colon A \to C$，我们得到图表



从图表中删除对象 $F(x)$ $F(y)$ 和 $F(z)$ 及其关联态射，并添加态射$F(gf)$，得到图表



这正是与复合相容性的图表。

与之前类似，我们得到一个分解定理，不过这次针对的是混合变异函子。

定义 1.6 (相容函子对)。设 A 是一个具有变差 (E, M) 的范畴， C是一个范畴。函子 $G\colon E \to C$ 是协变函子，函子 $H\colon M \to C$ 是反变函子；二者组成一个**相容对**，并满足以下条件：

- G 和 H 对对象的映射相同；
- 对于 A 中的每个态射 f，都有 $G(f^e)H(f_m) = H(f^m)G(f_e)$。

定理 1.7 (混合变异分解定理)。设 A 是一个变差为(E, M)的范畴， C 是一个范畴。考虑一个变差为(E, M)的函子 $F\colon A \to C$。我们定义赋值 $F \mapsto (F|_M E, F|_M)$。该赋值在相容对 $(G\colon E \to C, H\colon M \to C)$ 上是双射。

证明。首先，我们证明该赋值定义良好。为此，只需证明函子 F 在 E 上协变、在 M 上反变，并且图表

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f^e)} & F(f_t) \\ {\scriptstyle F(f_m)}\uparrow & \nearrow_{F(f)} & \uparrow{\scriptstyle F(f^m)} \\ F(f_s) & \xrightarrow[F(f_e)]{} & F(y) \end{array}$$

对 A 中的每个态射 $f\colon x \to y$ 都交换。先假设 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} y$ 为协变类型。注意，$f^e = f_e = f$、 $f^m = id_y$ 和 $f_m = id_x$。因此

$$\begin{aligned} F(gf) &= F((g^e f^m)^e)F(f)F((g_m f_e)_m) \\ &= F(g)F(f)F(id) \\ &= F(g)F(f). \end{aligned}$$

接着假设 g 和 f 为反变类型。注意， $f^m = f_m = f$、 $f^e = id_x$ 和 $f_e = id_y$。现在

$$\begin{aligned} F(gf) &= F((g^e f^m)^e)F(f)F((g_m f_e)_m) \\ &= F(id)F(f)F(g) \\ &= F(f)F(g) \end{aligned}$$

设 f 是 A 中任意一个态射。利用 (4) 中的第一个等式，我们得到

$$\begin{aligned} F(f) &= F(f id_x) \\ &= F((f^e id_x^m)^e)F(id)F((f_m id_{x,e})_m \\ &= F(f^e)F(f_m) \end{aligned}$$

利用 (4) 中的第二个等式，

$$\begin{aligned} F(f) &= F(id_y f) \\ &= F((id_y^e f^m)^m)F(id_y)F((id_{y,m} f_e)_e) \\ &= F(f^m)F(f_e). \end{aligned}$$

因此，赋值 $F \mapsto (F\,|_E, F\,|_M)$ 定义良好，其值属于相容函子对。

固定一对函子相容对（$G\colon E \to C$， $H\colon M \to C$）。定义一个变差为（E， M）的函子 $F\colon A \to C$，其对对象的映射与 G 和 H 相同。对于态射 $f\colon x \to y$，定义 $F(f) = G(f^e)H(f_m)$。现在， $F(f)\colon F(f_s) \to F(f_t)$。显然， F 将恒等态射映到恒等态射。为验证函子性条件，固定态射 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$。现在

$$\begin{aligned} F(gf) &= G((gf)^e)H((gf)_m) && \text{(The definition of } F\text{)} \\ &= G((g^e f^m)^e f^e)H((g_m f_e)_m f_m) && (2) \\ &= G((g^e f^m)^e)G(f^e)H(f_m)H((g_m f_e)_m) && (G \text{ 和 } H\text{的函子性}) \\ &= F((g^e f^m)^e)F(f)F((g_m f_e)_m) && (F \text{ 的定义}) \end{aligned}$$

并利用相容条件，我们得到

$$\begin{aligned} F(gf) &= G((gf)^e)H((gf)_m) && (F\text{的定义}) \\ &= H((gf)^m)G((gf)_e) && (\text{相容条件}) \\ &= H(g^m(g^e f^m)^m)G(g_e(g_m f_e)_e) && (2) \\ &= H((g^e f^m)^m)H(g^m)G(g_e)G((g_m f_e)_e) && (G \text{ 和 } H\text{的函子性}) \\ &= H((g^e f^m)^m)G(g^e)H(g_m)G((g_m f_e)_e) && (\text{相容条件}) \\ &= F((g^e f^m)^m)F(g)F((g_m f_e)_e) && (F\text{的定义})。 \end{aligned}$$

最后，变差为(E, M)的函子 F是赋值映射到(G, H)的唯一函子。这就证明了该断言。

□

分别定义在协变态射和反变态射上的相容函子对，产生了一个从整个定义域到混合变性函子的函子。这使得混合变性函子更容易理解。

例 1.8。

- 协变函子 $C \to D$ 是一个函子，它相对于 C 上的协变变差具有混合变性。对于从 C 出发的反变函子，情况类似。

- 设 C为一个局部小范畴。同态函子是一个取值于 $C \times C \to$ **集合范畴**、指标变差为 (1,0) 的函子。

- 设 C为一个带有变差(E, M)的范畴。设 $F\colon C \to D$为一个函子。假设对于 M中的每个态射 m， $F(m)$ 都是可逆的。我们可以定义一个变差为(E, M)的函子 $G\colon C \to D$，其对象映射与 F相同。对于 E和 M中的所有态射 e和 m，我们分别定义 $G(e) = F(e)$ 和 $G(m) = F(m)^{-1}$。为了证明我们得到了一个良定义的变异函子，只需验证相容条件。设 $f\colon x \to y$ 为C中的一个态射。我们需要验证 $F(f^e)F(f_m)^{-1} = F(f^m)^{-1}F(f_e)$，这等价于 $F(f^m)F(f^e) = F(f_e)F(f_m)$；根据函子性，这实际上就是等式 $F(f) = F(f)$。基本上，同样的构造也可以反向进行。如果给定一个混合变差函子，并且所有反变态射都被映射为可逆态射，那么我们就可以将这个混合变差函子转化为一个协变函子。

- 设 G是一个带有变差 (E, M) 的群。当且仅当对每个 $g \in G$ 都有 $g^e = g_e$ 时，映射 $g \mapsto g^e$ 是群同态 $G \to E$。此映射限制为两个平凡群同态， $E \xrightarrow{id_E} E$ 和 $M \xrightarrow{0} E$，而相容条件恰好是对每个 $g \in G$ 都有 $g^e = g_e$。若 E 是 G 的正规子群，则此条件等价于 E 中的元素与 M 中的元素彼此交换，这迫使同构成立 $G \cong E \times M, g \mapsto (g^e, g^m)$。

2 启发式自然性

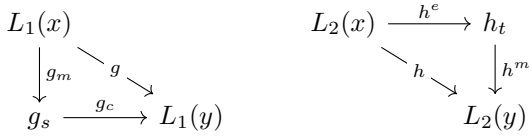
带有变差的函子这一概念使我们能够定义启发式自然变换，它涵盖了二自然性和超自然性等通常的自然性概念。

定义 2.1（跨度）。设 A 和 B 是范畴。 A 上的一个**跨度** 是一个对 (R, L)，其中 R 是一个范畴，且$L\colon R \to A$ 是一个函子。从 A 到 B 的跨度 (R, L) 是 $A \times B$ 上的一个跨度，我们将其记作 $A \to B$。用 L_i 表示函子 L 与投影 π_i（其中 $i = 1,2$）复合后的结果。

定义 2.2（启发式自然性）。设 A， B 和 R 是范畴。假设 A 和 B 与变差相关联。设 $F\colon A \to C$ 和 $G\colon B \to C$ 是变差函子。设 (R, L) 是一个跨度 $A \to B$。设 η 是一族态射

$$\eta_x\colon FL_1(x) \to GL_2(x)$$

对 R 的每个对象 x。如果 η 满足**启发式自然性条件**，则称 $\eta\colon F \underset{L}{\Longrightarrow} G$ 为**启发式变换** 和一个 L-**变换**：设 $f\colon x \to y$ 是 R 中的一个态射。考虑 $g := L_1(f)$ 和 $h := L_2(f)$ 的分解



关于 f 的 L-自然性要求图表

$$\begin{array}{ccc} F(L_1(x)) & \xrightarrow{\eta_x} & G(L_2(x)) \\ {\scriptstyle F(g_m)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(h^e)} \\ F(g_s) & & G(h_t) \\ {\scriptstyle F(g_e)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(h_m)} \\ F(L_1(y)) & \xrightarrow[\eta_y]{} & G(L_2(y)) \end{array}$$

可交换。 η 的 L-自然性意味着，对于 R 中的所有态射 f， η 都是关于 L 的自然的。 .

二自然性和额外自然性的概念要求函子的定义域为乘积范畴，并且同一范畴可能在定义域中出现多次。我们定义一种称为参数划分的关系，用来记录哪些范畴会被视为相同。

定义 2.3（参数划分）。设 A 是一个 I-范畴列表。设 R 是 I 上满足**相容条件**的等价关系，其中对于每个 i, $j \in I$， iRj 蕴含 $A_i = A_j$。关系 R 被称为 A 上的**论元划分**。此外，如果 B 是一个 J-范畴列表，那么，如果 S 是 A 与 B 的论元划分，即 S 是**拼接**的（$I + J$）-范畴列表 AB 的论元划分，则称关系 $S\colon A \to B$ 是从 A 到 B 的论元划分。[1]

设 A 为一个范畴的 I-列表。设 R 为 A 的一个参数划分。关系 R 在 $\prod A$ 上产生一个跨度。我们通过选取满足以下条件的 $\prod A$ 的态射 f，定义范畴 A_R 为 $\prod A$ 的子范畴，这些态射称为 R-态射：对于所有 $(i,\ j) \in R$, 均满足 $f_i = f_j$。类似地，一个参数划分 $S\colon A \to B$ 产生一个跨度 $\prod A \to \prod B$，我们也将其记为 S。

考虑函子 $F\colon \prod A \to C$和 $G\colon \prod B \to C$，其指标变差分别为 s和 t。设 $R\colon A \to B$是参数的一个划分。一个 R-变换 $\eta\colon F \Rightarrow G$ 由以下态射组成

$$\eta_x \colon F(\pi_1 x) \to G(\pi_2 x)$$

对于 R-对象 x。此外，它们还必须满足以下条件：设 $f\colon x \to y$ 是一个 R-态射。考虑 f 在 $\prod AB$中的分解：

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f^e} & f_t \\ {\scriptstyle f_m}\downarrow & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle f^m} \\ f_s & \xrightarrow[f_e]{} & y \end{array}$$

启发式自 然性条件相对于 f 而言，就是图表交换：

$$\begin{array}{ccc} F(\pi_1 x) & \xrightarrow{\eta_x} & G(\pi_2 x) \\ {\scriptstyle F(\pi_1 f_m)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\pi_2 f^e)} \\ F(\pi_1 f_s) & & G(\pi_2 f_t) \\ {\scriptstyle F(\pi_1 f_e)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(\pi_2 f^m)} \\ F(\pi_1 y) & \xrightarrow[\eta_y]{} & G(\pi_2 y) \end{array}$$

值得注意的是， R-范畴 AB_R 与 $\prod_{i\in K}(AB)_i$同构，其中 K 是等价关系 R的一组代表元。我们将预序集 $(I+J,\ R)$ 视为一个范畴，并定义函子 $\overline{AB}\colon (I+J,\ R) \to \mathbf{Cat}$，它将 $I + J$ 的元素映射到与 AB 相同的对象，并将所有态射映射为恒等态射。我们看到，$(AB)_R$ 是函子 $\overline{AB}$ 的极限，而包含函子 $K \hookrightarrow (I + J,\ R)$是范畴等价。这表明，$(AB)_R$ 与积 $\prod_{i\in K}(AB)_i$同构。

例如，在实践中，我们可能会遇到如下类型的通用表达式：

$$F(x, y, y) \xrightarrow{f_{x,y}} G(x, x, y). \tag{5}$$

[1]一个由范畴构成的 I-列表 A 可以视为一个函子 $I \to \mathbf{CAT}$，其中集合范畴 I 被视为一个小型离散范畴。函子的拼接 $I \to \mathbf{CAT}$ 和 $J \to \mathbf{CAT}$ 是典范函子（$I + J$） $\to \mathbf{CAT}$，这是由余积的泛性质得到的。

这里我们假设 $F\colon\ X\times Y\times Y\to C$ 和 $G\colon\ X\times X\times Y\to C$ 分别具有变差 (1，0，1) 和 (1，1，0)。根据 F 和 G 的变差，我们可以推导出关于态射 $f_{x,\ y}$ 的自然性条件。注意，论元划分 R 可以从表达式中使用的变量读出。我们确定那些相同变量出现的位置。这里， R 有两个等价类 {1，4，5} 和 {2，3，6}，因为 x 出现在第 1、4 和 5 个位置，而 y 出现在第 2、3 和 6 个位置。固定态射 $\alpha\colon\ x\to x'$ 和 $\beta\colon\ y\to y'$ 后，我们可以看到，关于 α 和 β 的 R-自然性条件就是图表交换

$$\begin{array}{ccc} F(x,y,y) & \xrightarrow{f_{x,y}} & G(x,y,y) \\ {\scriptstyle F(\alpha,id_y,\beta)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(id_x,id_y,\beta)} \\ F(x',y,y') & & G(x,y,y') \\ {\scriptstyle F(id_{x'},\beta,id_{y'})}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(\alpha,\beta,id_{y'})} \\ F(x',y',y') & \xrightarrow[f_{x',y'}]{} & G(x',y',y') \end{array}$$

由于形式表达式 (5) 给出了参数划分 R，若通用表达式已为人所理解，我们在讨论启发式自然性时便可以将 R 隐去。这解释了名称“启发式自然性”中的“启发式”一词。

例 2.4。 我们将扭曲自然性、对角自然性和超常自然性视为特殊情形，从而得到这些概念。此外，还可得到求值族的自然性。

自然性 设 $F\colon\ C\to D$ 和 $G\colon\ C\to D$ 为协变函子。设 η 是一族态射 $\eta_x\colon\ Fx\to Gx$，其指标取遍 C 的对象。当且仅当族 η 定义了一个 Δ-变换时，它才定义一个自然变换，其中 $\Delta\colon\ C\to C\times C$ 是对角函子。

扭曲自然性 设 $F,\ G\colon\ C\to D$ 为函子，其中 F 是协变的， G 是反变的。设 η 是一族态射 $\eta_x\colon\ Fx\to Gx$，其指标取遍 C 的对象。 η 的 Δ-自然性是指图表

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\eta_x} & Gx \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(f)} \\ Fy & \xrightarrow{\eta_y} & Gy \end{array}$$

对任意态射 $f\colon\ x\to y$ in C，该图表均交换。

对角自然性 设 $F,G\colon\ C\times C\to D$ 是变差为 $(1,0)$ 的函子。设 η 是一个态射族 $\eta_x\colon\ F(x,x)\to G(x,x)$，则 η 的 (Δ, Δ)-自然性条件（或针对相应参数划分 R 的 R-自然性）就是下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(x,x) & \xrightarrow{\eta_x} & G(x,x) \\ {\scriptstyle F(f,id_x)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(id_x,f)} \\ F(y,x) & & G(x,y) \\ {\scriptstyle F(id,f)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(f,id_x)} \\ F(y,y) & \xrightarrow[\eta_y]{} & G(y,y) \end{array}$$

对任意态射 $f\colon\ x\to y$ in C，该图表均交换。这正是对角自然性的条件。值得注意的是，函子之间每个指标变差的启发式变换都可以视为二自然变换：设 A 为一个 I-范畴列表， B 为一个 J-范畴列表。给定一个跨度 $(R,L)\colon\ \prod A\to\prod B$ 以及指标变差函子 $F\colon\ \prod A\to C$ 和 $G\colon\ \prod B\to C$，我们定义指标变差为 $(1,0)$ 的函子 $\overline{F},\overline{G}\colon\ R\times R\to C$ 如下：对于每个指标 $i\in I+J$，若 i 是协变指标，则考虑函子 $R\times R\xrightarrow{\pi_2}R\xrightarrow{\pi_i\circ}\xrightarrow{L}(AB)_i$。若 i 是反变指标，则考虑函子 $R\times R\xrightarrow{\pi_1}R\xrightarrow{\pi_i\circ}\xrightarrow{L}(AB)_i$。当 i 遍历集合 $I+J$ 时，根据积的泛性质，所考虑的函子给出函子 $R\times R\to\prod\underline{A}$ 和 $\underline{R}\times R\to\prod B$。分别将这些函子与 F 和 G 作后复合，便得到变差为 F 和 G 的函子。

现在，考虑每个 R 的对象 x 的态射族 $\eta\ \eta_x\colon\ \overline{F}(x,x)\to\overline{G}(x,x)$。经过直接验证，我们发现， η 定义了一个二自然变换 $\overline{F}\Rightarrow\overline{G}$ ，当且仅当态射族 η 定义了一个 L-变换 $F\Rightarrow G$。

额外自然性 令 $F\colon A \times B \times B \to D$ 和 $G\colon A \times C \times C \to D$ 为变差函子 (0，1，0)。对于由 η 个态射 $\eta_{x,\,y,\,z}\colon F(x,\, y,\, y) \to G(x,\, z,\, z)$，组成的族，其指标遍历 A，B 和 C中的对象 x，y，z，则启发式自然性条件是图表

$$\begin{array}{ccc} F(x,y,y) & \xrightarrow{\eta_{x,y,z}} & G(x,z,z) \\ {\scriptstyle F(id_x,g,id_y)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f,id_z,h)} \\ F(x,y',y) & & G(x',z,z') \\ {\scriptstyle F(f,id'_y,g)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(id_{x'},h,id_{z'})} \\ F(x',y',y') & \xrightarrow[\eta_{x',y',z'}]{} & G(x',z',z') \end{array}$$

对范畴 A、B和 C 中的态射 $f\colon x \to x'$、$g\colon y \to y'$ 和 $h\colon z \to z'$，该图表可交换。这种启发式自然性的概念等价于额外自然性。不过，额外自然性条件的通常压缩图表由以下图表给出

$$\begin{array}{ccc} F(x,y,y) & \xrightarrow{\eta_{x,y,z'}} & G(x,z',z') \\ {\scriptstyle F(id_x,g,id_y)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f,h,id_{z'})} \\ F(x,y',y) & & G(x',z,z') \\ {\scriptstyle F(f,id'_y,g)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(id_{x'},id_z,h)} \\ F(x',y',y') & \xrightarrow[\eta_{x',y',z}]{} & G(x',z,z) \end{array}$$

对于态射 f、g、h（见 [1]）。这个图表无法直接推广，这或许是启发式自然性此前未被发现的原因之一。

求值的自然性 设 C 是一个幺半闭范畴，其幺半积和内 Hom 函子为$\otimes$、$[-,-]\colon C \times C \to C$，变差分别为 (0，0) 和 (1，0)。将伴随的余单位记作如下态射族

$$ev_{a,b}\colon [a,b] \otimes a \to b \text{ for objects } a, b \text{ in } C.$$

从形式表达式本身，我们可以猜出 ev 满足何种启发式自然性条件。设 $f\colon a \to a'$ 和 $g\colon b \to b'$ 是 C 中的态射。那么，自然性条件是指该图表

$$\begin{array}{ccc} [a,b] \otimes a & \xrightarrow{ev_{a,b}} & b \\ {\scriptstyle [f,id]\otimes id}\uparrow & & \\ [a',b] \otimes a & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ {\scriptstyle [id,g]\otimes f}\downarrow & & \\ [a',b'] \otimes a' & \xrightarrow[ev_{a',b'}]{} & b' \end{array}$$

可交换。这是求值映射所对应的正确自然性概念。

单体闭范畴中的求值映射族是广义额外自然性的一个启发性例子；Eilenberg 和 Kelly 在论文 [1] 中定义了这一概念。按照我们的表述，在变差指标为 $F\colon \prod A \to C$和 $G\colon \prod B \to C$的函子之间，一个一般的额外自然变换 R-变换$\eta\colon F \Rightarrow G$ 由以下内容构成：参数划分 R 的每个等价类恰好含有两个元素。此外，若 iRj和 $i \neq j$，则 i 和 j 的变差不同，当且仅当它们属于 $I + J$中的同一集合 I 或 J。

3 广义逗号范畴

我们定义广义逗号范畴，它与启发式自然性的定义相关。广义逗号范畴为我们提供了一个概念框架，使我们可以将启发式自然变换视为遗忘函子的截面。借助这一框架，可以证明，要验证自然性，只需检查相对于某个生成子图的态射的自然性。这推广了这样一种情形：当函子的定义域是若干范畴的有限积时，逐分量自然性蕴含自然性。

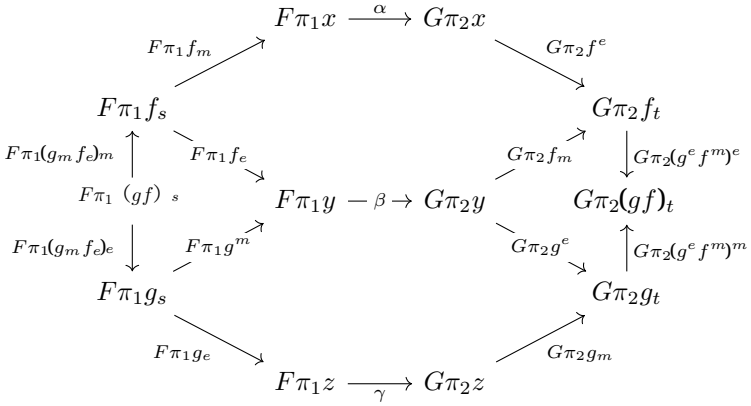
定义 3.1（广义逗号范畴）。设 $F\colon A \to C$ 和 $G\colon B \to C$ 是具有变差的函子。设 $(R, L)\colon A \to B$ 为一个跨度。我们将广义逗号范畴 $F \downarrow_L G$ 定义如下：

- 这些对象是有序对（x，$\alpha\colon FL_1x \to GL_2x$），其中 x 是 R 中的一个对象，而 α 是 C 中的一个态射。
- 态射（x，α）$\to$（y，β）由一个态射 $f\colon x \to y$（属于 R）构成，它使图表 m

$$\begin{array}{ccc} FL_1x & \xrightarrow{\alpha} & GL_2x \\ {\scriptstyle F(\pi_1 g_m)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\pi_2 g^e)} \\ F(\pi_1 g_s) & & G(\pi_2 g_t) \\ {\scriptstyle F(\pi_1 g_e)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle G(\pi_2 g^m)} \\ FL_1y & \xrightarrow[\beta]{} & GL_2y \end{array}$$

  可交换，其中 $g := L(f)$。
- 态射的复合通过 C 中的复合来定义。

固定变差为 $F\colon A \to C$ 和 $G\colon B \to C$ 的函子。设（R，L）：$A \to B$ 为一个跨度。为验证逗号范畴 $F \downarrow_L G$ 中的复合定义良好，固定 $F \downarrow_L G$ 中的态射（x，α）$\xrightarrow{p}$（y，β）$\xrightarrow{q}$（z，γ）。记 $f = L(p)$ 和 $g = L(q)$。现在来看图表



根据 F 和 G 的函子性以及态射 α, β 和 γ 的定义，该图可交换。因此，$q \circ p$ 定义了逗号范畴中从 $(x, \alpha) \to (z, \gamma)$ 的一个态射。

例 3.2。广义逗号范畴推广了逗号范畴的概念，即反变函子和协变函子的代数与余代数所构成的范畴。有趣的是，它还包含了启发式自然性的概念。

- 令 $F\colon A \to C$ 和 $G\colon B \to C$ 为具有变差的函子，并令 $(R, L)\colon A \to B$ 为一个跨度。考虑遗忘函子 $U\colon F \downarrow_L G \to R$。$L$-变换与指向 U 的截面之间存在双射对应关系。一个 L-变换 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ 通过 $x \mapsto (x, \alpha_x)$ 和 $[f\colon x \to y] \mapsto [f\colon (x, \alpha_x) \to (y, \alpha_y)]$ 生成一个截面。关于 f 的 α 的自然性条件，恰好是使 $\alpha(f)$ 成为逗号范畴中的良定义态射所需满足的条件。
- 设 $F\colon A \to C$ 和 $G\colon B \to C$ 为协变函子。通常的逗号范畴 $F \downarrow G$ 与 $F \downarrow_{Id} G$ 相同，其中 $Id\colon A \times B \to A \times B$ 是恒等函子。
- 设 F，$G\colon A \to B$ 为协变函子。请思考对角函子 $\Delta\colon A \to A \times A$ 以及逗号范畴。

$$F \downarrow_\Delta G.$$

  $F \downarrow_\Delta G$ 的对象可以称为 F, G-代数。这些对象由成对的 $(a, t\colon F(a) \to G(a))$ 构成，其中 a 是 A 中的一个对象，t 是 B 中的一个态射。态射 $f\colon (a, s) \to (b, t)$ 是 A 中的一个态射 $a \xrightarrow{f} b$，使得该图表。

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(f)} & F(b) \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ G(a) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(b) \end{array}$$

可交换。如果 F 或 G 是 A上的恒等函子，那么 $F \downarrow_{\Delta} G$ 分别是 F-代数的范畴或G-余代数的范畴。

假设 F 和 G 是协变幂集函子 P : **集合范畴** $\to$ **偏序集范畴**，它将集合范畴映射到偏序集范畴。每个拓扑空间都可以看作一个对 (X, T)，其中 T: $\mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(X)$ 是闭包运算，即满足相应条件的递增映射。

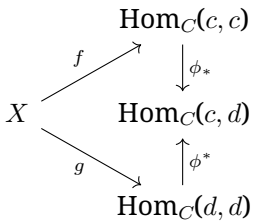
$$
\begin{aligned}
&T(T(A)) = T(A) \\
&A \subset T(A) \\
&T(\emptyset) = \emptyset \\
&T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)
\end{aligned}
$$

对于每个 A，$B \subset X$。T的不动点定义了 X 的闭集族。一个连续映射 f：$(X, S) \to (Y, T)$ 由一个函数 $X \to Y$ 和 $f(S(A)) \subset T(f(A))$ 组成，这对应于 2-范畴图表

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(Y) \\
{\scriptstyle S}\downarrow & \leq & \downarrow{\scriptstyle T} \\
\mathcal{P}(X) & \xrightarrow[\mathcal{P}(f)]{} & \mathcal{P}(Y)
\end{array}
$$

如果不等式取等号，则函数 f 连续且闭。因此我们看到，具有连续闭映射的拓扑空间范畴是 $\mathrm{P} \downarrow_{\Delta} \mathrm{P}$ 中闭包运算的全子范畴。

- 设 X 为一个集合。设 C 为一个局部小范畴。用 $\overline{X}$ 表示从终端范畴到集合范畴的函子 $1 \to \mathbf{Set}$，该函子选取集合 X。考察范畴 $\overline{X} \downarrow_{1 \times \Delta} \mathrm{Hom}_C$。其中，对象由二元组 $(d, f\colon X \to \mathrm{Hom}_C(d, d))$ 构成。从 (c, f) 到 (d, g) 的态射由一个态射 $\phi\colon c \to d$ 构成，使得图表分分彩



交换。由此，ϕ 是一个等变态射。若 X 是一个幺半群，则 $\overline{X} \downarrow_{1 \times \Delta} \mathrm{Hom}_C$ 中幺半群同态的全子范畴定义了函子范畴 $[X, C]$，其中幺半群 X 被视为一个单对象范畴。

定理 3.3（逐分量自然性）。设 $F\colon C \to D$ 是一个忠实函子。设 $L\colon B \to D$ 是一个函子。设 B' 是 B 的生成 B的一个子图。设 $S\colon B' \to D$ 是一个图态射。假设对于 B'中的每个态射 f，都有 $F(S(f)) = L(f)$。则 S唯一延拓为一个函子 $S\colon B \to D$。此外，$FS = L$。

证明。由于 B' 生成 B，延拓的唯一性是显然的。为证明存在性，固定 B中的一个态射 f。由于 B'生成 B，存在 B' 中的一条路径 $(f_n, \ldots\ldots, f_1)$，其在 B中的复合为 f。我们定义 $S(f) := S(f_n) \cdots S(f_1)$。由 F 的忠实性，S 是态射上的一个良定义函数。S 的函子性由 F的忠实性和 L的函子性推出。显然，$FS = L$。 □

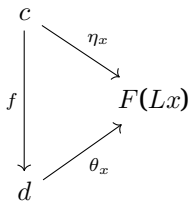
考虑广义逗号范畴 $F \downarrow_L G$，其中 $F\colon A \to C$ 和 $G\colon B \to C$ 是具有变差的函子，且 $(R, L)\colon A \to B$ 是一个跨度。遗忘函子 $U\colon F \downarrow_L G \to R$ 是忠实的。作为定理 3.3 的直接推论，要检查对象 x（属于 R）上的态射族 $FL_1 x \to GL_2 x$ 的启发式自然性，只需检查其关于某类生成 R 的态射的自然性。

设 I 和 J 是有限集合。设 A 是一个范畴的 I-元列表，B 是一个范畴的 J-元列表。固定变异为 F的函子：$\prod A \to C$和 $G\colon \prod B \to C$。这些变差不必是指标变差。给定一个参数划分$R\colon A \to B$以及一族态射 $\eta\colon F(\pi_1 x) \to G(\pi_2 x)$，其中 η_x是针对 R-对象 x定义的。要检验 η的自然性，只需检验 R-态射 f的自然性，其中 f 仅支撑在 R 的一个等价类上。根据定理 3.3，这一结论成立，因为除一个等价类外均为恒等态射的态射可以生成其余态射。我们甚至可以允许集合 I 和 J 是无限的，但此时上述论证表明，自然性仅适用于支撑在有限多个等价类上的态射。

4 端

我们定义沿一个跨度、以变异函子的定义域为基础的楔和余楔的概念。通常，泛楔定义一个端，而泛余楔定义一个余端。定义域上的跨度充当一种选择，指明沿其取端。传统定义对应于选择对角线$C \to C \times C$，并令函子在范畴 C上具有指标变差 (1，0)。我们证明，通过极限计算端的通常公式仍然成立，富比尼定理也同样成立。

定义 4.1 (L-楔)**.** 设 $F\colon A \to C$ 是一个具有变差的函子。设 (R, L) 是 A上的一个跨度。一个 L-楔是一个二元组 $(c, \eta\colon \overline{c} \Rightarrow F)$，其中 c是 C中的一个对象，且 η是一个 L-变换。两个 L-楔 (c, η) 和 (d, θ) 之间的态射 f是一个态射 $f\colon c \to d$，使得图表

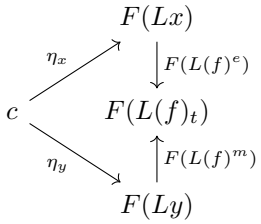


对所有对象 x of R均成立。通过 C 中的复合，我们得到 L-楔之间态射的复合。一个 L-**余楔** 是一个对 $(c, F \underset{L}{\Longrightarrow} \overline{c})$。我们以与$L$-楔类似的方式定义 L-余楔的范畴结构。

具体而言，函子 $F\colon A \to C$ with variance 的一个 L-楔 (c, η) 由 C 中的一个对象 c 和一族态射 η 组成。

$$(\eta_x\colon c \to F(Lx))_{x \in R}$$

使得任意态射 $f\colon x \to y$ in R 都会导出一个交换图表



定义 4.2 （端）。设 $F\colon A \to C$ 是一个具有变差的函子，并设 (R, L) 是 A 上的一个跨度。我们称 F 的终端 L-楔为 F **在** L **上的端**，并记作 $(\int_L F, \omega\colon \overline{\int_L F} \underset{R}{\Longrightarrow} F)$，或简记为 $\int_L F$，而将**泛楔** ω 隐去。我们将 F 的初始 L- 余楔记作 $\int^L F$；它也称为 F**在** L**上的余端**。

现在值得注意的是，任何泛楔都会定义一个联合单态射族。

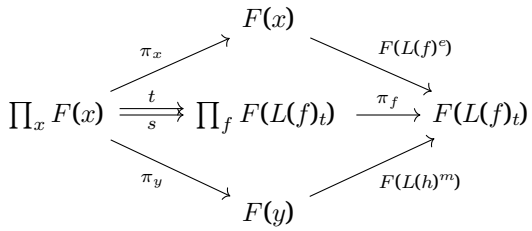
定理 4.3。设 $F\colon A \to C$ 是一个具有变差的函子。设 (R, L) 是 A 上的一个跨度。假设乘积 s

$$\prod_x F(Lx) \text{ and } \prod_f F(L(f)_t)$$

存在，其中指标分别遍历 R 的对象和态射。考虑典范态射

$$s, t\colon \prod_x F(Lx) \to \prod_f F(L(f)_t)$$

由图表定义



其中，上部和下部分别对每个态射 $f\colon\ x \to y$ *in* R交换。然后，转置

$$(c, \eta\colon \overline{c} \underset{R}{\Longrightarrow} F) \mapsto (c, \eta\colon c \to \prod_x F(x))$$

定义了 F 的 L-楔范畴与 s 和 t的等化锥范畴之间的一个同构。特别地，$\int_L F$ 存在，当且仅当 t 和 s 的等化子存在；在这种情况下，两者相同。

证明。只需证明转置确定了 L-楔与等化锥之间的一个良定义双射，因为态射上的函子性由恒等函子定义。对 R中的每个对象 x，设 $\eta_x\colon c \to F(Lx)$ 是一个态射。我们证明，态射族 $\eta = (\eta_x)_x$ 定义一个 L-楔，当且仅当伴随转置 $\eta'\colon c \to \prod_x F(x)$ 等化 s和 t。注意，对 R中的每个态射 $f\colon x \to y$，$t\eta' = s\eta'$等价于 $\pi_f t\eta' = \pi_f s\eta'$；这又等价于对 R中的每个态射 $f\colon x \to y$，$F(L(f)^e)\eta_x = F(L(f)^m)\eta_y$。这正是 η 定义一个 L-楔的条件。

□

在定理 4.3 中，我们可以稍微放宽假设。只需该积

$$\prod_f F(L(f)_t)$$

存在，且其指标遍历 R 的生成子图 R' 中的态射 f。这归因于定理 3.3，因为要检验自然性，只需检验 R' 中的态射。

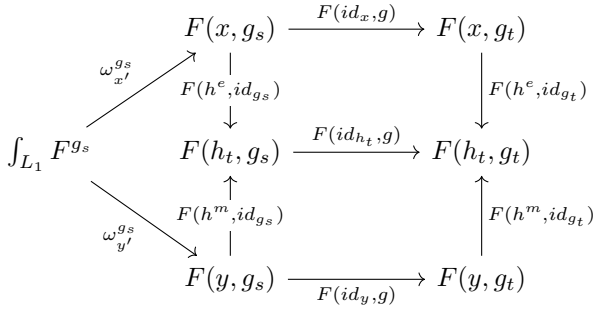
定义 4.4。设 A 和 B 为带变性的范畴。设 $F\colon A \times B \to C$ 是一个相对于 $A \times B$ 上的积变性的变异函子。对于对象 (x, y) 和态射 (f, g)，我们将积范畴 $A \times B$ 记作 $F(x, y) = F_x(y) = F^y(x)$ $F_x(g) = F(id_x, g)$，并将 $F^y(f) = F(f, id_y)$ 记作 $A \times B$。这定义了变异函子 $F_x\colon B \to C$ 和 $F^y\colon A \to C$，对 A 中的所有对象 x 以及 B 中的所有对象 y 均成立。

定理 4.5（参数定理）。设 A 和 B 是带变性的范畴。设 (R_1, L_1) 和 (R_2, L_2) 分别是A 和 B上的跨度。设 $F\colon A \times B \to C$ 是一个变异函子。假设 $[\int_{L_1} F](y) := \int_{L_1} F^y$ 存在，且ω^y 是对 B中所有对象 y 的泛楔。那么 $\int_{L_1} F$ 唯一地扩展为变异函子 $B \to C$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} [\int_{L_1} F](g_s) & \xrightarrow{\omega_a^{g_s}} & F(L_1(a), g_s) \\ {\scriptstyle \int_{L_1}(F)(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(id,g)} \\ [\int_{L_1} F](g_t) & \xrightarrow[\omega_a^{g_t}]{} & F(L_1(a), g_t) \end{array}$$

对 R 中的每个对象 a 以及 B中的每个态射 g 都交换。

证明。设 g是 B中的一个态射。首先证明，$(F(id_{L_1(a)}\ g) \circ \omega_a^{g_s})_{a \in R}$定义了一个 L_1-楔 $\overline{\int_{L_1} F^{g_s}} \Rightarrow F^{g_t}$。由此可知，$\int_{L_1} F$ 是定义良好的态射函数。为证明 L_1的自然性，固定一个态射 $f\colon x' \to y'$，其中 R。将 $L_1(f)$写作 $h\colon x \to y$。考虑图表



该图表可交换，因为左侧根据 ω 的自然性可交换，而右侧则依据 F的函子性可交换。显然，$\int_{L_1} F\colon B \to C$将恒等态射映射为恒等态射。为证明 $\int_{L_1} F$的混合函子性，固定 B中的态射$b \xrightarrow{f} b' \xrightarrow{g} b''$。考虑以下图表：

$$
\begin{array}{ccc}
\int_{L_1} F(f_s) & \xrightarrow{\int_{L_1} F(f)} & \int_{L_1} F(f_t) \\
\uparrow{\scriptstyle \int_{L_1} F((g_m f_e)_m)} & & \downarrow{\scriptstyle \int_{L_1} F((g^e f^m)^e)} \\
\int_{L_1} F((gf)_s) & \xrightarrow{\int_{L_1} F(gf)} & \int_{L_1} F((gf)_t) \\
\downarrow{\scriptstyle \int_{L_1} F(((g_m f_e)_e)} & & \uparrow{\scriptstyle \int_{L_1} F((g^e f^m)^m)} \\
\int_{L_1} F(g_s) & \xrightarrow[\int_{L_1} F(g)]{} & \int_{L_1} F(g_t)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
F(L_1(a), f_s) & \xrightarrow{F(id,f)} & F(L_1(a), f_t) \\
\uparrow{\scriptstyle F(id,(g_m f_e)_m)} & & \downarrow{\scriptstyle F(id,(g^e f^m)^e)} \\
F(L_1(a), (gf)_s) & \xrightarrow{F(id,gf)} & F(L_1(a), (gf)_t) \\
\downarrow{\scriptstyle F(id,(g_m f_e)_e)} & & \uparrow{\scriptstyle F(id,(g^e f^m)^m)} \\
F(L_1(a), g_t) & \xrightarrow[F(id,g)]{} & F(L_1(a), g_t)
\end{array}
\tag{6}
$$

其中右侧图表可交换。我们证明左侧图表也可交换。添加适当对象 b对应的泛楔 $\omega_a^b\colon\ \int_{L_1} F^b \to F(L_1(a)\ b)$后，可以考虑一个柱状图表，其顶面是图表 (6) 的左侧部分，底面是右侧部分。已知该柱状图表除顶面外的所有面均可交换。这是由 $\int_{L_1} F$ 的定义以及 F 是一个混合变性函子这一事实所致。由于由 A 中对象 a 索引的态射 ω_a^b 是联合单态，对于 $b = (gf)_t$，通过图表追逐可知顶面也可交换。

□

定理 4.6 (极限可交换，富比尼)。 令 A 和 B 为带变性的范畴。令 (R_1, L_1) 和 (R_2, L_2) 分别为 A 和 B上的跨度。令 $F\colon\ A \times B \to C$ 为关于 $A \times B$上的积变性的变异函子。记 $L = L_1 \times L_2\colon\ R \to A \times B$ 假设端

$$\int_{L_1} F^b$$

存在，且对于范畴 B 中的每个对象 b，泛楔为 $\omega^b\colon\ \overline{\int_{L_1} F^b} \Rightarrow F^b$。考虑相应的典范函子 $\int_{L_1} F\colon\ B \to C$。那么转置

$$(c, \theta\colon \overline{c} \underset{L_2}{\Longrightarrow} \int_{L_1} F) \mapsto (c, \tilde{\theta}\colon \overline{c} \underset{L}{\Longrightarrow} F),$$

其中 $\tilde{\theta}_{x,y} = \omega_x^{L_2}{}_{(y)} \circ\ \theta_y$ 对于对象 (x, y) 在 R中，定义了 L-楔与 F 的 L_2-楔之间的一个同构。特别地，端 $\int_L F$存在，当且仅当端 $\int_{L_2} \int_{L_1} F$存在；若其中一个存在，则二者相同。

证明。 首先，我们证明转置是良定义的。设 (c, θ) 是 $\int_{L_1} F$ 的一个 L_2-楔。我们证明，$\tilde{\theta}$（即由以下态射组成的族）

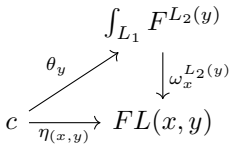
$$\tilde{\theta}_{x,y}\colon c \xrightarrow{\theta_y} \int_{L_1} F^{L_2(y)} \xrightarrow{\omega_x^{L_2(y)}} F(L(x, y)),\ \text{for objects } (x, y) \text{ in } R,$$

定义了一个 L-楔。设 $(p, q)\colon (a, x) \to (b, y)$ 是 R 中的一个态射。记 $(f, g) := L(p, q)$。考虑交换图

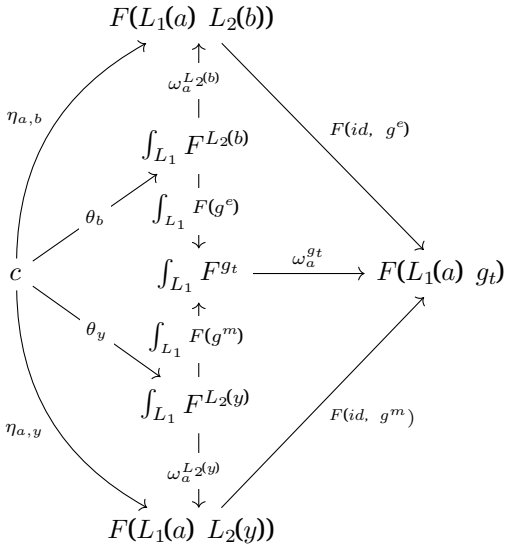
$$
\begin{array}{ccccc}
c & \xrightarrow{\theta_x} & \int_{L_1} F^{L_2(x)} & \xrightarrow{\omega_a^{L_2(x)}} & FL(a, x) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta_y} & & \downarrow{\scriptstyle \int_{L_1} F(g^e)} & & \downarrow{\scriptstyle F(id, g^e)} \\
\int_{L_1} F^{L_2(y)} & \xrightarrow[\int_{L_1} F(g^m)]{} & \int_{L_1} F^{g_t} & \xrightarrow{\omega_a^{g_t}} & F(L_1(a), g_t) \\
\downarrow{\scriptstyle \omega_b^{L_2(y)}} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_c^{g_t}} & & \downarrow{\scriptstyle F(f^e, id)} \\
FL(b, y) & \xrightarrow[F(id, g^m)]{} & F(L_1(b), g_t) & \xrightarrow[F(f^m, id)]{} & F((f, g)_t)
\end{array}
$$

这些矩形可交换，因为 θ 的 L_2-自然性、函子 $\int_{L_1} F$ 的定义以及 ω^{g_t} 的 L_1-自然性。

为了看出双射性，固定一个 F 的 L-楔（$c,\ \eta$）。我们构造一个 $\int_{L_1} F$ 的 L_2-楔（$c,\ \theta$）。我们将 $\theta_y\colon\ c \to [\int_{L_1} F](L_2(y))$ 定义为使图表成立的唯一态射。



对每个对象 x in R_1 都交换。固定一个对象 y in R_2。态射 θ_y 定义良好，因为 L 的自然性意味着，对于每个 y，$(\eta_{x,\ y})_x$ 是 L_1-自然的。为了证明族 $(\theta_y)_y$ 是 L_2-自然的，固定一个态射 $p\colon\ b \to y$ inR_2。记 $g = L_2(p)$。令 a 为 R_1 的一个对象。考虑图表



利用态射族 $(\omega_a^{g_t})_a$ 联合单态这一事实进行图表追逐，可知态射族 $(\theta_y)_y$ 在 p 处是 L_2-自然的。这说明定理中定义的转置是双射。态射的映射 $(c,\ \theta) \xrightarrow{\alpha} (d,\ \phi) \mapsto (c,\ \tilde{\theta}) \xrightarrow{\alpha} (c,\ \tilde{\phi})$ 定义良好，并将转置扩展为范畴同构。

□

致谢

我谨向我的导师 Van der Linden教授致以诚挚的谢意，感谢他们在我准备第一篇文章的整个过程中给予的深刻见解和专业指导。我由衷感谢他们的悉心指导与栽培。

谨向在 UCLouvain 举办的初级范畴论研讨会的同事们致谢，感谢他们给予我的启发。

参考文献

[1] S. Eilenberg 和 G. Kelly。函子演算的推广。《代数学杂志》，3:366–375，1966。由 Saunders MacLane 推荐发表。

[2] M. Grandis. 弱子对象与范畴的满-单完备化。《纯粹与应用代数学杂志》，154(1-3):193–212，2000。

[3] M. A. Bednarczyk、A. M. Borzyszkowski 和 W. Pawlowski。广义同余：Cat中的满态射。《范畴论及其应用》，5(11):266–280，1999。由 Michael Barr 推荐。