arXiv:2305.05366v1 [math.DG] 9 May 2023

¨G-球面法诺流形上的凯勒-里奇流

FENG WANG† 和 XIAOHUA ZHU*

Dedicated to Professor Gang Tian on the occasion of his 65th birthday

Abstract. 我们证明，在 G-球面 Fano 流形 X 上的 Kähler-Ricci 流的 Gromov-Hausdorff 极限是一个 G-球面 $\mathbb{Q}$-Fano 簇 X_∞，它存在一个（奇异）Kähler-Ricci 孤立子。此外， X_∞ 的 G-球面簇结构可以构造为 X 的环面 $\mathbb{C}^*$-退化的中心，该退化由 G 的 Cartan 环面的李代数中的一个元素诱导。

Contents

1. 引言 1 2. G–等变一参数子群退化 4 3. 等变 K¨ahler-Ricci 流 7 3.1. 代数引理 8 3.2. 定理 3.1 的证明 9 4. G-球簇上的环面一参数子群退化 10 4.1. 与 G-球簇相关的组合数据 10 4.2. G-极化球面簇的环面 $\mathbb{C}^*$-退化 13 5. G-球面Fano簇上的 H-不变量 16 5.1. 特殊环面1-PS退化 16 5.2. H-不变量的一个公式 18 6. 定理 1.1 的证明 20 参考文献 22

1. Introduction

设 (X, J, ω_0) 为一个 Fano 流形，且 ω_t 是归一化 K¨ahler-Ricci（KR）流的一个解，

$$\frac{\partial \omega_t}{\partial t} = -\mathrm{Ric}\,(\omega_t) + \omega_t,\ \omega_0 \in 2\pi c_1(M, J). \tag{1.1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53E20，53C25；次要分类：32Q20，53C30，14L10。*Key words and phrases.* G-球面簇，K¨ahler-Ricci 流，等变 $\mathbb{C}^*$-退化。

†部分受中国国家重点研发计划项目（编号：2022YFA1005501）和国家自然科学基金项目（编号：12031017）资助。* 部分受中国国家重点研发计划项目（编号：2020YFA0712800）和国家自然科学基金项目（编号：12271009）资助。

已知，只要初始度量 ω_0 在 [9] 中代表 $2\pi c_1(M)$，方程 (1.1) 对所有 $t \geq 0$ 都存在全局解 ω_t。著名的 Hamilton-Tian (HT) 猜想断言 [35]:

任意一个（X，ω_t）序列都包含一个子列，该子列在 Gromov-Hausdorff 拓扑下收敛到长度空间（X_∞，ω_∞），且（X_∞，ω_∞）在一个闭子集 S之外是光滑的 KR 孤子；该闭子集称为奇异集，其余维至少为 4。此外，这个（X，ω_t）子列在 Cheeger-Gromov 拓扑下局部收敛于（X_∞，ω_∞）的正则部分。

这一猜想最初由 Tian 和 Zhang 在维数小于 4[38]时证明。此外，他们还证明了 X_∞ 具有 $\mathbb{Q}$-Fano 簇的结构。在更高维情形下，该猜想由 Bamler [4] 和 Chen-Wang [11],分别独立证明。事实上，Bamler 证明了 HT猜想的一个推广版本，即对于标量曲率有界的 Ricci 流成立的版本。作者 [41] 最近利用 Zhang [46] 为 KR 流演化的 K¨ahler 度量建立的 Tian 部分C^0-估计，给出了 HT猜想的另一种证明。

作为 HT 猜想的一个应用，Chen-Sun-Wang 证明了极限 (X_∞,ω_∞) 与 ω_t [10] 的子列选择无关。事实上，他们证明了¯ X_∞ 是另一个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇 X_∞ 的 $\mathbb{C}^*$-退化的中心，而该簇是由 X_∞ 的孤子向量场（VF） v 生成的 X_∞ 的一参数子群退化的极限（另见 [18, 定理 3.4] 和 [42]）。这里的 v 可由 [36, 45, 6, 43] 中引入的修正 Futaki 不变量唯一确定。最近，Han-Li 通过¯证明 X_∞ 可视为代数几何中与 X 相关的一类滤过的 H-不变量极小值点，进一步证明极限 X_∞ 也与类 $2\pi c_1(X, J)$ [22] 中初始度量的选择无关。H-不变量最初由 Tian-Zhang-Zhang-Zhu [39], 引入，随后由 Dervan-Sz´ekelyhidi [18] 推广到 X 的 $\mathbb{C}^*$-退化。

一个自然的问题是如何确定 X_∞。最近已针对 Fano 群紧化和拟球面对称 Fano 流形进行了研究 [27, 25, 37]。特别是，通过分析一类实 Monge-Amp`ère 方程的奇点，田-朱 [37] 证明了 G-拟球面对称 Fano 流形上 KR 流的极限 X_∞是一个 G-拟球面对称 $\mathbb{Q}$-Fano 簇，它可以实现为由复约化李群 G 的 Cartan环面 T 的李代数 $\mathfrak{t}$ 中的一个元素所诱导的 $\mathbb{C}^*$-退化的中心，该群与 X相关。

本文旨在将上述田-朱的结果推广到 G-球面法诺流形。我们证明了

定理 1.1. 设 G 是一个复约化李群。那么，G–球面 Fano 流形 (X, J) 上的 KR 流 (1.1) 的 Gromov-Hausdorff 极限是一个 G-球面$\mathbb{Q}$-Fano 簇 X_∞，其上存在一个（奇异的）KR 孤子 ω_∞。此外， X_∞ 的 G-球面簇结构可以构造为由 Λ 中的一个元素诱导的 X 的环面 $\mathbb{C}^*$-˜退化的中心。这里 $\mathcal{V}_R$ 是环面李代数 $\mathfrak{t}$的商空间中的一个赋值锥。

˜注记 1.2. 定理 1.1 中的元素 $\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 是通过对（X_∞,ω_∞）的孤子向量场 v 作小幅扰动 $\tilde{v}$ 构造的（参见引理 6.2）。 v 可以唯一确定为 $\mathcal{V}_R$ 上凸泛函 Λ_v 的极小值点，其中该凸泛函与限制在特殊环面一参数子群退化上的 H-不变量相关（参见命题 5.7 和˜命题 5.8）。对于 horosymmetric 流形，已有证明表明，若 $v \neq 0$ [37]，则可以令 Λ为 Λ_v。后者意味着，两个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇 X_∞

¯和 X_∞ 经过射影群变换后相同。我们猜想这一结果对 G-球流形也成立。

根据定理 1.1 中的环面 $\mathbb{C}^*$-退化，当 X 为修正 K-多稳定时， X 必与 X_∞双全纯。因此，我们立即通过 KR 流方法证明了关于 G–球面 Fano 流形的以下 Yau-Tian-Donaldson 猜想。

推论 1.3。当且仅当一个 G–球面 Fano 流形关于修正 Futaki 不变量是修正 K-多稳定时，其上存在 KR 孤子。

Datar-Sz´ekelyhidi [12] 通过连续性方法，以及 Chen-Sun-Wang [10] 通过 KR 流方法，分别证明了任意 Fano 流形上的 KR 孤子的 Yau-Tian-Donaldson 猜想。实际上，必要性部分来自 [6] （另见 [13, 23, 7]）。我们想指出的是，在 horosymmetric 流形的情形下，推论 1.3 中关于存在性的修正 K-多稳定条件（对于 KR 孤子而言，但对于 KE度量而言并非如此）可以弱化为修正 K-半稳定性，见注 1.2。因此，我们猜想这一改进对于 G–球面 Fano 流形仍然成立（另见 [37, 注 6.1-1]）。

由定理 1.1 可知，KR 流（1.1）的极限 X_∞。在代数几何中仍保留 G–球面结构。另一方面，将其替换为一类针对弱多重次调和函数的抛物型复 Monge-Amp`ère 方程（参见 [34, 5]）后，KR 流便可定义在任意 $\mathbb{Q}$-Fano 簇上，并且具有长时间存在性。我们希望定理 1.1 能推广到球面 $\mathbb{Q}$-Fano 簇上的 KR 流。换言之，很有可能建立这样一套理论：在 KR 流的框架下，G–球面 $\mathbb{Q}$-Fano 簇构成一个闭集。 [1]

G-球簇是一类非常庞大的高度对称簇，其中包含环面簇、广义旗流形、群紧化以及双对称 Fano 流形（参见 [1, 14, 15]）。近年来，此类 $\mathbb{Q}$-Fano 簇上（奇异）KE度量和（奇异）KR 孤子的存在性问题得到了广泛研究（参见 [14, 29, 15, 28, 17, 37, 30], 等）。存在性判据可以用与 G 的 Cartan环面 T 相关联的动量多面体的重心来表述。

最后，我们概述定理 1.1 的证明。与 horosymmetric 流形相比，G-球流形缺乏对称性，因此我们将在 [37] 中采用不同的方法证明定理 1.1。基本思路是按照 [10, 41, 42] 中的做法，通过 Tian 的部分 C^0-估计使用 GIT 方法。根据 X_∞ [22, 42], 的唯一性，我们只需证明定理适用于 $2\pi c_1$（X， J）中具有 K-不变初始度量的 KR 流，其中 K 是 G 的极大紧子群。我们首先针对任意 Fano 流形 X 上具有 K_0-不变初始度量的 KR 流，建立陈－孙－王的结果的 G_0-等变版本 [10] （参见定理 3.1）；其中 G_0 是 X 的自同构群 Aut(X) 的约化子群，而 K_0 是 G_0 的极大紧子群。关键在于证明，由 X_∞ 的孤子向量场 v 诱导的 X_∞ 的一参数子群退化，可以用一列 G_0-等变 $\mathbb{C}^*$-退化逼近（参见命题 2.9、引理 3.5）。接下来，利用 Delcroix [15], 研究的 G-等变 $\mathbb{C}^*$-退化的球几何，我们能够证明， X_∞ 可以实现为由 $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ 中某个元素诱导的环面$\mathbb{C}^*$-退化的中心，其中该退化作用于 X （参见定理 5.2 和引理 6.2）。

[1]我们感谢田刚教授指出了这一点。

本文结构如下。第2节中，我们使用 [19, 35] 引入的射影簇上的一参数子群退化概念，证明一列 G_0-等变 $\mathbb{C}^*$-退化的逼近结果的 G_0-等变版本（参见命题 2.9）。这里，一参数子群退化和 $\mathbb{C}^*$-退化的概念，分别对应于 [19] 和 [20] 针对概形情形引入的 $\mathbb{R}$-测试构型和测试构型。第3节中，我们运用部分 C^0-估计的技巧，将第2节的结果应用于与一族 Kodaira 嵌入的子流形相关联的希尔伯特点。本节的主要结果是定理 3.1。接下来的三节，即第4—6节，致力于利用 G-等变 $\mathbb{C}^*$-退化的球几何证明定理 1.1；这些退化可视为环面 $\mathbb{C}^*$-退化，并由 [15] 中 $\mathfrak{t}$ 上的有理分段线性函数描述（参见命题 4.10、4.12、5.1）。最后将在第6节证明定理 1.1。

2. G−equivariant 1-PS degenerations

设 (X, L) 是 $\mathbb{C}P^n$ 中的一个极化正规簇，满足 $(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(1))|_X = L$。设 G_0 是 X 的自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 的一个约化子群，且 K_0 是 G_0的一个极大紧子群。我们回顾 [35]中 (X, L) 的 $\mathbb{C}^*$-退化的定义。

定义2.1。具有 $\mathbb{C}^*$-作用的正规簇 $\mathcal{X}$ 称为 (X, L) 的 $\mathbb{C}^*$-退化，如果其满足：

（1）存在一个平坦的 $\mathbb{C}^*$-等变映射 $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$，使得对于任意 $t \neq 0$，$\pi^{-1}(t)$ 与 X 双全纯同构；（2）在 $\mathcal{X}$ 上存在一个全纯线丛 $\mathcal{L}$，使得 $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(t)}$ 与某个整数 $r > 0$ 下的 L^r 同构，并且对任意 $t \neq 0$均成立。

我们称 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 是 G_0-等变的，如果它具有一个 G_0 的作用，该作用与 $\mathbb{C}^*$-作用可交换，并且 (X, L) 与 $(\pi^{-1}(1), \mathcal{L}|_{\pi^{-1}(1)})$ 之间的同构是 G_0-等变的。

对于任意 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$，我们可以通过粘接一个平凡族将其紧化，从而得到 $\mathbb{P}^1$ 上的一个族。我们将该紧化记为 $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{L}})$。假设 L^r 是非常 ample 的，我们可以通过 $H^0(X, L^r)$ 的截面将 M 嵌入射影空间 $\mathbb{P}(H^0(X, L^r))$。那么 $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{L}})$ 嵌入于 $\mathbb{P}(H^0(X, L^r)) \times \mathbb{C}$，并且存在一个 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^r)\ \mathbb{C})$ 中的 1-PS $\tau(s)$，使得 $\mathcal{X}_0 = \lim_{s\to 0} \tau(s)X$，且 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{O}(1)$ 的拉回（参见 [33]）。这里，$\mathcal{X}_0 = \pi^{-1}(0)$ 表示 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 的中心。对于与 G_0, 对易的 G_0- 等变 $\mathbb{C}^*$-退化，结论同样成立，其中 G_0 可提升为 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^r)$ 的一个子群。事实上，我们有

引理 2.2. 对于 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^r))$ 中与 G_0, 对易的任意一参数子群 $\tau(s)$ $(s \in \mathbb{C}^*)$，存在一个 G_0-等变的 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$，使得 $\mathcal{X}_0 = \lim_{s\to 0} \tau(s)X$。反之，如果 r 足够大，则任意 G_0-等变的 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 都可由此得到。

证明. 设 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^r))$ 中与 G_0, 对易的一参数子群 $\tau(s)$，令 $\mathcal{X}$ 为 $\tau(s) \cdot X$ 在 $\mathrm{P}(H^0(X, L^r)) \times \mathbb{C}$ 中的闭包。由于 $\tau(s)$ 与 G_0, 对易，G_0 在 $\mathrm{P}(H^0(X, L^r))$ 上的作用保持每个 $\tau(s) \cdot X$。记 $\mathcal{L}$ 为线丛 $\mathcal{O}(1)$ 在 $\mathrm{P}(H^0(X, L^r))$ 上的拉回。于是 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 是 (X, L) 的一个 $\mathbb{C}^*$-退化。

反之，由于 π 是平坦的，当 r 足够大时，$\pi_*\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量丛 E。该向量丛与 $H^0(X, L^r) \times \mathbb{C}$ $G_0 \times \mathbb{C}^*$ 等变同构。 $\mathbb{C}^*$

在纤维 $E_0 \cong H^0(X, L^r)$ 上的作用给出一个与 G_0 对易的一参数子群 $\tau(s)$。$\tau(s)$ 的作用就是在 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 上原有的 $\mathbb{C}^*$ 作用。因此，我们证明了 G_0-等变 $\mathbb{C}^*$-退化与和 G_0 对易的一参数子群之间的一一对应关系。□

本文中，我们始终假设 X 是一个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇，且 $L = K^{-r_0}$，其中 $r_0 > 0$ 为某个整数。如果 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 的中心 $\mathcal{X}_0$ 是一个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇，我们称 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 为特殊 [35]。

令 $\tau(s)$ 为引理 2.2 中与 $(X, rK_X^{-r_0})$ 相关联的 $\mathrm{GL}(H^0(X, K_X^{-rr_0})\ \mathbb{C})$ 中的一参数子群，使得

$$\mathcal{X}_0 = \lim_{s \to 0} \tau(s) X$$

是一个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇。于是，$\tau(s)$ 在 $\mathcal{X}_0$ 上诱导出一个全纯向量场。$\tau(s)$ 的典范提升是 $\mathrm{GL}(H^0(M, K_X^{-rr_0})\ \mathbb{C})$ 中的另一个一参数子群，记为 $\tilde{\tau}(s)$。容易看出，$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) s^c$，其中 c 是某个整数。此外，我们有

引理2.3。

$$\bar{\mathcal{L}} = K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1}^{-1} + c\mathcal{X}_0.$$

我们可以将一参数子群 $\tau(s)(s \in \mathbb{C}^*)$ 写为

$$\tau(s) = \begin{bmatrix} s^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{k_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s^{k_n} \end{bmatrix}$$

其中 $k_i (1 \le i \le n)$ 是整数。令 $t = -\log|s|$。该矩阵等于

$$\tau(s) = \begin{bmatrix} e^{-tk_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-tk_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-tk_n} \end{bmatrix}.$$

现在考虑一般的实一参数子群 $\sigma(t)$，它属于 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^r)\ \mathbb{R})$，其中

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

相对于 $H^0(X, L^r)$ 的某个基，且 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 是 $\sigma(t)$ 的特征值。

定义 2.4。我们称这对 $(X, \sigma(t))$ 为 (X, L) 的一参数子群退化。为简便起见，记作 $\mathcal{X}^\sigma$，其极限为

$$\mathcal{X}_0^\sigma := \lim_{t \to \infty} \sigma(t) X$$

称为 $\mathcal{X}^\sigma$的中心纤维。如果代数群 G_0 作用于 (X, L)，且 $\sigma(t)$与 G_0 在 $H^0(X, L^r)$上的诱导作用可交换，则称 $\mathcal{X}^\sigma$ 是 G_0-等变的一参数子群退化。

注 2.5. 给定 $\mathrm{P}(H^0(X, L^r)\ \mathbb{C})$ 上的任意全纯向量场 v，v 对应于 $\mathrm{gl}(H^0(X, L^r)\ \mathbb{C})$ 中的一个元素。假设 $e^{t\mathrm{Im}(v)}$ 推广了一般线性群 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^r)\ \mathbb{C})$ 的一个紧的一参数子群。那么，$(X, e^{t\mathrm{Real}(v)})$ 是 (X, L) 的一参数子群退化。当 $e^{tv}X$ 的极限为正规簇时，这种诱导的一参数子群退化最早由 Ding-Tian 在 [19] 中进行了研究。

注 2.6. 如果全纯向量场 v 被对角化为 $v = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, 那么$e^{t\mathrm{Im}(v)}$ 推广了一个紧子群，当且仅当 a_i 是实数。因此，在下文中我们将 $e^{t\mathrm{Real}(v)}$ 记为 e^{tv} ，不会引起混淆。

定义 2.4 中的极限是平坦极限，可定义如下。记在 $\mathbf{P}(H^0(X, L^r)\ \mathbb{C})$ 中定义 X 的理想为 I。对于 $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$，令

$$\langle \alpha, \lambda \rangle = \sum \alpha_i \lambda_i, \nu(f) = \min_{c_\alpha \neq 0} \langle \alpha, \lambda \rangle$$

并且 $Lt(f) = \sum_{\langle \alpha,\ \lambda \rangle = \nu\ (f)} c_\alpha x^\alpha$。于是 $I_0 = \{Lt(f) | f \in I\}$ 是 $\mathcal{X}_0^\sigma$ 的定义理想。这与 $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) \cdot [X] = [\mathcal{X}_0^\sigma]$ 相同，其中 $[\cdot]$ 是一个闭子概形的希尔伯特点。一参数子群退化也可以像 [12, 22] 中那样用滤过来定义。

给定 n 个实数 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$，如果满足

$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{e_1} < \lambda_{e_1+1} = \lambda_{e_1+2} = ... = \lambda_{e_1+e_2} < ...$，我们称其为类型 $(e_1, e_2, ..., e_k)$。

引理 2.7. 设

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{-\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

and

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1' t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2' t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{-\lambda_n' t} \end{bmatrix}$$

是 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 中的两个实一参数子群。若 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ 和 $\lambda_1' \leq \lambda_2' \leq ... \leq \lambda_n'$ 属于同一类型，则对任意 $x = [x_1, x_2, ..., x_n] \in \mathbb{C}P^{n-1}$,

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t)(x) = \lim_{t\to\infty} \tau(t)(x).$$

证明. 设 i_0 是使得 $x_i \neq 0$ 和 $e_1 + ... + e_s < i_0 \leq e_1 + ... + e_{s+1}$ 的最小指标。那么

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t)(x) = [0, ..., 0, x_{i_0}, x_{i_0+1}, ..., x_{e_1+...+e_{s+1}}, 0, ..., 0] = \lim_{t\to\infty} \tau(t)(x).$$

□

将上述引理应用于 X 的希尔伯特点 $[X]$，可得

引理 2.8. 设

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{-\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

是 (2.1) 中的实一参数子群。则对任意正数 ϵ，存在一个由 $\lambda_j' \in \mathbb{Q}$ 构成的序列，使得 $|\lambda_j' - \lambda_j| \leq \epsilon (1 \leq j \leq n)$ 且

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) \cdot [X] = \lim_{t\to\infty} \tau(t) \cdot [X],$$

其中，$\tau(t)$ 是 (2.1) 中所述、特征值为 λ_i' 的实一参数子群。

证明。首先，我们回顾希尔伯特点的构造。对于 $X \subseteq \mathbb{C}P^{n-1}$，存在一个整数 m，它取决于 X 的希尔伯特多项式 p，使得 X 的定义理想 I 由 I 中次数为 m 的齐次多项式生成。将后者记为 I_m，并将全体次数为 m 的齐次多项式构成的空间记为 V。根据希尔伯特多项式的定义，$\dim V = \binom{n+m-1}{n-1}$ 且 $\dim I_m = \binom{n+m-1}{n-1} - p(m) := k$。因此，$I_m$ 对应于 Grassmann流形 $G_r(k, V)$ 上的一点。我们可以利用 Pl¨ucker 坐标将 Grassmann流形嵌入 $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$，而 I_m 中相应的点就是 X 的希尔伯特点。

更准确地说，令 $I_m = span\{h_1, h_2, ..., h_k\}$，则 $[X]$ 是点 $[h_1 \wedge h_2 \wedge ... \wedge h_k] \in \mathbb{P}(\Lambda^k V)$。对于 V 的标准基 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} (\sum_{i=1}^n \alpha_i = m)$，$\sigma$ 的诱导作用的权为 $\langle \lambda, \alpha \rangle := \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$。因此，$\Lambda^k V$ 上的权由 $\sum_{j \in I} \langle \lambda, \alpha^{(j)} \rangle$ 给出，其中 $|I| = k$ 和 k 是不同的 $\alpha^{(j)}$。由此可知，σ 的诱导作用的类型 $(f_1, f_2, ...)$ 由以下内容确定

$$\sum_{j \in I_1} \langle \lambda, \alpha^{(j)} \rangle = \sum_{j \in I_2} \langle \lambda, \alpha^{(j)} \rangle = ... = \sum_{j \in I_{f_1}} \langle \lambda, \alpha^{(j)} \rangle < \sum_{j \in I_{f_1+1}} \langle \lambda, \alpha^{(j)} \rangle ... \tag{2.2}$$

(2.2) 中的所有方程的系数都是整数。因此，我们可以将 λ_i 扰动为有理点 λ_i'，同时保持这些方程和不等式不变；也就是说，$\sigma(t)$ 和 $\tau(t)$ 的诱导作用的特征值类型相同。因此，由引理 2.7 可证得该引理。□

对于等变情形，我们有

命题 2.9. 假设约化群 G_0 作用于 (X, L)。设 $\sigma(t)$是一个 G_0-等变实一参数子群。那么存在一个 G_0-等变一参数子群退化序列 $\tau_i(t)$，其特征值均为有理数，并收敛到 $\sigma(t)$ 的特征值，使得 $\mathcal{X}_0^{\tau_i} = \mathcal{X}_0^{\sigma}$。因此，存在一个 G_0-等变$\mathbb{C}^*$-退化 $\tau_i(t)$，其中心纤维与 $\mathcal{X}_0^{\sigma}$ 相同。

证明. $\sigma(t)$ 与 G_0 交换，当且仅当 $\sigma(1)$ 的特征子空间均为 G_0-不变的。在引理 2.8 的证明中，我们也可以通过将相应的方程和不等式添加到 (2.2) 中，要求 λ' 和 λ 属于同一类型。于是，λ' 和 λ 的特征子空间相同。因此，与 λ' 对应的实一参数子群 $\tau(t)$ 也与 G_0交换。由于 λ' 可以任意接近 λ，我们得到一个 $\tau_i(t)$序列，其特征值为有理数，并收敛到 $\sigma(t)$ 的特征值。对于任意 τ_i，存在一个充分大的整除数 N，使得$\tau_i(Nt)$ 根据引理 2.2 定义了一个 G_0-等变 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$。此外，根据引理 2.7，$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 的中心纤维正是 $\mathcal{X}_0^{\sigma}$。命题得证。□

设 X是一个 $\mathbb{Q}$–Fano簇。对于一个一参数子群退化 $\mathcal{X}^{\sigma}$，若 $\mathcal{X}_0^{\sigma}$是 $\mathbb{Q}$-Fano，则 $\sigma(t)$在 $\mathcal{X}_0^{\sigma}$ 上诱导出一个全纯向量场 $\eta(\sigma)$。于是，通过$\eta(\sigma)$在$K_{\mathcal{X}_0^{\sigma}}^{-1}$ 上的典范提升，我们得到另一个实一参数子群 $\tilde{\sigma}(t)$。由引理2.3，$\tilde{\sigma}(t)$与 $\sigma(t)$仅相差一个常数。我们称 $\tilde{\sigma}(t)$为对应于$\sigma(t)$的归一化实一参数子群。本节以如下定义结束。

定义2.10. 设 X 是一个 $\mathbb{Q}$-Fano簇。若 $\mathcal{X}_0^{\sigma}$是 $\mathbb{Q}$-Fano，且 $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(t)$，则称 $\mathcal{X}^{\sigma}$ 是 X 的特殊一参数子群退化。

3. Equivariant Kähler-Ricci flow

本节中，我们证明 Chen-Sun-Wang 的结果（详见 [18, 定理 3.4]）针对 [10] 中 KR 流的一个等变版本。设 $(X_\infty, \omega_\infty)$

是 HT 猜想中 KR 流 (1.1) 的极限，且 G_0 是第2节中所述的自同构群 Aut(X) 的约化子群。我们需要证明

定理 3.1. X_∞ 是另一个 $\mathbb{Q}$-Fano簇 X_∞ 的一种特殊 $G_0 \times \mathbb{C}^*$-等变 $\mathbb{C}^*$-退化的中心，而后者是由（X_∞,ω_∞）的孤子向量场 v 诱导的 X_∞ 的一参数子群退化的一种特殊 G_0-等变退化的中心。

3.1. 代数引理。如同 [10], ，我们使用 GIT 方法证明定理3.1。设 E 为复线性空间，且 $G =$ 一般线性群(E)。设 V 为 G的表示

空间。对于固定的 U(N) 的紧子群 K，我们定义 G的一个子群如下。

$$\bar{G}_{\mathbf{K}} = \{g \in \bar{G} |\ g \text{ commutes with } \mathbf{K}\}.$$

设 $A_i (i = 0, 1, ...)$ 是 G_K 中的矩阵序列，且 Λ 是与 K 对易的厄米矩阵。我们假设。

$$\lim_{i\to\infty} A_i A_{i-1}^{-1} = e^{\Lambda}. \tag{3.1}$$

将 Λ 的特征值记为 $\mathcal{S} = \{d_1 > d_2 > d_3... > d_{k-1} > d_k\}$ ，将对应于 d_j 的特征子空间记为 U_j。对于 $v \in V \setminus \{0\}$， $[v]$ 是射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 中对应的点。将 $A_{i_k} \cdot [v]$ 的任意子列的极限点集记为 $\mathbf{Lim}_{A_i}[v]$。我们将给出该集合的刻画。

我们固定 $|\cdot|$ 在 V 上的 U(N)-不变度量。令

$$d(v) = \lim_{i\to\infty} (\log |A_{i+1}v| - \log |A_i v|).$$

以下引理在 [10] 中得到了证明。

引理 3.2. 假设 (3.1) 成立。那么对于 $v \in V \setminus \{0\}$,

$$d(v) = \lim_{i\to\infty} (\log |A_{i+1}v| - \log |A_i v|)$$

存在且属于 $\mathcal{S}$。此外，对于任意 $[w] \in \mathbf{Lim}_{A_i}[v]$， w 属于 $U_{d(v)}$。

记 $V_j = \{v \in V |\ d(v) \le d_j\}$。显然， V_i、 U_j 是 K-不变子空间。记 $\bar{G}_{\mathbf{K},\Lambda} = \{g \in \bar{G}_{\mathbf{K}} |\ g \cdot e^{s\Lambda} = e^{s\Lambda} \cdot g\}$.

引理3.3。假设对于某个 $m \ge 1$，有 $V = S^m(E)$。那么存在 $C \in G_{\mathbf{K}}$，其与 m 无关，使得对于所有 i都有 $C \cdot V_j = \oplus_{i=j}^k U_i$ 。此外，还存在$C_i \in \bar{G}_{\mathbf{K}}$ ，满足$\lim_{i\to\infty} C_i = Id$ ，使得$\tilde{A}_i = C_i A_i C^{-1} \in \bar{G}_{\mathbf{K},\Lambda}$。

证明。对于两个维数相同的 \(K\)-不变子空间，我们总能选择它们之间的一个 \(K\)-不变同构。然后，按照 [10, p3153] 中的方法即可证明该引理。□

命题 3.4. 假设对于某个 $m \ge 1$， $V = S^m(E)$。定义 $[\bar{v}] = \lim_{i\to\infty} e^{i\Lambda} C \cdot [v]$。那么 $\mathbf{Lim}_{A_i}[v] \subset \bar{G}_{\mathbf{K},\Lambda} \cdot [\bar{v}]$。

证明。假设 $d(v) = d_j$，我们有 $v \in V_j$。因此 $C \cdot v \in \oplus_{i=j}^k U_i$，且 $C \cdot v$ 的 U_j 分量 $\pi_j(C \cdot v)$ 不为零。由此可得 $[\bar{v}] = [\pi_j(C \cdot v)]$。对于 $[w] \in \mathbf{Lim}_{A_i}[v]$，根据引理 3.2，我们知道 $w \in U_j$。假设 $[w] = \lim_{i\to\infty}[A_{\alpha_i} v]$，则我们有

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} \tilde{A}_{\alpha_i}[\bar{v}] &= \lim_{i\to\infty} \tilde{A}_{\alpha_i}[\pi_j(C \cdot v)] = \pi_j(\lim_{i\to\infty} \tilde{A}_{\alpha_i}[(C \cdot v)]) \\ &= \pi_j(\lim_{i\to\infty} A_{\alpha_i}[v]) = \pi_j[w] = [w].\end{aligned}$$

命题得证，因为 $A_i \in G_{\mathbf{K},\Lambda}$。 □

3.2. 定理 3.1 的证明。由 X_∞ [22, 42] 的唯一性，我们不妨假设 (1.1) 中的初始度量 ω_0 是 K_0-不变度量。那么，ω_t 的所有解也都是 K_0-不变的。取足够大的倍数 l，使得根据 [46, 41]，(M,ω_t) 满足部分 C^0-估计。设 h_t 是定义在 K_X^{-1} 上的 K_0-不变厄米度量，使得 h_t 的陈曲率为 ω_t。它通过 $K-$ 在 $E=H^0(X,K_X^{-l})$ 上诱导出一个不变度量 H_t，其定义为

$$(s^\alpha,s^\beta)_{H_t}=\int_M\langle s^\alpha,s^\beta\rangle_{h_t^{\otimes l}}\omega_t^n. \tag{3.2}$$

设 $\{s^\alpha(t)\}$ 是 (E,H_t) 的一个正交归一基，且 $\Phi_t\colon M\to\mathbb{C}P^N$ 是由 $\{s^\alpha(t)\}$ 给出的 Kodaira 嵌入。根据 [41], Φ_{t_i} 中的命题 2.7，(X) 收敛到一个具有 klt 奇点的 $\mathbb{Q}$- Fano 簇 X_∞，其中收敛对于某个子列 $t_i\to\infty$ 成立。此外，根据 [41], X_∞ 中的定理 1.1，(X_∞) 存在一个弱 K¨ ähler-Ricci 孤立子。

下面通过选取合适的正交归一基，使这些嵌入关于 K_0 具有等变性。选取一个关于 H_0 的正交归一基 $s^\alpha(0)$。于是，相对于 $\{s^\alpha(0)\}$，我们可以将 H_t 写成一个矩阵。滥用记号，我们也将其记为 H_t。

考虑矩阵 A_t 满足的以下常微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}A_t=-\dfrac{1}{2}A_tH_t'H_t^{-1},\\ A_0=id.\end{cases} \tag{3.3}$$

由此可得 $\frac{d}{dt}(A_tH_tA_t^*)=0$ 和 $A_tH_tA_t^*=id$。定义 $s^\alpha(t)=\sum_{\beta=0}^N A_t^{\alpha\beta}s^\beta(0)$。于是可以验证，$\{s^\alpha(t)\}$ 是 E 的一组正交归一基，其度量为 H_t。将由上述 Φ_t (t) $\}$ 给出的 X 的嵌入记为 Φ_t 。因此我们有$\Phi_t=A_t\cdot\Phi_0$。

由 (3.2)，基 $\{s^\alpha(0)\}$ 上的内积 $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ 诱导出 K_0 作为 U(N+1)的子群。于是，G_0 可视为 GL(N+1, $\mathbb{C}$)的子群。

引理 3.5. A_t 与 K_0 交换，因此也与 G_0 交换。

证明。由于对 $g\in K_0$, 有 $H_t(g\cdot,g\cdot)=H_t$，我们得到 $gH_tg^*=H_t$；由于 g 是酉的，这与$H_tg=gH_t$ 相同。因此， H_t' 也与 K_0交换。现在由 (3.3) 可得

$$\frac{d}{dt}[A_t,g]=-\frac{1}{2}[A_t,g]H_t'H_t^{-1},$$

其中 $[A,B]=AB-BA$。因此 $[A_t,g]=0$。由 G 的约化性$_0$,，对于任意 $g\in G_0$，我们还得到$[A_t,g]=0$ 。引理得证。□

定理 3.1 的证明补充。我们知道，正交归一基 $\{s^\alpha(0)\}$诱导了 G_0 作为一般线性群 GL(N+1, $\mathbb{C}$) 的子群的作用，也就是说， Φ_0 与 G_0可交换。由上述引理， Φ_t 也与 G_0可交换。另一方面，由 [42]中的引理 6.5，对于任意子列 $t_i'\to\infty$， $A_{t_i'+s}\cdot A_{t_i'}^{-1}$ 一致收敛到 e^{sv}；其中 v 是 K¨ahler-Ricci 流极限上的孤子向量 VF。由于 v 是 $A_{t_i'+s}\cdot A_{t_i'}^{-1}$ 的极限，它与 K_0可交换。由 [42]中的推论 3.3， v 在共轭意义下唯一。我们可以假设 $v\in gl(N+1,\mathbb{C})$ 是对角的。由 [42, 命题 7.4], , Im(v) 位于 $Aut^v(X_\infty)$ 的紧致部分，其中 X_∞ 是 K¨ahler Ricci 流的极限。因此， v 的特征值全为实数。于是，我们可以用与 K_0 可交换的酉元素修改 A_i，使条件 (3.1) 对 $\Lambda=v$成立。记 $\Phi_0(X)$ 的希尔伯特多项式为 p，并将希尔伯特

具有希尔伯特多项式 p 的 $\mathbb{P}(E)$ 的子概形的概形记为 $\mathrm{Hilb}^{\mathbb{P}(E),\ p}$。然后，我们可以像 [42] 中那样，将命题 3.4 应用于希尔伯特点 $[X] = [\Phi_0(X)] \in \mathrm{Hilb}^{\mathbb{P}(E),\ p}$。记 $[\bar{X}_\infty] = \lim_{t\to\infty} e^{tv}C \cdot [X]$。于是，由命题 3.4 $[X_\infty]$，它属于 $G_{\mathbf{K_0},\ v} \cdot [X_\infty]$ 的闭包。

注意到 C 和 e^{tv} 都与 K_0交换。因此

$$\lim_{t\to\infty} e^{tv}C \cdot X$$

是 G_0-等变一参数子群 $\sigma(t) = e^{tv}$ 对 (X, K_X^{-1}) 的退化。显然，此极限的希尔伯特点恰为 $[X_\infty]$。因此，我们可以将该极限记为 X_∞。另一方面，由于 [42, 命题 7.4], $\mathrm{Aut}^v(X_\infty)$ 是约化的，所以 $G_{\mathbf{K}_0,v} \bigcap \mathrm{Aut}^v(X_\infty)$ 也是一个约化群。因此，根据 Luna 切片引理，存在一个一参数子群 $\tau(s)$ $(s \in \mathbb{C}^*)$，它属于 $G_{\mathbf{K}_0,v} \bigcap \mathrm{Aut}^v(X_\infty)$，并将 X_∞ 退化为 X_∞。由于 $G_{\mathbf{K}_0,v}$ 中的所有元素都与 $\mathrm{G}_0 \times \mathbb{C}^*$交换，根据引理 2.2， $\tau(s)$ 诱导出一个以 X_∞为中心的 $\mathrm{G}_0 \times \mathbb{C}^*$-等变 $\mathbb{C}^*$-退化，将 $(\bar{X}_\infty, K_{X_\infty}^{-l})$ 退化。定理得证。□

4. Torus 1-PS degenerations on G-spherical varieties

本节将回顾 Delcroix 关于球簇的环面 $\mathbb{C}^*$-退化的研究 [16]，然后将他的结果推广到环面一参数子群退化的情形。

4.1. 与 G-球簇相关的组合数据。本节概述球簇的一般事实，并给出组合数据的一些基本结果。相关主要参考文献见 [24, 40] 本小节。设 G 是一个复连通约化群，$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{G}$ 是一个博雷尔子群。

定义 4.1. 若存在一个开 B-轨道 BH，且相应的轨道映射 $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ 是可分的，则称齐性簇 G/H 为球簇。 G-作用在 G/H 上是左作用： $\sigma \cdot g\mathrm{H} = (\sigma g)\mathrm{H}$。记 $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{G}$ 为开 B-轨道 BH 的稳定子。

G/H 的嵌入是一个正规 G-簇 X，并带有一个 G-等变开嵌入 $\mathrm{G/H} \hookrightarrow X$。令 x_0 表示 $\mathrm{H} \in \mathrm{G/H}$ 的像。我们称 (X, x_0) 或X 为球面簇。

任意群 S 的特征群记为 $\mathfrak{X}(\mathrm{S})$:

$$\mathfrak{X}(\mathbf{S}) = \{f : S \to \mathbb{C}^* \text{ is a homomorphism}\}.$$

注意，对于博雷尔子群 B 以及包含于 B 中的极大子环面 T，$\mathfrak{X}(\mathrm{T}) = \mathfrak{X}(\mathrm{B})$。令 $\Phi \subset \mathfrak{X}(\mathrm{T})$ 表示 (G,T) 的根系，并将由 B 确定的 Φ 中的正根记为 Φ^+。

包含 B 的 G 的抛物子群 P 唯一地具有一个包含 T 的 Levi 子群 L。令 $\Phi_{\mathbf{P}}$ 表示 P 关于 T 的根集。我们将幺幂根基 P^u 的根集记为 $\Phi_{\mathbf{P}^u}$。定义

$$\kappa_{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha\in\Phi_{\mathbf{P}^u}} \alpha.$$

对于正规簇 X，用 $\mathbb{C}(X)$ 表示 X 上的有理函数。正规簇 X 的赋值是一个映射

$$v : \mathbb{C}(X)^* = \mathbb{C}(X)\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

具有以下性质

$$v(f_1+f_2)\geq \min\{v(f_1),v(f_2)\} \text{ whenever } f_1,f_2,f_1+f_2\in\mathbb{C}(X)^*,$$
$$v(f_1f_2)=v(f_1)+v(f_2) \text{ for all } f_1,f_2\in\mathbb{C}(X)^* \text{ and}$$
$$v(\mathbb{C}^*)=0.$$

定义

$$(\mathfrak{M}:=)\mathfrak{M}(\mathbf{G}/\mathbf{H})=\{\chi\in\mathfrak{X}(\mathbf{B})|\mathbb{C}(\mathbf{G}/\mathbf{H})^{(\mathbf{B})}_{\chi}\neq\{0\}\},$$
$$(\mathfrak{N}:=)\mathfrak{N}(\mathbf{G}/\mathbf{H})=\mathrm{Hom}(\mathfrak{M}(\mathbf{G}/\mathbf{H})),\mathbb{Z}).$$

那么， $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{X}$(B) $=$ $\mathfrak{X}$(T)的一个子群，其秩称为齐性空间 G/H) 的秩。

对于 $\mathbb{C}$(G/H)上的任意赋值 v，定义 $\rho(v)=\rho_v\in\mathfrak{N}\otimes\mathbb{Q}$ 为 $\rho_v(\chi)=v(f_\chi)$。定义($\mathcal{V}$:=)$\mathcal{V}$(G/H)为 = {G不变赋值}. 。众所周知， ρ: $\mathcal{V}\to\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$ 是单射。因此，我们可以将 $\mathcal{V}$(G/H)与其像等同，并称其为赋值锥。赋值锥 $\mathcal{V}$ 张成 $\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$。此外，$\mathcal{V}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$ 是一个余单纯形锥（参见 [40, 第 20]节）。因此，存在唯一确定的线性无关本原元素集 $\Sigma\subseteq\mathfrak{M}$，使得

$$\mathcal{V}=\bigcap_{\gamma\in\Sigma}\{v\in\mathfrak{N}\otimes\mathbb{Q}:\langle v,\gamma\rangle\leq 0\}$$

Σ 中的元素称为球根，它们属于 G 的正根所张成的锥。

记 G/H 中的 B-稳定素除子集合为 $\mathcal{D}:=\mathcal{D}$(G/H)，称其为 G/H 的颜色。我们还将 X 中的 B-稳定素除子集合记为 $\mathcal{P}(X)$。设 X 是一个嵌入，其 G-闭轨道为 Y。定义 $\mathcal{D}_Y(X)=\{D\in\mathcal{P}(X)\ Y\subseteq D\}$。

如果嵌入 X 中只有一个闭 G 轨道 Y，则称其为简单嵌入。在这种情况下，我们定义两个集合

$$\mathcal{I}_Y(X)=\{v_D\in\mathcal{V}|D\in\mathcal{D}_Y(X)\text{ is }G\text{-stable}\},$$
$$\mathcal{J}_Y(X)=\{\emptyset\neq D\bigcap\mathbf{G}/\mathbf{H}\in\mathcal{D}|D\in\mathcal{D}_Y(X)\}.$$

于是， X 由 $\mathcal{I}_Y(X)$ $\mathcal{J}_Y(X)$ 唯一确定。现在我们希望仅利用 G/H 的信息来描述这一对。对于任意颜色 D， v_D 是一个赋值，因此我们将 $\rho(v_D)$ 简记为 $\rho(D)$。令 $\mathcal{C}_Y(X)\subseteq\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$ 为由 $\rho(\mathcal{J}_Y(X))$ 和 $\mathcal{I}_Y(X)$ 生成的锥。

引理 4.2. 对于简单嵌入 X， $\mathcal{I}_Y(X)$ 的 $\mathbb{Q}_+$ 张成恰好是 $\mathcal{C}_Y(X)$ 的极射线中不含 $\rho($ $\mathcal{J}_Y(X))$ 元素的那些射线。

定义 4.3. 着色锥是一个由 $(\mathcal{C},\mathcal{R})$ 构成的有序对，其中 $\mathcal{C}\subseteq\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$ 和 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{D}$ 具有以下性质：

- CC1： $\mathcal{C}$ 是由 $\rho(\mathcal{R})$和 $\mathcal{V}$中的有限多个元素生成的锥。
- CC2：内部 $\mathcal{C}^\circ\cap\mathcal{V}\neq\emptyset$一个着色锥称为严格凸的，如果

满足以下条件：SCC： $\mathcal{C}$ 是严格凸的，且 $0\notin\rho(\mathcal{R})$。

将 $(\mathcal{C}_Y(X)$ $\mathcal{J}_Y(X))$ 的配对记为 $\mathcal{C}^c(X)$，则有

定理 4.4. 映射 $X\mapsto\mathcal{C}^c(X)$ 在简单嵌入的同构类与严格凸着色锥之间构成一个双射。

对于 G/H 的一般球面嵌入，每个 G 轨道都给出一个着色锥，而这些着色锥构成一个着色扇。

定义 4.5. 着色扇是由着色锥组成的非空有限集合 $\mathcal{F}$，并满足以下性质：

- CF1： $\mathcal{C}^c \in \mathcal{F}$ 的每个面都属于 $\mathcal{F}$。
- CF2：对于每个 $v \in \mathcal{V}$，至多存在一个满足 $v \in \mathcal{C}^\circ$ 的 $(\mathcal{C}, \mathcal{R}) \in \mathcal{F}$。

着色扇 $\mathcal{F}$ 称为严格凸，当且仅当 $(0, \varnothing) \in \mathcal{F}$，或者等价地，当且仅当 $\mathcal{F}$ 的所有元素都是严格凸的。

定理 4.6. 映射 $X \mapsto \mathcal{F}(X)$ 在嵌入的同构类与严格凸着色扇之间诱导出一个双射。

将所有集合 $\mathcal{R}$ with $(\mathcal{C}, \mathcal{R}) \in \mathcal{F}(X)$ 的并记为 $\mathcal{D}(X)$，它们称为 X 的颜色。

令 $\mathcal{I}_X^G$ 表示 X 的有限个 G-稳定素除子的集合。任意除子 $Y \in \mathcal{I}_X^G$ 都对应于一条射线 $(\mathcal{C}, \emptyset) \in \mathcal{F}(X)$，我们用 u_Y 表示该射线在 $\mathfrak{N}$ 中的不可约生成元[-]。对于任意 $D \in \mathcal{D}$，其在 X 中的闭包 D 是一个不可约的 B-稳定但非 G-稳定除子。任意 B-稳定 Weil除子 d 在 X 上可写为

$$d = \sum_{Y \in \mathcal{I}_X^G} n_Y Y + \sum_{D \in \mathcal{D}} n_D \bar{D} \tag{4.1}$$

其中 n_Y、n_D 为整数。事实上，任意 Weil除子都线性等价于一个 B-不变除子，而 Brion 证明了以下用于刻画卡蒂埃除子的判据。

命题 4.7. [8, 命题 3.1] 形式为 (4.1) 的 B-稳定 Weil除子 d 在 X 中是卡蒂埃除子，当且仅当存在一个定义在扇 $\mathcal{F}(X)$ 的支撑 $|\mathcal{F}(X)|$ 上的整数分段线性函数 l_d，使得

$$d = \sum_{Y \in \mathcal{I}_X^G} l_d(u_Y) Y + \sum_{D \in \mathcal{D}(X)} l_d(\rho(D)) \bar{D} + \sum_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}(X)} n_D \bar{D} \tag{4.2}$$

对于某些整数 n_D。

令 $\mathcal{F}^{\max}(X)$ 表示最大维数的锥 $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$ 的集合，使得存在 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$，满足 $(\mathcal{C}, \mathcal{R}) \in \mathcal{F}(X)$。若 d 是一个卡蒂埃除子且 $\mathcal{C} \in \mathcal{F}^{\max}(X)$，令 $v_{\mathcal{C}} \in \mathfrak{M}$ 满足对 $x \in \mathcal{C}$，有 $l_d(x) = v_{\mathcal{C}}(x)$。此外，当且仅当以下条件成立时，$d$ 是丰沛的：

- 函数 l_d 是凸的，
- $v_{\mathcal{C}_1} \neq v_{\mathcal{C}_2}$ 若 $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_{\text{最大值}}(X)$，
- $-n_D > v_{\mathcal{C}}$对所有 $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}(X)$，有 $(\rho(D))$，且 $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_{\text{最大值}}(X)$。

对于卡蒂埃除子 d，我们关联多面体 $\Delta_d \subseteq \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$，定义为

$$\Delta_d := \left(\cap_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}(X)^{\max}} (-v_{\mathcal{C}} + \sigma^\vee)\right) \bigcap \left(\cap_{D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_X} \{m | m(\rho(D)) + n_D \geq 0\}\right).$$

如果 d 是丰沛的，那么 l_d 就是 $x \in |\mathcal{F}(X)|$的 Δ_d 的支撑函数。

丰沛线丛也有相应的动量多面体。设 L 是球面簇 X 上的一个 G-线性化丰沛线丛。记 V_λ 为 G 的一个最高权为 $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$、相对于 B 的不可约表示。由于 X 是球面簇，对于所有 $r \in \mathbb{N}$，存在一个有限集 $\Delta_r \subset \mathfrak{X}(T)$，使得

$$H^0(X, L^r) = \bigoplus_{\lambda \in \Delta_r} V_\lambda$$

定义 4.8。关于 B， L 的动量多面体 Δ_L 定义为$\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}\Delta_r/r$ 在 $\mathfrak{X}(T)\otimes\mathbb{R}$ 中的闭包。

B-稳定除子的动量多面体与多面体之间的关系如下。固定 L 的一个线性化，并选取一个全局 B-半不变截面 s of L，使得 s 的零除子 d 是一个丰沛的 B-不变卡蒂埃除子。令 μ_s 为由 s 定义的 B 的特征，即满足对所有 $x\in X$，$b\cdot s\left(b^{-1}\cdot x\right)=\mu_s(b)s(x)$。

命题4.9. ([8], 命题3.3) L 的动量多面体 Δ_L 与和 d 相关联的多面体 Δ_d 满足关系 $\Delta_L=\mu_s+\Delta_d$。

4.2. G-极化球面簇的环面 $\mathbb{C}^*$-退化。以下分类结果基于 [20, 2, 3] 中的工作，在 [16] 中得到了证明。为便于后续使用，我们在下文重述其证明，见 [16, 第 4] 节。

命题 4.10. [16, 定理 4.1] 设 (X,L) 是一个极化 G-球面簇。设 d 是 L 的任意一个固定的 B-不变除子。那么，(X,L) 的 G-等变 C*-退化与 Δ_d 上斜率取值于 $\mathcal{V}$ 的正有理分段线性凹函数一一对应。

证明. 设 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ 是 (X,L) 的一个 G-等变测试构型。回顾 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ 的紧化。也就是说，我们将 $\mathbb{C}$ 上的平凡族沿着 $\mathbb{C}^*$ 与 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ 粘合，从而得到一个在 $\mathbb{P}^1$ 上的族。我们将添加到 $\mathbb{C}$ 的点记为 ∞，并仍将紧化后的族记为 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$。

通过加上 $\{0\}\in\mathbb{P}^1$ 的拉回的一个充分大的倍数，我们可以假设 $\mathcal{L}$ 是丰沛的。于是，$(\mathcal{X},\mathcal{L})$ 在 $G\times\mathbb{C}^*$ 的作用下是一个极化球面簇。其开轨道为 $G/H\times\mathbb{C}^*$，组合数据可由 X 的组合数据轻易导出。

设 s 是 d 的定义截面。令$\hat{s}$ 为 $\mathcal{L}$ 的 $\mathbb{C}^*$-不变亚纯截面，其在 $(X,L^r)=(\mathcal{X}_1,\mathcal{L}_1)$ 上的限制与 $s^{\otimes r}$ 一致。那么，$\hat{s}$ 的 ˆ除子 d 是 $(B\times\mathbb{C}^*)$-稳定的，因此是如下形式的整数线性组合。

$$\hat{d}=\sum_{\hat{D}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}}n_{\hat{D}}\hat{D} \tag{4.3}$$

其中， $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的素（$B\times\mathbb{C}^*$）稳定除子的集合。在 $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ 中，除子分为三种类型：

(1) 除子 $\{\hat{D}\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}}\mid\varrho(\hat{D})\in(\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}\times\{0\})\}$。任何此类 $\hat{D}$ 都满足 $\hat{D}=\overline{D\times\mathbb{C}^*}$，其中某个 $D\in\mathcal{P}_X$。由于$\hat{s}|_{\mathcal{X}_1}\cong rL$, $n_{\hat{D}}=rn_D$。特别地， $G/H\times\mathbb{C}^*$ 的任何颜色都必须属于此类型；

其余两种类型由以下 $\mathcal{X}$ 的 $(G\times\mathbb{C}^*)$-稳定除子组成：

(2) $\infty\in\mathbb{P}^1$处的纤维 X_∞。由于$\hat{s}|_{\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_0}\cong s\times(\mathbb{P}^1\setminus\{0\})$， $n_{\mathcal{X}_0}=0$；(3) $\mathcal{X}_0$的约化不可约分量 $\mathcal{X}_{0,1}$、...、 $\mathcal{X}_{0,n_0}$。在此情况下，$\hat{\rho}(\mathcal{X}_{0,i})=(u_i,-m_i)$ 是 $\mathfrak{N}\oplus\mathbb{Z}$ 中的本原向量，满足 $u_i\in\mathcal{V}$和 $m_i>0$。我们也将 n_i 记作（4.3）中相应的系数。

令 $\hat{\Delta}$ 表示与除子 (4.3) 相关的 $\hat{}$ $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ 中的多面体。根据前面对该除子的描述，该多面体可表示为

$$\hat{\Delta}=\{(ry,t)\mid y\in\Delta,0\le t\le g(x)\}$$

其中， g 是定义在 Δ 上的（正的）有理凹分段线性函数，表示为

$$g(x) = \inf_{i=1,\dots,n_0} \left(\frac{ru_i(y) + n_i}{m_i} \right). \tag{4.4}$$

注意，由于每个 m_i 都是正数，因此每个 $\frac{r}{m_i}u_i \in \mathcal{V}$。

反过来，设 g 是 X 的赋值锥内斜率为有理数的正分段线性凹函数。于是我们可以假设 $g > 0$ 具有某个 $r \in \mathbb{N}_+$ 下的形式 (4.4)，其中每个 $n_i \in \mathbb{Z}$、$u_i \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{N}$ 和 $m_i \in \mathfrak{N}_+$ 都使得 $(u_i, -m_i)$ 是 $\mathfrak{N} \oplus \mathbb{Z}$ 中的本原向量。考虑多面体

$$\hat{\Delta} = \{(rx, t) \mid x \in \Delta_d, 0 \le t \le g(p)\},$$

其中 d 是线丛 L 的 B-半不变量除子，如 (4.2) 所示。

注意，$\mathrm{G/H} \times \mathbb{C}^*$ 的颜色可以与 $\underline{\mathrm{G}}/\mathrm{H}$ 的颜色相对应。事实上，对于任意颜色 $D \in \mathcal{D}(\mathrm{G/H} \times \mathbb{C}^*)$，$D \cap G/H \in \mathcal{D}(\mathrm{G/H})$。反过来，对于每个 $\hat{}D \in \mathcal{D}(G/H)$，$\overline{D \times \mathbb{C}^*} \in \mathcal{D}(\mathrm{G/H} \times \mathbb{C}^*)$。我们将定义一个由以下极大着色锥组成的着色扇：

(1') $(\mathcal{C} \times \{0\}, \mathcal{R})$，其中$(\mathcal{C}, \mathcal{R})$是 $\mathcal{F}(X)$的着色锥；(2') $(\mathcal{C} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{R})$，其中$(\mathcal{C}, \mathcal{R})$是 $\mathcal{F}(X)$的着色锥；$\hat{}$ (3') g的图像在顶点 v 处的内法锥。在这种情况下，我们定义着色锥$(\mathcal{C}_v, \mathcal{R}_v)$，其中 $\mathcal{C}_v$ 是 v处的内法锥，并且

$$\mathcal{R}_v = \{\hat{D} = \overline{D \times C^*} | D \in \mathcal{D}(\mathbf{G/H}) \text{ satisfies } n_D - \rho(D)(v) = 0\}.$$

$\hat{}$ 在最后一个等式中， $\rho(D)$被视为 $\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}} \times \{0\} \subset \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$中的一个向量。

T多面体$\hat{}\Delta$ 是与$(B \times \mathbb{C}^*)$-稳定卡蒂埃除子相关联的多面体

$$\hat{d} = \sum_{\hat{D} \in \mathcal{P}_X} n_{\hat{D}} \hat{D}$$

其中

(1") 对每个除子$\hat{}$ $D \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$，都有$n_{\hat{}D} = rn_D$，使得对于某个 $D \in \mathcal{P}_X$有$\hat{}$ $D = \overline{D \times \mathbb{C}^*}$；(2") 对唯一的除子 X_∞，有 $n_{X_\infty} = 0$；$\hat{}$ (3") 对应于$(u_i, -m_i)$的 $G \times \mathbb{C}^*$-稳定素除子 D_i，有$n_{\hat{}D} = n_i$。

特别地，$\hat{}d$在 $\mathcal{X} \setminus \{\hat{}D_i | i - 1, ..., n_0\}$ 上的限制，是 X 中一个形如 (4.1) 的除子 d 与 $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ 的乘积。此外， d 满足丰沛性判据。相伴线丛 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)$ 是 ($G \times \mathbb{C}^*$)-可线性化的（只需取充分可整除的张量幂）。选择一种线性化，使得 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)$ 的自然截面 $\hat{s}$ 为 $\mathbb{C}^*$-不变，且具有 B-权 $r\chi$。由此可得 $\hat{}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(d)|_{X \times (\mathbb{C}^* \cup \{\infty\})} \cong (X, rL) \times (\mathbb{C}^* \cup \{\infty\})$。因此，$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 是 (X, L) 的一个测试构型。

□

根据命题 4.10，G-球面簇上的 G-等变 $\mathbb{C}^*$-退化由一个有理分段线性函数确定。正如 Donaldson [20]，引入的环面流形上的 $\mathbb{C}^*$-退化一样，为求简便，我们将此类退化称为环面$\mathbb{C}^*$-退化。

如果 $\tau(s)$ 是与 G 对易的 $\mathrm{GL}(H^0(X, L^k))$ 中的一个一参数子群，那么 $\tau(s)$ 的特征子空间是 $H^0(X, L^k)$ 的 G-不变子空间。固定一个 L^k 的 B-半不变除子

其形式为 (4.1)，相应的 B-特征为 μ_d。 $\tau(s)$ 的特征值由 $s_\lambda^{(k)}$ 在 $V_{\lambda+k\mu_d}$ 上关于 $\lambda \in k\Delta_d \cap \mathfrak{M}(G/H)$ 的特征值确定。

引理4.11. 设 (X, L) 是一个极化射影簇，且 $\mathcal{X}$ 是 (X, L) 的一个环面 $\mathbb{C}^*$-退化。那么， $\mathcal{X}$ 的中心纤维是正规的，当且仅当它对应于一个整仿射函数

$$f(y) = C + \Lambda(y),\ y \in \Delta_d \tag{4.5}$$

其中包含 $\Lambda \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{N}$。此外， $\mathbb{P}(H^0(X, L^k))$ 中对应于 $\mathcal{X}$ 的一参数子群的特征值为

$$s_\lambda^{(k)} = kf(\frac{\lambda}{k}),\ \forall \lambda \in k\Delta_d \cap \mathfrak{M}\ . \tag{4.6}$$

证明。注意，总空间 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ 是 $G/H\times\mathbb{C}^*$ 的极化球面嵌入，且中心纤维 $\mathcal{X}_0$ 是一个 $G \times \mathbb{C}^*$- 不变除子。由 $[40,$ 定理 15.20$]$, 可知，只需证明 $\mathcal{X}_0$ 是素的。

$\mathcal{X}$ 对应一个凹的有理分段线性函数

$$f(y) = \min_{a=1,\dots,N_f}\{C_a + \Lambda_a(y)\},\ y \in \Delta_d$$

每个 $C_a \in \mathbb{Q}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{N}$。于是

$$\mathcal{X}_0 = \sum_{a=1}^{N_f} m_a \hat{D}_a,$$

其中，$\hat{}\ D_a$ 是与 a 对应的素 $G/H \times \mathbb{C}^*$-除子， a是 f的第 a 个部分，而m_a 是使得 $m_a\Lambda_a \in \mathfrak{N}$成立的最小正整数。显然，当 $N_f = 1$和 $m_1 = 1$时， $\mathcal{X}_0$ 是素数。因此得到 (4.5)。(4.6)由命题 4.10 的构造中的 $\mathbb{C}^*$-作用得到。□

在引理4.11中具有约化中心纤维的环面 $\mathbb{C}^*$-退化情形下，由 $[14]$中的定理 3.30，中心纤维是某个 H_0 的 G/H_0 球面嵌入。H_0 可如下计算：选取 $x_0 \in X$ ，使得 x_0的各向同性群为 H，并取 $\hat{}x_0 = (x_0, 1)$。令 $\bar{x}_0 = \lim_{t\to 0}(\Lambda(t)\ t)\hat{}x_0$。那么 H_0就是 $\bar{x}_0$的各向同性群。由于 $(\Lambda(t)\ t^m)\hat{}x_0$ 的各向同性群为 $H_t = \mathrm{Ad}^{(\Lambda(t),t)}$ H，且 H_t 的极限是 H_0, 的子群，由维数关系必有

$$\mathbf{H}_0 = \lim_{t\to 0} \mathrm{Ad}_{(\Lambda(t),t)}\mathbf{H}.$$

现在我们给出与 $GL(H^0(X, L^k))$ 中 G–等变一参数子群 $\sigma(t)$ 相关的环面一参数子群退化分类。为简便起见，我们也将 $\sigma(t)$ 在 V_μ 上的特征值记为 $s_\mu^{(k)}$。将 $\mathcal{V}$ 在 $\mathcal{V} \otimes \mathbb{R}$中的闭包记为 $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ 。

命题 4.12. 假设环面一参数子群退化 $(X, \sigma(t))$ 的中心 $\mathcal{X}_0^\sigma$ 是正规有理的。那么存在 $\Lambda \in \mathcal{V}_\mathbb{R}$ 和常数 C ，使得 $s_\mu^{(k)} = \Lambda(\mu) + C, \forall \mu \in \Delta_k$。反之亦然。

证明。由命题 2.9，可找到一个由 G 等变的实一参数子群 $\tau^i(t)$ 构成的序列，其特征值 $s_\mu^{(k,i)} \in \mathbb{Q}$ 收敛到 $s_\mu^{(k)}$，使得中心纤维 $\mathcal{X}^{\tau^i(t)\ 0}$ 与 $\mathcal{X}_0^\sigma$ 相同。对于一个充分可整除的 N， $\tilde{\tau}^i(t) = \tau^i(Nt)$ 是一个一参数子群。将引理4.11应用于 $\tilde{\tau}^i(t)$，存在 $\tilde{\Lambda}_i \in \mathcal{V}$ 和常数 $\tilde{C}_i$，使得 $Ns_\mu^{(k,i)} = \tilde{\Lambda}_i(\mu) + \tilde{C}_i$。因此，对于某个 $\Lambda_i \in \mathcal{V}$ 和常数 C_i，有 $s_\mu^{(k,i)} = \Lambda_i(\mu) + C_i$。由于 $s_\mu^{(k,i)}$ 收敛

到 $s_\mu^{(k)}$，经过取子列， Λ_i 和 C_i 收敛到 $\Lambda \in \mathcal{V}_\mathbb{R}$ 和 $C \in \mathbb{R}$。于是 $s_\mu^{(k)} = \Lambda(\mu) + C$，命题得证。

我们也可以如下证明。在分解 $H^0(X, L^k) = \oplus_{\mu \in \Delta_k} V_\mu$中，选取最高权为 μ的截面 $x_\mu \in V_\mu$，即

$$b \cdot x_\mu = \mu(b) x_\mu, \forall b \in B.$$

对于任何形如 $\sum_{i\in I} \mu_i = \sum_{j\in J} \mu_j$ 且满足 $|I| = |J|$的等式，都存在一个常数c，使得 $\Pi_{i\in I} x_{\mu_i} = c\Pi_{j\in J} x_{\mu_j}$是 $\mathbb{P}(H^0(X, L^k))$ 中 X的定义方程。等式两边的权分别为 $\sum_{i\in I} s_{\mu_i}^{(k)}$和 $\sum_{j\in J} s_{\mu_j}^{(k)}$。如果这两个权不相同，那么极限 $\mathcal{X}_0^\sigma$上将存在一个定义方程 $\Pi_{i\in I} x_{\mu_i} = 0$ 或$\Pi_{j\in J} x_{\mu_j} = 0$。这与正规性矛盾。因此我们必须有

$$\sum_{i\in I} s_{\mu_i}^{(k)} = \sum_{j\in J} s_{\mu_j}^{(k)}.$$

由此可知，存在一个仿射函数 $\Lambda(\mu) + C$ 使得 $s_\mu^{(k)} = \Lambda(\mu) + C$。我们将证明 $\Lambda \in \mathcal{V}$。对任意 $r \geq 1$，考虑 $\sigma(t)$ 在 $H^0(X, L^{rk})$ 上的诱导作用。诱导作用的特征值 $s_\mu^{(rk)}(\mu \in \Delta_{kr})$ 也等于 $\Lambda_r(\mu) + C_r$，其中 Λ_r 和 C_r。我们有分解

$$V_{\mu_1} \cdot V_{\mu_2} \ldots \cdot V_{\mu_r} = \oplus_\alpha V_{\sum_{i=1}^r \mu_i - \alpha},$$

其中 α 是 G 的单根的某个非负线性组合。 $\sigma(t)$ 在 $V_{\sum_{i=1}^r \mu_i}$上的特征值等于 $\sum_{i=1}^r s_{\mu_i}^{(k)}$。因此我们得到 $\sum_{i=1}^r (\Lambda(\mu_i) + C) = \Lambda_r(\sum_{i=1}^r \mu_i) + C_r$。由此可知 $\Lambda_r = \Lambda, C_r = rC$。在另一个分支$V_{\sum_{i=1}^r \mu_i - \alpha}$上， $\sigma(t)$ 的特征值至少为 $\sum_{i=1}^r s_{\mu_i}^{(k)}$。因此 $\Lambda(-\alpha) \geq 0$。由于 $\mathcal{V}$ 是所有此类 $\alpha' s$ 所生成的对偶锥的负锥，我们知道 $\Lambda \in \mathcal{V}_\mathbb{R}$。

反之，给定任意 $\Lambda \in \mathcal{V}_\mathbb{R}$ 以及任意常数 C，特征值 $s_\mu^{(k)} = \Lambda(\mu) + C$ 定义了一个 G-等变的实一参数子群。记其为 $\sigma(t)$。我们需要证明中心纤维是正规的。方程确定了 $\sigma(t)$ 在希尔伯特点上的诱导作用的特征值类型，其形式如下:

$$\sum_{i\in I} \Lambda(u_i) = \sum_{j\in J} \Lambda(u_j), |I| = |J|.$$

因此，我们可以选择一个由 $\Lambda_i \in \mathcal{V}$ 构成的序列，它们是这些方程的解，并且收敛到 Λ。记具有特征值 $\Lambda_i(\mu) + C$ 的实一参数子群为 $\tau^i(t)$。于是， $\tau^i(t)$ 和 $\sigma(t)$ 的诱导作用的特征值类型相同。因此有 $\mathcal{X}^{\tau^i(t)}{}_0 = \mathcal{X}^\sigma{}_{0(t)}$。根据引理 4.11 $\mathcal{X}^{\tau^i(t)}{}_0$ 是正规的。因此 $\mathcal{X}_0^{\sigma(t)}$ 是正规的，命题得证。□

5. H-invariant on G-spherical Fano varieties

5.1. 特殊环面一参数子群退化。对于球面簇 X， K_X^{-1} 是一个Weil除子，可写为

$$d = \sum_{Y \in \mathcal{I}_X^G} Y + \sum_{D\in\mathcal{D}} n_D \bar{D} \tag{5.1}$$

其中， n_D 可根据 κ_P和根的类型明确求得（关于这些系数的精确定义，参见[21] ）。如果这是一个丰沛的 $\mathbb{Q}$-Cartier】【。

除子，则 X 是一个 $\mathbb{Q}$-Fano 球面簇。在这种情况下，存在一个权为 κ_P 的 B-半不变截面 s，属于 K_X^{-1}，使得 $div(s) = d$。

根据命题4.9，动量多面体 $\Delta_+ \coloneqq \Delta_{K_X^{-1}}$ 于是为 $\kappa_P + \Delta_d$，此外，Δ_d 的对偶多胞体 Δ_d^* 是一个 $\mathbb{Q}$-G/H-自反多面体，其定义见 [21], ，可由以下凸包得到:

$$\Delta_d^* = \operatorname{conv}\left(\{\rho_D/n_D, D \in \mathcal{D}\} \cup \left\{u_Y, Y \in \mathcal{I}_X^G\right\}\right).$$

$\mathbb{Q}$-Fano簇 X 还可以通过以下过程从其 $\mathbb{Q}$-G/H-自反多面体Δ_d^* 恢复，具体过程详见 [21]。X 的着色扇由 Δ_d^*得到，它是所有满足 Cone(F) 的相对内部与赋值锥 $\mathcal{V}$ 的交集非空的面 F对应的着色锥 Cone(F) $\rho^{-1}(F)$ 的并。

根据引理4.11，球面 Fano 簇的特殊环面 $\mathbb{C}^*$-退化对应于 $\Delta_+ = \Delta_d + \kappa_P$上的一个线性函数。更准确地说，常数项可由以下引理确定。

命题 5.1. 球面 Fano 簇上的特殊环面 $\mathbb{C}^*$退化对应于 $f(y) = \Lambda y$，其中 $\Lambda \in \mathcal{V} \bigcap \mathfrak{N}$ 和 $y \in \Delta_d$。

证明. 对于特殊环面 $\mathbb{C}^*$退化，我们有 $\mathcal{L} = K_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}^{-1}$。设该退化对应于函数 $f(y) = \Lambda(y) + C$。根据命题 4.10 的证明，我们可以将除子 $div(\hat{s})$写为 $d + C\mathcal{X}_0$。由于除子 $div(\hat{s})$在一般纤维上的限制是典范除子，我们知道 d 是 $K_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}^{-1}$的除子。因此我们有 $C = 0$。□

与命题 4.12 类似，对于球面 Fano 流形的特殊环面一参数子群退化，我们有以下定理。

定理 5.2. 假设 $H^0(X, K_X^{-k})$是非常 ample。对于任意 $\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，特征值为

$$s_\lambda^{(k)} = \Lambda(\lambda),\ \forall \lambda \in k\Delta_d \cap \mathfrak{M} \tag{5.2}$$

定义了（X，K_X^{-1}）的一个特殊环面一参数子群退化 $\mathcal{X}^\sigma$。反之，任何（X，K_X^{-1}）的特殊环面一参数子群退化都可由此方式给出。

定理 5.2 是以下两个命题的结合。

命题 5.3. 对于任意 $\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，由 (5.2) 给出的特征值所确定的实一参数子群 $\sigma(t)$ 定义了 (X, K_X^{-1}) 的一个 $\mathcal{X}^\sigma$。

证明。式 (5.2) 定义了与 $\sigma(t)$ 相关联的特殊环面1-PS退化。根据命题 4.12 的证明，我们可以选择一个序列 $\Lambda_i \in \mathcal{V}$，使得 $\Lambda_i \to \Lambda$，并且 $\mathcal{X}_0^{\tau^i} = \mathcal{X}_0^\sigma$，其中 $\tau^i(t)$ 是具有特征值 $\Lambda_i(\lambda)$ 的实一参数子群。根据命题 5.1，每个 $\mathcal{X}_{\tau^i}$ 都是特殊的。因此，$\mathcal{X}_0^\sigma$ 是 $\mathbb{Q}$-Fano。将与 $\sigma(t)$ 对应的归一化实一参数子群记为 $\tilde{\sigma}(t)$。由于 $\tau^i(t)$ 在 $\mathcal{X}_0^\sigma$ 上的作用也收敛于 $\sigma(t)$ 的作用，因此我们有 $\tilde{\sigma}(t) = \lim_{i\to\infty} \tau^i(t) = \sigma(t)$。由此可得，$\mathcal{X}^\sigma$ 是特殊的。□

现在我们证明逆向结论:

命题 5.4. 对于 (X, K_X^{-1}) 的任意特殊环面1-PS退化，都存在一个$\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，使得具有特征值 (5.2) 的实一参数子群与之对应。

证明. 记 $\sigma(t)$ 在 V_λ 上的特征值为 $s_\lambda^{(k)}$。根据命题 4.12，我们可以选取一列 G-等变一参数子群 $\tau^i(t)$，其收敛于 $\sigma(t)$，使得中心纤维 $\mathcal{X}^{\tau^i(t)}_0$ 与 $\mathcal{X}^\sigma_0$ 相同。记与 $\tau^i(t)$ 对应的归一化实一参数子群为 $\tilde{\tau}^i(t)$。因此， $\mathcal{X}^{\tilde{\tau}^i}$ 是特殊的。根据命题 5.1，存在一个$\Lambda_i \in \mathcal{V}$，使得 $\tilde{\tau}^i(t)$ 的特征值对于 $\lambda \in k\Delta_d \bigcap \mathfrak{M}$ 为 $\Lambda_i(\lambda)$。考察其在中心纤维 $\mathcal{X}^\sigma_0$ 上的作用，我们知道

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\tau}^i(t) = \sigma(t).$$

因此， Λ_i 收敛到某个 $\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，使得

$$s_\lambda^{(k)} = \Lambda(\lambda),\ \forall \lambda \in k\Delta_d \cap \mathfrak{M}.$$

□

5.2. H-不变量的一个公式。本小节中，我们计算 G–球面 Fano 流形上特殊环面 1-PS退化的 H-不变量。Li-Li 也利用滤过几何 [26]得到了类似的公式。这里我们利用等变黎曼–罗赫定理给出一个简单的证明。

如 [39], 中所述，我们引入特殊一参数子群退化的 H-不变量定义如下。

定义 5.5. 对于一个特殊一参数子群退化 $\mathcal{X}^\sigma$， $\sigma(t)$ 在 $\mathcal{X}^\sigma_0$ 上诱导出一个全纯向量场 $\eta(\sigma)$。我们定义

$$V = \int_{\mathcal{X}^\sigma_0} \omega_0^n,\ H(\mathcal{X}^\sigma) := V\log(\frac{1}{V}\int_{\mathcal{X}^\sigma_0} e^\theta \omega_0^n),$$

其中 ω_0 是 Fubini-Study 度量的限制， θ 是与 $\eta(\sigma)$ 的典范提升相对应的势函数。

一般而言， H-不变量定义为

$$H(\mathcal{X}^\sigma) = -\int_{\mathcal{X}^\sigma_0} \tilde{\theta} e^{h_0}\omega_0^n + V\log\left(\frac{1}{V}\int_{\mathcal{X}^\sigma_0} e^{\tilde{\theta}}\omega_0^n\right),$$

˜其中， θ 是向量场 $\eta(\sigma)$ 的任意哈密顿量，而 h_0 是经 $\int_{\mathcal{X}^\sigma_0} e^{h_0}\omega_0^n = V$归一化的 ω_0的 Ricci 势。对于典范提升，有

$$\Delta\theta + \theta + \langle\nabla\theta, \nabla h_0\rangle = 0$$

由此可得 $\int_{\mathcal{X}^\sigma_0} \theta e^{h_0}\omega_0^n = 0$，因此这两个定义一致。根据 [18]，从 X 到 X_∞ 的第一步¯退化由 H-不变量的最小值刻画。

我们还需要修正 K-稳定性的定义（参见 [45, 6, 43]）。设 X 为一个 Fano 流形， v 为 X上的全纯向量场。记 T 为由v生成的环面。

定义 5.6. 对于一个特殊的 T-等变 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$，记 θ和 θ_v 分别为对应于 $\mathcal{X}_0$ 上 $\mathbb{C}^*$作用和 v 典范提升的势函数。令

$$Fut_v(\mathcal{X},\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{X}_0} \theta e^{\theta_v}\omega_0^n.$$

如果对于任意特殊的 T-等变 $\mathbb{C}^*$-退化 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$， ≥ 0 均有 $Fut_v(\mathcal{X},\mathcal{L})$，则称 (X,v) 为修正 K-半稳定。此外，如果等号仅在 $\mathcal{X} \cong X\times\mathbb{C}$ 等变时成立，则称 (X,v) 为修正 K-多稳定。

如果 (X, v) 是修正 K-半稳定的，那么 v 可由修正Futaki不变量按 [36] 中的方式确定。[6, 13, 23, 7] 已证明，如果 X 关于 v 存在 KR 孤子，那么 (X, v) 是修正 K-多稳定的。

利用等变黎曼–罗赫定理（参见 [43]），我们证明了

命题 5.7. 设 $\mathcal{X}$ 是由 $\Lambda \in \mathcal{V}$ 诱导的特殊环面一参数子群退化。则

$$H(\mathcal{X}) = V \ln \frac{1}{V} \int_{\Delta_+} e^{\Lambda(\kappa_P - y)} \pi \, dy,$$

其中 $\pi(y) = \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_+,}}{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha}$

证明。注意 $\Delta_+ = \Delta_d + \kappa_P$。根据引理4.11和命题 5.1，与 Λ 对应的 1-PS $\tau(t)$ 在 $V_\lambda \subseteq H^0(X, K_X^{-k})$ 上的作用的权为 $\Lambda(\lambda - k\kappa_P)$。将 $\tau(t)$ 在 $H^0(X, K_X^{-k})$ 上的特征值记为 $\lambda_i^{(k)}$。根据 [43, 节 2], 我们有

$$\sum e^{t\frac{\lambda_i^{(k)}}{k}} = k^n \int_{\mathcal{X}_0} e^{-t\theta_0} \frac{\omega_0^n}{n!} + O(k^{n-1}),$$

其中，θ_0 是与 τ（t）的典范提升相对应的势函数。

由 $H^0(X, L$ 的分解得 ^{k}）以及 Weyl 维数公式，我们有

$$\begin{aligned} \sum e^{t\frac{\lambda_i^{(k)}}{k}} &= \sum_{\lambda \in \Delta_k} \dim V_\lambda e^{t\frac{\Lambda(\lambda - k\kappa_P)}{k}} \\ &= \sum_{\lambda \in \Delta_k} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha, \rho + \lambda \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha, \rho \rangle} e^{t\frac{\Lambda(\lambda - k\kappa_P)}{k}} \end{aligned} \tag{5.3}$$

写作 $\lambda = ky$，我们有

$$\frac{1}{k^n} \sum e^{t\frac{\lambda_i^{(k)}}{k}} = \sum_{y \in \frac{1}{k}\Delta_k} \frac{1}{k^{dim \Delta_+}} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha, \frac{\rho}{k} + y \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha, \rho \rangle} e^{t\Lambda(y - \kappa_P)}.$$

令 $k \to \infty$，我们得到

$$\int_{\mathcal{X}_0} e^{-t\theta_0} \frac{\omega_0^n}{n!} = \int_{\Delta_+} \frac{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha, y \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi_+, \alpha \not\perp \Delta_+} \langle \alpha, \rho \rangle} e^{t\Lambda(y - \kappa_P)} dy.$$

该命题通过令 $t = -1$ 得以证明。

□

命题 5.8. 对应于 $\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 的任意实一参数子群 $\sigma(t)$，我们有

$$H(\mathcal{X}^\sigma) = V \ln \frac{1}{V} \int_{\Delta_+} e^{\Lambda(\kappa_P - y)} \pi \, dy. \tag{5.4}$$

因此，H 在 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 上有唯一的极小值点。

证明。对于特殊一参数子群退化 $\mathcal{X}^\sigma$，我们有一个具有相同中心纤维 $\mathcal{X}_0$ 的特殊 $\mathbb{C}^*$-退化序列 $\mathcal{X}_i$。假设 $\mathcal{X}_i$ 对应于 $\Lambda_i \in \mathcal{V}$，则有 $\Lambda_i \to \Lambda$。将由 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}_i$ 诱导的 $\mathcal{X}_0$ 上的全纯向量场分别记为 v 和 v_i。于是有 $v_i \to v$ 和 $\theta_{v_i} \to \theta_v$。因此，$H(\mathcal{X}_i) \to H(\mathcal{X}^\sigma)$。根据命题 5.7，命题得证。由 (5.4) 可知，H 是关于 Λ 的凸函数。因此，H 存在唯一的极小值点。□

如果 v 是与 G– 作用对易的全纯向量场，那么 v 对应于 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 的线性部分中的一个元素 Λ_0。使用命题 5.8 中的相同方法，我们得到

命题5.9. 给定任意对应于 $\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 的实一参数子群 $\sigma(t)$，我们有

$$Fut_v(\mathcal{X}^\sigma) = \int_{\Delta_+} \Lambda(\kappa_P - y) e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy, \tag{5.5}$$

其中 Λ_0 是 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 中对应于 v 的元素。

推论5.10. 若 (X, v) 是修正 K-半稳定的，则 H 不变函数在 Λ_0 处取得其最小值，其中 Λ_0 是对应于 v 的元素。

证明. 首先， v 是由修正 Futaki 不变量确定的全纯向量场，因此根据 [36]，它与 G 对易。根据命题 5.8，只需证明

$$\frac{d}{dt}_{t=0^+} H(\Lambda_0 + t\Lambda) \geq 0, \forall \Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \tag{5.6}$$

and

$$\frac{d}{dt}_{t=0} H(\Lambda_0 + t\Lambda) = 0, \text{ if } \Lambda_0 + t\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \text{ for small } t. \tag{5.7}$$

由 (5.4) 和 (5.5)，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}_{t=0} H(\Lambda_0 + t\Lambda) \\
&= \frac{V}{\int_{\Delta_+} e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy} \int_{\Delta_+} \Lambda(\kappa_P - y) e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy \\
&= \frac{V}{\int_{\Delta_+} e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy} Fut_v(\mathcal{X}^\sigma),
\end{aligned}$$

其中， σ 是与 Λ对应的实一参数子群。因此，根据假设可证得（5.6）。若对于足够小的 t, $\Lambda_0 + t\Lambda \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，则记 $\tau(t)$为在固定的小正数 t_0下与 $\Lambda_0 - t_0\Lambda$对应的实一参数子群。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}_{t=0} H(\Lambda_0 + t\Lambda) \\
&= \frac{V}{\int_{\Delta_+} e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy} \int_{\Delta_+} \Lambda(\kappa_P - y) e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy \\
&= -\frac{V}{t_0 \int_{\Delta_+} e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy} \int_{\Delta_+} (\Lambda_0 - t_0\Lambda)(\kappa_P - y) e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy \\
&= -\frac{V}{t_0 \int_{\Delta_+} e^{\Lambda_0(\kappa_P - y)} \pi \, dy} Fut_v(\mathcal{X}^\tau) \leq 0,
\end{aligned}$$

因为 $Fut_v(v) = 0$。结合（5.6），得到（5.7）。推论得证。 □

6. Proof of Theorem 1.1

对于G球面流形 X，我们在第3节中选取 G_0 =G =$K^{\mathbb{C}}$。然后，我们可以考虑以 K不变度量 ω_0 为初始度量的 (1.1) 的解 ω_t。我们将更详细地研究 X 上 KR 流的极限。沿用第3节中的记号，我们记 $E = H^0(X, K_X^{-l})$、 $\bar{G} = GL(E)$ 和

$$\bar{G}_{\mathbf{K}} = \{g |\ g \text{ commutes with } \mathbf{K}\}.$$

我们的关键观察来自以下引理。

引理 6.1. $G_{\mathbf{K}}$ 是一个环面。

证明. 引理的证明实质上利用了球面流形的这一性质。对于带有 G-作用的极化流形 (X, L)，根据 [40] X 中的定理 25.1，若且唯若 $H^0(X, L^l)$ 的分解中每个不可约表示的重数均为一，则该流形是球面的，其中任意 $l \geq 1$。于是我们有

$$E = H^0(X, K_X^{-l}) = \oplus_{\mu \in \Delta_l} V_\mu.$$

对于任意 $g \in G_{\mathbf{K}}$，必有 $g(V_\mu) = V_\mu$，因为不同的 $\mu' s$ 对应于 G 的不同不可约表示。根据 Schur 引理，g在每个 V_μ 上的限制都是数量矩阵。因此，g 可以写成 $diag\{a_\mu\}$。由此可得$G_{\mathbf{K}}$ 是一个环面。□

引理 6.2. 存在孤子向量场 v 的一个扰动 $\tilde{v}$，使得 X_∞ 与 $\lim_{i\to\infty} e^{i\tilde{v}} \cdot X$双全纯等价。此外，存在一个与此退化相对应的元素 $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$。

证明。如同 (3.3) 中，我们定义了矩阵 A_t。由引理 3.5，A_t 与 K 对易。因此，根据上述引理，我们可以写出 $A_i = diag\{a_i^1, ..., a_i^N\} \in G_{\mathbf{K}}$ 和 $v = \{diag\{\lambda^1, ..., \lambda^N\} \in Lie(G_{\mathbf{K}})$。于是对于 $1 \leq k \leq N$，$\lim_{i\to\infty} a_i^k (a_{i-1}^k)^{-1} = e^{\lambda^k}$。由此可得 $a_i^k = e^{(\lambda^k + \epsilon_i^k)^i}$，其中 $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i^k = 0$。将希尔伯特点 $[X]$ 记为$[z_\alpha]$，并将向量 $\lambda = (\lambda^k)$ $\epsilon_i = (\epsilon_i^k)$。如引理 2.8 所述，$A_i$ 在 $[X]$ 上的诱导作用为某个向量 w_α，其中各分量均为整数，记作 $[e^{-i\langle w_\alpha, \lambda+\epsilon_i\rangle} z_\alpha]$。令 $Q = \{u \in Lie(G_{\mathbf{K}}) | \langle w_\alpha, u\rangle = \langle w_\beta, u\rangle, \forall \alpha \neq \beta\}$。对于任意 $\lambda \in Lie(G_{\mathbf{K}})$，$e^\lambda \cdot [X] = e^{pr_{Q^\perp}(\lambda)} \cdot [X]$, 其中 $pr_{Q^\perp}$ 表示投影到 Q 的补空间。现在我们将 λ、ϵ_i 替换为它们的投影，并为简便起见沿用原记号。记 $c = min\{\langle w_\alpha, \lambda\rangle | z_\alpha \neq 0\}$ 和 $I = \{\alpha | \langle w_\alpha, \lambda\rangle = c, z_\alpha \neq 0\}$。$I$ 不是整个集合。于是我们有

$$[\bar{X}_\infty] = \lim_{i\to\infty} e^{vi} \cdot [X] = \lim_{i\to\infty} [e^{-i\langle w_\alpha, \lambda\rangle} z_\alpha] = [z_\alpha(\alpha \in I), 0]. \tag{6.1}$$

选择 $\alpha_0 \in I$，我们有

$$\lim_{i\to\infty} [e^{-i\langle w_\alpha, \lambda+\epsilon_i\rangle} z_\alpha] = \lim_{i\to\infty} [e^{-i\langle w_\alpha - w_{\alpha_0}, \lambda+\epsilon_i\rangle} z_\alpha].$$

那么，对于 $\alpha \notin I$，$\lim_{i\to\infty} e^{-i\langle w_\alpha - w_{\alpha_0},\ \lambda+\epsilon_i\rangle} = 0$. 但对于 $\alpha \in I$，结论成立。

$$\langle w_\alpha - w_{\alpha_0}, \lambda + \epsilon_i\rangle = \langle w_\alpha - w_{\alpha_0}, \epsilon_i\rangle.$$

因此我们得到

$$\lim_{i\to\infty} [e^{-i\langle w_\alpha, \lambda+\epsilon_i\rangle} z_\alpha] = \lim_{i\to\infty} [e^{-\langle w_\alpha, i\epsilon_i\rangle} z_\alpha(\alpha \in I), 0]. \tag{6.2}$$

如果 $i\epsilon_i$ 的范数有界，则由子列可设 $\lim_{j\to\infty} i_j\epsilon_{i_j} = \epsilon \in Lie(G_{\mathbf{K}})$。那么 (6.2) 式的右端为 $[e^{-\langle w_\alpha, \epsilon\rangle} z_\alpha(\alpha \in I), 0]$, , 其等于 $e^\epsilon \cdot [X_\infty]$。如果 $i\epsilon_i$ 的范数趋于无穷，则可设 $\lim_{j\to\infty} \frac{i\epsilon_i}{|i\epsilon_i|} = \eta \in Lie(G_{\mathbf{K}})$。记 $c' = min\{\langle w_\alpha, \eta\rangle | \alpha \in I\}$ 和 $I' = \{\alpha | \langle w_\alpha, \eta\rangle = c', \alpha \in I\}$。将 $i\epsilon_i = |i\epsilon_i|(\eta + \eta_i)$ 写成 $\eta_i \to 0$。于是由 (6.2) 式可得

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} [e^{-i\langle w_\alpha, \lambda+\epsilon_i\rangle} z_\alpha] &= \lim_{i\to\infty} [e^{-\langle w_\alpha, |i\epsilon_i|(\eta+\eta_i)\rangle} z_\alpha(\alpha \in I), 0] \\ &= \lim_{i\to\infty} [e^{-\langle w_\alpha, |i\epsilon_i|\eta_i\rangle} z_\alpha(\alpha \in I'), 0].\end{aligned}$$

右侧与 (6.2) 具有相同的形式，但集合 I' 更小。如果序列 $|i\epsilon_i|\eta_i$ 有界，则结论成立。否则，与上面一样，我们可以假设沿子列有 $\lim_{i\to\infty}\frac{|i\epsilon_i|\eta_i}{|i\epsilon_i||\eta_i|}=\eta_1\in Lie(G_{\mathbf{K}})$。继续这一过程，我们将得到一列向量 $\eta,\eta_1,...,\eta_l$，它们属于某个 $l\le|I|$ 中的 $Lie(G_{\mathbf{K}})$。现在，对于足够小的正数 $s,s_1,...,s_l$，记 $\tilde{v}=diag\{\lambda^k+s\eta^k+...+s_l\eta_l^k\}$，我们有

$$[X_\infty]=C\cdot\lim_{i\to\infty}e^{i\tilde{v}}[X],$$

其中 C 是 $G_{\mathbf{K}}$中的某个元素。由于 $e^v\in G_{\mathbf{K}}$，它生成一个 G–等变一参数子群退化。根据定理 5.2，存在一个与此退化对应的 $\Lambda\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$。引理得证。□

定理 1.1 的证明完毕。根据定理 3.1，(X_∞,ω_∞) 的孤子向量场 v 诱导了 X 的一个特殊环面一参数子群退化 e^{tv}，其中心纤维为 $\bar{X}_\infty$。由于

X_∞ 也可以是命题 2.9 所述的环面 $\mathbb{C}^*$退化的中心纤维，X_∞ 根据定理 3.30]是一个 G-球面簇 [14, 。另一方面，根据定理 3.2] （另见命题 5.6]），退化 (X,e^{tv}) 在 X 的特殊一参数子群退化中使 H-不变量 $H(\mathcal{X}^\sigma)$ 达到最小值 [18, ，因此我们可以将 H-不变量限制在特殊环面一参数子群退化的范围内。根据定理 5.2 和命题 5.8，在式 (5.4) 中，存在唯一的 $\Lambda_v\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 作为 $H(\mathcal{X}^\sigma)$ 的极小值点，它对应于环面一参数子群退化 (X,e^{tv})。因此，根据引理 6.2，将孤子向量场 v 扰动为 $\tilde{v}$后，存在另一个元素 $\Lambda\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，它诱导了从 X 到 X_∞的特殊环面一参数子群退化 $e^{i\tilde{v}}$。再次结合命题 2.9 和定理 5.2，我们可以选取 $\tilde{\Lambda}\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，使得退化 $(X,e^{i\tilde{v}})$ 诱导 X 的一个特殊环面 $\mathbb{C}^*$退化，其中心纤维为 X_∞。根据定理 3.30], ，可知 X_∞ 也是一个 G-球面簇 [14, 。因此，证明完毕。

□

References

[1] Alexeev, V. 和 Brion, M., *Stable reductive varieties I: Affine varieties*,《数学发明》157 (2004), 227-274. [2] Alexeev, V.A. 和 Brion, M., *Stable reductive varieties II: Projective case*,《数学进展》184 (2004), 382-408. [3] Alexeev, V.A. 和 Katzarkov, L.V., *On K-stability of reductive varieties*,《几何与泛函分析》15 (2005), 297-310. [4] Bamler, R., *Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature*,《数学年刊》188 (2018), 753-831. [5] Berman, R., Boucksom S., Essydieux, P., Guedj, V. 和 Zeriahi A., *Kähler–Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties* 1111 7158 *J. Reine Angew. Math.* , arXiv: . ; , 751 (2019), 27-89. [6] Berman, R. 和 Witt-Nystr

om, D., , *Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler-Ricci solitons* 1401 8264 arXiv: . . [7] Blum, H., Liu, Y.C., Xu, C.Y. 和 Zhuang, Z.Q., *The existence of the Kähler–Ricci soliton degeneration* , 《数学论坛: Pi》, E . doi: . /fmp. , **11**, 9 10 1017 2023 5 [8] *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques* Brion, M., ,《杜克数学杂志》, 58(2): 397–424, 1989. [9] Cao, H.D. *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds* **81** 1985 359 372 ,《数学发明》, ( ), - . [10] Chen, X.X., Sun, S., 和 Wang B., *Kähler-Ricci flow Kähler-Einstein metric and K-* , , ,《几何与拓扑》, ( ), - . [11] Chen, X.X. 和 Wang, B., *Space of Ricci flows (II)–Part B: Weak compactness of the flows*, **22** 2018 3145 3173 《微分几何杂志》, 116 (2020), 1-123.

[12] Datar, D. 和 Sz´ekelyhidi, G., *Kähler-Einstein metrics along the smooth continuity method*, 《几何与泛函分析》26 (2016), 第 4 期, 975-1010。[13] Darvas, T. 和 Rubinstein Y., *Tian's properness conjecture and Finsler geometry of the space of Kahler metrics* 30 2018 2, 347 387 , 《美国数学会杂志》, （）, n -。[14] Delcroix, T., *K-Stability of Fano spherical varieties*, 《高等师范科学年刊》, 53 (2020), 615-662。[15] Delcroix, T., *Kähler geometry of horosymmetric varieties and application to Mabuchi's K- energy functional J Reine Angew Math.* **763** 2020 129 199 , , , （）, -。[16] Delcroix, T., *Uniform K-stability of polarized spherical varieties*, 即将发表于《代数几何电子期刊》, arXiv:2009.06463。[17] Delcroix, T. 和 Hultgren, J., *Coupled complex Monge-Ampère equations on Fano horosymmetric manifolds J. Math. Pures Appl.* **153** 2021 281 315 , , （）, -。

[18] Dervan, R. 和 Sz´ekelyhidi G., *Kähler-Ricci flow and optimal degenerations*, 《微分几何杂志》, 116 (2020), 187-203。[19] Ding, W.Y. 和 Tian, G., K¨ahler-Einstein 度量与广义 Futaki 不变量。《数学发明》, 110 (1992), 第 2 期, 315-335。[20] Donaldson, S.K., *Scalar curvature and stability of toric varieties*, 《微分几何杂志》, 62 (2002) 289-348。[21] Gagliardi G. 和 Hofscheier J., *Gorenstein spherical Fano varieties*, 《几何学专论》, 178 (2015), 111-133。[22] Han, J.Y. 和 Li, C., *Algebraic uniqueness of Kähler-Ricci flow limits and optimal degenerations of Fano varieties* 2009 01010 , arXiv: . .[23] Han, J.Y. 和 Li, C., *On the Yau-Tian-Donaldson conjecture for generalized Kähler-Ricci soliton equations* 2006 00903 , arXiv: . .[24] Knop, F., *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, 载于 1989 年 12 月在印度海得拉巴大学数学与计算机/信息科学学院举行的海得拉巴代数群会议论文集, 225-249, 马德拉斯: Manoj Prakashan, 1991。[25] Li, Y. 和 Li, Z.Y., *Equivariant* $\mathbb{R}$*-test configurations and semistable limits of* $\mathbb{Q}$*-Fano group compactifications* , 即将发表于《北京数学杂志》。[26]Li, Y. 和 Li, Z.Y., *Equivariant* $\mathbb{R}$*-test configurations of polarized spherical varieties*, arXiv:2206.04880。[27] Li, Y.、Tian G. 和 Zhu, X.H., Fano G-流形上 K¨ahler-Ricci 流的奇异极限, arXiv:1807.09167, 即将发表于《美国数学杂志》。[28] Li, Y.、Tian, G. 和 Zhu, X. H., *Singular Kähler-Einstein metrics on* $\mathbb{Q}$*-Fano compactifications of a Lie group Math. Eng.* **5** 2023 2, 028, 43 2001 , , （）, 论文编号; 页数; arXiv: . 11320。[29] Li, Y.、Zhou, B. 和 Zhu, X. H., *K-energy on polarized compactifications of Lie groups J. of Func. Analysis* **275** 2018 1023 1072 , , （）, -。[30] Li, Y.、Li, Z.Y. 和 Wang, F., *Weighted K-stability of* $\mathbb{Q}$*-Fano spherical varieties*, arXiv:2208.02708。[31] Li, C.、Wang, X.W. 和 Xu, C.Y., *Algebraicity of the metric tangent cones and equivariant K-stability* **34** 2021 1175 1214 , 《美国数学会杂志》（）, -。[32] Liu, G. 和 Sz´ekelyhidi, G., *Gromov-Hausdorff limit of Kähler manifolds with Ricci bounded below* **32** 2022 236 279 10 1007 00039 022 00594 , 《几何与泛函分析》（）, –。https://doi.org/ . /s - - - 8 [33] Ross, J. 和 Thomas, R., *A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties* **16** 2007 201 255 , 《代数几何杂志》（）, –。[34] Tian, G. 和 Song, J., *The Kähler–Ricci flow through singularities*, 《数学发明》207, 519 595 2017 10 1007 00222 016 0674 –（）。https://doi.org/ . /s - - - [35] Tian, G., *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature* , 《数学发明》, 130 (1997), 1-37。[36] Tian, G. 和 Zhu, X.H., *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons* **77** 2002 297 325 , 《海尔维提数学评论》, （）, -。[37] Tian, G. 和 Zhu, X. H., *Horosymmetric limits of Kähler-Ricci flow on Fano* $G-$*manifolds*, arXiv:2209.05029。[38] Tian, G. 和 Zhang, Z.L., *Regularity of Kähler-Ricci flows on Fano manifolds*, 《数学学报》, 216 (2016), 127-176。

[39] Tian, G., Zhang, S.J., Zhang, Z.L. 和 Zhu, X.H., *Perelman's entropy and Kähler-Ricci flow an a Fano Manifold* **365** 2013 6669 6695 ,《美国数学会汇刊》, ( ), - . [40]

Timash¨ev D.A., *Homogenous spaces and equivariant embeddings*, 数学科学百科全书, 138. 不变量理论与代数变换群, 8. 施普林格出版社, 柏林-海德堡, 2011.[41] Wang, F. 和 Zhu, X.H., *Tian's partial C^0-estimate implies Hamilton-Tian's conjecture*,《数学进展》, **381** 2021 107619 10 1016 2021 107619 ( ), 论文编号 . https://doi.org/ . /j.ai [42] m. . Wang, F. 和 Zhu, X.H., *Uniformly strong convergence of Kähler-Ricci flows on a Fano manifold* 2022 10 1007 11425 021 1928 ,《中国科学: 数学》, ( ). https://doi.org/ . /s - - -[43] Wang, F., Zhou, B. 和 Zhu, X.H., *Modified Futaki invariant and equivariant Riemann-Roch formula* **289** 2016 1205 1235 ,《数学进展》, ( ), - . [44] Wang, X. 和 Zhu, X.H., *Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class* **188** 2004 87 103 ,《数学进展》 ( ), - . [45] Xiong, M., *Kähler-Ricci solitons and generalized Tian-Zhu's invariant*,《国际数学杂志》25 (2014). [46] Zhang, K., *Some refinements of the partial C^0-estimate*,《偏微分方程分析》14 (2021), 2307-2326. https://doi.org/ 10 2140 2021 14 2307 . /apde. . . Zhuang, Z. [47] *Optimal destabilizing centers and equivariant K-stability*,《数学发明》226,(2021),195–223. https://doi.org/10.1007/s00222-021-01046-0

SMS, Zhejiang University, Hangzhou, 310028, China.
Email address: wfmath@zju.edu.cn

SMS, Peking University, Beijing 100871, China.
Email address: xhzhu@math.pku.edu.cn