arXiv:2305.05365v1 [math.AC] 9 May 2023

G二部图的广义二项式边理想

Yi-Huang Shen 和 Guangjun Zhu*

Abstract. Bolognini 等人已经对二项式边理想为 Cohen–Macaulay 的连通二分图进行了分类。在本文中，我们计算这些图的广义二项式边理想的深度、Castelnuovo–Mumford 正则度和维数。

1. Introduction

设 m 和 n 为两个正整数。按照惯例，记号 $[m]$ 表示集合 $\{1,2,\dots,m\}$。设 $S=\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]:=\mathbb{K}[x_{ij}\colon i\in[m],j\in[n]]$ 为域 $\mathbb{K}$ 上关于 $m\times n$ 个变量的多项式环。在 [9], , Ene 等人引入了图对的二项式边理想。具体而言，设 G_1 和 G_2 分别为顶点集 $[m]$ 和 $[n]$ 上的简单图。假设 $e=\{i,j\}\in E(G_1)$ 和 $f=\{t,l\}\in E(G_2)$ 是两条边，且 $i<j$ 和 $k<l$。那么，可以将一个二阶子式 $p_{(e,f)}=[i,j\,|\,t,l]:=x_{it}x_{jl}-x_{il}x_{jt}$ 赋予边对 (e,f)。图对 (G_1,G_2) 的二项式边理想定义为

$$\mathcal{J}_{G_1,G_2}:=(p_{(e,f)}:e\in E(G_1),f\in E(G_2))$$

在 S中。这是对 [10,18] 中经典二项式边理想的推广，条件是 G_1 和G_2 之一为完全图 K_2。与此同时，[8] 中由相邻子式生成的理想，结果是两条线图的二项式边理想。

人们已开展大量研究，以理解 $\mathcal{J}_{G_1,\,G_2}$ 的代数性质与 G_1 和 G_2的组合性质之间的联系。特别是， G_1 和 G_2 的组合不变量可以与$\mathcal{J}_{G_1,\,G_2}$的同调不变量相关联，例如深度、Betti 数和 Castelnuovo–Mumford 正则度（简称正则性），见 [9, 20]。然而，总体而言，这些理想的代数性质仍有许多未解之处。对于具有良好代数性质的 $S/\mathcal{J}_{G_1,\,G_2}$，一个实用的经验法则是， G_1 和 G_2 之一为完全图。例如， [9, 中的定理 1.2、推论 2.2 和命题 4.1] 证明，这是 $\mathcal{J}_{G_1,\,G_2}$ 为根理想的一个等价条件。因此，$\mathcal{J}_{G_1,\,G_2}$ 是素理想，当且仅当 G_1 和 G_2 是完全图。此外，$\mathcal{J}_{G_1,\,G_2}$ 无混合的条件是，其中一个图为完全图，而另一个图对于其所有具有割点性质的子集都满足某些数值条件。 [2, 中的定理 3.1] 和 [20, 中的定理 1 和 10]也证明了纳入完全图的必要性。

令 K_m 为一个具有 m 个顶点的完全图， G 为一个简单图。那么，$\mathcal{J}_{K_m,\,G}$ 是与 G相关联的广义二项式边理想，Rauh 曾在[19] 中引入它来研究条件独立理想。受二项式边理想相关进展的启发，研究者开始转向广义二项式边理想的研究。例如，在 [7], Chaudhry 和 Irfan 研究了连通广义块图的广义二项式边理想的深度和正则性。在 [17], Kumar 证明，当 G 是一个具有 n 个顶点的连通图时，$S/\mathcal{J}_{K_m,\,G}$ 的正则性不超过 $n-1$。此外，他还证明，若 $m\geq n$，则 $S/\mathcal{J}_{K_m,\,G}$ 的正则性恰为 $n-1$；若 $m<n$，则 $S/\mathcal{J}_{K_m,\,G}$ 的正则性不小于 $\max\{m-1,\ell(G)\}$，其中 $\ell(G)$ 是 G中最长诱导路径的长度。在 [16], Katsabekis 研究了 $\mathcal{J}_{K_m,\,G}$的上同调维数。对于连通图 G，他发现 $\mathcal{J}_{K_m,\,G}$ 是一个上同调完全交

* 通讯作者。2020 *Mathematics Subject Classification*。主要分类：13C13、13C15；次要分类：05E40、13D02、13F20。关键词：正则性、维数、深度、广义二项式边理想、二分图、扇图。

当 $m \geq 3$ 当且仅当 G 是完全图且 char($\mathbb{K}$) > 0时。在这种情况下，$\mathcal{J}_{K_m,\ G}$ 是 Cohen–Macaulay。在 [1], Amata 等人刻画了与非完全幂圈相关联的广义二项式边理想的无混合性。不过，迄今为止，人们对广义二项式边理想的代数性质仍知之甚少。

回顾一下，在 [3] Bolognini 等人对二部图的 Cohen–Macaulay 二项式边理想进行了分类，并用图论术语给出了显式的递归构造。作为基本构件，他们引入了一族二分图 F_p ，其二项式边理想是 Cohen–Macaulay 的。他们还引入了一族非二分图 $F_k^W(K_n)$，称为 k-扇图，其二项式边理想同样是 Cohen–Macaulay 的。在一项最重要的结果中，他们证明，若 G是连通二分图，则 J_G 是 Cohen–Macaulay 的当且仅当 $G = G_1 * \cdots * G_s$，其中 $G_i = F_p$或 $G_i = F_{p_1} \circ \cdots \circ F_{p_t}$，对某个 $p \geq 1$和 $p_j \geq 3$成立；操作 $*$ 和 $\circ$的定义见第 2 节。随后，在 [13], Jayanthan 等人通过研究正则性在操作 $\circ$下的变化规律，考察了这些图的二项式边理想的正则性。本文主要关注与这些图相关联的广义二项式边理想的深度和 Castelnuovo–Mumford 正则度。遗憾的是， $*$ 操作不像在 [13]中那样具有良好的性质。为弥补这一点，我们加入了对局部上同调模的计算，并对相关图反复进行粘合与删除操作。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们回顾后文将用到的一些基本定义和术语。在第 3 节和第 4 节中，我们分别研究扇图 $F_k^W(K_n)$ 和二分图 F_p 的广义二项式边理想的维数、深度和正则性。随后，我们通过 $*$ 和 $\circ$ 运算将这两类图粘合起来，从而引入一类简单图。在第 5、6 和第7 节中，我们分别给出了该类图的广义二项式边理想的深度、正则性和维数的一些公式。

2. Preliminaries

本节汇集了本文中将要用到的定义和基本事实。更多细节请参见 [4, 13, 15]。

2.1. 正则性与深度。下文中，设 S_+ 是标准分次代数 S 的唯一分次极大理想。关于 S_+ 的有限生成分次 S-模 M 的局部上同调模记为 $H^i_{S_+}(M)$，其中 $i \in \mathbb{Z}$。

定义 2.1. 设 M 是一个有限生成的分次 S-模。

(a) M 的深度定义为

$$\operatorname{depth}(M) := \min\{i : H^i_{S_+}(M) \neq 0\}.$$

(b) 对于 $i = 0$，.....，dim(M)， M 的 i^{th} a-不变量定义为

$$a_i(M) := \max\{t : (H^i_{S_+}(M))_t \neq 0\}$$

约定 $\max \emptyset = -\infty$】【。

(c) M 的 Castelnuovo–Mumford 正则度定义为

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{a_i(M) + i : 0 \leq i \leq \dim(M)\}.$$

以下引理常用于计算模的深度和正则性。特别是，由于引理2.2 中的结论众所周知，因此本文将隐式地使用这些结论。

引理 2.2. 设 M、N 是两个有限生成的分次 S-模。那么，depth($M \oplus N$) =min{depth(M), depth(N)}，且 reg($M \oplus N$) =max{reg(M), reg(N)}。

引理 2.3（[11, 引理 2.1 和 3.1]）。设 $0 \to M \to N \to P \to 0$ 是有限生成分次 S-模的短正合列。

(a) 有深度(M) $\geq$min{深度(N), 深度(P) $+1$}。当深度(N) $\neq$深度(P)时，等式成立。(b) 还有正则性(M) $\leq$max{正则性(N), 正则性(P)+1}。当正则性(N) $\neq$正则性(P)时，等式成立。

2.2. 简单图的概念。设 G 是一个顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G)$ 的简单图。令 G 表示 $V(G)$ 上的完全图。对于 $V(G)$ 的任意子集 A，令 $G[A]$ 表示 G 在顶点集 A 上的诱导子图，即，对于 i、$j \in A$、$\{i,j\} \in E(G[A])$，当且仅当 $\{i,j\} \in E(G)$ 时成立。同时，我们将 G 在 $V(G) \setminus A$ 上的诱导子图记为 $G \setminus A$。

如果 v 是 G 中的一个顶点，其邻域定义为 $N_G(v) := \{u \in V(G) : \{u,v\} \in E(G)\}$。令 $N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}$。如果基数 $|N_G(v)| = 1$，则称顶点 v 为自由顶点或叶子；否则，称其为内部顶点。为简便起见，我们将使用 $G \setminus v$ 代替 $G \setminus \{v\}$。同时，对于此顶点，令 G_v 表示顶点集为 $V(G)$、边集为$E(G_v) = E(G) \cup \{\{u,w\} : u,w \in N_G(v)\}$ 的图。

令 $c(G)$ 表示 G 的连通分支数。若 v 是 G 的割点，则称顶点 v 具有割点性质，当且仅当 $c(G) < c(G \setminus v)$。令 T 为 $V(G)$ 的一个子集。作为一种记号上的简化，我们也令 $c(T)$ 表示 $G \setminus T$ 的连通分支数。若对于任意 $v \in T$，v 都是诱导子图 $G \setminus (T \setminus \{v\})$ 的割点，则称 T 具有割点性质。置 $\mathcal{C}(G) := \{\emptyset\} \cup \{T : T$ 具有割点性质 $\}$。

最后，如果存在 $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ 的一个分解，将其分为两个不相交子集，使得同一子集中的任意两个顶点在 G 中都不相邻，则称图 G 是二部的。

2.3. 关于广义二项式理想的基本事实。在下文中，我们始终假设 m、$n \geq 2$ 是两个正整数。以下结果是众所周知的。

引理 2.4 ([12, 推论 4])。设 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ 是定义在 $\mathbb{K}$上的不定元矩阵。则 $S = \mathbb{K}[x_{ij}$ 中的理想 $I_t(\boldsymbol{X})$: $i \in [m]$ 和 $j \in [n]]$，由 $\boldsymbol{X}$的所有 $t \times t$子式生成，是完美理想，其高度为 $(m-t+1)(n-t+1)$。特别地，$S/\mathcal{J}_{K_m,\ K_n} = S/I_2(\boldsymbol{X})$ 是 Cohen–Macaulay 的，维数为 $m+n-1$。

设 G 是定义在 $[n]$上的简单图。从现在起，我们将研究其在 $S = \mathbb{K}[x_{ij}$ 中的广义二项式边理想 $\mathcal{J}_{K_m,\ G}$： $i \in [m]$ 和 $j \in [n]]$。当我们想强调该环与图 G的关系时，也将此环记作 S_G。

对于 $[n]$的每个子集 T，我们可以引入理想

$$P_T(K_m, G) := (x_{ij} : (i,j) \in [m] \times T) + \mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G_1}} + \cdots + \mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G_{c(T)}}}$$

在 S中，其中 G_1、$\ldots$、$G_{c(T)}$是 $G \setminus T$的连通分支。由引理2.4可知

$$\begin{aligned}\dim(S/P_T(K_m,G)) &= \sum_{t=1}^{c(T)}(m + |V(\widetilde{G_i})| - 1) = c(T)(m-1) + \sum_{t=1}^{c(T)}|V(\widetilde{G_i})| \\ &= c(T)(m-1) + |V(G)| - |T|. \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathcal{J}_{K_m,G}$ 的极小素理想可以通过这些理想明确描述。

引理 2.5（[19, 定理 7]）。设 G 是一个有限简单图。那么，

$$\mathcal{J}_{K_m,G} = \bigcap_{T\in\mathcal{C}(G)} P_T(K_m,G)$$

是根理想$\mathcal{J}_{K_m,G}$ 的极小初等分解。

本文的理论论证本质上依赖于对以下短正合列的研究。

引理 2.6（[17, 定理 3.2]）。设 G 是一个有限简单图，且 v 是G中的一个内部顶点。则

$$\mathcal{J}_{K_m,G} = \mathcal{J}_{K_m,G_v} \cap ((x_{iv} : i \in [m]) + \mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}).$$

注意，

$$\mathcal{J}_{K_m,G_v} + ((x_{iv} : i \in [m]) + \mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = (x_{iv} : i \in [m]) + \mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}.$$

因此，我们得到如下短正合列：

$$0 \to \frac{S}{\mathcal{J}_{K_m,G}} \to \frac{S}{\mathcal{J}_{K_m,G_v}} \oplus \frac{S}{(x_{iv} : i \in [m]) + \mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}} \to \frac{S}{(x_{iv} : i \in [m]) + \mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}} \to 0,$$

即，

$$0 \to \frac{S_G}{\mathcal{J}_{K_m,G}} \to \frac{S_{G_v}}{\mathcal{J}_{K_m,G_v}} \oplus \frac{S_{G\setminus v}}{\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}} \to \frac{S_{G_v\setminus v}}{\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}} \to 0. \tag{2}$$

最后，我们回顾若干关键结果，以便理解广义二项式边理想的正则性。

引理 2.7 ([20, 命题 8])。设 G 是一个关于 $[n]$ 的图，且 H 是G的一个诱导子图。那么，我们有正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,H}) \leq$ 正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$。

推论 2.8. 设 G 是一个简单图，且 v 是图G的一个内部顶点。那么，

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) + 1, \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\}.$$

证明。注意到 $G_v \setminus v$是 G_v的诱导子图。因此，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) \leq$正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v})$ 由引理 2.7得到。现在，只需将引理 2.3(b) 应用于引理 2中的精确序列(2.6)。□

引理 2.9（[17, 定理 3.6 和 3.7]）。设 G 为连通图。那么 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq |V(G)| - 1$。此外，若 $m \geq |V(G)| \geq 2$，则 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = |V(G)| - 1$。而且，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,K_n}) = \min\{m-1, n-1\}$。

3. Study of fan graphs

为了研究其二项式边理想为 Cohen–Macaulay 的二分图，Bolognini 等人在 [3] 中引入了完全图的扇图，这是一类弦图。在本节中，我们将研究这些图的广义二项式边理想商环的维数、深度和正则性。我们先从 [13] 中重新表述的定义开始。

De定义 3.1（[13, 定义 3.1]）。设 K_n 为顶点集 $[n$ 上的完全图。].

(a) 令 $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ 为 $[n]$的子集。假设对于每个 $i \in [r]$，都有一个新的完全图 K_{a_i}（含有 $a_i > i$）以如下方式附加到 K_n： $V(K_n) \cap V(K_{a_i}) = \{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$。我们称所得的图是通过在集合 U 上向 K_n 添加一个扇而得到的，而 $\{K_{a_1}, \ldots, K_{a_r}\}$ 是该扇在 U 上的分支。

(b) 令 W 为 $[n]$ 的子集，并假设 $W = W_1 \sqcup \cdots \sqcup W_k$ 是 W 的一个划分。令 $F_k^W(K_n)$ 表示由 K_n 在每个 W_i 上添加一个扇所得到的图。所得图 $F_k^W(K_n)$ 称为 K_n 在集合 W 上的 k- 扇图。为便于后文引用，对于每个 $i \in [k]$，我们假设 $\{K_{a_{i,1}}, \ldots, K_{a_{i,r_i}}\}$ 是该扇在 $W_i = \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,r_i}\}$ 上的分支。为方便记号，我们还令 $h_{i,\,j} := a_{i,\,j} - j$。(c) 若扇在 W_i 上的分支 $\{K_{a_{i,1}}, \ldots, K_{a_{i,r_i}}\}$ 满足对每个 $j \in [r_i]$ 都有 $h_{i,\,j} = 1$，则称其为纯分支。此外，如果每个分支都是纯分支，则称 $F_k^W(K_n)$ 为 K_n 在 W 上的 k-纯扇图。(d) 完全图 K_n 可视为一个没有分支的退化扇，即 $k = 0$。

以下结果推广了 [3, 引理 3.2] 的证明中包含的维数公式，适用于 $m = 2$情形。

定理 3.2. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 是一个 k-扇图，且具有 $n \geq 2$。那么，我们有

$$\dim(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m + |V(G)| - 1 + s(m-2)$$

其中 $s = \min\{|W|, n-1\}$。

证明。当 $k=0$时，集合 $W=\emptyset$ 和 $G=K_n$ 构成一个完全图。根据引理2.4，此时所声称的等式显然成立。

在下文中，我们假设 $k\geq 1$。对于每个 $i\in[k]$，相对于 $W_i=\{w_{i,1},\ldots,w_{i,r_i}\}$，我们设 $\mathcal{C}_i:=\{\emptyset\}\cup\{\{w_{i,1},\ldots,w_{i,j}\}:\ j\in[r_i]\}$。由 [3, 引理 3.2], 的证明可知，具有割点性质的集合族为

$$\mathcal{C}(G)=\{T_1\sqcup\cdots\sqcup T_k : T_i\in\mathcal{C}_i \text{ and } T_1\sqcup\cdots\sqcup T_k\subsetneq[n]\}.$$

对于任意 $T\in\mathcal{C}(G)$，都有相应的分解 $T=T_1\sqcup\cdots\sqcup T_k$，其中 $T_i\in\mathcal{C}_i$。显然， $G\setminus T$由以下 $|T|+1$ 个分量组成:

(a) 对每个 $i\in[k]$ 和 $j\in[|T_i|]$，完全图 $K_{h_{i,j}}$；以及 (b) 集合 $\bigsqcup_i(W_i\setminus T_i)$ 上的 $K_n\setminus T$的扇图 G'。

由等式（1）可得

$$\dim(S/P_T(K_m,G))=(|T|+1)(m-1)+|V(G)|-|T|=m+|V(G)|-1+|T|(m-2).$$

因此，由引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}\dim(S/\mathcal{J}_{K_m,G})&=\max\{m+|V(G)|-1+|T|(m-2):T\in\mathcal{C}(G)\}\\&=m+|V(G)|-1+s(m-2)\end{aligned}$$

其中 $s=\min\{|W|,n-1\}$。 □

接下来，我们在相当一般的情形下研究扇图的广义二项式边理想的深度和正则性。

定理 3.3. 设 $G=F_k^W(K_n)$ 是一个满足 $n\geq 2$ 的 k-扇图。设 $\delta:=|\{(i,j):h_{i,j}\geq 2\}|$。则有如下结论。

(a) $S/\mathcal{J}_{K_m,G}$ 的深度由 $|V(G)|+m-1$ 给出。(b) 若 $m\geq|V(G)|$，则 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})=|V(G)|-1$。(c) 若 $m<|V(G)|$，则 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq k+(\delta+1)(m-1)$。(d) 有 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq \operatorname{cl}(G)(m-1)$，其中 $\operatorname{cl}(G)$ 是 G 的极大团数。除非 $G=F_1^W(K_n)$ 且满足 $W=[n]$，否则团的数量恰为 $|W|+1$。(e) 进一步假设 $n>1+|W|$ 且对所有 $i\in[k]$ 和 $j\in[r_i]$，$h_{i,j}\geq m$。则 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})=(\operatorname{cl}(G)-1)(m-1)+\min\{m-1,n-|W|-1\}$。

证明. (a) 我们对 $N:=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{r_i}h_{i,\,j}$ 使用归纳法。基例为 $N=0$。因此， $G=K_n$ 和 $k=\delta=0$。由引理 2.4 可知，在此情况下，$\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,\,G})=m+n-1$。

下文中，我们假设 $N\geq 1$。因此， $k\geq 1$ 也成立。对于$v=w_{k,\,1}\in W_k$，我们注意到 G_v（分别是 $G_v\setminus v$）是集合 $W\setminus W_k$ 上的 $K_{n+h_{k,\,1}+\cdots+h_{k,\,r_k}}$ 的（$k-1$）扇图（分别是 $K_{n+h_{k,\,1}+\cdots+h_{k,\,r_k}-1}$ 的（$k-1$）扇图）。因此，由归纳法可得

$$\operatorname{depth}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v})=m+|V(G)|-1,$$

and

$$\operatorname{depth}\left(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}\right)=m+|V(G)|-2.$$

同时， $G\setminus v$ 是 $K_{h_{k,\,1}}$ 和 G'的不交并，其中 G' 是集合 $W\setminus v$ 上的 k-扇图，K_{n-1} 如果 $r_k\geq 2$，或者是集合 $W\setminus v$ 上的 $k-1$-扇图， K_{n-1} 如果 $r_k=1$。因此，由归纳法和引理 2.4，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}\left(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}\right)&=(m+h_{k,1}-1)+(m+|V(G)|-h_{k,1}-2)\\&=m+|V(G)|-1+(m-2).\end{aligned}$$

因此，通过将引理2.3(a) 应用于引理 2.6中的短正合列（2），我们得到此情形下所声称的公式。

（b） （b）中的断言由引理2.9得出。

（c）在这种情况下，根据假设，我们有 $m < |V(G)|$。我们仍然对 N 进行归纳证明，其中（a）部分已定义，并以相同的方式进行论证。

基例为 $N = 0$。因此，$G = K_n$ 和 $k = \delta = 0$。由引理 2.9 可得，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,K_n}) = \min\{m-1, n-1\} = m-1$，从而证明了此情形下所述不等式成立。

在下文中，我们假设 $N \geq 1$。因此，$k \geq 1$ 也成立。我们仍取 $v = w_{k,1} \in W_k$。利用证明(a) 部分中的分析，由归纳法可得

$$\operatorname{reg}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) \leq k - 1 + (\delta' + 1)(m-1) \tag{3}$$

其中 $\delta' := |\{(i,j) : h_{i,j} \geq 2 \text{ 和 } i < k\}| \leq \delta$，且

$$\operatorname{reg}\left(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}\right) \leq \min\{h_{k,1} - 1, m-1\} + k + (\delta'' + 1)(m-1) \tag{4}$$

其中 $\delta'' := |\{(i,j) : h_{i,j} \geq 2 \text{ 和 } (i,j) \neq (k,1)\}| \leq \delta$。注意，(3) 的右端 $\leq k - 1 + (\delta + 1)(m-1)$。同时，若 $h_{k,1} = 1$，则 $\delta'' = \delta$ 且 (4) 的右端 $= k + (\delta+1)(m-1)$。另一方面，若 $h_{k,1} > 1$，则 $\delta'' = \delta - 1$ 且 (4) 的右端 $\leq (m-1) + k + \delta(m-1) = k + (\delta + 1)(m-1)$。因此，应用推论 2.8，可得此情形下所需的不等式。

(d) 这里的证明与情形(c)类似。我们继续对证明的(a) 部分中定义的 N 进行归纳法证明，并以相同的方式论证。在基例中，$N = 0$。因此，$G = K_n$ 且 $\operatorname{cl}(G) = 1$。由引理2.9 可知，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \min\{m-1, n-1\} \leq \operatorname{cl}(G)(m-1)$，从而得到基例中的所需不等式。

对于归纳步骤，我们假设 $N \geq 1$。根据归纳法，对于 $v = w_{k,1} \in W_k$，我们有

$$\operatorname{reg}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) \leq \operatorname{cl}(G_v)(m-1) = (\operatorname{cl}(G) - |W_k|)(m-1).$$

与此同时，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) &= \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,K_{h_{k,1}}}) \\ &\leq (\operatorname{cl}(G) - 1)(m-1) + \min\{h_{k,1} - 1, m-1\} \\ &\leq \operatorname{cl}(G)(m-1).\end{aligned}$$

因此，通过应用推论 2.8，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\leq \max\{(\operatorname{cl}(G) - |W_k|)(m-1) + 1, \operatorname{cl}(G)(m-1)\} \\ &= \operatorname{cl}(G)(m-1),\end{aligned}$$

since $|W_k| \geq 1$ and $m \geq 2$。因此，在这种情况下，我们得到了预期的不等式。

(e) 我们继续对 N（在证明的第(a) 部分中定义）进行归纳证明，并用与之前相同的方法进行论证。当 $N = 0$ 在基例中时，$\operatorname{cl}(G) = 1$ 且 $|W| = 0$。显然存在所需的等式。在归纳步骤中，由于 G' 对应的假设仍然成立，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) &= \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,K_{h_{k,1}}}) \\ &= (\operatorname{cl}(G) - 2)(m-1) + \min\{m-1, n-1-(|W|-1)-1\} \\ &\quad + \min\{h_{k,1} - 1, m-1\} \\ &= (\operatorname{cl}(G) - 1)(m-1) + \min\{m-1, n-|W|-1\}.\end{aligned}$$

由于 $m \geq 2$ 和 $r_k \geq 1$，根据第 (d) 部分的证明，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) &\leq (\operatorname{cl}(G) - |W_k|)(m-1) \\ &< (\operatorname{cl}(G) - 1)(m-1) + \min\{m-1, n-|W|-1\} \\ &= \operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}).\end{aligned}$$

因此，根据推论 2.8，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})$$

$$= (\mathrm{cl}(G)-1)(m-1)+\min\{m-1, n-|W|-1\}.$$

这就得到了此情形下所需的不等式。 □

从前面的论证中，我们可以立即得出两个结论。

推论 3.4. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 是一个 k-扇图，且 $n \geq 2$。则以下条件等价：

(a) 环 $S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}$ 是 Cohen–Macaulay 的；
(b) 理想 $\mathcal{J}_{K_m,\ G}$ 是无混合的；(c) $m = 2$ 或 $W = \emptyset$。

证明。 这可由定理 3.2 和定理 3.3(a)的证明直接得出。 □

推论 3.5. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 是一个 k-纯扇图，且 $n \geq 2$。则 $\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}) \leq k+m-1$。

证明。 由于 G 是一个纯扇，因此 δ 在定理 3.3 中定义的量恰为 0。因此，所述不等式由定理 3.3 (b)和 (c)得出。 □

与 [13, 定理 3.4], 相比，在推论 3.5中一般没有等式 $\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$。reg 的精确公式将在定理 3.9中给出。为证明该公式，我们需要做一些准备。

观察 3.6. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 是一个 k-纯扇图，则 $|V(G)| = n+|W|$。假设这是一个关于 $W = W_1 \sqcup \cdots \sqcup W_k$ 的扇图，其中 $W_i = \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,r_i}\}$。现在取 $v = w_{k,1}$。那么， G_v 可以看作 $F_{k-1}^{W\setminus W_k}(K_{n+r_k})$，而图 $G_v \setminus v$ 可以看作 $F_{k-1}^{W\setminus W_k}(K_{n+r_k-1})$。此外，图 $G\setminus v$ 可以看作一个扇图 G' 与一个孤立顶点的不交并。若 $r_k = 1$，则 $G' := F_{k-1}^{W\setminus\{v\}}(K_{n-1})$。反之，若 $r_k \geq 2$，则 $G' := F_k^{W\setminus\{v\}}(K_{n-1})$。

Lemma 3.7. 设 $G = F_k^W(K_n)$是 k纯扇图。则有以下结果 .

(a) 若 $i \leq |V(G)|+m-2$，则局部上同调模$H^i_{S_+}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = 0$。(b) 若 $|V(G)| \leq m+k$，则$a_{|V(G)|+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq -m$。(c) 若 $|V(G)| \geq m+k$，则$a_{|V(G)|+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq -|V(G)|+k$。

证明。 （a）中的零化度 源于以下事实：深度 $(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = |V(G)|+m-1$ 见定理 3.3(a) 以及 [5, 定理 6.2 的分次版本。7] 或 [6, 命题 3.5.4 (b)]。

对于剩余的 (b) 和 (c)，我们对 $|W|$ 进行归纳法。在基例中，我们有$|W| = 0$。因此， $k = 0$, $G = K_n$ 和 $|V(G)| = n$。商环 $S/\mathcal{J}_{K_m,G}$ 是 Cohen–Macaulay 的，其深度为 $m+n-1$，由引理 2.4 得出。由引理 2.9 可知，其正则性为 $\min\{n-1, m-1\}$。由于 Cohen–Macaulay 性，$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = a_{n+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) + n+m-1$，当 $n \leq m$ 时，(b) 中的不等式成立。出于同样的原因，当 $n \geq m$ 时，(c) 中的不等式也成立。

在归纳步骤中，我们假设 $|W| \geq 1$。因此， $k \geq 1$。不失一般性，我们假设 $W_k = \{w_{k,1}, \ldots, w_{k,r_k}\}$ 是 W 的分解分量。我们应用观察 3.6中关于 $v = w_{k,\ 1}$ 的事实。因此，根据定理 3.3(a)， $H^{|V(\ G\ |+m-2)}_{S_+}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,\ G_v}) = 0$。此外， $H^{|V(\ G\ |+m-2)}_{S_+}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,\ G\setminus v}) = H^{|V(\ G\ |-2)}_{S_+}(S_{G'}/\mathcal{J}_{K_m,\ G'}) = 0$，因为 $m \geq 2$。因此，我们有

$$0 \to H^{|V(G)|+m-2}_{S_+}(S'/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) \to H^{|V(G)|+m-1}_{S_+}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$$

由引理 2.6 中的短正合列所诱导的局部上同调模长正合序列。特别地， (2)

$$a_{|V(G)|+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq a_{|V(G)|+m-2}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}). \tag{5}$$

注意，由归纳法可知，若 $|V(G)| \leq m+k$，则

$$a_{|V(G)|+m-2}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) \geq -m$$

若改为 $|V(G)| \geq m+k$，则

$$a_{|V(G)|+m-2}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) \geq -(|V(G)|-1)+(k-1).$$

将它们与（5）结合，即可在每种情况下得到所需的不等式。 □

我们先研究初始情形下的正则性，即在完全图上添加胡须。

命题 3.8. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 是一个 k-纯扇图，且 $r_1 = \cdots = r_k = 1$。那么，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \min\{m,n\}+k-1$。

证明. 根据 $n \geq m$ 是否成立，我们分两种情形讨论。

(a) 假设 $n \geq m$。在这种情况下，我们证明 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m+k-1$。根据推论 3.5，只需证明 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq m+k-1$。

在第一个子情形中，我们假设 $m \geq k$。显然，图 G 有一个诱导子图 G'，它是 K_m 在 W上的一个 k-纯扇图。由引理 3.7(b)可知 $a_{(m+k)+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) \geq -m$。因此

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) \geq a_{(m+k)+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) + (m+k) + m - 1 \geq m+k-1.$$

因此，根据引理 $S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}$，$\operatorname{reg}(\geq m+k-1$ 2.7。

在第二个子情形中，我们假设 $m \leq k$。由于 $k \leq n$，图 G 有一个诱导子图 G'，它是 K_k 在 W上的一个 k-纯扇图。由引理 3.7(c) 可知 $a_{k+m-1+k}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) \geq -k$。因此

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) \geq a_{k+m-1+k}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}) + (k+m-1+k) \geq m+k-1.$$

因此，根据引理 $S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}$，我们仍有 $\operatorname{reg}(\geq m+k-1$ 2.7。

(b) 反之，假设 $n \leq m$。在这种情况下，我们证明 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}) = n+k-1$。我们将对 k进行归纳证明。基例为 $k=0$。由引理 $\{n-1, m-1\} = n-1$ 2.9可知，此时正则性为 min，因此断言在这种情况下成立。

在以下归纳步骤中，我们假设 $k \geq 1$。如果 $n = m$，那么根据情形 (a)，断言即可得出。因此，以下我们还将假设 $n < m$。取 $v = w_{k,1}$，应用观察 3.6 中的事实，由归纳法可得

$$\operatorname{reg}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = (n+1)+(k-1)-1 = n+k-1,$$
$$\operatorname{reg}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = n+(k-1)-1 = n+k-2,$$

and

$$\operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = (n-1)+(k-1)-1 = n+k-3.$$

应用引理 2.3(b) 于短正合列（2）中的引理 2.6，可得到

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \max\{\max\{n+k-1, n+k-3\}, n+k-2+1\} = n+k-1.$$

至此，我们的归纳论证完成。 □

现在我们可以确定纯扇图的广义二项式边理想的正则度。

定理 3.9. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 是一个 k-纯扇图。那么，我们有 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$ =min$\{|V(G)|-1, m+k-1\}$.

证明。 我们对 $|W|-k$ 使用归纳法。基例为 $|W| = k$。因此 $r_1 = \cdots =r_k = 1$。于是，由于 $|V(G)| = n+k$，我们可以应用命题 3.8 。

在归纳步骤中，我们假设 $|W| > k$。不失一般性，我们可以假设 $r_k \geq 2$。因此，我们通过取 $,\ _1$，应用观察 3.6 中的事实。由归纳法可得

$$\operatorname{reg}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = \min\{|V(G)|-1, m+k-2\},$$
$$\operatorname{reg}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = \min\{|V(G)|-2, m+k-2\},$$

and

$$\operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = \min\{|V(G)|-2, m+k-1\}.$$

(a) 若 $|V(G)| \leq m+k-1$，则上述三个正则性分别为 $|V(G)|-1$、$|V(G)|-2$ 和 $|V(G)|-2$。因此，将引理 2.3(b) 应用于引理 2.6中的短正合列 (2) 后，我们得到 $\operatorname{reg}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = |V(G)|-1$，与预期一致。

(b) 若 $|V(G)| \geq m+k+1$，则上述三个正则性分别为 $m+k-2$、$m+k-2$ 和 $m+k-1$。基于同样的理由，我们推得 $\operatorname{reg}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m+k-1$，符合预期公式。

(c) 在最后一种情形下，我们假设 $|V(G)| = m+k$。由推论 3.5 可知 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq m+k-1$。同时，由引理 3.7(c) 可得

$$\operatorname{reg}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq a_{|V(G)|+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) + |V(G)| + m - 1 \geq m+k-1.$$

因此，预期的等式在此情形下同样成立。这就完成了我们的归纳论证。□

4. Study of the bipartite graph F_p

在本节中，我们将给出以下二分图 F_p 的广义二项式边理想的维数、深度和正则性的精确公式。

定义 4.1. 对于整数 $p \geq 1$，令 F_p 表示顶点集为 $[2p]$、边集为 $E(F_p) = \{\{2i, 2j-1\} : 1 \leq i \leq p$ 和 $i \leq j \leq p\}$ 的图。

继 Bolognini 等人在 [3]，中的重要工作之后，这类图为二分图提供了构造基础，而这些二分图的二项式边理想是 Cohen–Macaulay 的。

观察 4.2. 设 $G = F_p$ 和 $v = 2p-1 \in V(G)$。我们得到以下结果。

(i) 图 G_v 可视为 1-纯扇图 $F_1^W(K_{p+1})$，其中 $W = V(G) \setminus N_G[v]$。特别地，$|W| = p-1$。(ii) 图 $G_v \setminus v$ 可视为带有 $|W| = p-1$ 的 1-纯扇图 $F_1^W(K_p)$。(iii) 图 $G \setminus v$ 可视为 F_{p-1} 与孤立顶点$2p$的不交并。

First，我们考察 F_p的广义二项式边理想的维数和深度 .

定理 4.3。设 $p \geq 1$ 为正整数。则有

(a) $\dim(S/\mathcal{J}_{K_m,\ F_p}) = m+2p-1+(p-1)(m-2)$,

且 (b) $\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ F_p}) = m+2p-1$。

特别地，商环 $S/\mathcal{J}_{K_m,F_p}$ 是 Cohen–Macaulay，当且仅当 $p=1$ 或 $m=2$。

证明。我们对 p 进行归纳，以证明这些断言。情形 $p=1$ 由引理 2.4 得出。接下来，假设 $p \geq 2$。取 $v = 2p-1$，如观察 4.2所述。利用归纳法，由定理3.2 和定理 3.3(a) 可得

- 维数$(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = m+2p-1+(p-1)(m-2)$ 以及深度$(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = m+2p-1$;
- 维数$(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = m+2p-2+(p-1)(m-2)$ 和 深度$(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = m+2p-2$;

- 维数$(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = m+(m+2p-3)+(p-2)(m-2) = m+2p-1+(p-1)(m-2)$ 和深度 $(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = m+m+2p-3 = m+2p-1+(m-2)$。

由于
$$\max\{\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \dim(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} > \dim(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}),$$
它由引理 2中的短正合列（2.6 ）可得
$$\begin{aligned}\dim(S/\mathcal{J}_{K_m,F_p}) &= \max\{\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \dim(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\}\\ &= m+2p-1+(p-1)(m-2).\end{aligned}$$
另一方面，关于深度的所需断言可以通过将引理2.3(a)应用于引理2）中的短正合列（2.6。 □

接下来，我们计算 F_p 图的广义二项式边理想的正则度。当 $p=1$ 或 2 时，它是一条路径。幸运的是，路径的广义二项式边理想的深度和正则度已经得到研究。

引理 4.4（[7, 推论 3.4 和 3.6]）。设 P_n 是顶点集为 $[n]$ 且有$n \geq 2$的路径图。那么，$\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_n}) = m+n-1$ 且 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_n}) = n-1$。

至于一般情形下的正则性，我们需要做一些准备。

引理 4.5. 对于 $G = F_p$ 且满足 $p \geq 1$，有以下结果：

(a) 对于 $i \leq m+2p-2$，局部上同调模 $H^i_{S_+}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = 0$；(b) 若 $m \geq 2p-2$，则 $a_{2p+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq -m$；(c) 若 $m \leq 2p-2$，则 $a_{2p+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq -2p+2$。

证明。 由以下事实可知 (a) 中的零化度满足 $\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m+2p-1$，由定理 4.3(b) 以及定理 6.2 的分次版本 [5, 。7] 或 [6, 命题 3.5.4 (b)]。

下文中，取 $v = 2p-1 \in V(G)$ 如观察 4.2所述。现在，考虑由引理 22.6 中的短正合列（2.6诱导出的局部上同调模的长正合序列。由定理 3.3(a) 和定理 4.3(b)，可推得
$$0 \to H^{2p+m-2}_{S_+}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) \to H^{2p+m-1}_{S_+}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}).$$
因此，
$$a_{2p+m-1}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq a_{2p+m-2}(S_{F_1^W(K_p)}/\mathcal{J}_{K_m,F_1^W(K_p)}).$$
接下来应用（b）和（c）引理3.7。 □

现在，我们准备给出 F_p 图的广义二项式边理想的正则性公式。

定理 m 4.6。设 $G = F_p$ 且 $p \geq 1$。那么，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \min\{2p-1, m+1\}$。

证明。当 $p=1$ 或 2 时，有 $G = P_2$ 或 P_4，分别成立。因此，根据引理$S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}$的正则性为 $= 2p-1$ 。与此同时，我们从一开始就假设 $m \geq 2$。因此 $m+1 \geq 3 \geq 2p-1$。

现在假设 $p \geq 3$。取 $v = 2p-1 \in V(G)$，如观察 4.2所述。我们可以推导出以下结论：

- 正则性$(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,\ G_v})$ =最小$\{2p-1, m\}$根据定理 3.9;
- 正则性$(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v})$ =最小$\{2p-2, m\}$ 根据定理 3.9;
- 正则性 $(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,\ G\setminus v})$ = 由归纳假设得最小值$\{2p-3, m+1\}$ 。

因此 ，由引理2.3(b) 和引理 2 中的短正合列（2.6 可得
$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \max\{\max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S'/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\}, \operatorname{reg}(S'/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v})+1\}.$$
由此可知，我们同时有
$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \max\{\max\{2p-1, 2p-3\}, (2p-2)+1\} = 2p-1,$$
and
$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \max\{\max\{m, m+1\}, m+1\} = m+1.$$
因此，
$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \min\{2p-1, m+1\}. \tag{6}$$

为了证明等式在（6）中成立，我们分四种情况讨论。

(i) 当 $m \leq 2p-4$ 时，上述三种正则性分别为 m、 m 和 $m+1$ 。特别地，

$$\max\{\operatorname{reg}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} \neq \operatorname{reg}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}).$$

由引理2.3(b) 可得，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \max\{\max\{m, m+1\}, m+1\} = m+1$，从而验证了此情形下的断言。

(ii) 如果 $m = 2p-3$，那么根据引理 4.5(c) ，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\geq (2p+m-1) + a_{2p+m-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \\ &\geq 2p+m-1-2p+2 = m+1.\end{aligned}$$

因此，根据$S/\mathcal{J}_{K_m、G}$，由 $= m+1$ 中的不等式6，从而确认了此情况下的断言。

(iii) 如果 $m = 2p-2$，则可根据引理 4.5(b)，按照 (ii) 中的方法进行论证。因此，由 (6) 中的不等式可得，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$ $=2p-1$ ，从而在此情形下证实了该断言。(iv) 当 $m \geq 2p-1$ 时，与 (i) 类似，我们可以看到，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$ $= \max\{\max\{2p-1, 2p-3\}, (2p-2)+1\} = 2p-1$，从而在此情形下证实了该断言。□

5. Depth results involving ∘ operations and ∗ operations

从本节开始，我们将研究一些通过使用 $\circ$ 运算或 $*$ 运算，由扇图和 F_p 图得到的简单图。本节的主要任务是为这些图的广义二项式边理想的深度提供一些精确公式。我们首先回顾 [3] 中前面提到的两种特殊粘合运算。

定义 5.1。对于 $i = 1, 2$，设 G_i 为一个具有叶子 f_i 的图。此外，设 v_i 为 G_i 中 f_i 的邻接顶点。

(a) 设 G 为由 G_1 和 G_2 先移除叶子 f_1、f_2，再将顶点 v_1 和 v_2合并得到的图。在这种情况下，我们称 G 是通过 $\circ$ 运算由 G_1和 G_2 得到的，并记为 $G = (G_1, f_1) \circ (G_2, f_2)$，或简记为 $G = G_1 \circ G_2$。如果v_1 和 v_2 在 G中合并为顶点 v ，则我们也记为 $G = G_1 \circ_v G_2$。除非另有说明，当我们以这种方式进行 $\circ$ 运算时，始终默认假设 G_1 和 G_2 均不是由两个顶点构成的路径图 P_2 。(b) 设 H 为通过合并 G_1 和 G_2 中的顶点 f_1 和 f_2得到的图。在这种情况下，我们称 H 是通过 $*$ 运算由 G_1 和 G_2 得到的，并记为$H = (G_1, f_1) * (G_2, f_2)$，或简记为 $H = G_1 * G_2$。如果我们将 H中合并后的顶点记为 f，则也记为 $H = G_1 *_f G_2$。

为避免混淆，我们给出带有额外“标记”结构的扇图和 F_p 图。

定义 5.2. (a) 设 $G = F_k^W(K_n)$是一个带有 $k \geq 1$的 k-扇。当 $k = 1$时，我们称 G为一个带有标记叶子 f 的标记 1-扇，其中 f 是 G的唯一叶子。当 $k \geq 2$时，若 f_1 和 f_2 是 G的两个固定叶子，我们称 G 为一个带有标记叶 f_1 和 f_2的标记 k-扇。令 Fan 表示标记扇的类，Fan^p 表示标记纯扇的子类。(b) 令 F 表示由满足 $p \geq 1$的图 F_p 组成的类。每个这样的 F_p 都自动带有标记，即其两个唯一叶子。

接下来，我们通过定义 5.1 中引入的运算，将上述标记图粘合在一起。

定义 5.3. 令 FFan 为满足以下条件的最小简单图类：

(a) $\text{F} \cup \text{Fan} \subset \text{FFan}$;

(b) FFan 关于仅使用标记叶的 $*$ 运算和 $\circ$ 运算是封闭的。

此外，如果我们将（a）中的扇替换为扇，^{p}那么就得到子类$\mathbf{FFan}^p$。注意，如果 G_1，G_2，$G_3 \in \mathbf{F} \cup$扇，那么$G_1 \circledast_1 G_2 \circledast_2 G_3 = G_1 \circledast_1 G_2 \circledast_2 G_3$，只要每个 $\circledast_i$都是一种 $*$ 操作，或仅使用标记叶的 $\circ$ 操作。因此，对于每个 $G \in$**FFan**，我们都能找到 G_1，……，G_t 使得

(a) 每个 G_i 都属于 F $\cup$扇；(b) $G = G_1 \circledast_1 \cdots \circledast_{t-1} G_t$，其中每个 $\circledast_i$要么是一种 $*$ 操作，要么是仅使用标记叶的 $\circ$ 操作。

注意，$F_1 = P_2$ 和 $F_2 = P_4 = F_1 * F_1 * F_1$。因此，上述对 G 的分解通常并不唯一。不失一般性，我们可以假设 t 是这种情况发生时的最小值。于是，我们称 G 具有 t 个FFan-分量，并记作 $t = \mathrm{ffc}(G)$。

如果 G 是连通二分图，那么二项式边理想 J_G 是 Cohen–Macaulay，当且仅当 $G \in$ 由 [3, 定理 6.1] 是 FFan。显然，在这种情况下，G 的每个 FFan 分支都必然属于 F。

注 5.4. 如果不指定标记叶，那么 $*$ 操作和 $\circ$ 操作就不满足结合律。例如，设 G_2 是一张扇图，其不同分支中至少有 3 个叶子。设 G_1、G_3、G_4 都是 F 图。假设 $G = ((G_1 * G_2) * G_3) * G_4$，其中我们使用了 G_2 中的所有叶子。显然，$G \neq (G_1 * G_2) * (G_3 * G_4)$，因为在 $G_3 * G_4$ 中我们不能使用来自 G_2 的叶子。

下面，我们先介绍使用 $\circ$ 操作时的三种基本情形。

观察 5.5。对于 $i = 1,2$，令 $G_i = F_{n_i}$ with $n_i \geq 2$。同时，对于 $i = 3,4$，令$G_i = F_{k_i}^{W_i}(K_{n_i})$ 为一个以 $W_i = W_{i1} \sqcup \cdots \sqcup W_{ik_i}$ with $k_i \geq 1$ and $n_i \geq 3$ 为顶点集的 k_i-扇图。这里，我们考虑 $G = G_{i_1} \circ_v G_{i_2}$。令 H 为顶点集 $N_G[v]$ 上的完全图。

(a) 如果 $G = G_1 \circ_v G_2$，那么

- $G_v = F_2^W(H)$ 是 H 在 $W := N_G(v)$ 上的 2-纯扇图，
- $G_v \setminus v = F_2^W(H \setminus v)$ 是 W 上 $H \setminus v$ 的一个 2-纯扇，且
- $G \setminus v = F_{n_1-1} \sqcup F_{n_2-1}$.

(b) 假设 $G = (G_3, f_3) \circ_v (G_4, f_4)$ 且 $f_i \in W_{i1}$ for $i = 3,4$。那么，很容易观察到，

- G_v 是定义在 W 上的 H 的（$k_3 + k_4 - 2$）扇图：$=$（$W_3 \setminus W_{31}$）$\sqcup$（$W_4 \setminus W_{41}$），
- $G_v \setminus v$ 是定义在 W 上的 $H \setminus v$ 的（$k_3 + k_4 - 2$）扇图，并且
- $G \setminus v$ 是两个扇图的不交并。（c）假设 $G =$（G_1, f_1）$\circ_v$（G_4, f_4）和 $f_4 \in W_{41}$。那么，很容易观察到

- $G_v = F_{k_4}^W$（H）是定义在 W 上的 H 的 k_4-扇图：$= N_{G_1 \setminus f_1}$（v）$\sqcup$（$W_4 \setminus W_{41}$），
- $G_v \setminus v = F_{k_4}^W$（$H \setminus v$）是定义在 W 上的 $H \setminus v$ 的 k_4-扇，并且
- $G \setminus v$ 是 F_{n_1-1} 与一个扇图的不交并。

此外，在每种情况下，我们都有 $|V(G_v)| = |V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 3$，并且 $|V(G_v \setminus v)| = |V(G \setminus v)| = |V(G)| - 1$。

引理 5.6. 设 M 是一个正整数。假设对于 FFan 中每个满足 $\mathrm{ffc}(H) \leq M$ 的 H，我们总有 $\mathrm{depth}(S_H/\mathcal{J}_{K_m,H}) = m + |V(H)| - 1$。现在，设 G_1 和 G_2 是 FFan 中的两个元素，且 $\mathrm{ffc}(G_1) + \mathrm{ffc}(G_2) \leq M + 1$。那么，对于 $G = G_1 \circ G_2$，我们也有 $\mathrm{depth}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m + |V(G)| - 1$。

证明。我们有 $\mathrm{ffc}(G) \leq \mathrm{ffc}(G_1) + \mathrm{ffc}(G_2)$。假设 $G = G_1 \circ_v G_2$。由观察 5.5 可知，G_v 和 $G_v \setminus v$ 都属于 FFan，且 $\mathrm{ffc}(G_v) \leq \mathrm{ffc}(G) - 1$以及 $\mathrm{ffc}(G_v \setminus v) \leq \mathrm{ffc}(G) - 1$。同时，$G \setminus v$ 是 G_1' 和 G_2'的不交并，其中 $G_i' := G_i \setminus \{f_i, v_i\} \in$属于 FFan，使得对 $i = 1$，2，有 $\mathrm{ffc}(G_i') \leq \mathrm{ffc}(G)$。因此，根据假设，我们有

$$\mathrm{depth}(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = m + |V(G)| - 1,$$

$$\operatorname{depth}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = m + |V(G)| - 2,$$

and

$$\operatorname{depth}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = m + |V(G)| - 1 + (m-2).$$

应用引理 2.3(a) 中的短正合列 (2)，得到引理 2.6中的所需公式。 □

接下来，我们考虑 $*$ 操作的应用。作为准备，我们需要了解团和的术语。

定义 5.7（[14, 定义 3.10]）。设 G_1 和 G_2 是图 G 的两个子图。若 $G_1 \cap G_2 = K_\ell$ 是一个具有 $G_1 \neq K_\ell$ 和 $G_2 \neq K_\ell$ 的、含 ℓ 个顶点的完全图，则 G 称为 G_1 和 G_2 沿完全图 K_ℓ 的团和，记作 $G_1 \cup_{K_\ell} G_2$。若 $\ell = 1$，则 G_1 和 G_2 沿顶点 v 的团和简记为 $G_1 \cup_v G_2$。

显然，在 $\ell = 1$ 的情形下，通过 $*$ 操作进行粘合是团和的一种特殊情况；后者并不要求涉及叶子。在以下情形中，团和常出现于通过 $*$ 操作进行粘合时。

观察 5.8。设 $G = G_1 \cup_u G_2$ 是图G G_1 和 G_2 的团和。假设 $G_1 = F_k^W$（K_n）是图G K_n 在 W 和 $u \in V$（K_n）上的 k-扇图 $\setminus W$。又假设 u 是 G_2 的一个叶子，其唯一邻点为 v。设 H 是以顶点集 $N_G[v]$ 和 $U = N_G$（v）为顶点集的完全图。

(a) 若 $G_2 = F_1$，则 $G = F_{k+1}^{W\cup\{u\}}(K_n)$。(b) 假设 $G_2 = F_p$，其中某个 $p \geq 2$。那么，G_v 由扇图$F_{k+1}^{W\cup\{u\}}(K_n)$ 和 $F_2^U(H)$ 通过 $\circ$运算得到。类似地，$G_v\setminus v = F_{k+1}^{W\cup\{u\}}(K_n)\circ F_2^U($ $H\setminus v)$。此外，$G \setminus v$ 是 G_1 与 $F_{p-1} = G_2 \setminus \{u, v\}$的不交并。(c) 假设 $G_2 = F_{k'}^{W'}(K_{n'})$ 是一个扇图，具有 $k' \geq 1$，其中有 $W' = W_1' \sqcup \cdots \sqcup W_{k'}'$和 $v \in W_1'$。那么，$G_v = F_{k+1}^{W\cup\{u\}}$ $(K_n) \circ F_{k'}^{(W'\setminus W_1'\cup\{u\})}(H)$，且 $G_v \setminus v = F_{k+1}^{W\cup\{u\}}(K_n) \circ F_{k'}^{(W'\setminus W_1'\cup\{u\})}(H \setminus v)$。此外，$G \setminus v$是扇图 G_1与$G_2 \setminus \{u, v\}$的不交并。

注意，在每种情况下，$|V(G_v)| = |V(G)|$ 和 $|V(G_v \setminus v)| = |V(G \setminus v)| = |V(G)| - 1$。

引理 5.9. 设 M 为正整数。假设对于 FFan 中每个满足 $\operatorname{ffc}(H) \leq M$ 的 H，总有 $\operatorname{depth}(S_H/\mathcal{J}_{K_m,}$ $_H) = m + |V(H)| - 1$。设 $G = G_1 \cup_u G_2$ 是图G G_1 和 G_2的团和。进一步假设 $G_1 = F_k^W(K_n)$ 是图G K_n 在 W上的一个 k-扇图，且 $u \in V(K_n) \setminus W$。同时，假设 $G_2 \in$ 是一个满足 $\operatorname{ffc}(G_2)$ $\leq M$ 的 FFan，且 u 是 G_2的标记叶子。那么，$\operatorname{depth}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,\ G}) = m + |V(G)| - 1$。

证明。 根据观察 5.8，我们可以像引理 5.6的证明那样进行论证。 □

最后，我们现在可以给出前面承诺的深度结果。

定理 5.10. 对每个 $G \in$ FFan，我们有 $\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m + |V(G)| - 1$.

证明。我们对 $\operatorname{ffc}(G)$ 使用归纳法。基例是 $\operatorname{ffc}(G) = 1$，这由定理 3.3(a) 和定理 4.3(b) 得出。下文中，我们假设 $\operatorname{ffc}(G) \geq 2$。设 $G = (G_1, f_1) \circledast (G_2, f_2)$，且 $\operatorname{ffc}(G_1) = \operatorname{ffc}(G) - 1$，并且 $G_2 \in$ F $\cup$ Fan。显然，有两种情况需要检验。

(a) 假设 $\circledast = \circ$。在此情况下，我们可以应用引理 5.6。(b) 假设 $\circledast = *$。在此情况下，令 v 为 f_2 在 G_2 中的唯一邻点。假设 H 是 $N_{G_2}[v]$ 上的完全图。则 G_v 是团和 $G_1 \cup_{f_2} G_2'$，其中 G_2' 是 H 上某个子集 $W \subset V$（G_2）上的 k'-扇图，其中 k' 为某个正整数。显然，$G_v \setminus v$ 是团和 $G_1 \cup_{f_2}$（$G_2' \setminus v$），其中 $G_2' \setminus v$ 是在同一 W 上的 $H \setminus v$ 的 k'-扇图。因此，根据引理 5.9，我们有 $\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G_v}) = m + |V(G)| - 1$，以及 $\operatorname{depth}(S'/\mathcal{J}_{K_m,\ G_v\setminus v}) = m + |V(G)$ $| - 2$。与此同时，$G \setminus v$ 是 G_1 与

$G_2\setminus\{f_2,v\}$。由于 $G_2\setminus\{f_2,v\}$ 仍属于 $\mathbf{F}\cup\mathbf{Fan}$，因此由归纳法可得 $\operatorname{depth}(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = m+|V(G_1)|-1+m+|V(G_2)|-2-1 = m+|V(G)|-1+(m-2)$。将引理 2.3(a) 应用于引理 2中的正合序列（2.6），可得所需公式。□

推论 5.11. 假设 G 是 FFan 中的一个图，且 v 是 G 中的一个内部顶点。假设 G_v 和 $G_v\setminus v$ 均属于 FFan。此外，进一步假设 $G\setminus v$ 是 G_1 和 G_2 的不交并，其中二者也都属于 FFan。那么，我们有如下局部上同调模的正合列：

$$0\to H^{m+|V(G)|-2}_{S_+}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v})\to H^{m+|V(G)|-1}_{S_+}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}).$$

证明。由于这些图都属于 FFan 和 $|V(G)| = |V(G\setminus v)|+1 = |V(G_1)|+|V(G_2)|+1$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &= \operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = m+|V(G)|-1,\\ \operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) &= m+|V(G)|-2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) &= \operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1}) + \operatorname{depth}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_2})\\ &= m+|V(G_1)|-1+m+|V(G_2)|-1\\ &= 2m+|V(G)|-3 > m+|V(G)|-2.\end{aligned}$$

因此，所需的局部上同调模正合列由引理 2.6 中的短正合列 (2.6) 得出。□

6. Regularity results involving ∘ operations and ∗ operations

在本节中，我们将计算**FFan**中图的广义二项式边理想的正则性。为了利用定理3.9中的公式，我们重点研究**FFan**^{p}中的图。

6.1. 通过 ∘ 操作进行粘合。首先，我们计算由 F ∪ 经单次 ∘操作得到的图 FFan^p 的广义二项式边理想的正则度^p 。

注 6.1. 假设 $G = F^W_k(K_n)$ 是 K_n 上的一个 k-纯扇 W。若 $n=2$，由于我们总有 $k\le n$，不难看出 G 也可以视为一个路径图，或是某个 W' 上的一个 1-纯扇 K_3 。基于这一简单观察，本小节中我们只关注 $n\ge 3$ 的情况。涉及路径图粘合的情况将在下一小节讨论。

定义 6.2. 为了简化下文的记号和论证，当我们说图 G 是一个 k-纯伪扇图时，指它要么是一个 k- 纯扇图 $F^W_k(K_n)$，要么是满足 $k=2$ 的 F_p 图。

T以下结果是命题 4.3 和 4.4] 的推广，其中 $m=2$.

命题 6.3. 令 $G = (G_1,f_1)\circ(G_2,f_2)$，其中 G_i 是一个 k_i-纯伪扇图，满足$|V(G_i)|-k_i\ge 3$，且对每个 i 都有 $k_i\ge 1$。此外，假设 v_i 是 G_i 中 f_i 的邻点，并且对每个 i，$G_i\setminus\{v_i,f_i\}$ 都是一个 q_i-纯伪扇图。最后，假设 v_1 和 v_2 在 G 中被识别为顶点 v。那么，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le \max\Big\{ &\min\{|V(G_1)|-3, m+q_1-1\}+\min\{|V(G_2)|-3, m+q_2-1\},\\ &\min\{|V(G)|-1, m+k_1+k_2-3\}, \min\{|V(G)|-1, m+k_1+k_2-2\}\Big\}. \quad (7)\end{aligned}$$

此外，若 $q_i = k_i$ 对每个 i都成立，则我们在 (7) 中得到一个等式。

证明。显然，$q_i \in \{k_i - 1, k_i\}$ 对每个 i 都成立。注意，图 $G \setminus v$ 是不交并，由一个 q_1-纯伪扇图和一个 q_2-纯伪扇图构成。此外，$|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 3$。因此，由定理 3.9、定理 4.6 和观察 5.5可得

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) &= \min\{|V(G)| - 1, m + k_1 + k_2 - 2 - 1\},\\ \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) &= \min\{|V(G)| - 2, m + k_1 + k_2 - 2 - 1\},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = &\min\{|V(G_1)| - 2 - 1, m + q_1 - 1\}\\ &+ \min\{|V(G_2)| - 2 - 1, m + q_2 - 1\}.\end{aligned}$$

应用引理2.3(b) 于引理2中的短正合列 (2.6，可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le \max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) + 1\}, \tag{8}$$

(8) 的右端恰好是 (7) 的右端。这证明了命题6.3的第一部分。在证明的其余部分，我们假设 $q_i = k_i$ 对每个 i都成立。对于所需的等式，需要考虑两种情形。

(i) 若 $m + k_1 + k_2 - |V(G)| \notin \{0, 1\}$，则我们断言

$$\max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} > \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}).$$

由此，根据引理2.3(b)，等式 (8) 成立。为验证这一断言，我们通过初等论证检查两个子情形。

(a) 假设 $m + k_1 + k_2 - |V(G)| \le -1$。在这种情况下，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G_v\setminus v}) = m + k_1 + k_2 - 3$。接下来，我们通过使用上述 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G_v\setminus v})$ 公式时的四种可能性，证明 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G\setminus v}) > m + k_1 + k_2 - 3$。

- 由于 $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 3$，我们有 $|V(G_1)| - 3 + |V(G_2)| - 3 > m + k_1 + k_2 - 3$，根据我们的假设。
- 同时，$m + k_1 - 1 + m + k_2 - 1 > m + k_1 + k_2 - 3$，因为 $m \ge 2$。
- 同时，对于 $\{i, j\} = \{1, 2\}$，我们有 $|V(G_i)| - 2 - 1 + m + k_j - 1 > m + k_1 + k_2 - 3$，因为 $|V(G_i)| - k_i \ge 3$。

综上，我们有 正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) > m + k_1 + k_2 - 3$。因此，该子情形下结论成立。

(b) 假设 $m + k_1 + k_2 - |V(G)| \ge 2$。在这种情况下，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = |V(G)| - 1 >$正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = |V(G)| - 2$。因此，该子情形下结论仍然成立。

(ii) 若是 $m + k_1 + k_2 - |V(G)| \in \{0, 1\}$，则我们声称，在（8）中仍然有一个等式。注意，在这种情况下，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v})$ = 正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = m + k_1 + k_2 - 3$，并且正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) \le |V(G_1)| - 3 + |V(G_2)| - 3 \le m + k_1 + k_2 - 3$。因此，我们得到

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le m + k_1 + k_2 - 2 = \text{RHS of } (8). \tag{9}$$

另一方面，我们得到 $|V(G_v \setminus v)| = |V(G)| - 1 \ge m + (k_1 + k_2 - 2)$，由条件 $m + k_1 + k_2 - |V(G)| \in \{0, 1\}$可知。由引理 3.7(c)和推论 5.11可得

$$\begin{aligned}a_{m+|V(G)|-1}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\ge a_{m+|V(G)|-2}(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v})\\ &\ge -|V(G)| + 1 + (k_1 + k_2 - 2).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\ge a_{m+|V(G)|-1}(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) + (m + |V(G)| - 1)\\ &\ge -|V(G)| + k_1 + k_2 - 1 + m + |V(G)| - 1\\ &= m + k_1 + k_2 - 2.\end{aligned}$$

结合（9），我们得到正则性$(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = m + k_1 + k_2 - 2$，这就证明了此情形下的结论。□

Rema注 6.4. 在命题 6.3 的假设下，进一步假设 $n_i \geq 3$.

(a) 如果 $G_i = F_{k_i}^{W_i}(K_{n_i})$ 是一个 k_i-纯扇图，那么 $|V(G_i)|-k_i \geq n_i \geq 3$。此外，如果 $k_i = q_i$，那么删点图 $G_i\setminus\{v_i, f_i\} = F_{k_i}^{W_i\setminus\{v_i\}}(K_{n_i-1})$ 仍然是一个 k_i-纯扇图。因此，$|W_i|-1 \geq k_i$。由此可得，$|V(G_i)|-k_i \geq n_i+|W_i|-k_i \geq n_i+1 \geq 4$。所以，$k_i \leq |V(G_i)|-4$。(b) 另一方面，如果 $G_i = F_{n_i}$，显然 $k_i = q_i = 2$，且 $|V(G_i)| - k_i = |V(G_i)| - 2 \geq 4$。

We 可以从命题 6.3 及其证明中得出两个结论。第一个结论是直接的 .

推论 6.5。 在命题 *6.3*的假设下，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq (m+q_1-1)+(m+q_2-1).$$

此外，若 $m \leq \min\{|V(G_1)|-q_1-2, |V(G_2)|-q_2-2\}$，则此处等式成立 $e.$

证明。注意到

$$\begin{aligned}\text{RHS of (7)} &\leq \max\{(m+q_1-1)+(m+q_2-1), m+k_1+k_2-3, m+k_1+k_2-2\}\\ &= (m+q_1-1)+(m+q_2-1),\end{aligned}$$

因为 $k_1 \leq q_1+1$, $k_2 \leq q_2+1$ 和 $m \geq 2$。

此外，若 $m \leq \min\{|V(G_1)|-q_1-2, |V(G_2)|-q_2-2\}$，则

$$\begin{aligned}m+k_1+k_2-|V(G)| &\leq m+q_1+1+q_2+1-|V(G_1)|-|V(G_2)|+3+(m-2)\\ &= (m+q_1+2-|V(G_1)|)+(m+q_2+2-|V(G_2)|)-1\\ &\leq -1.\end{aligned}$$

这引出了命题 (i)(a) 证明中的子情形 6.3，其中我们有

$$\max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} > \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v})$$

因此，式（7）中等式成立，其右端恰好是（$m+q_1-1$）+（$m+q_2-1$）。 □

第二种方法在技术上更复杂。

推论 6.6. 在命题 *6.3* 的假设下，进一步假设 $q_i = k_i$对每个 i 都成立。此外，假设 $|V(G_2)|-k_2 \geq 4$ 且 $m \leq |V(G_1)|-k_1$。那么，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) &< \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\\ &= \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1\setminus\{v_1,f_1\}})+\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_2\setminus\{v_2,f_2\}}).\end{aligned}$$

证明. 由假设可知 $m+k_1+k_2 \leq |V(G_1)|+(|V(G_2)|-4) = |V(G)|-1$。因此，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = m+k_1+k_2-3 = \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}).$$

此外，由命题 (i)(a) 证明中的子情形 6.3 可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1\setminus\{v,f_1\}})+\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_2\setminus\{v,f_2\}}) \geq m+k_1+k_2-2.$$

因此，式（7）中的等式意味着

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) < \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}),$$

正如所要证明的。 □

注 6.7。 若 $G_1 = F_{n_1}$ 且 $G_2 = F_{n_2}$，则推论 6.5 表明，当 $m \leq 2\min\{n_1, n_2\}$–4 时，有正则性 $(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = 2m+2$。该条件是尖锐的。例如，可以取 $n_1 = m$ =3 且 $n_2 = 4$。显然，$2n_1-4 < m < 2n_2-4$。同时，根据命题 $S/\mathcal{J}_{K_m}, G) = 7 < 2m+2$，正则性为 6.3。

接下来，我们通过考察 $G = G_1 \circ G_2$ 的正则性与 G_1 和 G_2的诱导子图的正则性之间的关系，结束本小节。

定理 6.8. 设 $G=(G_1,f_1)\circ(G_2,f_2)$，其中 G_i 是一个 k_i-纯伪扇图，满足 $|V(G_i)|-k_i\geq 3$ 且对每个 i都有 $k_i\geq 1$。进一步假设，对每个i， v_i 是 G_i 中 f_i 的邻点，且 v_1 和 v_2 在 G中被识别为顶点 v。那么，我们有

$$\sum_{i=1}^{2}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_i\setminus\{f_i,v_i\}})\leq\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq\sum_{i=1}^{2}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_i}). \tag{10}$$

证明。（10）中的第一个不等式由引理 2.7显然成立，因为（$G_1\setminus\{f_1,v_1\}$）$\sqcup$（$G_2\setminus\{f_2,v_2\}$）$=G\setminus v$ 是 G的一个诱导子图。

接下来，我们考虑式（10）中的第二个不等式。假设 $G_i\setminus\{v_i,f_i\}$ 对于每个 i都是一个 q_i-纯伪扇图。根据命题 6.3，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq\max\Big\{&\min\{|V(G_1)|-3,m+q_1-1\}+\min\{|V(G_2)|-3,m+q_2-1\},\\&\min\{|V(G)|-1,m+k_1+k_2-3\},\min\{|V(G)|-1,m+k_1+k_2-2\}\Big\}.\end{aligned}$$

为简便起见，令 $A:=\min\{|V(G_t)|-k_t:\ t\in[2]\}$ and $B:=\max\{|V(G_t)|-k_t:\ t\in[2]\}$。假设 $\{j_1,j_2\}=\{1,2\}$使得 $A=|V(G_{j_1})|-k_{j_1}$and $B=|V(G_{j_2})|-k_{j_2}$。由定理 3.9、定理 4.6 以及 $|V(G)|=|V(G_1)|+|V(G_2)|-3$ 这一事实，我们可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_i})&=\min\{|V(G_1)|-1,m+k_1-1\}+\min\{|V(G_2)|-1,m+k_2-1\}\\&=\begin{cases}2m+k_1+k_2-2, & \text{if } m\leq A,\\ m+k_{j_2}+|V(G_{j_1})|-2, & \text{if } A+1\leq m\leq B,\\ |V(G)|+1, & \text{if } m\geq B+1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，我们针对这三种情形证明（10）中的第二个不等式。

首先，注意到 $q_t\leq k_t$ 对每个 t都成立。因此 $\min\{|V(G_1)|-3,m+q_1-1\}+\min\{|V(G_2)|-3,m+q_2-1\}\leq(m+q_1-1)+(m+q_2-1)\leq 2m+k_1+k_2-2$。同时，$\max\{\min\{|V(G)|-1,m+k_1+k_2-3\},\min\{|V(G)|-1,m+k_1+k_2-2\}\}\leq\max\{m+k_1+k_2-3,m+k_1+k_2-2\}=m+k_1+k_2-2<2m+k_1+k_2-2$。这意味着，对所有$m$，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq 2m+k_1+k_2-2$。特别地，当 $m\leq A$时，（10）中的第二个不等式成立。

其次，注意到 $\min\{|V(G_1)|-3,m+q_1-1\}+\min\{|V(G_2)|-3,m+q_2-1\}\leq m+q_{j_2}-1+|V(G_{j_1})|-3<m+k_{j_2}+|V(G_{j_1})|-2$。此外，$\max\{\min\{|V(G)|-1,m+k_1+k_2-3\},\ \min\{|V(G)|-1,m+k_1+k_2-2\}\}\leq\max\{m+k_1+k_2-3,m+k_1+k_2-2\}=m+k_1+k_2-2=m+k_{j_2}+k_{j_1}-2<m+k_{j_2}+|V(G_{j_1})|-2$。这意味着对于所有 m，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq m+k_{j_2}+|V(G_{j_1})|-2$。特别地，如果 $A+1\leq m\leq B$，则 (10) 中的第二个不等式成立。

最后，由引理 2.9 可得，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq|V(G)|-1<|V(G)|+1$。特别地，当 $m\geq B+1$ 时，(10) 中的第二个不等式成立。□

6.2. 通过 $*$ 操作进行粘合。本小节研究图G在 FFan^{p}中的广义二项式边理想的正则性，其中该图由 F$\cup$Fan^p 经过一次 $*$ 操作得到。此情形比上一小节更复杂。

与针对含有 $m=2$ 的二项式边理想情形的 [15, 定理 3.1] 不同，我们没有可加公式

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1*G_2})=\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1})+\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_2})$$

一般而言。事实上，我们将在例 6.22 中证明

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_4,F_3*F_3})\leq 8<2\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_4,F_3})=10.$$

因此，我们转而期望得到如下次可加公式

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1*G_2})\leq\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1})+\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_2}),$$

至少对于本文所讨论的图而言是如此。为此，我们需要做一些准备。

设定6.9. 令 $G = G_1 \cup_v G_2$ 为两个图 G_1 和 G_2的团和。假设$G_1 = F_k^W(K_n)$ 是 W上的 K_n的 k-纯扇图，且 $v \in V(K_n) \setminus W$。同时，假设 $G_2 = P_t$ 是 $t \geq 2$ 的一个含 t 个顶点的路径，且 v 是 G_2的一个叶子。

观察 6.10. 在设定6.9中，设 u 是 P_t 中 v 的唯一邻点。显然， G_v 的形式为 $F_k^W(K_{n+1}) \cup_u P_{t-1}$，而 $G_v \setminus v$ 的形式为 $F_k^W(K_n) \cup_u P_{t-1}$。同时， $G\setminus v$ 是 $F_k^W(K_{n-1})$ 与 P_{t-1} 的不交并。此外， $G = F_{k+1}^{W\cup\{v\}}(K_n) * P_{t-1} = F_{k+1}^{W\cup\{v\}}(K_n) * \underbrace{F_1 * F_1 * \cdots * F_1}$ $\in \mathsf{FFan}^p_{.t-2}$

命题 6.11. 在设定 *6.9*的假设下，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_2}). \tag{11}$$

此外，若 $m \geq k+1$，则这里有一个等式。

(11) 的右端为 $\min\{|V(G_1)| - 1,\ m + k - 1\} + t - 1$ 根据定理 3.9 和引理 4.4。此外，我们也允许命题 $k = 0$ 中出现退化情形 6.11，其中 G_1 是完全图 K_n。

证明。 我们对 $t \geq 2$ 进行归纳证明。若 $t = 2$，则由定理 3.9 可知此结论成立，因为 $G = F_{k+1}^{W\cup\{v\}}(K_n)$。特别地，在这一步我们得到了一个等式。下面假设 $t \geq 3$。由观察 6.10 和归纳法可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) \leq \min\{|V(G_1)|, m + k - 1\} + t - 2 \tag{12}$$

and

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) \leq \min\{|V(G_1)| - 1, m + k - 1\} + t - 2. \tag{13}$$

与此同时，

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = \min\{|V(G_1)| - 2, m + k - 1\} + t - 2$$

由定理 3.9 和引理 4.4可知。由引理2.3(b) 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\leq \max\{|V(G_1)| + t - 2, |V(G_1)| - 1 + t - 2 + 1, |V(G_1)| - 2 + t - 2\}\\ &= |V(G_1)| + t - 2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\leq \max\{m + k - 1 + t - 2, m + k - 1 + t - 2 + 1, m + k - 1 + t - 2\}\\ &= m + k + t - 2.\end{aligned}$$

因此，(11)中的不等式成立。

在证明的其余部分，我们进一步假设 $m \geq k+1$。因此，由归纳法可知，(12)和(13)中的等式成立。若 $|V(G_1)| \leq m + k - 1$，则

$$\begin{aligned}\max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} &= \max\{|V(G_1)| + t - 2, |V(G_1)| - 2 + t - 2\}\\ &= |V(G_1)| + t - 2 \neq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = |V(G_1)| - 1 + t - 2.\end{aligned}$$

因此，由引理2.3(b)，(11)中的等式成立。

在接下来的部分中，我们假设 $|V(G_1)| \geq m + k$。因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\geq a_{m+|V(G)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) + m + |V(G)| - 1\\ &\geq (-|V(G)| + k + t - 1) + m + |V(G)| - 1 = m + k + t - 2,\end{aligned}$$

根据推论 6.13。注意，在这种情况下，式 (11) 的右端也可表示为 $m + k + t - 2$。因此，这里仍可得到一个等式。 □

此外 ，除了直接研究正则性之外，我们还需要了解 a-不变量的信息 s.

引理6.12。 在设定*6.9*的假设下，我们有

$$a_{m+|V(G)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq a_{m+|V(G)|-1-(t-2)}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{k+1}^{W\cup\{v\}}(K_n)}).$$

证明。 注意到 $G_v \setminus v$ 与 G' 同构: $= F_k^W(K_n) \cup_v P_{t-1}$ 其中 $|V(G')| = |V(G)| - 1$。由推论 5.11 可知

$$a_{m+|V(G)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \geq a_{m+|V(G')|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G'}).$$

对 t 使用归纳法，我们可以得到所需的不等式，因为 $F_{k+1}^{W\cup\{v\}}(K_n)$ 同构于 $F_k^W(K_n) \cup_v P_2$。□

推论 6.13. 在设定 *6.9* 的假设下，我们还假设 $|V(G_1)| \geq m + k$。那么，$a_{m+|V(G)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,\ G}) \geq -|V(G)| + k + t - 1$。

证明。 令 $\widetilde{\ }G = F_{k+1}^{W\cup\{v\}}(K_n)$。显然， $|V(\widetilde{\ }G)| + t - 2 = |V(G_1)| + t - 1 = |V(G)|$。因此，由引理3.7(c) 和引理 6.12 可得

$$\begin{aligned} a_{m+|V(G)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\geq a_{m+|V(\widetilde{G})|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}}) \geq -|V(\widetilde{G})| + (k+1) \\ &= -|V(G)| + k + t - 1. \end{aligned}$$

□

下面，我们给出当 $*$ 运算应用于伪扇图与路径图时的次可加公式。

命题 6.14. 设 $G = G_1 *_f P_t$，使得 G_1 是一个 k-纯伪扇图， $|V(G_1)| - k \geq 3$， $t \geq 2$，且 $k \geq 1$。那么我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_t}). \tag{14}$$

此外，若 $m \geq k$，那么这里取等号。

证明。 由定理 3.9、引理4.4和定理 4.6 (14) 的右端为

$$t - 1 + \begin{cases} m + k - 1, & \text{if } m + k \leq |V(G_1)|, \\ |V(G_1)| - 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明不等式 (14，令 v 为 f 在 G_1 中的邻点，并令 H 为顶点集 $N_G[v]$上的完全图。不难看出以下事实。

(a) 假设 G_1 是扇图 $F_k^W(K_n)$，其对应于 $W = W_1 \sqcup \cdots \sqcup W_k$。不失一般性，假设 $v \in W_1$。那么， G_v是团和 $F_{k-1}^{W\setminus W_1}(H) \cup_f P_t$， $G_v \setminus v$是团和 $F_{k-1}^{W\setminus W_1}(H \setminus v) \cup_f P_t$，且 $f \in H \setminus v$。此外， $G \setminus v$是 $F_q^{W\setminus\{v\}}(K_{n-1})$ 与 P_t的不交并，其中 $q = k - 1$或 k。

(b) 假设 $G_1 = F_p$。由于在这种情况下 $k = 2$，因此我们有 $p \geq 3$。于是， $G_v = F_1^{W'}(H) \cup_f P_t$ 且 $G_v \setminus v = F_1^{W'}(H \setminus v) \cup_f P_t$，使得 $H = K_{p+1}$、 $W' = N_{F_p}(v) \setminus f$，并且 $f \in H \setminus v$。此外， $G \setminus v$ 是 F_{p-1} 和 P_t 的不交并。在这种情况下，我们可以设 $q = 2$，以便后续讨论。

由命题 6.11 可知

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) &\leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_1)_v}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_t}) \\ &= \min\{|V(G_1)| - 1, m + k - 2\} + t - 1, \end{aligned} \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) &\leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_1)_v\setminus v}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_t}) \\ &= \min\{|V(G_1)| - 2, m + k - 2\} + t - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

同时，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = \min\{|V(G_1)| - 3, m + q - 1\} + t - 1$$

由定理 3.9、引理 4.4和定理 4.6可知。由引理2.3(b) 得 t

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\leq \max\{|V(G_1)| - 1, |V(G_1)| - 3, |V(G_1)| - 2 + 1\} + t - 1 \\ &= |V(G_1)| - 1 + t - 1. \end{aligned}$$

出于同样的原因，我们也有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\leq \max\{m+k-2, m+q-1, m+k-2+1\}+t-1\\ &= m+k-1+t-1,\end{aligned}$$

因为 $q \leq k$，所以 (14) 中预期的不等式随即成立。

最后，假设 $m \geq k$，并证明 (14) 中等式成立。由命题 6.11，我们得到 (15) 和 (16) 中的等式。当 $|V(G_1)| \leq m+k-1$ 时，

$$\begin{aligned}\max\{\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} &= \max\{|V(G_1)|+t-2, |V(G_1)|+t-4\}\\ &= (|V(G_1)|-1)+t-1 \neq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) = (|V(G_1)|-2)+t-1.\end{aligned}$$

因此，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = (|V(G_1)|-1)+t-1$ 由引理 2.3(b)可得，这就证明了此情形下 (14) 中的等式。

另一方面，当 $|V(G_1)| \geq m+k$ 时，我们仍然可以证明 (14) 中的等式成立。事实上，由于 $G_v \setminus v = F_{k-1}^{W\setminus W_1}(H \setminus v) \cup_f P_t$, $|V(F_{k-1}^{W\setminus W_1}(H \setminus v))| = |V(G_1)|-1 \geq m+(k-1)$，并且在这种情况下 $|V(G)| = |V(G_v \setminus v)|+1$，由推论 5.11 和推论 6.13 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &\geq a_{m+|V(G)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) + m + |V(G)| - 1\\ &\geq a_{m+|V(G_v\setminus v)|-1}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) + m + |V(G)| - 1\\ &\geq -|V(G_v \setminus v)| + (k-1) + t - 1 + m + |V(G)| - 1\\ &= m+k+t-2.\end{aligned}$$

注意　式 (14) 的右端也可表示为 $m+k+t-2$。因此，这里仍然有一个等式。 □

T以下结果给出了应用 $*$ 运算时一个罕见的可加公式。

推论 6.15. 设 $G = F_p *_f P_t$ 满足 $p \geq 1$ 和 $t \geq 2$。则有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) &= \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_p}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_t})\\ &= \min\{2p-1, m+1\}+t-1.\end{aligned}$$

证明。若 $p = 1$ 或 2，则显然有 $G = P_{2p-1+t}$。由于 $m \geq 2$，所需公式由引理 4.4 得出。若 $p \geq 3$，则由于 $k = 2$ 和 $|V(F_p)|-2 \geq 3$，只需应用命题 6.14。 □

推论 6.16. 设 $G = F_k^W(K_n) \circ_v P_t$ 满足 $n \geq 3$。则有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_k^W(K_n)}) + \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_t}) - s,$$

$$where\ s = \begin{cases}1, & if\ t=2,\\ 2, & if\ t \geq 3.\end{cases}$$

证明。设 $G_1 = F_k^W(K_n)$ 和 f 是 G_1 中的叶子，其邻点为 v。

(a) 若 $t = 2$，则 $G = G_1 \setminus f$。特别地，由引理 2.7，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_1})$。另一方面，由引理 4.4，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_2}) = 1$。在此情形下，所述不等式显然成立。(b) 若 $t = 3$，则 $G = G_1$。所需的不等式显然成立，因为 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_3}) = 2$。(c) 若 $t \geq 4$，则 $G = F_k^W(K_n) * P_{t-2}$。由命题 6.14 可得所需结果，因为 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_t}) = \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,P_{t-2}}) + 2$。 □

从命题 6.14 和推论 6.15的证明可以清楚看出，团和对于研究 $*$ 运算至关重要。因此，接下来我们将研究更复杂组合的团和。

命题 6.17. 设 $G = G_1 \cup_u G_2$ 是两个图 G_1 和 G_2的团和。假设$G_2 = F_{k_2}^{W_2}(K_{n_2})$是 K_{n_2}上关于 W_2 的 k_2纯扇图，且 $|V(G_2)|-k_2 \geq 3$ 以及 $u \in V(K_{n_2})\setminus W_2$,

并且 G_1 是一个 k_1纯伪扇图，具有 $|V(G_1)|-k_1\geq 3$ 和 $k_1\geq 1$。进一步假设 u 是 G_1 的一片叶子，且 v 是 u 在 G_1中的唯一邻点。那么，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq \min\{(m+k_1-1)+(m+k_2-1),m+k_2+|V(G_1)|-2\}.$$

证明。令 H 为顶点集 $N_G[v]$上的完全图。于是， G_v 可视为由某个 $\circ$操作，将某个 W_1'上的扇图 $F_{k_1}^{W_1'}(H)$ 与某个 W_2'上的扇图 $F_{k_2+1}^{W_2'}(K_{n_2})$ 得到的图。注意，顶点数满足 $|V(F_{k_1}^{W_1'}(H))|=|V(G_1)|+1$ 且$|V(F_{k_2+1}^{W_2'}(K_{n_2}))|=|V(G_2)|+1$。因此，由命题 6.3 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v})\leq \max\big\{&\min\{|V(G_1)|-2,m+(k_1-1)-1\}+\min\{|V(G_2)|-2,m+k_2-1\},\\ &\min\{|V(G)|-1,m+k_1+(k_2+1)-3\},\\ &\min\{|V(G)|-1,m+k_1+(k_2+1)-2\}\big\}.\end{aligned}$$

与此同时， $G\setminus v$是不交并，由一个 q_1-纯伪扇图 $G_1\setminus\{u,v\}$ 和 G_2组成，其中$q_1=k_1-1$ 或 k_1。因此，由定理3.9 可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})=\min\{|V(G_1)|-3,m+q_1-1\}+\min\{|V(G_2)|-1,m+k_2-1\}.$$

从这些观察中可以得出两个结论。首先，由于 $m\geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v})&\leq \max\{2m+k_1+k_2-3,m+k_1+k_2-2,m+k_1+k_2-1\}\\ &=2m+k_1+k_2-3.\end{aligned}$$

与此同时，我们得到

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\leq (m+q_1-1)+(m+k_2-1)\leq 2m+k_1+k_2-2.$$

因此，应用推论 2.8 后，有 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq (m+k_1-1)+(m+k_2-1)$。其次，我们还有

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_v})&\leq \max\{|V(G_1)|-2+m+k_2-1,m+k_1+k_2-2,m+k_1+k_2-1\}\\ &\leq m+k_2+|V(G_1)|-3\end{aligned}$$

因为 $|V(G_1)|-k_1\geq 3$。另一方面，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\leq (m+k_2-1)+(|V(G_1)|-3).$$

因此，应用推论 2.8 后，有 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq m+k_2+|V(G_1)|-2$. □

注 6.18。在命题 6.17 中，如果 $G_1=F_1$，那么 $G=F_{k_2+1}^{W\cup\{u\}}(K_n)$ 是一个（k_2+1）-纯扇图。由定理 3.9 可知，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})=\min\{|V(G)|-1,m+k_2\}$。另一方面，如果 $G_1=F_2$，那么 $G=F_{k_2+1}^{W\cup\{u\}}(K_n)\ast_v P_3$。因此，根据定理 3.9和命题 6.14，我们得到 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq m+k_2+2$。

现在我们可以给出本小节的第一个主要结果。

定理 6.19. 设 $G=(G_1,f_1)\ast(G_2,f_2)$，其中 G_i是一个 k_i-纯伪扇图，满足$|V(G_i)|-k_i\geq 3$，且对每个 i都有 $k_i\geq 1$。设对于 $i=1$，2， v_i是 G_i中 f_i的邻点，而 G中的$f=f_1=f_2$。则有

$$\sum_{i=1}^{2}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_i\setminus\{f_i,v_i\}})\leq \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G})\leq \sum_{i=1}^{2}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_i}).\tag{17}$$

证明。 (17) 的第一个不等式由引理 2.7可直接得到。下面我们处理 (17) 的第二个不等式。为简便起见，令 $A:=$最小值$\{|V(G_i)|-k_i:\ \ i\in[2]\}$ 并令 $B:=$最大值$\{|V(G_i)|-k_i:\ \ i\in[2]\}$。不失一般性，我们可以假设 $A=|V(G_1)|-k_1$

和 $B = |V(G_2)| - k_2$。根据定理 3.9、定理 4.6 以及 $|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 1$，我们可以得到

$$\sum_{i=1}^{2} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) = \min\{|V(G_1)| - 1, m + k_1 - 1\} + \min\{|V(G_2)| - 1, m + k_2 - 1\}$$

$$= \begin{cases} 2m + k_1 + k_2 - 2, & \text{if } m \le A, \\ m + k_2 + |V(G_1)| - 2, & \text{if } A + 1 \le m \le B, \\ |V(G)| - 1, & \text{if } m \ge B + 1. \end{cases} \tag{18}$$

由于 $G_{v_2} = G_1 \cup_f (G_2)_{v_2}$ 是一个 k_1-纯伪扇图与一个 $(k_2 - 1)$-纯扇图的团和，且满足命题 6.17中的条件，我们可以得到

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_2}}) \le (m + k_1 - 1) + (m + k_2 - 2).$$

由于 $G \setminus v_2$ 是图 G_1 与一个 q_2-纯伪扇图的不交并，且满足$q_2 \le k_2$，因此有

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_2}) &= \min\{|V(G_1)| - 1, m + k_1 - 1\} + \min\{|V(G_2)| - 3, m + q_2 - 1\} \\ &\le (m + k_1 - 1) + (m + q_2 - 1) \end{aligned} \tag{19}$$

由定理 3.9 和定理 4.6，可得正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le 2m + k_1 + k_2 - 2$ 由推论 2.8。因此，

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le \min\{2m + k_1 + k_2 - 2, |V(G)| - 1\}$$

由引理 2.9。

因此，鉴于（18），只需假设 $A + 1 \le m \le B$ 并证明正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le m + k_2 + |V(G_1)| - 2$。注意

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_2}}) \le m + (k_2 - 1) + |V(G_1)| - 2$$

由命题 6.17。同时，

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_2}) \le (|V(G_1)| - 1) + (m + q_2 - 1) \le m + k_2 + |V(G_1)| - 2$$

由（19）可得所需结果。再由推论 2.8，证明完成。 □

根据定理 6.19的证明，我们可以作出以下快速估计。

推论 6.20。 在定理 *6.19*的假设下，我们有如下估计 *s:*

(a) $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{k_1}^{W_1}(K_{n_1})*F_{k_2}^{W_2}(K_{n_2})}) \le 2m + k_1 + k_2 - 2$,

(b) $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{n_1}*F_{k_2}^{W_2}(K_{n_2})}) \le 2m + k_2$, *and*

(c) $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{n_1}*F_{n_2}}) \le 2m + 2$.

推论 6.21。设 $n_1, n_2 \ge 3$ 是整数。若 $m \le \min\{2n_1 - 2, 2n_2 - 4\}$，则

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{n_1}*_f F_{n_2}}) = \sum_{i=1}^{2} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{n_i}}) = 2m + 2.$$

证明。设 v_2 是图 G_2中 f 的邻点。注意到 $G \setminus v_2 = F_{n_1} \sqcup F_{n_2-1}$。若$m \le \min\{2n_1 - 2, 2n_2 - 4\}$，则 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_2}) = 2m + 2$ 由定理 4.6。由于 $G \setminus v_2$ 是 G的诱导子图，这意味着 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \ge 2m + 2$ 由引理 2.7。同时，根据推论 6.20，我们有 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le 2m + 2$。因此，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) = 2m + 2$。与此同时，容易验证，若 $m \le \min\{2n_1 - 2, 2n_2 - 4\}$，则 $\sum_{i=1}^{2} \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_{n_i}}) = 2m + 2$。□

例 6.22. 令 m 为 3 或 4，且 $G = (G_1, f_1) * (G_2, f_2)$，其中 $G_1 = G_2 = F_3$。在这种情况下，推论 6.21 的条件不成立。事实上，我们断言 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,F_3*F_3}) \le 8$。为了验证这一断言，对于每个 i，令 v_i 为 f_i 在 G_i 中的邻点。由定理 3.9、定理 4.6和命题 6.3，我们得到 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_2})_{v_1}}) \le 2m$，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_2})_{v_1}\setminus v_1}) \le$。

$m+3$，并且 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_2}\setminus v_1}) \le m+3$。由引理 2.3(b) 可知，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_2}}) \le 8$。类似地，我们可以得到 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_2}\setminus v_2)v_1}) \le m+3$、$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_2}\setminus v_2)_{v_1}\setminus v_1}) \le 6$ 和 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_2}\setminus v_2)\setminus v_1}) \le m+3$。由引理 2.3(b) 可知，$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_2}\setminus v_2}) \le 7$。最后，我们有 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_2}) = m+4$。因此，引理 2.3(b) 和引理 2.6 中的正合列 (2) 推出 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le 8$，如所述。

特别地，对于 $(m, n_1, n_2) = (4, 3, 3)$，推论6.20(c) 中的不等式是严格的。对于 $(m, n_1, n_2) = (3, 3, 3)$，目前尚不清楚推论6.20(c) 中的不等式是否严格。

问题 6.23。对于一般的图 G_1 和 G_2，（17）中的第二个不等式是否成立?

6.3. 主要结果。在下一小节中，我们将结合此前讨论过的所有图和运算。先介绍一个有用的引理。

引理 6.24。假设 $G = (G_1, f_1) * (G_2, f_2)$。设 v_i 是 f_i 在 G_i 中关于 $i = 1$ 的邻点，其中 2。另假设 f_1 和 f_2 在 G 中被识别为 f。那么，

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le \max\{ &\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_1}), \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_1}\setminus v_2}) + 1,\\ &\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_1})_{v_2}\setminus f}) + 2, \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,((G_{v_1})_{v_2})_f}) + 3\}.\end{aligned}$$

证明。只需依次对 $(G_{v_1})_{v_2}$ 应用推论2.8，相对于 f，G_{v_1} 相对于 v_2，以及 G 相对于 v_1。□

现在到了本节主要结果的论述部分。在下面的定理中，我们还将路径图纳入讨论，以使最终结果更加精确一些。注意，路径图 $P_t = P_2 * \cdots * P_2$（$t-1$ 个）当 P_2 只是 F_1 且 P_4 是 F_2时。

定理 6.25. 设 N 为一个正整数。假设 $G = G_1 \circledast_1 \cdots \circledast_{N-1} G_N$，其中每个 G_i 要么是具有 $n_i \ge 2$ 的路径图 P_{n_i}，要么是具有 $|V(G_i)| \ge 3$ 的 k_i-纯伪扇图。此外，每个 $\circledast_i$ 要么是一个仅使用标记叶的 $*$ 运算，要么是一个仅使用标记叶的 $\circ$ 运算。那么，我们有

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le \sum_{i=1}^{N} \ell_i, \tag{20}$$

其中，$\ell_i := \text{®}n_i - 1$，若 $G_i = P_{n_i}$，$m + k_i - 1$ G_i k_i，若是一个 -纯伪扇图。

证明。如果某个 G_i 是一个 k_i-纯伪扇图，且满足 $|V(G_i)| - k_i \le 2$，我们可以将其替换为G_i 一个 k_i-纯伪扇图 G_i'，使得 $|V(G_i')| - k_i \ge 3$，并且 G_i 作为标记图是G_i' 的一个诱导子图。通过这一约化，在后续证明中，我们可以直接使用推论6.5、命题6.14 和定理6.19等结果，而无需检验$|V(G_i)| - k_i \ge 3$ 条件。

现在，我们通过两阶段归纳证明（20）中的断言。第一阶段归纳针对 N 进行。当 $N = 1$ 时，分别由定理 3.9、引理 4.4 和定理 4.6 得出。当 $N = 2$ 时，则由引理 4.4、推论 6.5、命题 6.14、推论 6.16 和推论 6.20 得出。下文中，我们假设 $N \ge 3$。假设操作 $\circledast_1$ 是针对标记叶 $f_1 \in G_1$ 和 $f_2 \in G_2$执行的。令v_i 为 f_i 在 G_i 中对应于 $i = 1$、2 的邻点。我们分以下四种情况讨论。

(1) 首先，假设 $G_i = P_{n_i}$ 对于 $i = 1$，2。于是，$G = P_n \circledast_2 G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$，其中 $n = n_1 + n_2 - 3$ 若 $\circledast_1 = \circ$，或者 $n = n_1 + n_2 - 1$ 若 $\circledast_1 = *$。因此，由归纳假设可得预期结果。(2) 接下来假设 $G_1 = P_{n_1}$ 且 $G_2 \ne P_{n_2}$。若 $\circledast_1 = \circ$ 且 $n_1 = 2$，则 G 是 $G_2 \circledast_2 \cdots \circledast_{N-1} G_N$的诱导子图。在这种情况下，由归纳假设和引理 2.7可得所需的不等式。反之，若 $\circledast_1 = \circ$ 且 $n_1 \ge 3$，则 $G = P_{n_1-2} * G_2 \circledast_2 \cdots \circledast_{N-1} G_N$。

因此，只需证明 $G = P_{n_1} * G_2 \circledast_2 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 时的断言。接下来，关于 $n_1 \geq 1$ 进行第二阶段归纳。当 $n_1 = 1$ 时的退化情形由归纳假设可得，因为在这种情况下 $G = G_2 \circledast_2 \cdots \circledast_{N-1} G_N$。因此，我们可以假设 $n_1 \geq 2$。不难观察到以下结论。

- 图 $G \backslash v_2$是不交并，由 P_{n_1}和 $(G_2 \backslash \{f_2, v_2\}) \circledast_2 G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$组成。注意，后者是 $G_2 \circledast_2 G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 的诱导子图。
- 图 $G_{v_2} = H \circledast_2 G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$，其中 H是通过 $*$ 运算由P_{n_1-1} 和一个（$k_2 - 1$）-纯扇图得到的图。

因此，根据引理 2.7、引理 4.4以及关于 N 和 n_1 的归纳假设可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G\backslash v_2}) \leq \ell_1 + \sum_{i=2}^{N} \ell_i,$$

and

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_{v_2}}) \leq (\ell_1 - 1) + (\ell_2 - 1) + \sum_{i=3}^{N} \ell_i.$$

接下来应用推论2.8。

（3）对称地假设 $G_1 \neq P_{n_1}$ 以及 $G_2 = P_{n_2}$。同样地，我们可以假设$\circledast_1 = *$。通过应用与（2）中关于点 v_1的类似论证，可以得到所需结果。

(4) 最后，假设 G_1 和 G_2 都不是路径图。在这种情况下，我们考虑以下两个子情形。

(i) 假设 $\circledast_1 = \circ$。设 v_1 和 v_2 在 G 中被识别为 v。不难观察到以下结论。

- 图 $G \setminus v$ 是 $G_1 \setminus \{f_1, v_1\}$ 与 $(G_2 \setminus \{f_2, v_2\})$ $\circledast_2 G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 的不交并。注意，$G_1 \setminus \{f_1, v_1\}$ 和 $G_2 \setminus \{f_2, v_2\}$ 分别是 G_1 和 G_2 的诱导子图。
- 图 G_v 由一个（$k_1 + k_2 - 2$）-纯扇图和 $G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 通过 $\circledast_2$ 运算得到。

因此，由引理 2.7 以及关于 N的归纳假设，可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G\backslash v}) \leq \sum_{i=1}^{N} \ell_i,$$

and

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_v}) \leq (m + (k_1 + k_2 - 2) - 1) + \sum_{i=3}^{N} \ell_i = -(m+1) + \sum_{i=1}^{N} \ell_i.$$

接下来只需应用推论 2.8。

(ii) 假设 $\circledast_1 = *$。设 f_1 和 f_2 在 G 中被识别为 f。不难看出如下结论。

- 图 $G \setminus v_1$ 是 $G_1 \setminus \{f_1, v_1\}$ 与 $G_2 \circledast_2 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 的不交并。
- 图 $G_{v_1} \setminus v_2$ 是一个 $(k_1 - 1)$-纯扇图与 $(G_2 \setminus \{f_2, v_2\})$ $\circledast_2 G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 的不交并。
- 图 $(G_{v_1})_{v_2} \setminus f$ 是一个 $(k_1 - 1)$-纯扇图与一个图的不交并，后者由一个 $(k_2 - 1)$-纯扇图和 $G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 通过 $\circledast_2$ 运算得到。
- 图$((G_{v_1})_{v_2})_f$是由一个$(k_1 + k_2 - 2)$-纯扇图和 $G_3 \circledast_3 \cdots \circledast_{N-1} G_N$ 通过 $\circledast_2$ 运算得到的图。

因此，由引理2.7、定理3.9、定理4.6以及关于 N的归纳假设，可得

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_1}) \le (m+k_1-1)+\sum_{k=2}^{N}\ell_i,$$

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_1}\setminus v_2}) \le (m+(k_1-1)-1)+\sum_{k=2}^{N}\ell_i,$$

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,(G_{v_1})_{v_2}\setminus f}) \le (m+(k_1-1)-1)+(m+(k_2-1)-1)+\sum_{k=3}^{N}\ell_i,$$

and

$$\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,((G_{v_1})_{v_2})_f}) \le (m+(k_1+k_2-2)-1)+\sum_{k=3}^{N}\ell_i.$$

接下来只需注意到 6.24 ，即可应用引理 $m \ge 2$。 □

<escape>以下结果讨论了定理 6.25 的一个特殊情形。它给出了一个更精确的结果，可以将其视为 [13, 定理 4。6] 的推广。值得注意的是， [13, 定理 4。6] 由于归纳法错误而存在一个错误，后来这一错误在 Arvind Kumar 的学位论文中得到了纠正。</escape>

推论 6.26。设 $m,t \ge 2$ 为整数。假设 $G = G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_t$，其中每个 G_i 都是一个 k_i-纯伪扇图，且满足 $|V(G_i)| - k_i \ge 1$。对于每个 $i \in [t]$ 和 $j \in [2]$，设 $f_{i,\,j}$ 是 G_i 的一个标记叶子，且 $v_{i,\,j}$ 是其邻点，使得 $v_{i,\,2}$ 和 $v_{i+1,\,1}$ 通过 $\circ$ 操作在 G 中被识别。令 $G_1 := G_1 \setminus \{v_{1,2}, f_{1,2}\}$, $G_t := G_t \setminus \{v_{t,1}, f_{t,1}\}$ 和 $G_i := G_i \setminus \{v_{i,1}, f_{i,1}, v_{i,2}, f_{i,2}\}$，对所有 $i = 2,\ldots,t-1$ 均成立。此外，假设 G_i 是一个 q_i-纯伪扇图。那么，我们有以下结果。

(A) 首先，我们有

$$\sum_{i=1}^{t}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G_i}}) \le \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \le \sum_{i=1}^{t}(m+k_i-1). \tag{21}$$

(B) 其次，假设满足以下技术条件：

(a) 如果 $G_i = F_{k_i}^{W_i}(K_{n_i})$ 是一个 k_i-纯扇图，那么当 $i = 1$ 或 t 时， $|V(G_i)| - k_i \ge 4$；当 $2 \le i \le t-1$ 时， $|V(G_i)| - k_i \ge 6$；(b) 如果 $G_i = F_{n_i}$，那么当 $i = 1$ 时， $n_i \ge 2$；当 $i = t$ 时， $n_i \ge 3$；当$2 \le i \le t-1$ 时， $n_i \ge 4$；(c) 对每个 i，都有 $k_i = q_i$；(d) 对每个 i，都有 $m \le r_i := ®|V(G_i)| - k_i$，如果 $i = 1$ 且 t， $|V\ G_i\ | - k_i - 4$ $2 \le i \le t-1$( ) , if .

于是，(21) 中的第一个不等式变为等式。也就是说，我们有

$$\sum_{i=1}^{t}\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G_i}}) = \operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}).$$

证明。 (A) 由于 $G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_t$ 是 G的一个诱导子图，因此（21）中的第一个不等式由引理 2.7得出。至于第二个不等式，我们可以使用定理 6.25。

(B) 在下文中，我们通过对 t 进行归纳法来证明该断言。

基例是当 $t = 2$。

(i) 若 $G_1 = F_2$，则 $G = F_1 * G_2$。此外，根据假设 $m \ge 2$ 和 $m \le r_1 = |V(G_1)| - k_1 = 2$，可得 $m = 2$。因此，由 [15, 定理 3.1] 和引理 4.4，我们得到 $\operatorname{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,\,G}) = \operatorname{reg}(S/J_G) = \operatorname{reg}(S/J_{F_1}) + \operatorname{reg}(S/J_{G_2})$。另一方面，

$\widetilde{\ }$显然，$G_1 = F_1$。另一方面，$\mathrm{reg}(S/J_{G_2}) = \mathrm{reg}(S/J_{\widetilde{G_2}})$，由[13, 定理 3.4]。所声称的等式现在显然成立。

(ii) 否则，G_1是一个 k_1-纯伪扇图，具有 $|V(G_1)| - k_1 \geq 4$，根据假设 (B)(a) 或注记 6.4。所需结果由推论 6.6涵盖。

这就完成了基例的证明。

接下来，假设 $t \geq 3$。在这种情况下，设 v_{t-1},2 和 v_t,1 在 G 中被识别为 v。那么，我们有 $G \setminus v = (G_1 \circ \cdots \circ G_{t-2} \circ G_{t-1}) \sqcup G_t$，其中 $G_{t-1} := G_{t-1} \setminus \{v_{t-1,2}, f_{t-1,2}\}$。由于根据假设有 $m \leq |V(G_{t-1})| - k_{t-1} - 4$，由定理 3.9 和定理 4.6 可得 $\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \mathrm{fl}_{G_{t-1}'\setminus\{v_{t-1,1}, f_{t-1,1}\}}}) = \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \mathrm{fl}_{G_{t-1}}}) = m + k_{t-1} - 1$。此外，由于 $m \leq \min\{r_1, \ldots, r_t\}$，有 $m \leq \min\{r_1, \ldots, r_{t-2}, r'_{t-1}\}$，其中 $r'_{t-1} := |V(\mathrm{fi}G_{t-1}')| - k_{t-1} = |V(G_{t-1})| - 2 - k_{t-1} = r_{t-1} + 2$。(a)、(b) 和 (c) 的条件可以用类似的方法验证。因此，由归纳法可得

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_1 \circ \cdots \circ G_{t-2} \circ \widetilde{G_{t-1}'}}) &= \sum_{i=1}^{t-2} \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_i}}) + \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_{t-1}'}\setminus\{v_{t-1,1}, f_{t-1,1}\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_i}}).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G\setminus v}) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_i}}). \tag{22}$$

接下来，我们声称:

$$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_v\setminus v}) \leq \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_v}) < \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G\setminus v}).$$

为确认这一结论，首先注意到 $G_v \setminus v$ 是 G_v 的一个诱导子图。因此，根据引理 2.7，我们有 $\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_v\setminus v}) \leq \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_v})$，这就证明了该结论的第一部分。此外，$G_v$ 是图 $(G_1 \circ \cdots \circ G_{t-2}) \circ G'$，其中 $G' := (G_{t-1} \circ G_t)_v$ 是一个 $(k_{t-1} + k_t - 2)$-纯扇图。在假设 $m \leq \min\{r_1, r_2, \ldots, r_t\}$ 的条件下，还有 $m \leq \min\{r_1, \ldots, r_{t-2}, r'\}$，其中 $r' := |V(G')| - (k_{t-1} + k_t - 2) = (|V(G_{t-1})| + |V(G_t)| - 3) - (k_{t-1} + k_t - 2) = r_t + r_{t-1} + 3$。(a)、(b) 和 (c) 的条件也可以用类似的方法验证。通过归纳法，我们现在得到

$$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G_v}) = \sum_{i=1}^{t-2} \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_i}}) + \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, G'\setminus\{v_{t-1,1}, f_{t-1,1}\}}), \tag{23}$$

其中 $G' \setminus \{v_{t-1,1}, f_{t-1,1}\} = (G'_{t-1} \circ G_t)_v$ 对于 $G'_{t-1} := G_{t-1} \setminus \{v_{t-1,1}, f_{t-1,1}\}$。

由 (22) 和 (23)，我们只需证明

$$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, (G'_{t-1} \circ G_t)_v}) < \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_{t-1}}}) + \mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m, \widetilde{G_t}}). \tag{24}$$

fi为此，我们考察图 $G'_{t-1} \circ G_t$。由于 $G'_{t-1} \setminus \{v_{t-1,2}, f_{t-1,2}\} = G_{t-1}$，不难看出 G'_{t-1} 也是一个 k_{t-1}-纯伪扇图。进一步地，有 $m \leq \min\{r'_{t-1}, r_t\}$ 其中 $r'_{t-1} := |V(G'_{t-1})| - k_{t-1} = |V(G_{t-1})| - 2 - k_{t-1} = r_{t-1} + 2$。由于 (a)、(b) 和 (c) 的条件可用类似方法验证，由推论 6.6 可知，(24) 成立。

由于有（24），由引理2.3(b) 可得正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G})$ = 正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})$，证明至此完成。□

注 6.27. 不对 m 施加推论 6.26 (B) 中的条件 (d)，我们可以在方程 (21) 中得到严格不等式。例如，如果 $t = 2$、$G_1 = G_2 = F_3$ 和 $m = 5$，那么根据定理 4.6 和命题 6.3，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m, \circ G_1})$ + 正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m, \circ G_2})$ = 6 < 正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m, G})$ = 7 < $2(m+1)$ = 12。

我们通过以下示例说明定理 6.25 的结果。

例 6.28。 (a) 设 $G = F_3^{W_1}(K_5) \circ F_3 * F_2^{W_2}(K_4) \circ P_6 \circ F_3$ 为图 1 中所示的图。它也可以表示为 $G = F_3^{W_1}(K_5) \circ F_3 * F_2^{W_2}(K_4) * P_2 * F_3$。利用

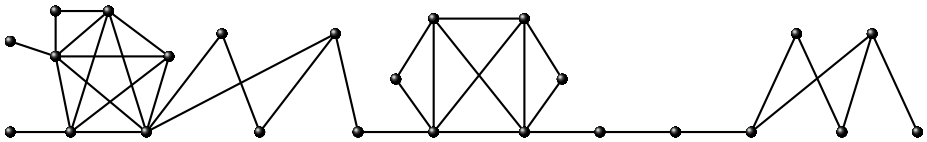

FIGURE 1. $F_3^{W_1}(K_5) \circ F_3 * F_2^{W_2}(K_4) \circ P_6 \circ F_3$

从第二种视角来看，上文定理 6.25 表明，正则性$(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq (m+3-1) + (m+2-1) + (m+2-1) + (2-1) + (m+3-1) = 4m+7$。

(b) 设 $G = F_3 * F_4 \circ P_7 * F_3 \circ F_4$ 为图 2 中所示的图。它也可表示为$F_3 * F_4 * P_5 * F_3 \circ F_4$或 $F_3 * F_4 * F_1 * F_1 * F_1 * F_1 * (F_3 \circ F_4)$。从第二种视角来看，

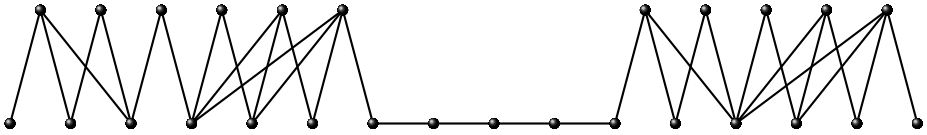

FIGURE 2. $F_3 * F_4 \circ P_7 * F_3 \circ F_4$

定理6.25 表明，$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_m,G}) \leq (m+2-1)+(m+2-1)+(5-1)+(m+2-1) + (m+2-1) = 4m+8$。注意，当 $m = 2$, [13, 命题 4.1 和 4.3] 以及[15, 定理 3.1] 表明，通过使用第三种观点，$\mathrm{reg}(S/\mathcal{J}_{K_2,G}) = \mathrm{reg}(S/J_G) = 3+3+1+1+1+1+(3+3) = 16$。当 $m = 2$ 时，这个值 16 恰好是 $4m+8$。

7. 维数

本节中，我们关注**FFan**中的图的广义二项式边理想的维数。与深度或 Castelnuovo–Mumford 正则度不同，维数在模的短正合列中表现得并不理想。因此，在定理 7.4中，我们只能处理一个非常特殊的情形。我们的结果基于以下简单观察。

引理 7.1. 设 $0 \to M \to N \to P \to 0$ 是有限生成分次S-模的短正合列。如果 $\dim(N) > \dim(P)$, 那么 $\dim(M) = \dim(N)$。

证明。这很容易由以下事实得出：$\dim(N) = \max\{\dim(M), \dim(P)\}$. □

我们从一个简单的情形开始。

引理 7.2. 设 $G = F_k^W(K_n)$ 为一个 k-扇图。假设 $v \in K_n \backslash W$。那么，$\dim(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) > \dim(S_{G\backslash v}/\mathcal{J}_{K_m,G\backslash v})$。

证明。 注意到 $|V(G \setminus v)| < |V(G)|$ 且 $\min\{|W|, n-1\} \leq \min\{|W|, (n-1)-1\}$。因此，所需的不等式由定理 3.2 得出。 □

引理 7.3. 假设 $G = G_1 \circ_v G_2$ 其中 $G_1 = F_{p_1}$ 且 $p_1 \geq 3$。

(a) 如果 $G_2 = F_{p_2}$ 与 $p_2 \geq 2$，那么 $\dim(S_G/\mathcal{J}_{K_m,\ G}) = \sum_{i=1}^{2} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,\ G_i}) - (m+2)$。

(b) 假设 $G_2 = F_k^W(K_n)$ 是关于分解 $W = W_1 \sqcup \cdots \sqcup W_r$ 的 k-扇图。如果 $|W| < n$，或者 $|W| = n$, $|W_1| \geq 2$ 和 $v \in W_1$，那么

$$\dim(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \sum_{i=1}^{2} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - 2m.$$

证明。令 H 为顶点集 $N_G[v]$上的完全图。在观察 5.5中，我们已经看到 $G_v = F_q^{W'}(H)$ 和 $G_v \setminus v = F_q^{W'}(H \setminus v)$ 是两个扇图，其中 $q = 2$当 $G_2 = F_{p_2}$时，且$q = k$ 当 $G_2 = F_k^W(K_n)$。

(a) 如果 $G_2 = F_{p_2}$，那么 $W' = N_G(v)$。在这种情况下，我们有 $|H| = p_1 + p_2 - 1$ 以及 $|W'| = p_1 + p_2 - 2$。因此，根据定理 3.2 和定理 4.3(a) 我们得到

$$\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = \sum_{i=1}^{2} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - (m+2),$$

由于 $|V(G_v)| = |V(G_1)| + |V(G_2)| - 3$。同样地，由于 $G \setminus v = F_{p_1-1} \sqcup F_{p_2-1}$，我们可以验证 that

$$\dim(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = \sum_{i=1}^{2} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - 2m.$$

与此同时，由引理可知7.2 ，

$$\dim(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) < \dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}).$$

总之，我们已经

$$\begin{aligned}\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) &= \max\{\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \dim(S_{G\setminus v_1}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} \\ &> \dim(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}),\end{aligned}$$

因为 $m \geq 2$。因此，将引理7.1 应用于引理2中的短正合列（2.6），即可得到所需结果。

(b) 假设 $G_2 = F_k^W(K_n)$，则 $W' = N_{G_1\setminus f_1}(v) \sqcup (W \setminus W_1)$，其中 f_1是 G_1中的一个叶子，其邻点为 v。因此 $|W'| = (p_1 - 1) + |W| - |W_1|$。此外，设$\{K_{a_{1,1}}, \ldots, K_{a_{1,|W_1|}}\}$为 G_2中关于 W_1的扇图分支，并记$h_{1,j} := a_{1,j} - j \geq 1$.$|W_1|$那么， $|H| = (p_1 - 1) + n + \sum h_{1j} - 1$。根据定理 3.2 和定理 4.3(a)，我们得到$j=1$，即

$$\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}) = \sum_{i=1}^{2} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - p$$

其中

$$p = \begin{cases}(m+2) + |W_1|(m-2), & \text{if } |W| < n, \\ (m+2) + (|W_1|-1)(m-2), & \text{if } |W| = n \text{ with } |W_1| \geq 2.\end{cases}$$

显然， $p \geq 2m$。同时，由于对于适当的 q， $G \setminus v = F_{p_1-1} \sqcup F_q^{W\setminus\{v\}}(K_{n-1})$，因此我们有

$$\dim(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) = \sum_{i=1}^{2} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - 2m.$$

与此同时，由引理可知7.2 ，

$$\dim(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}) < \dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}).$$

总之，我们已经

$$\begin{aligned}\dim(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v}) &= \max\{\dim(S_{G_v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v}), \dim(S_{G\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v})\} \\ &> \dim(S_{G_v\setminus v}/\mathcal{J}_{K_m,G_v\setminus v}).\end{aligned}$$

因此，对引理7.1 中的短正合列 (2) 应用引理 2.6，即可得到预期结果。 □

我们可以推广引理7.3中的结果。

定理 7.4. 设 $G = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-1}} G_t \circ_{v_t} G_{t+1}$，其中 $t \geq 2$ 和 $G_i = F_{p_i}$ 满足 $p_i \geq 3$，对于$1 \leq i \leq t$。进一步假设，

(a) $G_{t+1} = F_{p_{t+1}}$ 与 $p_{t+1} \geq 2$，或 (b) $G_{t+1} = F_k^W(K_n)$ 是相对于分解 $W = W_1 \sqcup \cdots \sqcup W_r$ 的 k- 扇图，并且满足以下条件之一：$|W| < n$，或 $|W| = n$、$|W_1| \geq 2$ 和 $v \in W_1$。

那么，$\dim(S_G/\mathcal{J}_{K_m,\ G}) = \sum_{i=1}^{t+1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,\ G_i}) - s$，其中

$$s = \begin{cases} 2m\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor + (m+2)\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil, & \text{if } G_{t+1} = F_{p_{t+1}}, \\ 2m\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + (m+2)\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor, & \text{if } G_{t+1} = F_k^W(K_n). \end{cases}$$

通常，$\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ 是最大的整数$\leq \frac{t}{2}$，而 $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 是最小的整数$\geq \frac{t}{2}$。

‹证明。令 $G = G_t \circ_{v_t} G_{t+1}$ 和 H 为集合 $N_{\widetilde{G}}[v_t]$ 上的完全图。于是，由观察 5.5 可知，‹ $G_{v_t} = F_q^{W'}(H)$ 和 ‹$G_{v_t} \setminus v_t = F_q^{W'}(H \setminus v_t)$ 是两个扇图，其中当 $G_{t+1} = F_{p_{t+1}}$ 时 $q = 2$，而当 $G_{t+1} = F_k^W(K_n)$ 时 $q = k$。此外，由于 $G_t = F_{p_t}$ 与 $p_t \geq 3$，这两个扇图相对于某个划分 $W' = W'_1 \sqcup \cdots \sqcup W'_{r'}$，满足 $|W'_1| = p_t - 1 \geq 2$ 和 $v_{t-1} \in W'_1$。我们在引理 7.3 的证明中已经看到

$$\dim(S_{\widetilde{G}_{v_t} \setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t} \setminus v_t}) < \dim(S_{\widetilde{G}_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t}}). \tag{25}$$

我们通过归纳法证明所声称的公式 t。基例 $t = 1$ 已在引理7.3中验证。接下来，我们假设 $t \geq 2$。

(a) 假设 $G_{t+1} = F_{p_{t+1}}$ 且 $p_{t+1} \geq 2$。由引理7.3(a) 及其证明可知 $|W'| < |V(H)|$ 并且

$$\dim(S_{\widetilde{G}_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t}}) = \dim(S_{G_t}/\mathcal{J}_{K_m,G_t}) + \dim(S_{G_{t+1}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{t+1}}) - (m+2). \tag{26}$$

~由于$G_{v_t} = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-2}} G_{t-1} \circ_{v_{t-1}} G_{v_t}$，根据归纳假设和等式（26），我们得到

$$\begin{aligned} \dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}}) &= \sum_{i=1}^{t-1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) + \dim(S_{\widetilde{G}_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t}}) - s \\ &= \sum_{i=1}^{t+1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - s - (m+2), \end{aligned}$$

对于 $s: = 2m\left\lceil \frac{t-1}{2} \right\rceil + (m+2)\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$。由于$G_{v_t} \setminus v_t = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-2}} G_{t-1} \circ_{v_{t-1}} (\sim G_{v_t} \setminus v_t)$，由等式（25）和归纳假设还可得

$$\begin{aligned} \dim(S_{G_{v_t} \setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t} \setminus v_t}) &= \sum_{i=1}^{t-1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) + \dim(S_{\widetilde{G}_{v_t} \setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t} \setminus v_t}) - s \\ &< \dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}}). \end{aligned}$$

最后，$G \setminus v_t = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-2}} G_{t-1} \circ_{v_{t-1}} (G_t \setminus \{v_t, f_t\}) \sqcup (G_{t+1} \setminus \{v_t, f_{t+1}\})$，其中$f_j$ 是图G中的叶子 G_j，其邻点为 v_t，对于 $j \in \{t, t+1\}$。由归纳法和定理4.3(a)，可得

$$\begin{aligned} \dim(S_{G \setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G \setminus v_t}) &= \sum_{i=1}^{t-1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) + \dim(S_{G_t \setminus \{v_t,f_t\}/\mathcal{J}_{K_m,G_t \setminus \{v_t,f_t\}}}) - s' \\ &\quad + \dim(S_{G_{t+1} \setminus \{v_t,f_{t+1}\}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{t+1} \setminus \{v_t,f_{t+1}\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{t+1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - s' - 2m, \end{aligned}$$

其中 $s' := 2m\left\lfloor\frac{t-1}{2}\right\rfloor + (m+2)\left\lceil\frac{t-1}{2}\right\rceil$。由于 $m \geq 2$，我们有 $s+m+2 \leq s'+2m$。总之，我们有

$$\begin{aligned}\dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}}) &= \max\{\dim(S_{G\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_t}), \dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}})\} \\ &> \dim(S_{G_{v_t}\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}\setminus v_t}).\end{aligned}$$

因此，将引理7.1 应用于引理2.6中的短正合列(2)后，我们得到

$$\begin{aligned}\dim(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}}) &= \sum_{i=1}^{t+1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - s - (m+2) \\ &= \sum_{i=1}^{t+1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - 2m\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor - (m+2)\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil.\end{aligned}$$

（b）假设 $G_{t+1} = F_k^W$（K_n）。由引理 7.3(b) 的证明可得

$$\dim(S_{\widetilde{G}_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t}}) = \sum_{j=t}^{t+1}\dim(S_{G_j}/\mathcal{J}_{K_m,G_j}) - p, \tag{27}$$

~对于某个 $p \geq 2m$。由于 $G_{v_t} = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-2}} G_{t-1} \circ_{v_{t-1}} G_{v_t}$，根据归纳假设和公式（27），我们得到

$$\begin{aligned}\dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}}) &= \sum_{i=1}^{t-1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) + \dim(S_{\widetilde{G}_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}_{v_t}}) - s \\ &\leq \sum_{i=1}^{t+1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - s - 2m,\end{aligned}$$

其中 $s := 2m\left\lceil\frac{t-1}{2}\right\rceil + (m+2)\left\lfloor\frac{t-1}{2}\right\rfloor$。由于 $G_{v_t}\setminus v_t = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-2}} G_{t-1} \circ_{v_{t-1}} (\widetilde{\ } G_{v_t}\setminus v_t)$，由等式（25）和归纳假设也可得

$$\begin{aligned}\dim(S_{G_{v_t}\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}\setminus v_t}) &= \sum_{i=1}^{t-1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) + \dim(S_{\widetilde{G}\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,\widetilde{G}\setminus v_t}) - s \\ &< \dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}}).\end{aligned}$$

最后，$G\setminus v_t = G_1 \circ_{v_1} \cdots \circ_{v_{t-2}} G_{t-1} \circ_{v_{t-1}} (G_t \setminus \{v_t, f_t\}) \sqcup (G_{t+1}\setminus\{v_t, f_{t+1}\})$，其中$f_j$ 是 G_j 中的叶子，其邻点为 v_t，对于 $j \in \{t, t+1\}$。根据归纳法和定理 4.3(a)，我们有

$$\begin{aligned}\dim(S_{G\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_t}) &= \sum_{i=1}^{t-1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) + \dim(S_{G_t\setminus\{v_t,f_t\}/\mathcal{J}_{K_m,G_t\setminus\{v_t,f_t\}}}) - s' \\ &\quad + \dim(S_{G_{t+1}\setminus\{v_t,f_{t+1}\}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{t+1}\setminus\{v_t,f_{t+1}\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{t+1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - s' - 2m,\end{aligned}$$

其中 $s' := 2m\left\lfloor\frac{t-1}{2}\right\rfloor + (m+2)\left\lceil\frac{t-1}{2}\right\rceil$。由于 $s' \leq s$，显然

$$\begin{aligned}\dim(S_{G\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_t}) &= \max\{\dim(S_{G\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_t}), \dim(S_{G_{v_t}}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}})\} \\ &> \dim(S_{G_{v_t}\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G_{v_t}\setminus v_t}).\end{aligned}$$

因此，由引理2中的短正合列（2.6 ）可得

$$\dim(S_G/\mathcal{J}_{K_m,G}) = \dim(S_{G\setminus v_t}/\mathcal{J}_{K_m,G\setminus v_t}) = \sum_{i=1}^{t+1}\dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - s' - 2m$$

$$= \sum_{i=1}^{t+1} \dim(S_{G_i}/\mathcal{J}_{K_m,G_i}) - 2m \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil - (m+2) \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor . \qquad \square$$

注记 7.5. 当 $m = 2$时，定理 7.4 中的结果与定理 5.10中的深度结果一致。这为这些图的经典二项式边理想的 Cohen–Macaulay 性提供了另一种证明。

问题 7.6。FFan 中其他图的维数可以得出什么结论?

致谢。本文得到江苏省自然科学基金（编号：BK20221353）资助。此外，第一作者还获得安徽量子信息技术倡议（编号：AHY150200）以及“量子科学与技术创新计划”（2021ZD0302902）的部分资助。第二作者则获得江苏省高等学校优先学科建设项目的资助。

References

[1] L. Amata、M. Crupi 和 G. Rinaldo, *Cohen–Macaulay generalized binomial edge ideal* （2021），可见 arXiv:2112.15136。[2] H. Baskoroputro、V. Ene 和 C. Ion, *Koszul binomial edge ideals of pairs of graphs*, 《代数杂志》515（2018），344–359。[3] D. Bolognini、A. Macchia 和 F. Strazzanti, *Binomial edge ideals of bipartite graphs*, 《欧洲组合学杂志》70（2018），1–25。[4] , *Cohen–Macaulay binomial edge ideals and accessible graphs*, 《代数组合学杂志》55（2022），1139–1170。[5] M. P. Brodmann 和 R. Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, 剑桥高等数学研究丛书，第60卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[6] W. Bruns 和 J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, 剑桥高等数学研究丛书，第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[7] F. Chaudhry 和 R. Irfan, *On the generalized binomial edge ideals of generalized block graphs*, 《数学报告》（布加勒斯特）22(72)（2020），381–394。[8] P. Diaconis、D. Eisenbud 和 B. Sturmfels, *Lattice walks and primary decomposition*, 载于《纪念 Gian-Carlo Rota 的数学论文集》（马萨诸塞州剑桥，1996），1998年，第173–193页。[9] V. Ene、J. Herzog、T. Hibi 和 A. A. Qureshi, *The binomial edge ideal of a pair of graphs*, 《名古屋数学杂志》213（2014），105–125。[10] J. Herzog、T. Hibi、F. Hreinsd

Binomial edge ideals and conditional independence ottir、T. *statements* **45** 2010 317 333 Kahle 和 J. Rauh, , 《应用数学进展》 （）， –。[11] L. T. Hoa 和 N. D. Tam, *On some invariants of a mixed product of ideals*, 《巴塞尔数学档案》94（2010），327–337。[12] M. Hochster 和 J. A. Eagon, *A class of perfect determinantal ideals*, 《美国数学会通报》76（1970），1026–1029。[13] A. V. Jayanthan 和 A. Kumar, *Regularity of binomial edge ideals of Cohen–Macaulay bipartite graphs*, 《代数通讯》47（2019），4797–4805。[14] A. V. Jayanthan、A. Kumar 和 R. Sarkar, *Regularity of powers of quadratic sequences with applications to binomial ideals* **564** 2020 98 118 , 《代数杂志》 （）， –。[15] A. V. Jayanthan、N. Narayanan 和 B. V. Raghavendra Rao, *Regularity of binomial edge ideals of certain block graphs* **129** 2019 36, 10 , 《印度科学院院刊：数学科学》 （），论文编号，页。[16] A. Katsabekis, *Arithmetical rank and cohomological dimension of generalized binomial edge ideals* （2022），可见 arXiv:2207.02256。[17] A. Kumar, *Regularity bound of generalized binomial edge ideal of graphs*, 《代数杂志》546（2020），357–369。[18] M. Ohtani, *Graphs and ideals generated by some 2-minors*, 《代数通讯》39（2011），905–917。[19] J. Rauh, *Generalized binomial edge ideals*, 《应用数学进展》50（2013），409–414。[20] S. Saeedi Madani 和 D. Kiani, *On the binomial edge ideal of a pair of graphs*, 《电子组合学杂志》20（2013），论文48，13。

CAS Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics School of Mathematical Sciences University of Science and Technology of China Hefei Anhui 230026 P.R. China , , „ , , *Email address*: yhshen@ustc.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou, Jiangsu, 215006, P.R. China *Email address*: zhuguangjun@suda.edu.cn