草稿版本，2023年5月10日 使用LATEX排版 双栏 样式，
采用AASTeX631

arXiv:2305.05362v1 [astro-ph.IM] 9 May 2023

RAM：任意网格快速平流算法

PABLO BEN´ITEZ-LLAMBAY，[1,2] LEONARDO KRAPP，[3] XIMENA S. RAMOS，[4] 和 KAITLIN M. KRATTER[3]

[1]阿道夫·伊瓦涅斯大学工程与科学学院，对角线拉斯托雷斯大道*2640*号，佩尼亚洛伦，智利[2]数据观测基金会，*ANID*技术中心，编号 *DO210001*[3]亚利桑那大学天文学系及斯图尔德天文台，美国亚利桑那州图森，邮编*85721*[4]千年天体物理研究所（*MAS*），努恩西奥·蒙塞尼奥尔·索特罗·桑斯街*100*号，*104*室，普罗维登西亚，圣地亚哥，智利

摘要

许多天体物理流的研究需要计算算法，既能捕捉高马赫数流，又能解析空间尺度和密度尺度上的大动态范围。本文提出一种新方法：RAM：任意网格快速平流算法。RAM 是一种显式时间方法，用于在任意计算网格上求解具有较大整体速度问题中的平流方程。与标准迎风算法相比，RAM 能够采用更大的时间步长进行平流，并降低截断误差。我们的方法基于算子分裂技术和守恒插值。根据整体速度和分辨率，RAM 可将流体力学的计算成本降低一个数量级以上。为量化 RAM 的截断误差和加速效果，我们进行了二维和一维流体力学测试。结果表明，我们方法的阶数由守恒插值的阶数决定，其实际加速效果与时间步长的相对增幅一致。RAM 尤其适用于盘-卫星相互作用的数值研究；这类问题具有较高的整体轨道速度和非平凡的几何形状。我们的方法大幅降低了模拟的计算成本，使模拟能够同时解析整个盘以及次级伴星希尔半径以内的区域。

关键词：算法 - 流体力学 - 吸积盘 - 原行星盘

1. 引言

天体物理学中许多尚待解决的问题，都依赖于流体动力学计算研究所揭示的非线性结果。这些问题通常涉及高雷诺数流，需要跨越多个数量级的尺度进行研究。计算流体动力学的核心问题之一，是找到稳定、准确、守恒且高效的数值方法来求解平流方程。

$$\partial_t Q + \partial_x \left(Q v\right) = 0\,, \tag{1}$$

对于给定的初始条件 $Q(x, t = 0) = Q_0(x)$ 及适当的边界条件。这里，$Q(x, t)$ 是由速度 v 在时间 t 内沿 x 方向平流的平流量。不失一般性，我们可以假设 $v = v_0 + \delta v$，其中整体速度 v_0 在空间中为常数，而 $\delta v(x)$ 是流速 v 相对于 v_0 的偏差。

在欧拉形式体系中，方程（1）可以通过采用黎曼算法或有限体积算法，并结合迎风重构方法来求解，例如分段线性重构（如 van Leer1977）或分段抛物线重构（Colella & Woodward 1984年) 等方法。这些守恒型迎风方法会引入取决于整体速度的截断误差。这类方法使数值解的精度与流动的整体速度直接相关（例如参见 Robertson 等，2010）。因此，在以整体速度为速率移动的参考系中求解平流方程，可将解的误差降至最低。

此外，显式有限差分法会产生所谓的 Courant–Friedrichs–Lewy（CFL）稳定性条件，该条件与速度 v成反比。因此，较大的整体速度会限制允许的时间步长 Δt，进而增加求解时间 t时的数值计算成本。关键在于，随着整体速度 v_0变得任意大，这种数值计算成本也会无限增大。相比之下，只要将迎风通量在整个依赖区域上积分，有限体积法就不需要满足 CFL 条件。不过，通常会限制信息在一个时间步长内的传播距离，使其小于较小单元的尺寸。

由于这两项观察，要处理较大的整体速度，首先需要开发专门的技术，以减小较大的截断误差；其次，需要增大有效时间步长。增大时间步长（同时不影响求解器的稳定性）尤为重要。

通讯作者：Pablo Ben´
ıtez-Llambaypablo.benitez@uai.cl

降低模拟计算成本的有效方法。

就 v_0而言，方程（1）可写为

$$\partial_t Q + v_0 \partial_x Q + \partial_x \left(Q \delta v \right) = 0 \,. \tag{2}$$

为了解决上述问题，我们希望从方程（ v_0 2）中移除。实现这一点的一种方法是定义坐标变换

$$\begin{aligned} t' &= t \,, \\ x' &= x - v_0 t \,, \end{aligned} \tag{3}$$

使得方程（2）变为

$$\partial_{t'} Q + \partial_{x'} \left(Q \delta v \right) = 0 \,. \tag{4}$$

Shariff & Wray （2018年）采用这种方法，在固定均匀网格上求解平流。该方法是在以整体速度移动的参考系中使用标准方法求解平流，并在每个时间步长结束时返回静止参考系，通过将平流量平移 $v_0 \Delta t$ 的距离来填充固定网格，平移操作在傅里叶空间中进行（另见 Johansen 等人 2009年）。利用快速傅里叶变换（FFT）可以高效地完成这一操作。然而，只有在均匀网格上才能高效地进行 FFT（及其逆变换）。对于非均匀空间，可以使用非均匀离散傅里叶变换（NUDFT），但这会增加计算成本或降低精度（Keiner 等人 2009年）。此外，通过离散傅里叶变换任意平移非光滑函数会产生吉布斯现象，在采样函数梯度较大的区域附近，使重构（平移后）的信号出现过冲或欠冲。更重要的是，吉布斯现象会产生伪值，从而可能改变平流量的符号。对于密度或内能等取正值的量，这可能造成灾难性后果。

去除 v_0 式（2）的另一种方法同样与坐标变换有关：在以整体速度移动的拉格朗日网格中求解平流方程，例如 AREPO（Springel2010）或 DISCO（Duffell 2016所采用的方法。在一维情况下，这或许是均匀域和非均匀域上的最优解。然而，在具有强剪切的多维网格上，时间步长可能会受到限制，除非网格是规则连接的。

另一种可能的方法是由（Masset 2000）[1]提出的 FARGO 算法。FARGO 算法广泛应用于盘动力学领域，用于避免差分旋转流体中较大的整体速度所导致的时间步长限制。FARGO 算法在静态网格（或以如下方式旋转的网格）上采用算子分裂方法

[1]FARGO（旋转气态天体快速平流）是一种平流算法，其名称与最初实现该算法的流体力学代码同名。本文提到 FARGO 时，指的是该算法，而非同名代码。

刚体）。（例如，参见 Masset 2000；Ben´ıtez-Llambay & Mas- set 2016年），对该方法而言，按时间一阶精度求解式（2）分为两个独立步骤。第一步，求解

$$\partial_t Q + v_0 \partial_x Q = 0 \,, \tag{5}$$

然后，以式（5）的解为初始条件，采用标准方法进行求解

$$\partial_t Q + \partial_x \left(Q \delta v \right) = 0 \,. \tag{6}$$

因此，式（6）的解对应于式（2）的近似解。一阶情况下，该方法等价于 Shariff& Wray（2018年）提出的方法。FARGO 算法的一个关键性质是，式（5）具有解析解

$$Q(x,t) = Q(x - v_0 t, 0) \,, \tag{7}$$

这对应于沿x–坐标平移初始条件。在均匀网格上，这种平移可以表示为整数个网格单元的平移，再加上剩余平流。此外，在周期域上，整数平移对应于网格单元的循环置换，因此不会引入任何数值误差。尽管这种整数平移十分简单，使 FARGO 算法极为高效，但它不适用于非均匀网格。

在本文中，我们提出一种算法，用于求解方程（1），且可处理任意大的整体速度 v_0 ，使 FARGO 算法的高效性同样适用于均匀网格和非均匀网格。与 FARGO 算法一样，我们的方法基于算子分裂技术和特征线法，并采用适当的守恒重构方法来计算方程（7）。此外，我们开发的特征线法可用于平移信号，也可用于在非均匀网格上构建高阶格式（或避免均匀网格上使用 FFT 方法时可能出现的问题）。我们还表明，如果底层网格按照预先定义的网格密度函数分布，那么将非均匀空间映射到均匀空间的坐标变换可以显著加快计算速度。

本文结构安排如下。在第2 节中，我们定义全文所用的基本方程。在第3 节中，我们介绍用于求解平流方程的 RAM 方法的详细内容。第4节展示测试问题的结果以及对我们实现的基准测试。最后，我们在第5节总结本文工作。

2. 基本定义

考虑由 $N+1$ 节点构成、坐标单调递增 $x_{\min} = x_{-\frac{1}{2}} < x_{\frac{1}{2}} < \cdots < x_{N-\frac{1}{2}} = x_{\max}$ 的静态网格。假设函数 Q 在区域内具有周期性，并在时刻 t_n 采样于单元坐标 $x_i = (x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}})/2$，定义 $Q_i^n \equiv Q(x_i, t_n)$。相邻节点对定义单元尺寸 $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$，其中 $i = 0, \ldots, N-1$。单元内 Q 的体积平均为

$$\langle Q \rangle_i^n \equiv \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} Q(x, t_n) \, \mathrm{d}x \,. \tag{8}$$

在本文中，我们假设

$$\langle Q\rangle_i^n = Q_i^n \,. \tag{9}$$

通过对 Q 在 x_i 附近作泰勒展开可以证明，对于光滑函数，式（9）对应于式（8）在 i单元内的二阶近似。因此，单元内 Q 的体积分为

$$M_i^n \equiv Q_i^n \Delta x_i \,. \tag{10}$$

对于周期性区域，从时间$t = t_0$ 到 $t = t_n$ 对 Q 进行守恒更新意味着

$$\sum_{i=0}^{N-1} M_i^n = \sum_{i=0}^{N-1} M_i^{n-1} = \cdots = \sum_{i=0}^{N-1} M_i^0 \,. \tag{11}$$

由于 Q 是在离散点集上采样的，我们还定义了

$$q^n(x) \equiv q_i^n(x) \quad \text{for} \quad x_{i-\frac{1}{2}} \le x < x_{i+\frac{1}{2}} \,. \tag{12}$$

函数 q^n 由一组分段插值单调函数 $q_i(x,\ t_n)$ 组成，这些函数在每个单元内近似 $Q(x,\ t_n)$，使得

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q_i^n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1} M_i^n \,. \tag{13}$$

具体而言，我们还假设

$$M_i^n = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q_i^n(x)\,\mathrm{d}x \,. \tag{14}$$

此外，还要求 q 不引入新的极值，从而防止解中出现过冲/欠冲。

就 q而言，式（7）变为

$$q(x,t) = q(x - v_0 t, 0) \,. \tag{15}$$

根据上述关系，离散函数Q 的平流转化为分段连续函数 q 的平流，该函数与 Q具有相同的局部和全局体积分。

最后，给定速度 $v(x)$，通常将恒定背景整体速度定义为 v_0 空间平均速度（参见 Masset2000）。这个定义是任意的；例如，可以将其定义为质心的速度。为了在效率和精度方面都获得最优解，应将 v_0 定义为使区域内 $|\delta v| = |v - v_0|$ 的最大振幅最小，从而使允许的时间步长最大化。定义 v_0 为 v 的最大值与最小值的平均值即可轻松实现这一点（见Ben´ıtez-Llambay & Mas-set 2016，第 3 节.5.1）。值得注意的是，只要 v_0 在空间上保持恒定，本文提出的方法并不依赖于其定义方式。其定义方式会影响实际加速效果和总体精度。

3. RAM

如第 1 节前文所述，要解决方程（1），并在任意网格上实现时间步长最大化和截断误差最小化，需要高效地求解方程（5）。换言之，我们需要一种快速、稳定且守恒的方法来计算方程（7）给出的精确解。

将式（7）从时刻 t_n 演化到 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 相当于在空间中将 Q（x，t_n）平移 $v_0\Delta t$ 。在一种特殊情况下，若 Q 在离散但均匀间隔的网格上采样，且 $v_0\Delta t$ 是单元尺寸的整数倍，则可通过对指标进行循环置换来实现平移（参见Masset 2000年）。然而，一般而言，Q 可能是在非均匀区域上采样的。在这种情况下，不可能使每个单元的单元尺寸都是 $v_0\Delta t$的整数倍。因此，平移 Q 需要使用插值方法。这里我们给出一种通过式（7）和式（15）求解的保守方法，即将 Q 的总体积平均值守恒至机器精度（按式（11）定义）。

为计算从时刻 t_n 到时刻 t_{n+1}的方程（15），我们提出以下 3 个步骤

1. 使用离散节点 Q_i^n （见第3.1节）计算分段插值函数q_i（x，t_n）。2. 将 M_i^{n+1} 解析平移 q^n 一段距离 $v_0\Delta t$ （见第3.2节）后，获得 M_i^{n+1} 。3. 使用方程（10）获得平流剖面（见第3.3节）。

这三个步骤在图1中有明确展示。结合构建方程（5）所需的算子分裂，这三个步骤构成了任意网格上的快速平流算法（RAM）的核心。下面我们将逐一解释这些步骤，并给出一个实际示例。

3.1. 步骤 *1*——插值 Q_i^n

RAM 方法的第一步要求对节点 Q_i^n 进行插值，以获得分段函数q_i^n（x）。理想情况下，该插值的阶数应等于或高于用于求解方程（6）的阶数，从而使误差主要由标准平流步骤决定。RAM 方法不依赖于任何特定的选择，只要插值具有守恒性且不引入新的极值即可。在本文中，我们研究两种不同的守恒分段单调插值方法（即不引入新的最大值/最小值），这些方法常用于流体力学。它们是下面将要介绍的分段线性方法（PLM）和分段抛物线方法（PPM）。在本节中，所有量均在时刻 t_n进行计算，因此为简便起见，我们省略上标 n。

分段线性方法—这种方法可提供精度达到二阶的插值（例如参见 Mignone

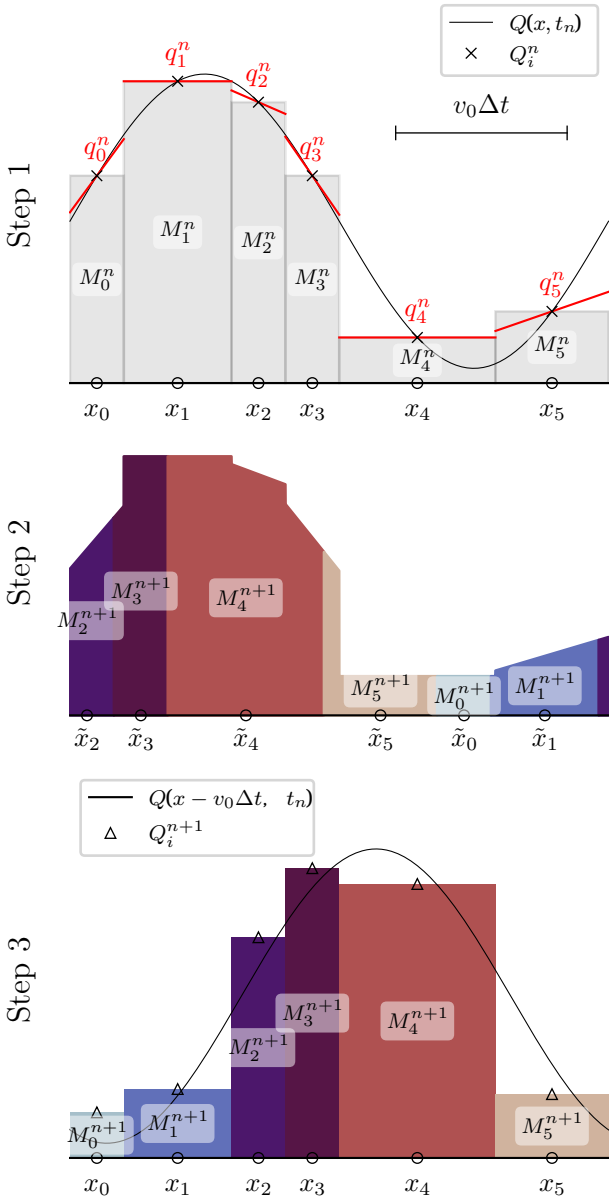

图 1. RAM 在周期性区域内求解正值速度 v_0 在时间 Δt 内的方程（5）时所涉及的步骤。上方面板显示了时刻 t_n 的任意连续函数 $Q(x)$，该函数在离散点集 x_i 处已知，其对应的值为 Q_i^n。利用这些值，我们可以计算出 q_i^n，并用红线表示。对于这个具体示例，我们采用 PLM 插值（参见第 3.1 节）。此处还绘出了在步骤 2 中用于将网格向左平移的长度 $v_0\Delta t$。中间面板显示了通过计算方程（22）得到的 M_i^{n+1}，其中不同的网格单元使用不同的颜色表示。这些颜色有助于将各个区域（即 q^n 在每个网格单元内的积分）与步骤 3 中重构 Q_i^{n+1} 后得到的相应区域联系起来（参见第 3.2 节）。下方面板显示了通过方程（10）由 M_i^{n+1} 得到的重构值 Q_i^{n+1}。为完整起见，我们还展示了精确解 $Q(x - v\Delta t, t_0)$。

2014，第 3.1 节）。假设 q_i 的形式为

$$q_i(x) = Q_i + \sigma_i\,(x - x_i)\ , \tag{16}$$

其中 σ_i 是线性函数的斜率。通过采用van Leer（1974年）提出的斜率限制器，可保持单调性，其中

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta Q_{i+\frac{1}{2}}\Delta Q_{i-\frac{1}{2}} \le 0 \\ \dfrac{2\Delta Q_{i+\frac{1}{2}}\Delta Q_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta Q_{i+\frac{1}{2}} + \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

with $\Delta Q_{i+\frac{1}{2}} = (Q_{i+1} - Q_i)/(x_{i+1} - x_i)$.

分段抛物线方法——该方法最初由Colella 和 Woodward （1984年）提出，通过二次多项式进行 Q 最高三阶的插值。分段抛物线函数为

$$\begin{aligned} q_i(x) = Q_{L,i} &+ \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i}\right)(Q_{R,i} - Q_{L,i}) \\ &+ Q_{6,i}\left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta x_i}\right)\left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $Q_{6,i} = 6\langle Q\rangle_i - 3(Q_{L,i} + Q_{R,i})$。为了得到二次多项式，我们需要计算 $\langle Q\rangle_i$ （见第 2 节），并将 $\langle Q\rangle_i$ 插值到单元界面，以得到$\langle Q\rangle_{i+\frac{1}{2}} = Q_{\mathrm{L},i+1} = Q_{\mathrm{R},i}$（见附录 A.1）。此外，还必须施加单调性约束（见附录 A.2）。值得注意的是，二次多项式的系数取决于 $\langle Q\rangle_i$, $Q_{\mathrm{L},i}$和 $Q_{\mathrm{R},i}$，因此后者的误差会限制插值的精度。在本文中，我们假设 $\langle Q\rangle_i \equiv Q_i$，它是 $\langle Q\rangle_i$ 的二阶近似。因此，我们预计插值误差小于三阶。通过改进 $\langle Q\rangle_i$的计算，可以获得更高的精度（Colella & Sekora 2008）。不过请注意，由于 PPM 在局部守恒 $\langle Q\rangle_i$，对 $\langle Q\rangle_i$进行更高阶近似可能无法满足本文所定义的守恒性，即无法在连续多个时间步长内守恒 $\sum_i Q_i\Delta x_i$。守恒性取决于 Q的空间导数近似。例如，$\langle Q\rangle_i = Q_i + 1/24\,(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$的四阶近似在周期性区域内是全局守恒的（即满足式 11）。一般而言，只要 $\langle Q\rangle_i$ 的更高阶近似在一个时间步长内守恒，就可以提高本方法的精度（例如，Felker & Stone 2018）。

最后需要指出的是，对于分段线性方法和 PPM，单调性约束会在非光滑区域内局部增加截断误差，进而降低插值的总体精度。第4.1节展示了一个由此效应导致精度降低的示例，即方形剖面的平流。

3.2. 步骤 2——从 q^n 的平流中获取 M^{n+1}

体积分 M_i^{n+1} 由定义（10）结合解（15）得到

$$M_i^{n+1} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x - v_0\Delta t, t_n)\mathrm{d}x\,. \tag{19}$$

定义 $\tilde{x} \equiv x - v_0\Delta t$后，我们可以将公式（19）写为

$$M_i^{n+1} = \int_{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} q^n(x)\mathrm{d}x\,. \tag{20}$$

我们定义正整数， p（i），使得

$$x_{p(i)-\frac{1}{2}} \le \tilde{x}_{i-\frac{1}{2}} < x_{p(i)+\frac{1}{2}}\,, \tag{21}$$

这使得方程（20）可计算为

$$M_i^{n+1} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} q^n_{p(i)}\mathrm{d}x, & \text{if} \quad p(i) = p(i+1) \\ \displaystyle\int_{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{p(i)+\frac{1}{2}}} q^n_{p(i)}\mathrm{d}x + \sum_{m=p(i)+1}^{m<p(i+1)} M_m^n & \\ \displaystyle+\int_{x_{p(i+1)-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} q^n_{p(i+1)}\mathrm{d}x, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{22}$$

其中，由于周期性， $p(N) = p(0)$。这里，对M_m^n 求和相当于对以 x_m为中心的整个单元上的 q_m 积分。由于重构具有守恒性，我们将此积分替换为 M_m^n。

方程（22）是标准迎风方法针对任意依赖域的推广，可解释为将体积平均值（例如质量）从坐标 x_i 守恒重映射到新坐标 $\tilde{x}_i = x_i - v_0\Delta t$。请注意，由于 Δt 无界， $\tilde{x}_i$可能与 x_i相距甚远，且/或 x 中的一个网格单元可能与 $\tilde{x}$ 中的一个、两个或多个网格单元相交，反之亦然。不过，索引计算 $p(i)$（方程（21）和第3.2.1节）以及方程（22）中的两个条件判断简化了这种重映射。若时间步长 Δt 有界（例如，$\Delta t \lesssim \min(\Delta x_i)/v_0$），方程（22）便简化为 Lufkin 和 Hawley（1993）所述的坐标重映射（见其方程 58）。此时， $p(i) = i$， $p(i+1) = i+1$，方程（22）中的算法可改写为标准迎风平流格式，其形式与用于求解方程（6）的格式类似。

3.2.1. $p(i)$ 的高效计算

若存在一个坐标变换 $u(x)$ 使得 $\Delta u \equiv u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_{i-\frac{1}{2}})$为常数，则式-(21）可写为

$$0 \le \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}} - u_{p(i)-\frac{1}{2}} < \Delta u\,. \tag{23}$$

换句话说， $p(i)$ 对应于原始网格中小于 $\tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}$ 的最近邻的索引。

由于 u 间距均匀，这个计算非常简单。

$$p(i) = \mathrm{int}\left(\frac{\tilde{u}_i - u_0}{\Delta u}\right)\,, \tag{24}$$

其中，“int(*a*)”表示最接近a且小于它的整数。接下来，我们将介绍一种构造网格的方法，使得求出这一变换变得轻而易举。

考虑网格密度函数 ψ： $[x_{\min}, x_{\max}] \to \mathbb{R}_{>0}$，使得

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \psi(s)\,ds = 1\,. \tag{25}$$

我们定义 F： $[x_{\min}, x_{\min}] \to [0, N-1]$，使得

$$F(x) = (N-1)\int_{x_{\min}}^{x} \psi(s)\,ds\,. \tag{26}$$

累积函数 F 充当“索引函数”，因为它返回按照网格密度 ψ分布的网格的（连续）索引。这一点显然是因为单位空间内网格单元的数量与 $dF/dx = \psi$成正比。网格节点由下式隐式定义

$$F(x_{i+\frac{1}{2}}) - F(x_{i-\frac{1}{2}}) = (N-1)\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \psi(s)\,ds = 1\,, \tag{27}$$

与 $x_{-\frac{1}{2}} \equiv x_{\min}$。可能无法求得 F 或其逆变换的解析表达式，因此必须结合求根方法使用数值积分。最后，坐标变换 u： $[x_{\min}, x_{\max}] \to [0, 1]$ 使得

$$u(x) = \int_{x_{\min}}^{x} \psi(s)\,ds\,, \tag{28}$$

确保根据定义， Δu 为常数，且公式（24）计算为

$$p(i) = \mathrm{int}[F(\tilde{u}_i)]\,, \tag{29}$$

这使我们能够显著加快 RAM 第 2 步中所需的索引计算。值得注意的是，Hugger(1993) 将一种类似的方法推广到了多维情形。

3.3. *Step 3 - Obtaining Q_i^{n+1} from M_i^{n+1}*

一旦 M_i^{n+1} 获得后，第三步是使用公式（10）来获得平流后的剖面 Q_i^{n+1}，其形式为

$$Q_i^{n+1} = \frac{M_i^{n+1}}{\Delta x_i}. \tag{30}$$

3.4. 使用 *RAM* 进行平流的示例

在图 1 中，我们将一个正弦剖面向右平流，该剖面$Q(x,\ t_n)$采样于长度为 $v_0\Delta t$ 的离散非均匀网格上。为对其进行平流，我们按照前文所述的三个步骤进行。第一步（上图）是计算q_i^n，为简便起见，这里使用分段线性方法（PLM）来计算。这些线性函数以红线绘出。为更详细地说明这一过程，我们现在聚焦于区间 $[x_{4-\frac{1}{2}}, x_{4+\frac{1}{2}}]$

仅对该区间进行说明，但所有区间都需要执行类似的操作。目标是求出由 q^n 平流得到的、在时刻 t_{n+1} 、位置 x_4 处的 Q_4^{n+1}。为此，我们执行步骤 2（中图）。将 x_4 转换为 $\tilde{x}_4$，并找出所有位于 $[\tilde{x}_{4-\frac{1}{2}}, \tilde{x}_{4+\frac{1}{2}}]$ 内的 $p\,(i)$ 。如果网格遵循网格密度函数 ψ，则可以高效地完成这一步，具体解释见第3.2.1节。对于这个具体示例，在该区间内计算式（22）所需的特定索引为 $p(4)$ $p(5)$。为满足不等式（21），$p(4) = 1$ 且 $p(5) = 3$，于是式（22）变为

$$M_4^{n+1} = \int_{\tilde{x}_{4-\frac{1}{2}}}^{x_{1+\frac{1}{2}}} q_1^n \,\mathrm{d}x + M_2^n + \int_{x_{3-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{4+\frac{1}{2}}} q_3^n \,\mathrm{d}x\,. \tag{31}$$

因此，要计算 M_4^{n+1}，我们必须在区间$[\tilde{x}_{4-\frac{1}{2}}, \tilde{x}_{4+\frac{1}{2}}]$内对 q_1^n、q_2^n和q_3^n进行积分$[\tilde{x}_{4-\frac{1}{2}}, \tilde{x}_{4+\frac{1}{2}}]$。这里，$q_2^n$的积分被 M_2^n取代，这仅仅是因为构造 q_2的步骤是守恒的。最后，在步骤 3（下图）中，我们取 M_4^{n+1}并使用方程（30）计算 Q_4^{n+1} 在 x_4处的值（用空心三角形表示）： $Q_4^{n+1} = M_4^{n+1}/\Delta x_4$。

3.5. *RAM* 的普适性

通过维度分裂（Stone& Norman 1992；Benˊ ıtez-Llambay &Masset 2016，第 3.4 节），RAM 可以应用于二维和三维流体动力学求解器，并用于沿整体速度较大的方向进行平流。在这种情况下，需要针对相对剪切对 CFL 条件施加额外限制（参见Benˊıtez-Llambay &Masset 2016，第 3.5.2 节）。在第4.2节中，我们展示了一个二维极坐标盘的示例，其中 RAM 通过维度分裂实现，并用于求解方位角方向上的平流，因为开普勒速度主导着该方向的动力学。RAM 也不受离散格式限制。它可用于有限差分法和有限体积法中的轨道平流，正如先前在均匀网格上采用 FARGO 方法所做的那样（Johnson 等，2008；Stone & Gar-diner 2010；Mignone 等，2012；Lyra 等，2017）。最后我们指出，如果多维问题需要高阶时间积分，则必须在流体动力学方程中考虑一个额外的源项（参见 Shariff&Wray2018，方程 10）。

4. 测试 RAM

在本节中，我们展示使用 FARGO3D 代码（Benˊ ıtez-Llambay & Masset 2016年）求解一维和二维测试问题所得的结果。为在非均匀网格上测试 RAM，我们扩展了该代码，使其能够在笛卡尔坐标系中沿 x 方向采用非均匀间距，并在 ϕ 极坐标系中沿该方向采用非均匀间距。我们还进行了其他修改，以确保在非均匀网格上实现质量和动量守恒。我们在附录C中介绍这些修改。我们的目标有两个：首先，旨在刻画第 3.1 节所述插值方法对应的 RAM 收敛率；其次，希望比较 RAM 与其他方法相比的效率平流方法。这些方法即所谓的标准[2]（STD）方法和 FARGO 方法，后者是 FARGO3D 中沿 x/ϕ 方向使用的默认平流算法。STD 使用完整速度通过迎风方法求解平流（详见 Benˊ ıtez-Llambay & Masset 2016年），而 FARGO 和 RAM 则按照第 1 节所述的分裂方式求解平流。对于 FARGO 和 RAM，当 δv 不为零时，都需要额外执行 STD 平流步骤。此外，对于 FARGO，即使 $\delta v = 0$，当 Δt 被任意选定时（如我们在第4.1节中所做），也需要执行一个 STD 步骤。所有方法都采用第 3.1 节讨论的重构；对于每个具体的测试问题，我们会指定所使用的重构方法（PLM 或 PPM）。

4.1. 恒定速度下的一维平流

为了比较上述不同平流方法的误差和收敛率，我们研究光滑剖面和陡峭剖面在均匀网格和非均匀网格上的一维平流。在此测试中，我们仅考虑 FARGO3D 的输运步骤（详情请参见 Benˊıtez-Llambay & Masset 2016年）。此测试突显了通用流体力学积分采用不同平流算法时所产生的平流相关误差。周期性区域的范围为 $[-\pi, \pi]$。对于光滑剖面，初始条件为

$$Q(x) = \frac{2}{\pi} e^{-4x^2/\pi}\,, \tag{32}$$

而方形剖面的初始条件为：

$$Q(x) = \frac{1}{\pi}\begin{cases} 0.75 & |x| \le \pi/2 \\ 0.25 & \text{otherwise} \end{cases}\,. \tag{33}$$

虽然方程（32）在该区域内并非严格周期，但初始条件在边缘处产生的不连续性非常小，不会引入显著误差。在这两种情况下，平流速度为 $v = \pi$，并将其用作 FARGO 和 RAM 的整体速度 v_0。我们将系统积分至时间 $t = 2$，使剖面移动一个完整周期并回到初始位置。为测试分辨率的收敛性，我们将网格点数量从32 增加到 512 ，并通过 L1 范数估算截断误差， e_1：

$$e_1 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} |Q_i - Q_i^{\mathrm{ref}}| \Delta x_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_i}\,, \tag{34}$$

其中 Q^{ref} 是参考解，我们令其等于初始条件。这是因为经过一个周期后，精确解会与初始剖面相同（见式7）。我们考虑两种情况：一种是网格均匀分布，另一种是网格按照文中所述的周期性凸起网格密度函数分布

[2] 在 FARGO3D 中通过配置文件 .opt 中的选项 -DSTANDARD 启用。

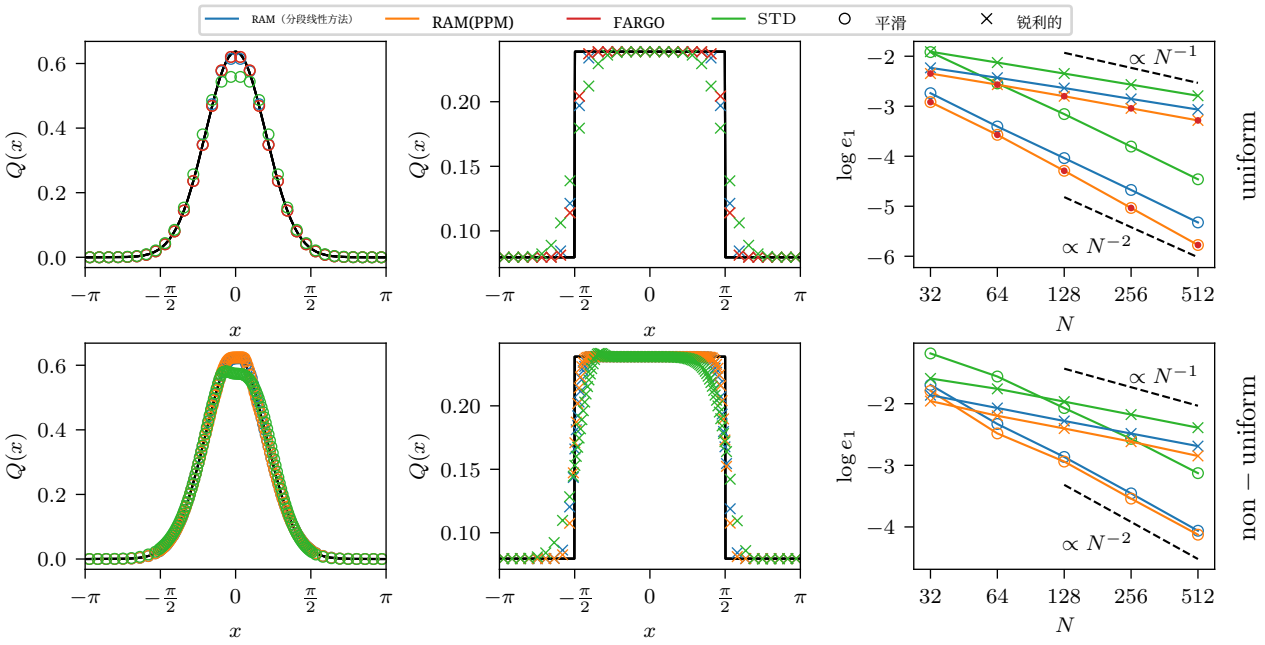

图 2. 第 4.1 节所述 RAM 在均匀网格（上方各图）和非均匀网格（下方各图）上的一维测试结果。左图和中图显示初始条件（黑色曲线）以及 $t = 2$ 时的模拟快照（符号）。左图展示了在含 32 个网格点的网格上平流光滑剖面。中图展示了在含 128 个网格点的网格上平流方形剖面。右图显示误差；对于光滑剖面，采用 PLM 和 PPM 重构时，误差均按 N^{-2} 收敛。

于附录 B.1中，参数为 $a = \pi/2$，$b - a = 0.1$，$c = 5$（另见第 3.2.1 节）。该密度函数可在两个各自具有均匀分辨率的细化层级之间实现平滑过渡。积分所用的时间步长采用标准的 CFL 条件

$$\Delta t = \beta \min\left(\frac{\Delta x_i}{v_0}\right), \tag{35}$$

其中 β 是 CFL 因子，由于稳定性约束，它通常小于 1。我们任意选择 $\beta = 0.5$ 用于 STD [3]，并选择 $\beta = 5.5$ 用于 FARGO 和 RAM；该值与原行星盘模拟中使用 FARGO 通常获得的加速上限处于同一量级。

在图2 中，我们总结了该测试所得的结果。我们发现，对于平滑剖面进行平流时，所有方法的截断误差均为二阶，因为它们随 N（$e_1 \propto N^{-2}$）呈二次下降；而对于尖锐剖面，误差按 $\propto N^{-3/4}$变化，这与一阶算法一致。对于均匀网格和非均匀网格，采用 PLM 的 RAM 的绝对误差略大于采用 PPM 的误差，这符合预期。对于均匀网格，使用 FARGO 或采用 PPM 的 RAM 所得到的误差相同，并且随着分辨率提高，其下降速度略快于使用 STD 或采用 PLM 的 RAM 所得到的误差；不过，斜率差异非常小。RAM（PPM）的误差就是 PPM 插值的截断误差。另一方面，使用 FARGO 所得到的误差对应于以残余速度 $v_{\rm shit}^{\rm R} = v_0 - N\Delta x/\Delta t$ 进行额外的平流（因为时间步长不允许剖面仅移动整数个网格单元）。该残余步骤采用带有 PPM 重构的 STD 平流格式求解（见Benítez-Llambay & Masset 2016年中的方程（69））。因此，FARGO 与采用 PPM 的 RAM 产生相同误差并不令人意外。

最后，STD 与 RAM/FARGO 的绝对误差之间存在显著差异，这是因为两种方法所选取的时间步长有很大差别。正如第 1 节所述，截断误差随时间步长和整体速度 v_0 成比例变化。这凸显了采用一种能够在均匀域和非均匀区域上使用较大时间步长进行平流的方法的重要性。

这项首个测试验证了我们对 RAM 的表述。正如预期，RAM 的精度和收敛特性由插值步骤决定。测试还表明，在均匀网格上，RAM 等同于 FARGO；而在非均匀网格上，RAM 则是 FARGO 的推广。

4.2. 二维极坐标盘中的行星

本节将展示，RAM 与网格密度函数结合，可用于加速差分旋转流体的流体动力学计算，并减少非

[3]值得注意的是，对于此测试，β 可以为 1，且所有方法在均匀网格上都不会产生截断误差。这是因为信号每个时间步长恰好平移一个单元，而所有方法（包括 STD）采用的守恒重构能够以机器精度实现精确平移。此外，对于这个特定的时间步长，解对所用的重构方法及其阶数并不敏感。因此，也可以将 STD 方法与算子分裂结合（如 FARGO 所做的那样），通过若干子循环时间步长 $\Delta x/v_0$推进解，并在循环结束时用剩余部分继续推进解，这样可以显著提升速度并减少截断误差。

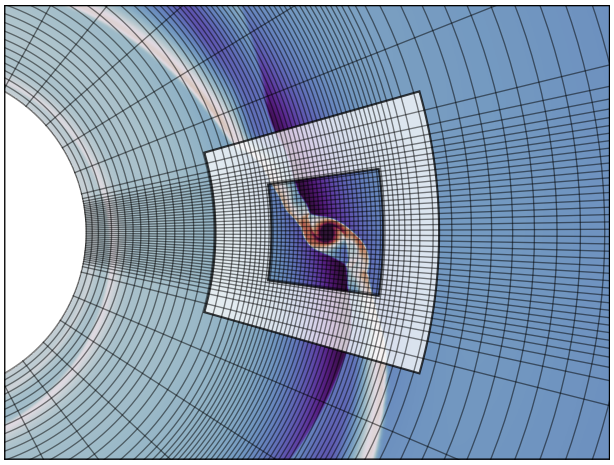

图 3. 第4.2节所述测试中使用的极坐标网格示意图。该网格在 (ϕ, r) 坐标系中构建，分别使用附录 B.1 和附录 B.2 中介绍的周期性凸起网格密度函数。白色区域对应于由差值 $b-a$ 参数控制的分辨率过渡区。

均匀网格上的数值扩散。为此，我们建立了一个二维黏性盘，其绕质量为 $M_\star = M_0$ 的中心恒星运行。该盘模型[4]对应于稳态 α-盘（Shakura & Sunyaev 1973），其中气体表面密度 Σ和温度T均为半径的幂律函数，指数分别为 -1/2 和 -1。盘的厚径比和黏度参数分别设为 $h = 0.05$ 和 $\alpha = 10^{-3}$。我们采用极坐标，盘区域在径向和方位角方向上的范围分别为$r/r_0 \in [0.4, 2.1]$和 $\varphi \in [-\pi, \pi]$。假设盘局部等温，声速为$c_\mathrm{s} = hv_\mathrm{K}$，其中$v_\mathrm{K} = \sqrt{GM_\star/r}$ 为开普勒速度，G 为引力常数。我们加入一颗质量为 $m_\mathrm{p} = 10^{-3}M_\star$ 的嵌入行星，使其沿半径为 $r_\mathrm{p}/r_0 = 1$ 的圆形轨道绕中心恒星运行，并以具有小软化长度 $3\times10^{-3}r_0$ 的普朗默势对其建模。行星在 $t = 0$ 时刻被置入，计算在行星运行一个轨道周期后停止，即在 $t = 2\pi\,\Omega_0^{-1}$ 时停止，其中 $\Omega_0 = \sqrt{GM_0/r_0^3}$ 是 r_0处的开普勒频率。流体动力学方程在与行星共转的参考系中求解，在该参考系中，行星固定在方位角 $\varphi_\mathrm{p} = 0$处。我们选择一套单位制，使得 $G = r_0 = M_0 = 1$。本测试并非旨在真实模拟行星与盘的相互作用，而是要展示 RAM 在一种天体物理场景中的效率；该场景具有高马赫数的整体流速、高振幅以及小尺度流动特征。我们将 RAM 的计算成本与传统平流格式进行比较。

我们在方位角方向上，针对希尔半径 $R_\mathrm{H} = r_\mathrm{p}\sqrt[3]{Gm_\mathrm{p}/(3M_\star)}$ 内的 45、90 和 180 个网格单元开展模拟。

[4] 盘模型是对公开可用的 fargo 配置进行轻微修改后的版本。

均匀网格和非均匀网格上，分别在希尔半径 () 内采用 45、90 和 180 个网格单元进行模拟。为保持整个盘区域内每个标高的分辨率，方位角方向等间距的网格在径向对数空间中也采用均匀分布，这是研究行星—盘相互作用时的常见选择。采用非均匀间距的模拟会按照附录中所述的周期性凸起网格密度函数在方位角方向进行分布B.1，其参数为 $a = 0.1387$、$b = 0.2773$ 和 $c = 15$。在径向方B.2向上，我们使用附录$s_0 = 1$中以 a 为中心的相同 b 参数，但令 $c = 2.5$。在图3中，我们展示了利用这些网格密度函数生成的结构化非均匀网格。白色区域对应于由差值 $b-a$控制的分辨率过渡区域。该网格提高了行星附近径向和方位角方向的分辨率。此外，由于径向网格具有对数特性，单元尺寸向内逐渐减小。当方位角间距均匀时，我们同时采用 FARGO 和 STD 作为平流方法（我们已在第4.1 节表明，在均匀域上 RAM 等价于 FARGO）。相反，当方位角间距不均匀时，则使用 STD 和 RAM 求解平流。在所有情况下，我们都采用速度更快的分段线性方法重构。如第4.1节所示，采用 PPM 得到的结果相似，但截断误差更低。由于盘最内侧区域的单元方位角尺寸较小且整体速度较大，预计类似 RAM 的方法能够显著加速。

4.2.1. *RAM* 的理论加速比

我们分析 CFL稳定性条件中的主要项，以初步估算在此特定问题中使用 RAM 所能获得的计算增益。时间步长按照 Ben´ıtez-Llambay &Masset(2016年) 第 3 节 3.5 小节的方法计算。我们还考虑行星产生的强引力加速度，并假设行星进入盘后很快即可达到旋转平衡态。因此，Δt 可能受到希尔半径内额外产生的局部开普勒速度的限制。该估算给出 Δt 的下限，因为实际上，旋转平衡态可能需要更长时间才能完全建立，或者压力支撑可能会使盘的转速降低。我们用于计算 Δt 的表达式为

$$\Delta t = \beta \min\left[(c_\mathrm{s}+v_\mathrm{p})\max(\xi,\eta)+\xi|v_\mathrm{K}-v_\mathrm{frame}| +4\nu\max(\xi^2,\eta^2)\right]^{-1}, \tag{36}$$

其中 $\xi = 1/(r\Delta\varphi)$ $\eta = 1/\Delta r$，$v_\mathrm{frame} = \Omega_\mathrm{K}(r_\mathrm{p})r$是旋转参考系的方位速度。按照 FARGO3D 的实现，我们定义 CFL 参数 $\beta = 0.44$。行星引起的旋转速度 v_p 为

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{Gm_\mathrm{p}}{s}}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}, \tag{37}$$

其中 $s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mathrm{p}|$ 和 $\sigma = R_\mathrm{H}/2$。此处，开普勒速度乘以指数截断，使旋转效应局限于局部。

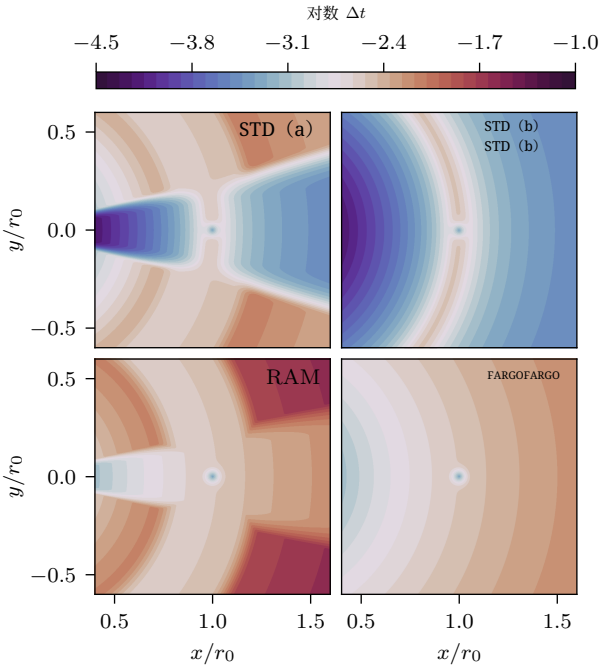

图 4. 使用公式(36)计算非均匀网格（左图）和均匀网格（右图）上的时间步长，分辨率为 180 个网格单元/$R_{\rm H}$ 在行星位置处 (x, y) =(1,0)。上图显示 STD 允许的时间步长，下图显示 RAM 或 FARGO 允许的时间步长。

式 (36) 包含盘的整体速度 $v_{\rm K} - v_{\rm frame}$ 以及行星诱导的速度 $v_{\rm p}$ 的贡献。因此，对于给定的网格，它可以估算 STD 的 Δt 。要获得 RAM 或 FARGO 允许的时间步长，我们令 $v_{\rm K} - v_{\rm frame} = 0$。此外，令 $v_{\rm p} = 0$ 后，可以计算 RAM 可能实现的最大加速比。图 4 展示了将式 (36) 应用于非均匀网格（左图）和均匀网格（右图）的结果，每个方位角有 180 个网格单元/$R_{\rm H}$。对于每种网格，上下两幅图分别展示了 STD 和 RAM 或 FARGO 在包含行星及内边界的区域内所允许的时间步长。由于 $c_{\rm s}$ 向内增大，而单元尺寸减小（参见图 3），Δt 朝内边界方向减小。此外，在非均匀网格中，存在一个方位角带，其方位角方向的尺寸也会随着 r 减小而减小，因此 Δt 可能会变得更加严格。这一效应对 STD 尤为显著，因为它还包含整体速度 $v_{\rm K} - v_{\rm frame}$ 的贡献，而该速度会随着 r 减小而迅速增大。另一个显著特征是，在 $(x, y) = (r_0, 0)$ 周围的高分辨率区域内，行星诱导的高旋转速度导致 Δt 很小。该速度是否会主导模拟的时间步长，完全取决于内边界的位置（内边界越靠近中心恒星，时间步长越小）。使用 RAM 时，由于没有与整体速度成正比的项，Δt 几乎处处都可以更大，唯独在行星轨道处例外，因为按构造，整体速度在该处为零。因此，在对于 RAM，限制 Δt 的项与 $c_{\rm s}$ 和 $v_{\rm p}$有关。前者可能会限制 Δt ，因为 c_s 向内侧逐渐增大，同时那里的单元尺寸也较小；后者则可能由于行星附近单元尺寸较小且速度较大而限制 Δt 。对于均匀网格，我们还计算了 FARGO 和 STD 的 Δt。该网格全局允许的时间步长与非均匀网格情况下得到的结果几乎无法区分。还观察到了 Δt 与 r之间相同的依赖关系。还值得注意的是，对于这两种网格，如果进一步增大 α 或提高分辨率，黏度可能会显著限制 Δt 。

现在报告在非均匀网格上，有行星和无行星情况下 RAM 和 STD 所允许的最大 Δt 。对于有行星的 STD，最大时间步长为$\Delta t_{\rm STD} = 5.7 \times 10^{-5}\Omega_0^{-1}$；而 RAM 的最大时间步长为 $\Delta t_{\rm RAM} = 2.9 \times 10^{-4}\Omega_0^{-1}$。这表明 RAM 允许的时间步长是 STD 的 ~ 5 倍。如果在此计算中不考虑行星，STD 的最大时间步长为 $\Delta t_{\rm STD,np} = 5.7 \times 10^{-5}\Omega_0^{-1}$，而 RAM 为 $\Delta t_{\rm RAM,np} = 7.6 \times 10^{-4}\Omega_0^{-1}$，是 STD 的 ~ 13 倍。

最后，考虑均匀网格时，要达到相同的 180 cells/$R_{\rm H}$ 分辨率，所需网格单元数是非均匀网格的 16 倍；在方位角和半径方向上，网格单元数分别要多 8 倍和 2 倍。鉴于 RAM 和 FARGO 产生的时间步长相同，在非均匀网格上运行 RAM 比在均匀网格上运行 FARGO 快 16 倍。将非均匀网格上的 RAM 与均匀网格上的 STD 相比，在共转参考系中，RAM 的速度可比 STD 快 $\sim 80 - 208$ 倍，在非共转参考系中甚至更快。

4.2.2. 模拟结果

在大尺度上，采用不同方法/分辨率得到的特征彼此无法区分。图5展示了采用 RAM 对流、网格分辨率为 180 网格单元/ Σ的模拟中，表面密度$R_{\rm H}$。图6展示了行星运行一周后，采用 RAM（上排）、FARGO（中排）以及在非均匀区域中采用 STD（下排）的模拟快照 Σ ： 网格分辨率为 45 网格单元/$R_{\rm H}$ （左列）和 180 网格单元/$R_{\rm H}$ （中列）。每个面板都放大了螺旋结构形成的行星周围区域。此外，最右列的面板绘出了沿放大图中黑线的剖面，展示不同分辨率下的结果（低/高分辨率分别用蓝色/橙色曲线表示）。

当我们观察行星周围区域内部时，低分辨率和高分辨率运行结果之间才会出现显著差异。希尔半径内的环境密度以及螺旋结构的密度对比度受到的影响最大。低分辨率运行会受到更大的截断误差和数值扩散影响。这些误差会使 $R_{\rm H}$ 内的环境密度增加，并使螺旋结构变得平滑。将低分辨率的 FARGO、RAM 和 STD 与低分辨率和高分辨率结果进行比较时，可以观察到这一点（最右侧面板中的蓝色曲线）。我们注意到，STD 在行星周围区域内较强的数值扩散并非源于整体速度，因为在所采用的共转参考系中，该速度很小。因此，我们得出结论：STD 较小的时间步长，以及为将解推进至最终积分时间而需要的相应更多插值/重构，是行星附近数值扩散的主要来源。值得注意的是，非均匀网格上的 RAM 能够重现使用 FARGO 获得的尖锐结构。然而，非均匀网格所使用的网格点数量比 FARGO 少十六倍，在保持相同精度水平的同时显著降低了计算成本。

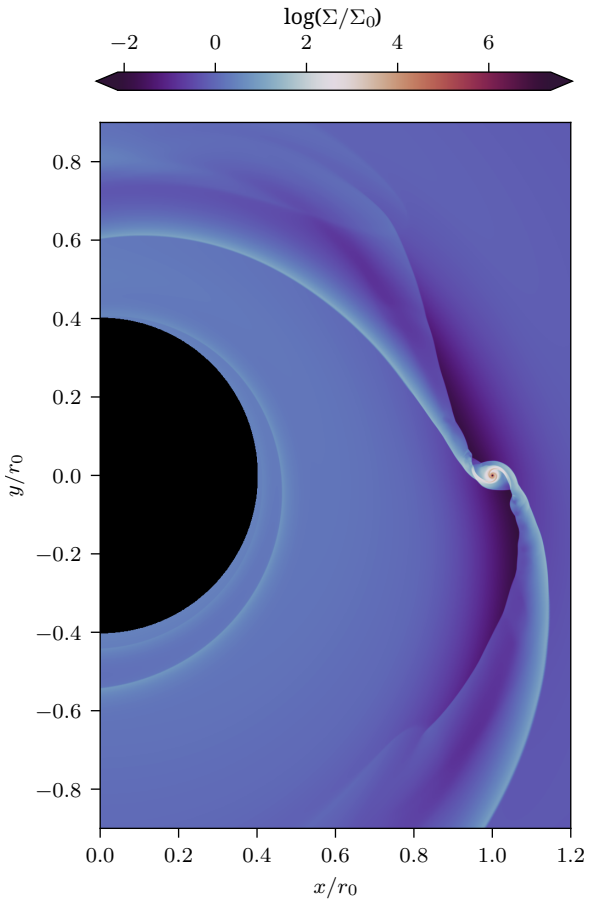

图5. RAM 方法的二维全局模拟快照，网格分辨率为 180 个网格单元/$R_{\rm H}$。非均匀网格能够分辨行星附近的小尺度扰动，以及在盘中传播的螺旋尾迹。图中区域的放大版本见图6。

行星区域内的数值扩散并非源于整体速度，因为在所采用的共转参考系中，该速度很小。因此，我们得出结论：STD 较小的时间步长，以及为将解推进至最终积分时间而需要的相应更多插值/重构，是行星附近数值扩散的主要来源。值得注意的是，非均匀网格上的 RAM 能够重现使用 FARGO 获得的尖锐结构。然而，非均匀网格所使用的网格点数量比 FARGO 少十六倍，在保持相同精度水平的同时显著降低了计算成本。

现在，我们报告高分辨率模拟（网格单元数为 180 个/$R_{\rm H}$ ）中不同网格下各方法所需时间步长的测量结果；对于分辨率较低的其他模拟，得到的结果也类似。我们发现 $\Delta t_{\rm STD} = 5.7 \times 10^{-5} \Omega_0^{-1}$和 $\Delta t_{\rm RAM} = 3.87 \times 10^{-4} \Omega_0^{-1}$。尽管模型经过简化，这些数值仍与第4.2.1节所述的估算高度吻合。理想情况下，方法之间的相对加速比为比值 $\Delta t_{\rm RAM}/\Delta t_{\rm STD} \simeq 6.9$，但 RAM 会引入相较于 STD 的额外开销，这是由于速度分裂（见第1节）以及平移剖面所需的额外计算（见第3节）。采用快速索引计算（见第3.2.1节）后，我们在测试中发现，这一开销为 $\sim$ 20%。因此，实际加速比为 $\Delta t_{\rm RAM}/\Delta t_{\rm STD} \times 0.8 \simeq 5.5$。请注意，FARGO 也会产生类似的开销，但要达到 180 个网格单元/$R_{\rm H}$的分辨率，其方位角方向所需的网格单元数是 RAM 的八倍。由于我们发现 $\Delta t_{\rm RAM} \simeq \Delta t_{\rm FARGO}$，因此可以得出结论：在两种方法采用相同径向间距的情况下，FARGO 在非均匀网格上的计算开销是 RAM 的八倍。然而，在第4.2节所示的均匀网格中，半径和方位角方向的网格单元数分别是非均匀网格的两倍和八倍，因此 FARGO 的计算开销是非均匀网格上 RAM 的十六倍。

本节研究的问题展示了 RAM 在以较低计算成本研究行星附近动力学方面的主要优势。我们的分析得出两项主要结果。首先，使用 FARGO 在方位角均匀网格上模拟该问题的标准方法计算成本高。有意思的是，一种成本较低的方法是在非均匀网格（径向和方位角方向均非均匀）上使用 STD。其次，我们的结果清楚地表明，非均匀网格与 RAM 结合使用具有优势：其截断误差更小，且计算成本显著低于 STD。

5. 总结与结论

在这项工作中，我们开发了 RAM 来求解平流方程。对于整体速度较大的问题，与标准迎风显式平流算法相比，该方法允许采用更大的时间步长，并具有更小的截断误差。我们的方法基于算子分裂、守恒插值和单调重构。我们提供了 PLM（van Leer 1974年）和 PPM（Colella 和 Woodward 1984年）公式来实现 RAM，从而得到一种可达到一阶或二阶精度的方法，不过也可以使用其他重构方法。RAM 适用于任意网格；此外，我们还提供了一种通过网格密度函数生成网格的方案，以加快插值。它可以通过维度分裂应用于多维问题。在这种情况下，需要加入由局部剪切引起的额外时间步长限制（见Masset 2000；Ben´ıtez- Llambay 和 Masset 2016年）。RAM 的高阶（时间）实现需要额外的源项（见Shariff& Wray 2018）。

我们将 RAM 实现于公开代码 FARGO3D 中，并对其进行了测试。通过平流陡峭和光滑的一维剖面，我们测量了该方法在采用不同重构时的收敛率，并将其与 FARGO 以及均匀和非均匀网格上的标准迎风平流进行了比较。对于所有方法，光滑剖面的收敛速度都快于陡峭剖面。此外，这项测试表明，在均匀网格上，FARGO 和 RAM 得出的结果完全相同。在非均匀网格上，RAM 的收敛速度.....

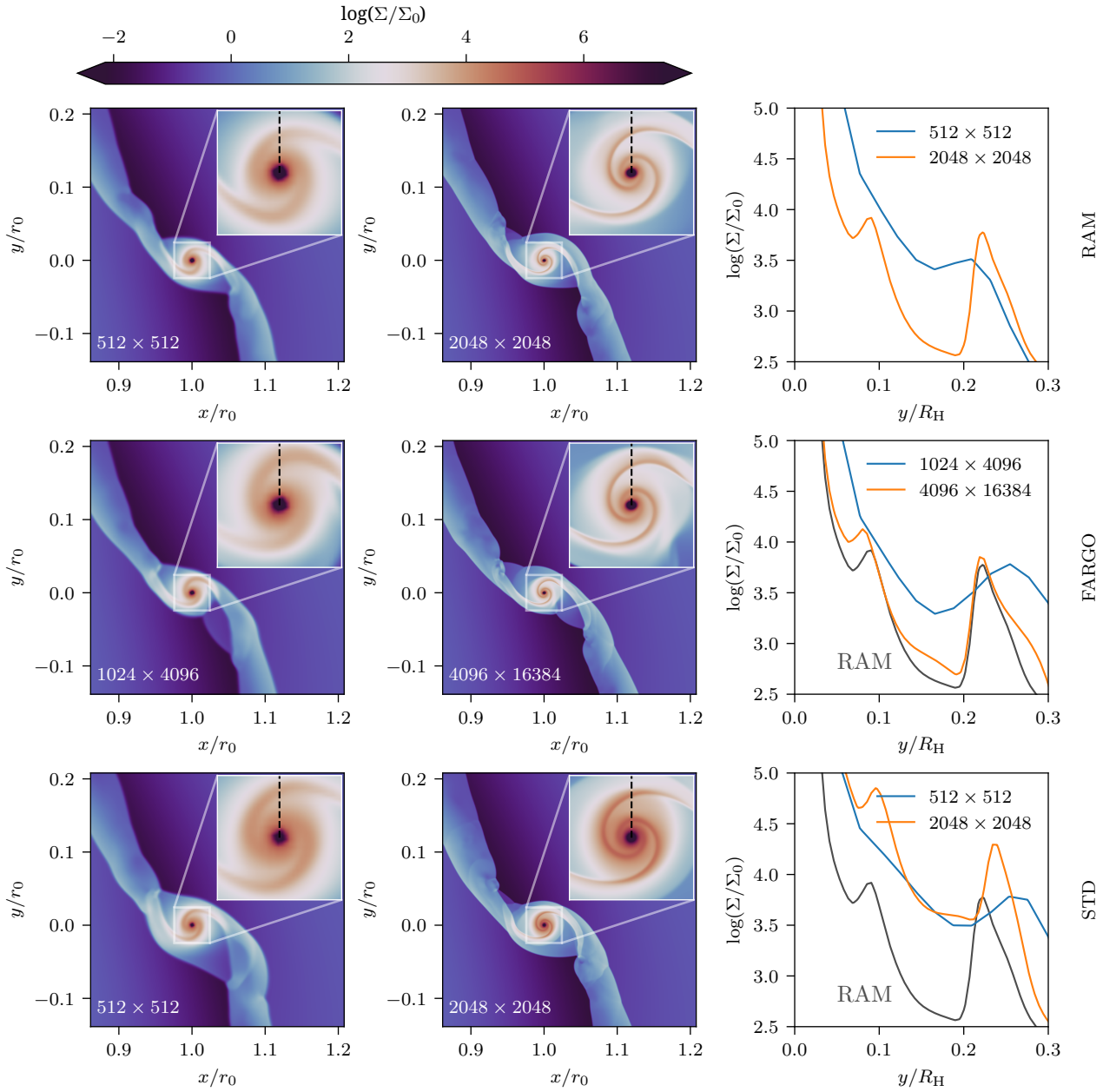

图6. 运行一个轨道后的表面密度快照：采用 45 个网格单元/$R_{\rm H}$（左侧面板）和 180 个网格单元/$R_{\rm H}$（中间面板）的模拟结果，分别展示 RAM（上方面板）、采用均匀网格的 FARGO（中间面板）以及采用非均匀区域的 STD（下方面板）；对于每种分辨率，我们还在行星周围区域内加入了一个放大面板（模拟的全局尺度见图 5）。最右侧面板显示了沿每种分辨率放大图中实线所作的表面密度剖面（蓝色/橙色曲线分别对应低/高分辨率模拟）。为便于比较各种方法，我们用灰色实线绘出高分辨率 RAM 模拟结果。STD 明显受到较强数值扩散的影响，其主要作用是抹平螺旋结构，并提高行星周围区域内的环境密度。由于行星轨道处的整体速度为零，STD 中额外的扩散只能归因于其采用了更小的时间步长，以及由此产生的更多流体力学步数（这意味着在达到输出时间之前需要进行更多次插值/重构）。比较 RAM 和 FARGO 的行星周围区域时，我们发现两种方法的结果高度吻合，但 RAM 的速度快了 $\gtrsim 10$ 倍。

朝着正确解推进，同时比标准平流更省计算且更精确。

受行星与盘相互作用这一长期存在的问题启发，我们还在嵌入行星希尔半径范围内具有极高分辨率的二维极坐标盘中测试了 RAM。对于这一问题，我们发现，RAM 的速度是非均匀网格上标准平流的 ~ 5.5倍。将非均匀网格上的 RAM 与均匀网格上的 FARGO 进行比较（两者在希尔半径范围内具有相同的有效分辨率）时，我们发现 RAM 所需的计算成本为 FARGO 的$1/16^{th}$ 。我们强调，RAM 带来的加速或计算成本降低取决于具体问题。由于 RAM 和 FARGO 允许使用相同的时间步长（在有效分辨率相同的情况下），所需计算资源的减少幅度与所用网格点数量之比成正比（即计算开销）。

尽管本文采用了由网格密度函数生成的网格，但 RAM 也可应用于任意网格，包括嵌套网格，或用于自适应网格细化框架。不同网格生成方法各自的实用性，显然取决于具体问题。

我们得出结论：对于由较大整体速度主导的问题，RAM 能显著降低流体力学计算的计算成本，同时减少截断误差。结合该方法可应用于非均匀网格这一特点，流体力学计算的数值成本可降低一个数量级以上。具体降幅取决于整体速度。该方法可能对若干涉及所谓盘—卫星问题的研究领域产生影响。特别是，对于既需要全局盘，又要求在行星希尔半径和行星轨道范围内具有高分辨率的问题，该方法可用于加速行星—盘相互作用的二维和三维计算。

我们感谢匿名审稿人，其意见帮助我们改进了这篇稿件。我们感谢 Fr´ed´eric Masset 对稿件早期版本进行细致审阅。P. B. L. 感谢 ANID、QUIMAL 基金 ASTRO21-0039 以及 FONDECYT 项目 1231205 的支持。L. K. 和 K. M. K 感谢 Heising-Simons 51 Pegasi b 博士后奖学金及 TCAN 资助项目 80NSSC19K0639 的支持。X. S. R. 感谢 ANID、千年科学倡议 ICN12 009 的支持。

参考文献

Ben´ıtez-Llambay，P.，& Masset，F. S. 2016年，ApJS，223，11，doi：10.3847/0067-0049/223/1/11Colella，P.，& Sekora，M. D. 2008年，《计算物理学杂志》，227，7069，doi：10.1016/j.jcp.2008.03.034Colella，P.，& Woodward，P. R. 1984年，《计算物理学杂志》，54，174，doi：10.1016/0021-9991(84)90143-8Duffell，P. C.2016年，ApJS，226，2，doi：10.3847/0067-0049/226/1/2Felker，K. G.，& Stone，J. M. 2018年，《计算物理学杂志》，375，1365，doi：10.1016/j.jcp.2018.08.025Hugger，J. 1993年，《计算方法与应用力学及工程》，109，17，doi：https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90223-KJohansen，A.，Youdin，A.，& Klahr，H. 2009年，ApJ，697，1269，doi：10.1088/0004-637X/697/2/1269Johnson，B. M.，Guan，X.，& Gammie，C. F. 2008年，ApJS，177，373，doi：10.1086/586707Keiner，J.，Kunis，S.，& Potts，D. 2009年，ACM数学软件汇刊，36，doi：10.1145/1555386.1555388Lufkin，E.A.，& Hawley，J. F. 1993年，ApJS，88，569，doi：10.1086/191833

Lyra, W., McNally, C. P., Heinemann, T. 和 Masset, F. 2017，《AJ》，154，146，doi：10.3847/1538-3881/aa8811Masset, F. 2000，《A&AS》，141，165，doi：10.1051/aas:2000116Mignone, A. 2014，《计算物理学杂志》，270，784，doi：10.1016/j.jcp.2014.04.001Mignone, A., Flock, M., Stute, M., Kolb, S. M. 和 Muscianisi, G. 2012，《A&A》，545，A152，doi：10.1051/0004-6361/201219557Robertson, B. E., Kravtsov, A. V., Gnedin, N. Y., Abel, T. 和 Rudd, D. H. 2010，《MNRAS》，401，2463，doi：10.1111/j.1365-2966.2009.15823.xShakura, N. I. 和 Sunyaev, R. A. 1973，《A&A》，24，337；Shariff, K. 和 Wray, A. 2018，《ApJS》，238，12，doi：10.3847/1538-4365/aad907Springel, V. 2010，《MNRAS》，401，791，doi：10.1111/j.1365-2966.2009.15715.xStone, J. M. 和 Gardiner, T. A. 2010，《ApJS》，189，142，doi：10.1088/0067-0049/189/1/142Stone, J. M. 和 Norman, M. L. 1992，《ApJS》，80，753，doi：10.1086/191680van Leer, B. 1974，《计算物理学杂志》，14，361，doi：https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90019-9—. 1977，《计算物理学杂志》，23，276，doi：10.1016/0021-9991(77)90095-X

附录

A. PPM

A.1. *PPM* 方法的界面插值

遵循 Colella 和 Woodward (1984年) $\langle Q\rangle_{i+\frac{1}{2}}$ 计算如下

$$\langle Q\rangle_{i+\frac{1}{2}} = \langle Q\rangle_i + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}\left(\langle Q\rangle_{i+1} - \langle Q\rangle_i\right) + \frac{\left(\tilde{\omega}_1(\langle Q\rangle_{i+1} - \langle Q\rangle_i) + \tilde{\omega}_2\delta\langle Q\rangle_{i+1} + \tilde{\omega}_3\delta\langle Q\rangle_i\right)}{\sum_{k=-1}^{2}\Delta x_{i+k}} \tag{A1}$$

with

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 &= \frac{2\Delta x_{i+1}\Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}\left[\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - \frac{\Delta x_{i+2}\Delta x_{i+1}}{2\Delta x_{i+1} + \Delta x_i}\right] \\
\tilde{\omega}_2 &= -\Delta x_i\frac{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}{2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \\
\tilde{\omega}_3 &= \Delta x_{i+1}\frac{\Delta x_{i+1}\Delta x_{i+2}}{\Delta x_i + 2\Delta x_{i+1}}
\end{aligned} \tag{A2}$$

and

$$\delta\langle Q\rangle_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_{i+1}}\left(\frac{2\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}\left(\langle Q\rangle_{i+1} - \langle Q\rangle_i\right) + \frac{\Delta x_i + 2\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}\left(\langle Q\rangle_i - \langle Q\rangle_{i-1}\right)\right) \tag{A3}$$

A.2. *PPM Monotonicity constraint*

为施加单调性约束，首先在计算 $\langle Q\rangle_{i+\frac{1}{2}}$ 中修改 $\delta\langle Q\rangle_i$，使其成为...

$$\delta\langle Q\rangle_i = \begin{cases} \min\left(|\delta\langle Q\rangle_i|, 2|\langle Q\rangle_{i+1} - \langle Q\rangle_i|, 2|\langle Q\rangle_i - \langle Q\rangle_{i-1}|\right) & \text{if } \left(\langle Q\rangle_{i+1} - \langle Q\rangle_i\right)\left(\langle Q\rangle_i - \langle Q\rangle_{i-1}\right) > 0 \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}.$$

在更新 $\langle Q\rangle_{i+\frac{1}{2}}$ 后，得到系数 $Q_{\mathrm{R,i}}$ 和 $Q_{\mathrm{L,i}}$，其表达式为

$$Q_{\mathrm{R,i}} = Q_{\mathrm{L,i}} = \langle Q\rangle_i \qquad \text{if } \left(Q_{\mathrm{R,i}} - \langle Q\rangle_i\right)\left(\langle Q\rangle_i - Q_{\mathrm{L,i}}\right) \le 0 \tag{A4}$$

$$Q_{\mathrm{L,i}} = 3\langle Q\rangle_i - 2Q_{\mathrm{R,i}} \qquad \text{if } \left(Q_{\mathrm{R,i}} - Q_{\mathrm{L,i}}\right)Q_{a,i} > \frac{1}{6}\left(Q_{\mathrm{R,i}} - Q_{\mathrm{L,i}}\right)^2 \tag{A5}$$

$$Q_{\mathrm{R,i}} = 3\langle Q\rangle_i - 2Q_{\mathrm{L,i}} \qquad \text{if } -\frac{1}{6}\left(Q_{\mathrm{R,i}} - \langle Q_{\mathrm{L,i}}\right)^2 > \left(Q_{\mathrm{R,i}} - Q_{\mathrm{L,i}}\right)Q_{a,i} \tag{A6}$$

其中 $Q_{a,i} = \langle Q\rangle_i - \frac{1}{2}(Q_{L,i} + Q_{R,i})$。

B. MESH-DENSITY FUNCTIONS

B.1. 周期性凸起

在本文中，我们将分析限制在以下函数范围内： F 其积分具有已知的解析表达式，并使用二分法求解方程（27），或者在容易求得逆函数表达式时使用该表达式。

我们将函数 $\psi(s)$ 定义为

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 + c & |s| \le a \\ 1 + c\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{|s| - a}{b - a}\right) & a < |s| < b \\ 1 & |s| \ge b \end{cases} \tag{B7}$$

与 $x_{\min} \le s \le x_{\max}$。为满足公式（25）给出的条件，我们将 $\psi(s)$ 归一化为 I_ψ，该值是在区域 $[x_{\max}, x_{\min}]$上对密度函数积分后得到的，即

$$I_\psi = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\psi(s)ds = (x_{\max} - x_{\min}) + c\,(a + b)\,. \tag{B8}$$

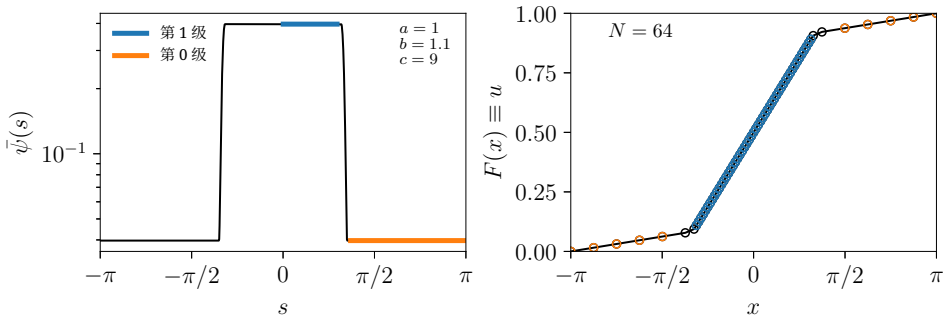

图 7. 网格密度函数示例。左图对应周期性隆起函数，其中 $a = 1.0$， $b = 1.1$ 和 $c = 9$。右图绘制了累积函数 $F(x)$ 关于非均匀坐标 x 的函数曲线，该网格包含 $N = 64$ 个网格点。此网格用于第4.1节所述的测试。

因此，所需的网格密度函数为

$$\bar{\psi} = I_{\psi}^{-1}\psi. \tag{B9}$$

此函数生成一个具有两个均匀分辨率级别的网格，并在两个级别之间实现平滑过渡。参数 a 的值决定最高分辨率级别的范围。参数 b 决定两个级别之间的过渡位置，因此也决定 $|b| > |a|$。过渡区间的范围由 $b - a$ 给出。参数 c 的值决定两个级别之间的相对分辨率。

对于这种情况，累积 $F(x) = \int_{-\pi}^{x} \bar{\psi}(s)ds$，对应于坐标 $u(x)$ 的定义，即：

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - f(-\pi) & x \le -b \\ g^{+}(x) - g^{+}(-b) + F(-b) & -b < x \le -a \\ h(x) - h(-a) + F(-a) & -a < x \le a \\ g^{-}(x) - g^{-}(a) + F(a) & a < x \le b \\ f(x) - f(b) + F(b) & x > b \end{cases} \tag{B10}$$

其中函数 f、$g^{\pm}$和 h 定义为

$$f(x) = \frac{x}{I}, \tag{B11}$$

$$g^{\pm}(x) = \frac{(2+c)}{2} f(x) - \frac{c\,(b-a)}{2\pi I} \sin\left(\pi \frac{x \pm a}{a-b}\right), \tag{B12}$$

$$h(x) = (1+c)\ f(x), \tag{B13}$$

在图7 中，我们绘制了一个网格密度函数示例，其中 $s \in [-\pi, \pi]$。参数经过定义，使两个层级之间具有 $\sim 5\times$分辨率对比。在图7 的右图中，我们给出了具有$N = 64$ 个点的网格的累积分布。最后需要指出的是，这里提出的分段密度函数可以进行修改，从而支持具有连续过渡的任意分辨率层级。

B.2. *Radial bump*

在第 n4.2 节中，我们使用了以 $s_0 = 1$ 为中心、沿径向定义的网格密度函数，并定义了一个 s

$$\psi(s) = \begin{cases} 1/s + c & |s - s_0| \le a \\ 1/s + c\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|s-s_0| - a}{b-a}\right) & a < |s - s_0| < b \\ 1/s & |s - s_0| \ge b \end{cases} \tag{B14}$$

其中 $I_{\psi} = \log(x_{\max}) - \log(x_{\min}) + c(a+b)$ (见公式B8）。注意，当参数 $c = 0$ 时，我们得到对数均匀网格密度。

C. 非均匀网格中的动量和质量守恒

这里我们介绍对标准算法所做的修改。该标准算法见（Ben´ıtez-Llambay & Masset 2016年），这些修改可使非均匀网格上的质量和动量守恒达到机器精度。考虑一个坐标为 x, y, z 的三维笛卡尔网格，其对应的单元中心索引为 i, j, k。动量（沿 y方向）定义为

$$\Pi_{y,ijk} = \frac{1}{2}\rho_{ijk}\left(v_{y,ij-\frac{1}{2}k} + v_{y,ij+\frac{1}{2}k}\right), \tag{C15}$$

其中$v_{y,\ j-\frac{1}{2}}$是单元界面处沿 y方向的速度，而 ρ_j 是单元中心处的密度。网格单元的质量为

$$M_{ijk} = \rho_{ijk}V_{ijk} \tag{C16}$$

其中 V_{ijk} 是网格单元的体积。动量守恒和质量守恒意味着$\sum_j \Pi^{n+1}_{y,\ ijk}V_{ijk} = \sum_j \Pi^{n}_{y,\ ijk}V_{ijk}$ 以及 $\sum_k\sum_j\sum_i M^{n+1}_{ijk} = \sum_k\sum_j\sum_i M^{n}_{ijk}$，分别如此。密度和速度的更新必须满足这些守恒条件。因此，我们重新审视 Ben´ıtez-Llambay & Masset(2016年)。中定义的源项和输运过程中的更新。

C.1. *Source step*

考虑沿 y方向的一维压力梯度。速度更新为

$$v^{n+s}_{ij-\frac{1}{2}k} = v^{n}_{ij-\frac{1}{2}k} - \frac{\Delta t}{\langle\rho^n\rangle_{ij-\frac{1}{2}k}}\frac{P^n_{ijk} - P^n_{ij-1k}}{y_j - y_{j-1}} \tag{C17}$$

其中 $n+s$ 表示从步骤 n 到 $\langle\rho^n\rangle_{ij-\frac{1}{2}k}$的时间更新，$\langle\rho^n\rangle_{ij-\frac{1}{2}k}$是空间平均密度（见Ben´ıtez-Llambay & Masset 2016年）。可以证明，如果平均密度定义为，那么在均匀网格和非均匀网格上，动量均守恒。

$$\langle\rho^n\rangle_{ij-\frac{1}{2}k} = \frac{1}{2}\frac{\rho^n_{ijk}\left(y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}\right) + \rho^n_{ij-1k}\left(y_{j-\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{3}{2}}\right)}{y_j - y_{j-1}} \tag{C18}$$

柱坐标和球坐标下也同样成立。请注意，在人工黏性计算的子步骤2中也需要进行相同的更新。

C.2. *Transport step*

输运步骤的一致性对于质量和动量守恒至关重要。在非均匀网格中，Ben´ıtez-Llambay&Masset（2016年）中的式（50）必须更新为

$$v^{n+1}_{y,ijk} = \frac{\Pi^{-}_{y,ijk}V_{ijk} + \Pi^{+}_{y,ij-1k}V_{ij-1k}}{\rho_{ijk}V_{ijk} + \rho_{ij-1k}V_{ij-1k}}. \tag{C19}$$

对于 v_x， v_z也必须进行相同的处理。