用于建模和控制机器人的物理信息神经网络：理论与实验研究

Jingyue Liu[1,*] *Pablo Borja*[2] *Cosimo Della Santina*[1,3]

[1]代尔夫特理工大学认知机器人系，荷兰代尔夫特 2628 CD s {J.Liu-14，C.DellaSantina}@tudelft.nl[2]普利茅斯大学工程、计算与数学学院，英国普利茅斯 PL4 8AA。 pablo.borjarosales@plymouth.ac.uk[3]德国航空航天中心（DLR）机器人学与机电一体化研究所，德国奥伯法芬霍芬 82234。

*通讯作者

关键词：物理启发神经网络、哈密顿神经网络、拉格朗日神经网络、基于模型的控制、耗散、欧拉-拉格朗日方程、端口哈密顿系统

arXiv:2305.05375v3 [cs.RO] 6 Jul 2023

本研究关注物理信息神经网络在复杂机器人系统建模与控制中的应用。为实现这一目标，我们扩展了物理信息神经网络，使其能够处理非保守效应。我们提出将这些学习得到的模型与基于模型的控制器相结合，而这类控制器最初是针对第一性原理模型开发的。通过结合标准技术与新技术，我们能够实现精确的控制性能，同时证明理论稳定性界。这些验证包括使用软体机器人进行运动预测的真实世界实验，以及使用 Franka Emika 机械臂进行轨迹跟踪的真实世界实验。

1 引言

深度学习（DL）在各个领域都取得了显著进展，机器人学便是一个突出的例子。DL 在视觉引导导航 [1], 抓取规划 [2], 人机交互 [3], 乃至设计 [4]等任务中表现出色。尽管如此，DL 在物理系统中生成运动智能方面的应用仍然有限。尤其是深度强化学习已展现出在仿真中超越传统方法的潜力 [5–7]。然而，将其迁移至物理应用，主要受到必须先在仿真环境中进行预训练这一要求的阻碍 [8–10]。

通用深度学习的核心缺点在于样本效率低，这是因为需要从数据中提炼任务的各个方面 [11, 12]。为应对这些挑战，机器人学领域日益倾向于将几何先验专门融入数据驱动方法，以优化学习效率 [13–15]。这种方法对于无需涉及系统物理特性的高层次任务尤其有利

w

及系统的物理特性。物理启发神经网络 [16–18], 将基础物理知识融入其架构和训练过程，已在机器人学之外的多个领域取得成功，从地球科学到材料科学均有应用 [19–22]。在机器人学领域，将拉格朗日力学或哈密顿力学与深度学习相结合，产生了深度拉格朗日神经网络（LNNs） [23], 和哈密顿神经网络（HNN） [24] 等模型。文献中已提出多种扩展方案，例如纳入接触模型 [25], 或提出图形式 [26]。多项研究已证明，拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络在学习基本物理系统动力学方面具有潜力 [18, 27–29]。然而，利用这些技术对复杂机器人结构进行建模，尤其是使用真实世界数据，仍处于早期阶段。值得注意的是， [30] 将这些方法应用于一台具有四个自由度的位置控制机器人；与当代机械臂相比，这一系统的复杂程度相对较低。

本研究探讨了将物理信息神经网络应用于刚性机器人和柔性连续体机器人 [31] 的实验工作。为此，我们需要对拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络进行修改，以解决阻碍其应用于这些系统的三个问题：（i）缺少能量耗散机制；（ii）假设控制作用共置于测量构型上；（iii）需要直接加速度测量，而这类测量具有非因果性，且需要进行数值微分。针对问题（iii），我们借鉴了 [32, 33], 中提出的一种策略，该策略依靠正向积分动力学；针对问题（i）和（ii），我们则提出了创新的解决方案。

此外，与其他学习技术相比，我们利用了拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络的一项核心优势：学习得到的模型具有机器人和机械系统控制中通常采用的数学结构。通过强制采用这种表示方式，我们使用最初为第一性原理模型 [34–36] 开发的基于模型的策略，从而获得可证明稳定且具有鲁棒性保证的性能。

PINN 在控制领域的应用直到最近才开始受到探索。近期研究 [33,37,38] 着重于将 PINN 与模型预测控制（MPC）相结合，因此没有利用学习得到的方程的数学结构。事实上，这一策略属于一种日益确立的趋势，即寻求将（非物理信息、非深度）学习模型与 MPC 相结合 [39,40]。文献 [41,42], 讨论了其在偏微分方程控制中的应用，而文献 [43]则通过仿真研究了其在机器人学中的应用。文献 [30,44], 介绍了在其他基于模型的技术方面的初步探索；然而，其中的控制器既未提供稳定性或鲁棒性保证，也仅针对特定情形进行设计。

总而言之，本研究在 PINN 和机器人学领域作出了以下贡献：

1. 提出一种在拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络中纳入耗散并支持非配置控制作用的方法，从而解决问题（i）和（ii）。2. 提出基于经典非线性控制的调节与跟踪控制器，并利用学习模型的数学结构。我们首次证明了这些策略的稳定性和鲁棒性。3. 在关节式机器人和柔性连续体机器人系统上进行了仿真与实验。据作者所知，这是首次对 PINN 及基于物理信息神经网络的控制在复杂机械系统中的应用进行验证。

2 预备知识

2.1 拉格朗日与哈密顿动力学

机器人的动力学可以用拉格朗日力学或哈密顿力学表示。前者中，状态由广义坐标 $q \in \mathbb{R}^N$ 及其速度 $\dot{q} \in \mathbb{R}^N$定义，其中 N 表示构型空间的维数。欧拉-拉格朗日方程决定系统的行为$\mathrm{d}\,\mathrm{d}t \left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{\mathtt{ext}}$，其中 $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$，势能为 V，动能为$T \frac{1}{2}\dot{q}^\top M(q)\,\dot{q}$，其中 $M(q) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是正定的质量惯性矩阵。外力记为 $F_{\mathtt{ext}} \in \mathbb{R}^N$，包括控制输入和耗散力。

在哈密顿力学中，动量 $p \in \mathbb{R}^N$ 取代速度，其中 $\dot{q} = M^{-1}(q)p$。哈密顿方程 $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$，$\dot{p} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} + F_{\mathtt{ext}}$，其中 $H(q,\ p) = T(q,\ p) + V(q)$ 是总能量。在此情况下，动能定义为 $T(q,\ p) = \frac{1}{2}p^\top M^{-1}(q)p$。

2.2 拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络

拉格朗日神经网络（LNN）利用最小作用量原理，从轨迹数据中学习拉格朗日函数$\mathcal{L}(q,\ \dot{q})$，再通过标准的欧拉-拉格朗日机制 [34]，由学习得到的函数生成动力学。LNN 的损失函数定义为实际加速度 $\ddot{q}$ 与学习模型预测的加速度 $\hat{\ddot{q}}$之间的均方误差。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{LNN}} = \mathrm{MSE}(\ddot{q}, \hat{\ddot{q}}). \tag{1}$$

相反，哈密顿神经网络旨在学习哈密顿函数 $H(p,q)$。学习完成后，该哈密顿函数通过哈密顿方程提供动力学。哈密顿神经网络的损失函数同样是均方误差，但计算的是广义坐标和动量的预测时间导数与实际时间导数之间的误差：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HNN}} = \mathrm{MSE}((\dot{q},\dot{p}),(\hat{\dot{q}},\hat{\dot{p}})). \tag{2}$$

我们使用具有多个神经元层及相关权重的全连接神经网络来学习拉格朗日量或哈密顿量，如图1所示。

2.3 经典拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络的局限

请注意，这两个损失函数都依赖于测量状态 $\ddot{q}$ 和 $\dot{p}$的导数，而根据状态的定义，这些导数无法直接测量。在仿真中，使用非因果传感器可以轻松规避这一问题。然而，这种方案并不适用于物理实验。一种不够稳健的替代方案是根据位置和速度的测量值，通过数值方法估算这些导数。这与引言中提出的问题 (iii) 有关。

此外，现有的拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络都假设 $F_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^N$ 可以直接测量。只有当系统是保守的、全驱动的，且驱动方式为共置时，这一假设才合理。真实系统从不满足第一个特征，而在软体 [31] 或柔性机器人 [45]等创新型机器人解决方案中，第二和第三个特征则限制颇多。请注意，基于学习的控制正在成为这些非常规机器人系统 [46]中的一个核心趋势。这些考量与引言中提出的问题 (i) 和 (ii) 有关。

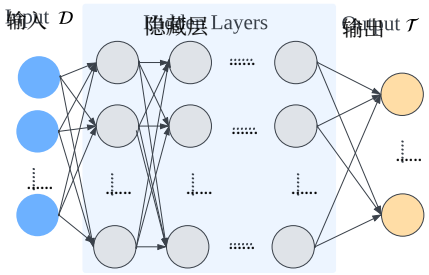


图1：全连接网络。

3 所提算法

3.1 非保守力的可学习模型

在标准的拉格朗日神经网络和哈密顿神经网络理论中，假设非保守力完全已知，且等于直接作用于拉格朗日坐标 q 上的驱动力。这一假设非常严格，正如引言中所讨论的那样。

在本文中，我们将耗散力和执行器力纳入其中，即 $F_{\text{ext}} = F_{\text{d}}(q, \dot{q}) + F_{\text{a}}(q)$。我们提出以下耗散力模型

$$F_{\text{d}}(q, \dot{q}) = -D(q)\dot{q}, \tag{3}$$

其中 $D(q) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是半正定阻尼矩阵。此外，我们将执行器力建模为

$$F_{\text{a}}(q) = A(q)u, \tag{4}$$

其中， $u \in \mathbb{R}^M$ 是系统的控制输入信号， $A(q) \in \mathbb{R}^{N\times M}$ 是一个输入变换矩阵。例如， A 可以是与结构上施加驱动力的作用点相关联的雅可比矩阵转置。采用该模型，我们考虑到在复杂的机器人系统中，执行器通常并未与测量构型 q共置。请注意，即使我们接受施加恰当的坐标变换，对于某些系统，不含 A 的表示甚至并不适用 [47]。借助（4），我们似乎也能处理欠驱动系统。

请注意， [44] 采用耗散模型，但以白箱方式对其进行处理。
因此，我们将拉格朗日动力学改写如下

$$\ddot{q} = \left(\frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^2}\right)^{-1} \left(A(q)u - \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} - D(q)\dot{q}\right). \tag{5}$$

类似地，哈密顿量的形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I\\ -I & -D(q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial H(q,\dot{q})}{\partial q}\\ \frac{\partial H(q,\dot{q})}{\partial p}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ A(q)\end{bmatrix} u. \tag{6}$$

3.2 采用修正损失的非保守非共置拉格朗日与哈密顿神经网络

图2展示了所提出的网络框架，该框架基于第2.2节讨论的拉格朗日和哈密顿神经网络。我们的工作在原有框架中加入了阻尼矩阵网络、输入矩阵网络和修正损失函数。阻尼矩阵网络通过式（3）描述系统中的耗散力，而输入矩阵网络对应于式（4）中的 $A(q)$。我们借助四阶龙格-库塔积分器对式（5）或（6）进行积分，以预测下一个状态。显然，也可以采用其他积分策略。

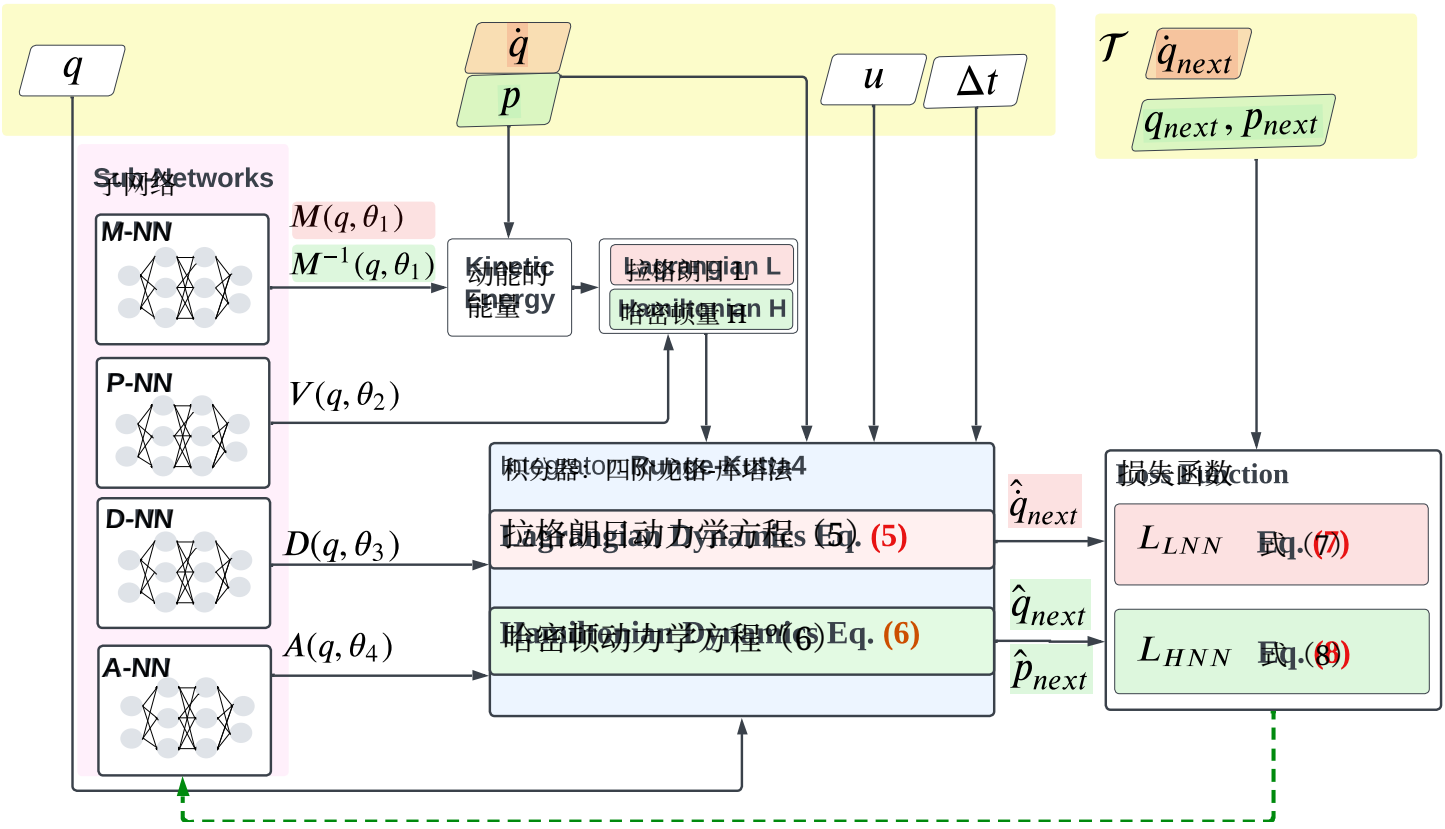


图2：拉格朗日和哈密顿神经网络概览：红色部分表示拉格朗日动力学所需的数据和计算过程，绿色部分表示与哈密顿动力学相对应的数据和计算过程。

数据集 $\mathfrak{D} = [\mathcal{D}_k, \mathcal{T}_k | k \in \{0, ..., k_{\text{end}}\}]$ 包含机械系统状态转移的信息。采用这种紧凑的记法时，我们指的不一定是单次演化，而是包含系统任意次数演化的串联。输入数据 $\mathcal{D}_k$ 由 $[q_k, \dot{q}_k, u_k, \Delta t]$（用于拉格朗日动力学）或 $[q_k, p_k, u_k, \Delta t]$（用于哈密顿动力学）构成。同样，相应的标签 $\mathcal{T}_k$ 在拉格朗日情况下为 $\dot{q}_{k+1}$，在哈密顿动力学情况下为 $[q_{k+1}, p_{k+1}]$。

如图2所示，$M(q)$、$V(q)$、$D(q)$ 和 $A(q)$ 的值由四个子网络估计，即质量网络（M-NN）、势能网络（P-NN）、阻尼网络（D-NN）和输入矩阵网络（A-NN）。获得 $\dot{q}$ 或 p 的值后，即可计算动能。随后，可根据动能和势能推导出拉格朗日函数或哈密顿函数。状态 $\hat{\dot{q}}$ 或 $[\hat{\dot{q}} \quad \hat{\dot{p}}]^\top$ 的状态导数可分别使用公式（5）或（6）计算。使用四阶龙格-库塔积分器即可得到预测的下一状态 $\hat{\dot{q}}$ 或 $[\hat{q} \; \hat{p}]^\top$。

因此，我们采用以下修正损失函数 [32, 33]

$$\mathcal{L}_{\text{LNN}} = \frac{1}{\#\mathcal{D}} \sum_{k \in \mathcal{D}} \| \dot{q}_{k+1} - \hat{\dot{q}}_{k+1} \|_2^2 \tag{7}$$

对于拉格朗日神经网络，其中 $\#\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$的基数，并且

$$\mathcal{L}_{\text{HNN}} = \frac{1}{\#\mathcal{D}} \sum_{k \in \mathcal{D}} \left(\| q_{k+1} - \hat{q}_{k+1} \|_2^2 + \| p_{k+1} - \hat{p}_{k+1} \|_2^2 \right) \tag{8}$$

对于哈密顿神经网络。因此，与（1）和（2）相比，我们计算的是基于学习到的动力学模拟得到的未来状态预测的均方误差，而不是当前加速度的均方误差，因为当前加速度无法测量。请注意，我们还针对 $\mathcal{L}_{\text{HNN}}$ 纳入了构型层面的预测误差度量，因为（6）的前 n 个方程中，关于 $^{\partial H}{}_{(q,\dot{q})}\, \partial p$ 的信息与 D 和 A （它们也是学习得到的）相互解耦。

3.3 子网络结构

可以对四个子网络学习到的参数施加基于物理原理的约束。具体而言，质量矩阵和阻尼矩阵必须分别为正定和半正定。为此，耗散矩阵的网络结构可以采用 [48]中为质量矩阵建立的原型。该结构可分解为一个对角元素非负的下三角矩阵 L_D，随后通过乔列斯基分解 [49] 计算为$D = L_D L_D{}^{\top}$。 D（q）的表示如图3所示。

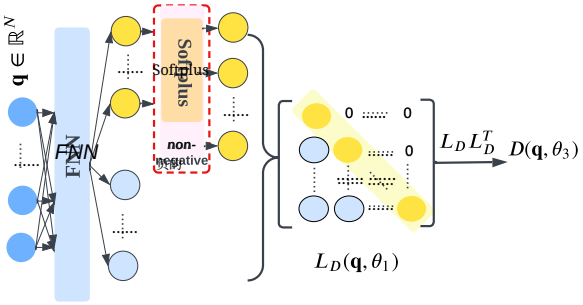


图3：阻尼矩阵示意图，包括一个前馈神经网络、用于对角元素的非负偏移以及乔列斯基分解

M-NN 和 D-NN 的输出计算为 $(N^2 + N)/2$，其中前 N 个值表示下三角矩阵的对角线元素。为确保非负性，最后一层采用 Softplus 或 ReLU 等激活函数。此外，引入一个记为 $+\epsilon$的小正偏移量，以保证质量矩阵正定。其余的 $(N^2 - N)/2$ 个值被置于下三角矩阵的左下角。

势能的计算采用一个具有单一输出的简单全连接网络来完成，该网络表示为 $V(q,\ \theta_2)$。此外，图4所示的 A-NN 计算维度为 $\mathbb{R}^{N \times M}$ 的 $A(q,\ \theta_4)$。

3.4 基于物理信息神经网络的控制器

本节通过将学习到的动力学与经典基于模型的方法相结合，提供了两个可证明稳定的控制器。在阐述这些结果之前，有必要先用几句话说明，对上述学习过程进行全局最优执行，将使我们学习到 M_{L}, $G_{\text{L}} = \frac{\partial V_{\text{L}}}{\partial q}$, A_{L}, D_{L} , 使得

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}; M_{\text{L}}, G_{\text{L}}, A_{\text{L}}, D_{\text{L}}) = \mathcal{L}(q, \dot{q}; M, G, A, D) \tag{9}$$

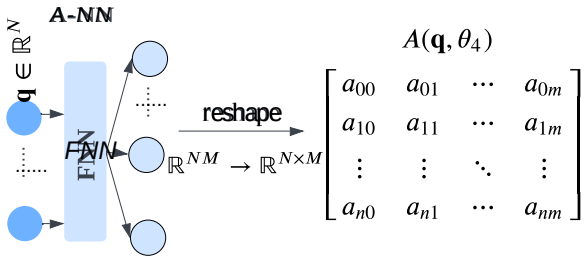


图4：致动器矩阵示意图：全连接网络的输出是 $\mathbb{R}^{NM}$ 中的一个向量，将其重塑为 $\mathbb{R}^{N\times M}$ 中的一个矩阵。可以对矩阵元素应用 sigmoid 激活函数，以约束其取值。

对于所提出的拉格朗日神经网络，或

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}; M_{\mathrm{L}}, G_{\mathrm{L}}, A_{\mathrm{L}}, D_{\mathrm{L}}) = \mathcal{H}(q, \dot{q}; M, G, A, D), \tag{10}$$

对于所提出的哈密顿神经网络，其中 M， G， A， D 是实际参考值。相反，我们通过添加下标 $\mathbf{L}$，标明哪些分量是学习得到的，哪些不是。此外，根据构造， M_{L}， G_{L}， A_{L}， D_{L} 将具有这些项通常应具备的所有性质，例如 M_{L} 和 D_{L} 是对称正定的，而 G_{L} 是势力。

然而，这并不意味着 $M = M_{\mathrm{L}}$、 $G = G_{\mathrm{L}}$ 等也是如此。事实上，可能存在一个矩阵 $P(q)$，使得 $P(q)M(q)$、 $P(q)G(q)$、 $P(q)A(q)$、 $P(q)D(q)$ 均具有上述所有性质，同时还满足

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}; PM, PG, PA, PD) = \mathcal{L}(q, \dot{q}; M, G, A, D) \text{ or } \mathcal{H}(q, \dot{q}; PM, PG, PA, PD) = \mathcal{H}(q, \dot{q}; M, G, A, D). \tag{11}$$

因此，必须在假设所学习的项与真实项相差一个乘法因子的前提下，设计控制器并推导证明。

3.4.1 调节

以下控制器的目标是稳定给定构型 $q_{\mathtt{r}}$ $\mathtt{ef}$

$$u = A_{\mathrm{L}}^{+}(q)G_{\mathrm{L}}(q) + A_{\mathrm{L}}^{\top}(q)(K_{\mathrm{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) - K_{\mathrm{D}}\dot{q}), \tag{12}$$

为便于阅读，我们省略参数 t 和 θ_i 。我们通过添加下标 $\mathbf{L}$ 来区分已学习的分量和未学习的分量。 $G_{\mathrm{L}}(q_{\mathtt{ref}})$ 是势力，可通过对拉格朗日神经网络学习得到的势能求偏导来计算； K_{P}和 K_{D} 是正定控制增益。

为简洁起见，我们给出该控制器，并证明其在全驱动情况下的稳定性。不过，利用 [36]中的论证，可以将该控制器及其证明扩展到一般欠驱动情况。这将是未来工作的重点。

命题1. 假设 $M = N$，且 A 和 A_{L} 均为满秩。那么，给定最大允许误差 $\delta_{\mathtt{q}}$，(5) 和(12)构成的闭环满足

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = q_{\mathtt{ss}} \ with \ ||q_{\mathtt{ss}} - q_{\mathtt{ref}}|| < \delta_{\mathtt{q}}, \tag{13}$$

如果 K_{P}、 $K_{\mathrm{D}} \succ \kappa I$，且 $\kappa \in \mathbb{R}$ 足够大，并且存在一个矩阵 $P(q) \in \mathbb{R}^{N\times N}$，使得 $||G_{\mathrm{L}}(q) - P(q)G(q)|| < \delta_{\mathtt{G}}$，其中某个有限正数为 $\delta_{\mathtt{G}}$。此外，我们假设

$$A(q)[A_{\mathrm{L}}(q) - P(q)A(q)]^{\top} + A(q)A^{\top}(q)P^{\top}(q) \succ 0, \tag{14}$$

以及

$$||A^{-1}(q)P^{-1}(q)[A_{\mathrm{L}}(q) - P(q)A(q)]|| < 1. \tag{15}$$

备注*1*。请注意，如果 $P(q) \succ 0$，那么 $A(q)A^\top(q)P^\top(q) \succ 0$，而（*14*）则转化为另一项要求： $A_{\mathtt{L}}(q)$ 与 $A(q)$ 足够接近，允许相差一个乘法因子 $P(q)$。反过来， P 的正定性是对学习过程结果质量的一项要求。事实上，如果 $||M_{\mathtt{L}}(q) - P(q)M(q)||$ 足够小，那么 $M_{\mathtt{L}}$ 和 M 的正定性意味着 P也正定。同样，对于足够小的 $||A_{\mathtt{L}}(q) - P(q)A(q)||$, （*15*）总是成立。

证明。引入矩阵 $\Delta_{\mathtt{A}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$，使得 $A_{\mathtt{L}}(q) = P(q)A(q) + \Delta_{\mathtt{A}}(q)$。根据假设，如备注1中所述，该矩阵足够小。现在，我们希望界定 $A(q)$ 的逆矩阵与 $P(q)A_{\mathtt{L}}(q)$ 之间的差。目标是将 $A_{\mathtt{L}}^{-1}(q) = (P(q)A(q))^{-1} + \Delta_{\mathtt{I}}(q)$ 写成，其中 $||\Delta_{\mathtt{I}}(q)|| < \delta_{\mathtt{I}}$。

在假设（15）下，我们可以使用诺伊曼级数 [50]

$$A_{\mathtt{L}}^{-1}(q) = (P(q)A(q) + \Delta_{\mathtt{A}}(q))^{-1} = (P(q)A(q))^{-1} - (P(q)A(q))^{-1}\Delta_{\mathtt{A}}(q)(P(q)A(q))^{-1} + \dots \tag{16}$$

重新整理各项后，定义

$$\Delta_{\mathtt{I}}(q) = A_{\mathtt{L}}^{-1}(q) - (P(q)A(q))^{-1} = -(P(q)A(q))^{-1}\Delta_{\mathtt{A}}(q)(P(q)A(q))^{-1} + \dots \tag{17}$$

因此，我们可以如下界定 $\Delta_{\mathtt{I}}(q)$ 的范数

$$||\Delta_{\mathtt{I}}(q)|| \leq \frac{||(P(q)A(q))^{-1}\Delta_{\mathtt{A}}(q)(P(q)A(q))^{-1}||}{1 - ||(P(q)A(q))^{-1}\Delta_{\mathtt{A}}(q)||} < \delta_{\mathtt{I}}. \tag{18}$$

我们可以这 因此，将控制器 $A(q)u$ a 产生的广义力改写为 s

$$\begin{aligned}
&A(q)\left[A_{\mathtt{L}}^{-1}(q)G_{\mathtt{L}}(q) + A_{\mathtt{L}}^{\top}(q)(K_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) - K_{\mathtt{D}}\dot{q})\right] \\
&= A(q)(A^{-1}(q)P^{-1}(q) + \Delta_{\mathtt{I}}(q))\left[(P(q)G(q) + \Delta_{\mathtt{G}}(q))\right] + A(q)(P(q)A(q) + \Delta_{\mathtt{A}}(q))^{\top}\left[K_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) - K_{\mathtt{D}}\dot{q}\right] \\
&= (P^{-1}(q) + A(q)\Delta_{\mathtt{I}}(q))(P(q)G(q) + \Delta_{\mathtt{G}}(q)) + (A(q)A^{\top}(q)P^{\top}(q) + A(q)\Delta_{\mathtt{A}}^{\top}(q))\left[K_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) - K_{\mathtt{D}}\dot{q}\right] \\
&= G(q) + \Delta_{\mathtt{all}}(q) + \hat{K}_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) - \hat{K}_{\mathtt{D}}\dot{q}
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\Delta_{\mathtt{all}}(q) = P^{-1}(q)\Delta_{\mathtt{G}}(q) + A(q)\Delta_{\mathtt{I}}(q)P(q)G(q) + A(q)\Delta_{\mathtt{I}}(q)\Delta_{\mathtt{G}}(q)$ 是一个有界项，由有界项的和^^与积构成。增益 $K_{\mathtt{P}}$ 和 $K_{\mathtt{D}}$ 为正定的，因为它们是两个正定矩阵的乘积。于是闭环为

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = \Delta_{\mathtt{all}}(q) + \hat{K}_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) - (D(q) + \hat{K}_{\mathtt{D}})\dot{q}. \tag{20}$$

在本段中，我们通过采用并复现 [51], 中给出的论证来确立我们的论点，而该论证又改编自开创性论文 [52]。由于我们重新整理了闭环，使其与这些论文中阐述的结构完全一致，因此得以直接应用现有定理。

□

请注意，尽管我们使用拉格朗日形式给出了证明，但按照类似步骤可以推导出哈密顿版本。此外，请注意，对于 $\delta_{\mathtt{A}}, \delta_{\mathtt{G}}$ 的任意选择，所学习矩阵的界始终得到验证，代价是需要使用足够大的训练集来训练模型。最后，我们给出一个讨论完美学习情形的推论。

推论1。 假设 $M = N$ 和 A 满秩。那么，(5) 和 (12) 构成的闭环满足以下性质。

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = q_{\mathtt{ref}}, \tag{21}$$

如果 $K_{\mathtt{P}}, K_{\mathtt{D}} \succ 0$并且如果存在矩阵 $P(q) \in \mathbb{R}^{N\times N}$使得 $M_{\mathtt{L}}(q) = P(q)M(q)$, $A_{\mathtt{L}}(q) = P(q)A(q)$,$G_{\mathtt{L}}(q) = P(q)G(q)$.

证明。 从 (14) 开始，现在它变为 $A(q)A^\top(q)P^\top(q) \succ 0$。此外，根据假设，$A(q)$ 是满秩的，因此得到等价条件 $P^\top(q) \succ 0$。如前面的备注所述，这可由以下事实推出： $M_{\mathtt{L}}(q) = P(q)M(q)$，且 $M_{\mathtt{L}}$和 $M(q)$ 均为正定。因此，(14) 总是成立。同样，对于 $A_{\mathtt{L}}(q) = P(q)A(q)$，(15) 显然成立。

此外，请注意， $\Delta_{\mathtt{all}} = 0$ 因为现在所有增量都为零。因此，闭环（20）始终等价于一个不含任何势力、由比例微分控制器控制的机械系统。请注意，增益为正，因为我们刚刚证明了 $P^\top(q) \succ 0$，并且根据假设， $K_{\mathtt{P}}$， $K_{\mathtt{D}} \succ 0$。稳定性的证明遵循标准的李雅普诺夫论证（例如参见 [34]），通过使用李雅普诺夫候选函数$V(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + \frac{1}{2}q^\top \hat{} K_{\mathtt{P}}q$。 □

3.4.2 轨迹跟踪

以下控制器的目标是在构型空间中跟踪给定轨迹 $q_{\mathtt{ref}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$。我们假设 $q_{\mathtt{ref}}$ 有界且其导数有界。我们还假设系统为全驱动——即， $M = N$， $\det(A) \neq 0$， $\det(A_{\mathtt{L}}) \neq 0$。在这些假设下，我们使用以下控制器扩展（12），以跟踪期望轨迹

$$\begin{aligned} u =& A_{\mathtt{L}}^{-1}(q)\left(M_{\mathtt{L}}(q_{\mathtt{ref}})\ddot{q}_{\mathtt{ref}} + C_{\mathtt{L}}(q_{\mathtt{ref}}, \dot{q}_{\mathtt{ref}})\dot{q}_{\mathtt{ref}} + D_{\mathtt{L}}(q_{\mathtt{ref}})\dot{q}_{\mathtt{ref}} + G_{\mathtt{L}}(q_{\mathtt{ref}})\right) \\ &+ A_{\mathtt{L}}^{\top}(q)\left(K_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) + K_{\mathtt{D}}(\dot{q}_{\mathtt{ref}} - \dot{q})\right), \end{aligned} \tag{22}$$

其中，为了提高可读性，我们省略了参数 t 和 θ_i。我们通过在下标中添加 $\mathtt{L}$ 来区分已学习得到的分量和未学习得到的分量。通过对拉格朗日量关于期望关节位置 $q_{\mathtt{ref}}$ 和速度 $\dot{q}_{\mathtt{ref}}$ 求二阶偏导数，即可从学习得到的拉格朗日量中获得科里奥利矩阵 $C_{\mathtt{L}}(q_{\mathtt{ref}}, \dot{q}_{\mathtt{ref}})$，即 $\frac{\partial^2 L(q_{\mathtt{ref}},\ \dot{q}_{\mathtt{ref}})}{\partial q_{\mathtt{ref}} \partial \dot{q}_{\mathtt{ref}}}$。

推论 2. (5) 与(22) 构成的闭环满足，对于某个 $\delta_{\mathtt{q}} \geq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} ||q(t) - q_{\mathtt{ref}}(t)|| < \delta_{\mathtt{q}}, \tag{23}$$

若 $K_{\mathtt{P}}$、$K_{\mathtt{D}} \succ \kappa I$，且 $\kappa \in \mathbb{R}$ 足够高，并且存在矩阵 $P(q) \in \mathbb{R}^{N\times N}$使得 $A_{\mathtt{L}}(q) = P(q)A(q)$， $M_{\mathtt{L}}(q) = P(q)M(q)$， $C_{\mathtt{L}}(q) = P(q)C(q)$， $G_{\mathtt{L}}(q) = P(q)G(q)$， $D_{\mathtt{L}}(q) = P(q)D(q)$。我们还假设 P满足 $||P^{-1}(q)P(q_{\mathtt{ref}}) - I|| < \delta_{\mathtt{P}}$ 对于某个 $\delta_{\mathtt{P}} > 0$。

证明。 我们可以通过将学习到的元素用 P 表示的值代入来重写（22）。结果是

$$\begin{aligned} A(q)u =& \Delta_{\mathtt{all}} + \left(M(q_{\mathtt{ref}})\ddot{q}_{\mathtt{ref}} + C(q_{\mathtt{ref}}, \dot{q}_{\mathtt{ref}})\dot{q}_{\mathtt{ref}} + D(q_{\mathtt{ref}})\dot{q}_{\mathtt{ref}} + G(q_{\mathtt{ref}})\right) \\ &+ \left(A(q)A^\top(q)P^\top(q)\right)\left(K_{\mathtt{P}}(q_{\mathtt{ref}} - q) + K_{\mathtt{D}}(\dot{q}_{\mathtt{ref}} - \dot{q})\right), \end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\Delta_{\mathtt{all}} = \Delta_{\mathtt{P}}\left(M(q_{\mathtt{ref}})\ddot{q}_{\mathtt{ref}} + C(q_{\mathtt{ref}}, \dot{q}_{\mathtt{ref}})\dot{q}_{\mathtt{ref}} + D(q_{\mathtt{ref}})\dot{q}_{\mathtt{ref}} + G(q_{\mathtt{ref}})\right),$$

其中 $\Delta_{\mathtt{P}} = P^{-1}(q)P(q_{\mathtt{ref}}) - I$。因此，根据假设， $\Delta_{\mathtt{all}}$ 由有界项的乘积和求和构成，故其有界。此外，正如在推论1的证明中所讨论的， $AA^\top P^\top \succ 0$。因此，由于该闭环与 [53], 中讨论的闭环等价，因此可以遵循其中讨论的相同步骤来完成证明。 □

请注意，即使我们使用拉格朗日形式给出了证明，也可以通过类似的步骤推导出哈密顿版本。此外，只要将控制增益设得足够大，就可以使界 $\delta_{\mathtt{q}}$ 任意小。

最后请注意，我们在此仅提供了完美学习情形下的稳定性证明。采用与命题1中类似的假设和论证，可以在跟踪情形下得到类似的结果，其中 $||P(q)A_{\mathtt{L}}(q) - A(q)|| < \delta_{\mathtt{A}}$, $||P(q)M_{\mathtt{L}}(q) - M(q)|| < \delta_{\mathtt{M}}$, $||P(q)C_{\mathtt{L}}(q) - C(q)|| < \delta_{\mathtt{C}}$, $||P(q)G_{\mathtt{L}}(q) - G(q)|| < \delta_{\mathtt{G}}$, $||P(q)D_{\mathtt{L}}(q) - D(q)|| < \delta_{\mathtt{G}}$， 其中 $\delta_{\mathtt{A}}, \delta_{\mathtt{M}}, \delta_{\mathtt{C}}, \delta_{\mathtt{G}}, \delta_{\mathtt{D}} \in \mathbb{R}$ 均为有限正数。

4 方法：仿真与实验设计

为评估所提出的物理信息神经网络及基于物理信息神经网络的控制的有效性，我们将其应用于三个不同的任务：(T1) 学习单段空间软体机械臂的动力学模型；(T2) 学习双段空间软体机械臂的动力学模型；(T3) 学习 Franka Emika Panda 机器人的动力学模型。选择 (T1) 和 (T2)，是因为它们具有非平凡的 $A(q)$；选择 (T3)，是因为它具有多个自由度。此外，我们利用学习到的动力学为 T2 和 T3 设计并测试基于模型的控制器。

在硬件实验中，我们使用拉格朗日神经网络学习文献 [54] 中所述腱驱动软体机械臂和Panda机器人的动力学模型。我们首次展示了基于物理信息神经网络算法对机器人系统（Panda机器人）进行实验闭环控制。

4.1 数据生成

T1和T2的训练数据通过在MATLAB中仿真单段和两段式软体机械臂的动力学生成。对于T1，将十种不同的初始状态与十种不同的输入信号组合，利用单段机械臂动力学模型生成数据。每种组合都会生成时长为十秒、时间步长为0.0002秒的训练数据。对于T2，我们在Simulink中使用可变步长，根据两段式软体机械臂的数学模型生成数据集。采用这种方法，我们创建了十二条时长为六十秒的不同轨迹，随后以50Hz、100Hz和1000Hz的固定频率对其重新采样。对于T3，我们使用PyBullet仿真环境生成对应于Panda机器人的训练数据。随后，对关节施加不同的输入信号，以1000Hz的频率生成70条不同轨迹的数据。

关于实验验证，我们提出了以下实验。对于腱驱动连续体机器人，我们向四个电机（即执行器）提供具有不同频率和幅值的正弦输入，并记录机器人的运动。惯性测量单元以 10Hz 的采样频率记录末端姿态数据。最终生成了 122 条轨迹，并另外采集了 4 条作为测试集。对于 Panda机器人，我们提供了 70 组具有不同幅值和频率的正弦期望关节角。我们利用集成传感器采集力矩、关节角和角速度数据，采样频率为 500Hz。

4.2 基线模型与模型训练

为了提供比较基准，我们针对所有仿真和硬件实验建立了基线模型。这些模型作为对照，采用全连接网络构建，并使用与所提出模型相同的数据集进行训练，但使用了更多的数据和更长的训练轮数。这些基线模型旨在展示将物理知识融入神经网络的优势。

在本项目中，所有使用的神经网络均通过 Python 中的 JAX 和 dm-Haiku 软件包构建。具体而言，使用 JAX 自动微分系统计算损失函数中的偏导数和 Hessian。模型参数的优化则使用 Optax 软件包中的 AdamW 完成。

5 仿真结果

5.1 单段三维软体机械臂

为了定义软体机械臂的构型空间，我们采用图5所示的分段常曲率（PCC）近似 [55]。通常，这种近似将每段的构型表示为 $q_i = [\phi_i, \theta_i, \delta\ell_i]$，其中 ϕ_i 是平面方位角， θ_i 是该平面内的曲率，而 $\delta\ell_i$ 是弧长变化量。本文采用文献

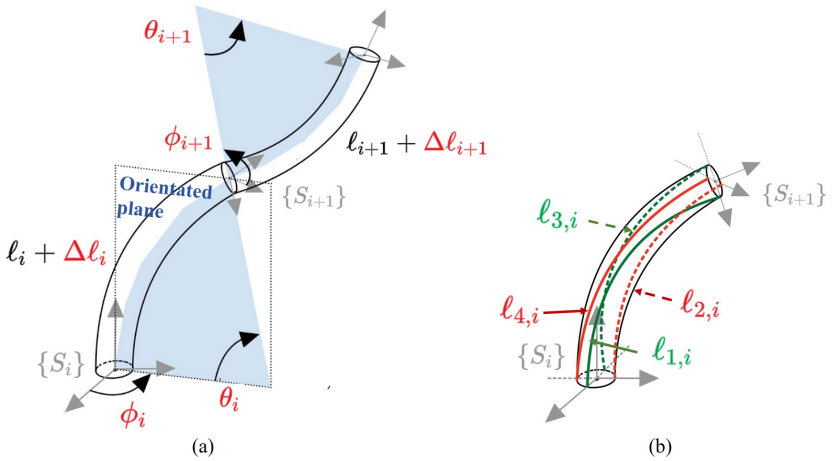


图5：PCC 方法示意图：(a) 展示了两段式软体机械臂，其中 S_i 为末端坐标系，蓝色部分为定向平面， ℓ_i 为每段的原始长度；(b) 展示了四条端点连接到坐标系S_i的弧线长度

[56] 中报道的构型定义方法，以避免 PCC 的奇异性问题。因此，每段的构型表示为 $[\Delta_{xi}, \Delta_{yi}, \Delta_{\ell i}]$，其中 Δ_{xi} 和 Δ_{yi} 是弧长差。

表1：单段软体机械臂仿真详细信息

	黑箱模型	基于拉格朗日的学习模型	基于哈密顿量的学习模型
模型（宽度 × 深度）	128×5	$32\times3, 5\times3, 16\times2$	$32\times3, 5\times3, 16\times2$
样本数	19188	8000	8000
训练轮次	15000	6000	6000
训练误差	$6.891e^{-5} \pm 4.63e^{-4}$	$8.418e^{-7} \pm 1.77e^{-5}$	$5.374e^{-11} \pm 7.74e^{-10}$
预测误差 [m]	7.647 ± 10.413(5秒)	0.171 ± 0.272(5秒)	0.0220 ± 0.0210 (5秒)

该任务的详细信息如表1所示。这两个学习得到的模型的预测结果如图6所示。图中表明，由拉格朗日神经网络训练的模型具有很高的预测准确度，在本例中连续进行超过50,000步预测时，表现出近乎无限的预测能力。尽管某些区域的拟合精度较低，但需要注意的是，这些误差不会随时间累积。这些结果表明，基于拉格朗日量的神经网络模型能够有效捕捉单段软体机械臂的潜在动力学。相比之下，黑箱模型在训练过程中会收敛，但从其预测性能中无法获得关于动力学模型的洞见。通过提供动量数据，也使用哈密顿神经网络对该系统进行了学习。如图7所示，基于哈密顿量的神经网络产生了与基于拉格朗日量的神经网络质量相近的预测结果。

表2：单段软体机械臂的数学模型矩阵

q	$M(q)$	$M^{-1}(q)$	$D(q)$	$G(q)$	$A(q)$
$\begin{bmatrix} 1.20 \\ -0.20 \\ 0.15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.73e^{-3} & -3.12e^{-5} & -1.96e^{-3} \\ -3.12e^{-5} & 1.55e^{-3} & 3.26e^{-4} \\ -1.96e^{-3} & 3.26e^{-4} & 9.29e^{-2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 593.09 & 9.35 & 12.47 \\ 9.35 & 647.61 & -2.08 \\ 12.47 & -2.08 & 11.04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.29 \\ -0.22 \\ -1.15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.04 & -1.0 & 0.07 \\ 0.78 & 0.04 & -0.01 \\ 0. & 0. & 0.77 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.20 \\ 0.30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.64e^{-3} & 4.52e^{-5} & -1.94e^{-3} \\ 4.52e^{-5} & 3.47e^{-3} & -4.84e^{-4} \\ -1.94e^{-3} & -4.84e^{-4} & 9.67e^{-2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 277.76 & -2.84 & 5.55 \\ -2.84 & 288.42 & 1.39 \\ 5.55 & 1.39 & 10.46 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.22 \\ -1.09 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.03 & -0.99 & 0.06 \\ 0.90 & -0.03 & 0.02 \\ 0. & 0. & 0.89 \end{bmatrix}$

这两种基于物理的学习模型所得到的矩阵如表3和表4所示，其中 $G(q)$ 表示势力，即 $^{\partial V}{}_{(q)}\,{}_{\partial q}$。如表4所示，哈密顿神经网络能够学习到具有物理意义的矩阵，而拉格朗日神经网络只学习到满足欧拉-拉格朗日方程的解之一。比较表2和表3中的对应矩阵，可以发现，拉格朗日神经网络学习到的矩阵和向量通过变换 $P(q)$ 与真实参数相关。

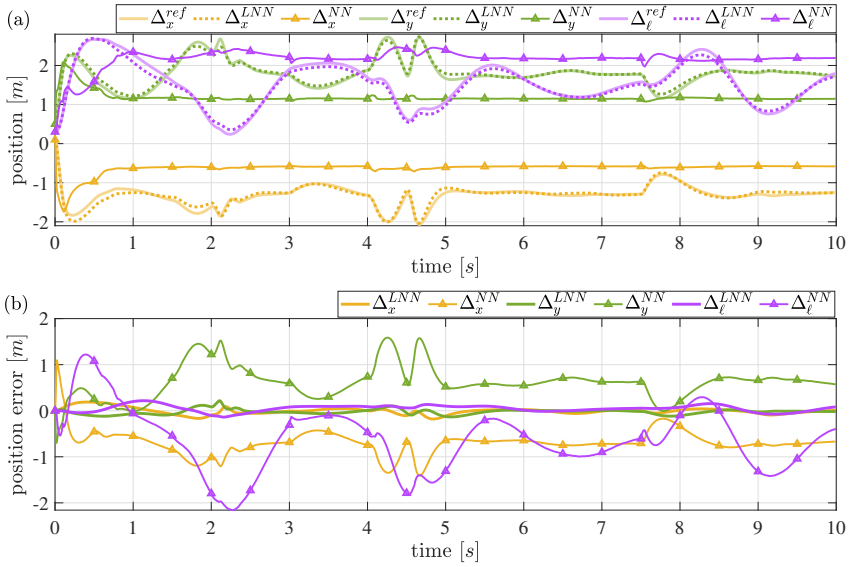


图6：单段软体机械臂学习模型对比结果：(a) 展示了黑箱模型（△）、基于拉格朗日的学习模型（···）以及由动力学方程得出的真实值（–）所生成的预测结果；(b) 展示了这两个学习得到的模型的预测误差。

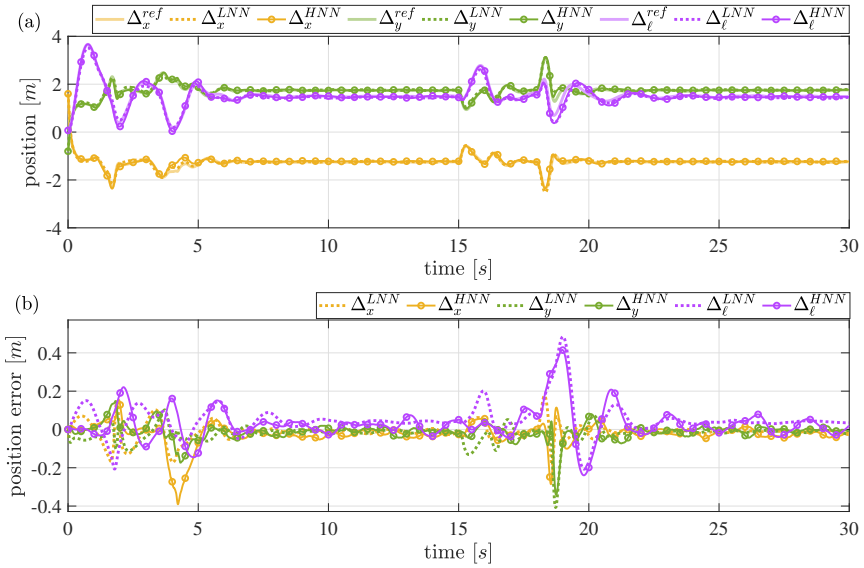


图7：单段软体机械臂的哈密顿神经网络与拉格朗日神经网络对比：(a) 显示了基于拉格朗日的学习模型预测结果（···）、基于哈密顿量的学习模型预测结果（○）以及真实值预测（–）；(b) 两种模型与真实值之间的误差。

表3：单段软体机械臂基于拉格朗日的学习模型矩阵

q	$\hat{M}(q)$	$\hat{D}(q)$	$\hat{G}(q)$	$\hat{A}(q)$	$P(q)$
$\begin{bmatrix} 1.20 \\ -0.20 \\ 0.15 \\ 0.80 \\ 0.20 \\ 0.30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.23e^{-3} & 1.20e^{-3} & -0.03 \\ 1.20e^{-3} & 5.99e^{-3} & -0.02 \\ -0.03 & -0.02 & 0.59 \\ 6.93e^{-3} & 1.84e^{-3} & -0.03 \\ 1.84e^{-3} & 0.01 & -0.02 \\ -0.03 & -0.02 & 0.50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.16 & -0.02 & 0.0 \\ -0.02 & 0.33 & -0.01 \\ 0.0 & -0.01 & 0.35 \\ 0.17 & -0.01 & -0.0 \\ -0.01 & 0.33 & -0.01 \\ -0.0 & -0.01 & 0.35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.44 \\ -0.61 \\ -5.25 \\ 1.62 \\ 0.81 \\ -4.67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & -1.72 & -0.21 \\ 3.05 & -0.19 & -0.13 \\ -0.34 & 1.01 & 3.40 \\ 0.19 & -1.66 & -0.20 \\ 2.97 & -0.25 & -0.13 \\ -0.40 & 1.01 & 3.43 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.61 & -0.02 & 0.03 \\ -0.02 & 0.28 & 0.01 \\ 0.33 & 0.15 & 0.25 \\ 0.62 & -0.02 & 0.03 \\ -0.02 & 0.31 & 0.01 \\ 0.21 & 0.10 & 0.26 \end{bmatrix}$

5.2 两段式三维软体机械臂

两段式软体机械臂模型在 MATLAB 中进行仿真，其构型空间的定义与单段情形相同。该任务的训练与测试信息见表5。图8总结了 $50Hz$、 $100Hz$和 $1000Hz$ 学习模型的预测结果。从

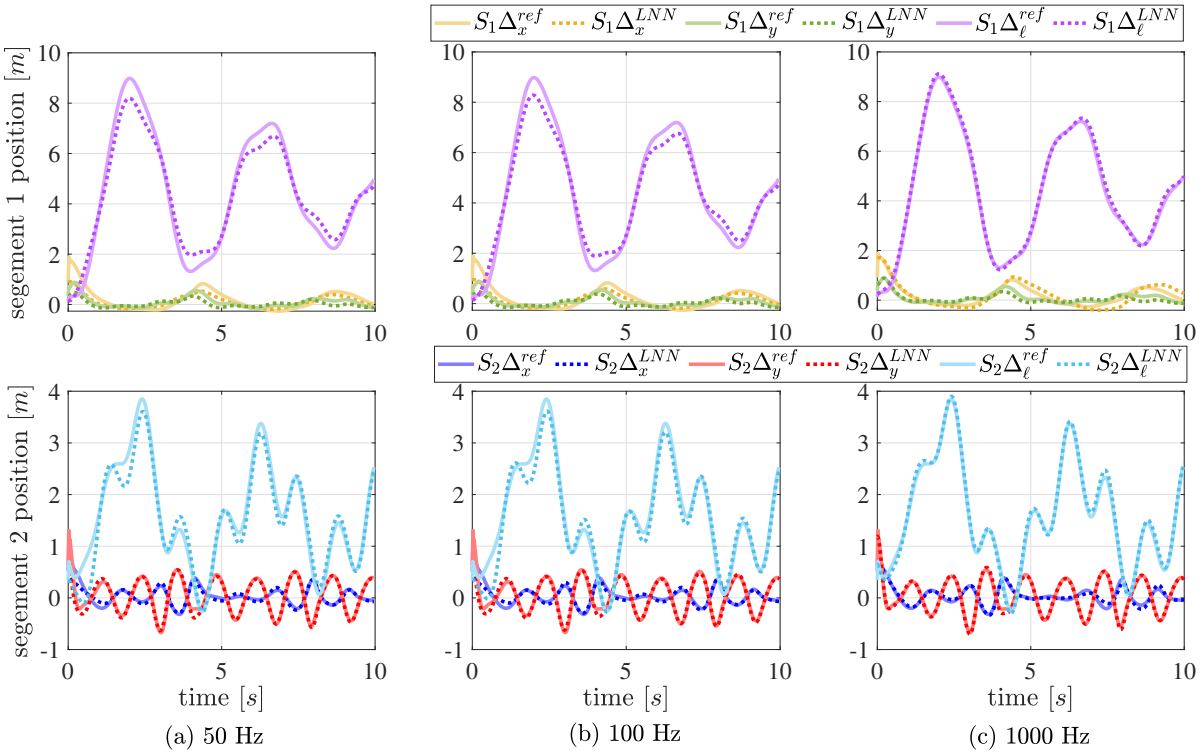
表4：单段软体机械臂的基于哈密顿量的学习模型矩阵

q	$\hat{M}^{-1}(q)$			$\hat{D}(q)$			$\hat{G}(q)$	$\hat{A}(q)$		
1.20	600.32	16.90	15.67	$1.02e^{-1}$	$3.44e^{-3}$	$8.12e^{-5}$	1.33	−0.06	−0.94	0.05
−0.20	16.90	622.92	−1.34	$3.44e^{-3}$	$1.05e^{-1}$	$-4.39e^{-4}$	−0.18	0.83	0.02	−0.04
0.15	15.67	−1.34	11.61	$8.12e^{-5}$	$-4.39e^{-4}$	$9.91e^{-2}$	−1.15	0.0	0.01	0.78
0.80	285.01	11.08	6.65	$1.01e^{-1}$	$3.48e^{-3}$	$6.56e^{-4}$	0.93	0.03	−0.96	0.05
0.20	11.08	292.46	2.06	$3.48e^{-3}$	$1.03e^{-1}$	$-7.45e^{-5}$	0.25	0.92	−0.03	−0.02
0.30	6.65	2.06	10.59	$6.56e^{-4}$	$-7.45e^{-5}$	$9.87e^{-2}$	−1.10	−0.01	0.0	0.89

通过仿真，我们得出结论：在一定范围内，采样频率越高，学习模型就越准确。

表5：双段软体机械臂仿真的训练和测试详细信息

	黑箱模型	基于拉格朗日的学习模型		
	100Hz	50Hz	100Hz	1000赫兹
模型（宽度 × 深度）	152×3	$42\times3, 5\times3, 42\times2$	$42\times3, 5\times3, 42\times2$	$42\times3, 5\times3, 42\times2$
样本数	59200	45000	45000	45000
训练轮次	15000	5500	5500	5500
训练误差	$3.536e^{-4}\pm1.08e^{-3}$	$5.916e^{-4}\pm8.61e^{-3}$	$1.652e^{-4}\pm2.12e^{-2}$	$1.822e^{-7}\pm6.67e^{-6}$
预测误差 $[m]$	44.683 ± 4.518(10秒)	2.098 ± 1.253(10秒)	1.690 ± 0.673(10秒)	0.089 ± 0.278(10秒)



(a) 50 Hz (b) 100 Hz (c) 1000 Hz

图8：不同采样频率下两段式软体机械臂的预测性能

基于在1000Hz下训练的学习模型，我们按照式（12）设计了一个基于物理信息神经网络的控制回路。为了展示所设计控制器的性能，我们使用该控制器在MATLAB中对两段式软体机械臂进行控制。对于所有六种构型，比例增益 K_P 和微分增益 K_D 分别设置为10和50。受控两段式机械臂的状态变化如图9所示，而控制器的性能则如图10所示。结果表明，该控制器能够在1秒内跟踪静态设定点，同时将均方根误差（RMSE）保持在0.23%以下，并表现出稳定且极小的超调性能。这些性能充分证明了基于学习模型所设计的控制器具有良好的可靠性和效率。

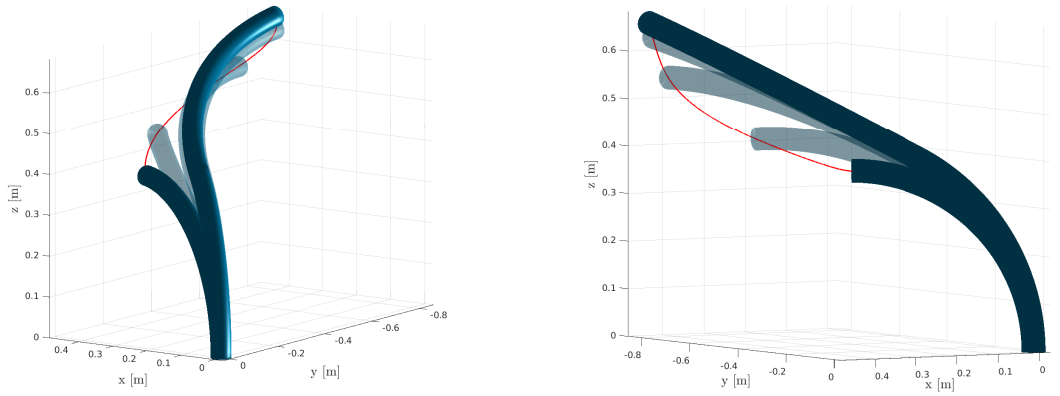


图9：两段式软体机器人通过实施基于LNN模型的控制器，在0.0s、0.1s、0.3s、0.6s和1.0s时执行的运动序列。红线表示末端位置

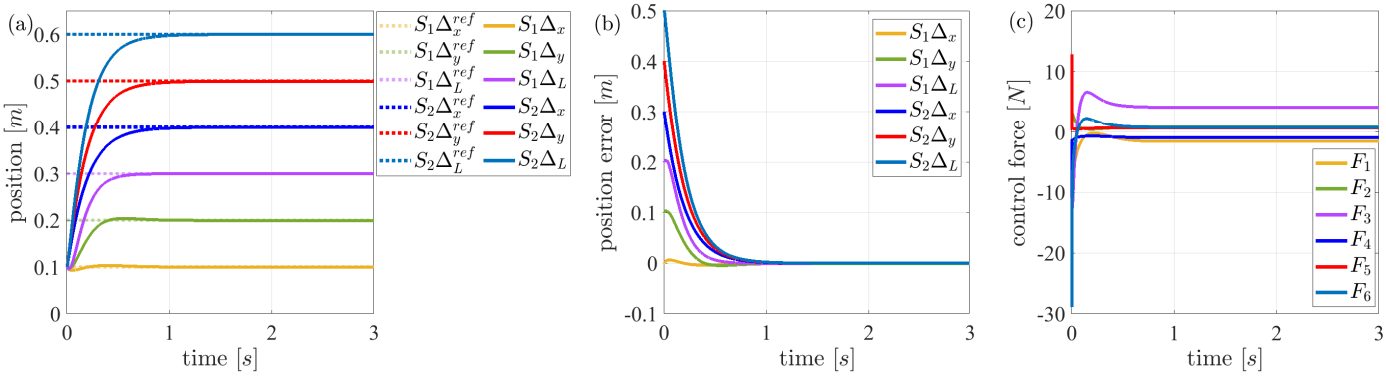


图10：两段式软体机械臂基于模型的控制器性能：(a) 显示构型变量的变化，虚线表示期望状态；(b) 显示期望状态与当前状态之间的误差；(c) 显示控制量。

5.3 Panda机器人

表6展示了 PyBullet 中模拟 Panda 的训练数据和测试数据，而图11展示了学习模型得到的预测结果。该模型在 1 秒内（即连续预测 1000 步）表现出相对准确的预测性能。此外，基于拉格朗日的模型可以通过以固定频率（通常为 50 至 100 Hz）将学习模型的输入值更新为真实状态，实现长期预测。

表6：Franka仿真详细信息（1000Hz）

	黑箱模型	基于拉格朗日的学习模型
模型（宽度 × 深度）	120×4	$40\times3, 20\times2$
样本数	550000	25000
训练轮次	10000	10000
训练误差	$1.476e^{-4}\pm2.69e^{-3}$	$1.424e^{-4}\pm2.90e^{-3}$
预测误差/ $[rad]$	5.132 ± 15.691（2秒）	98.6937 ± 6.411（2秒）

基于该学习模型，我们构建了第??节中讨论的跟踪控制器。结果如图12所示，可以看到，我们的控制器响应迅速，能够快速适应参考信号的变化。它能够保持较高的精度和较低的相位滞后，因此非常适合跟踪快速变化的信号。

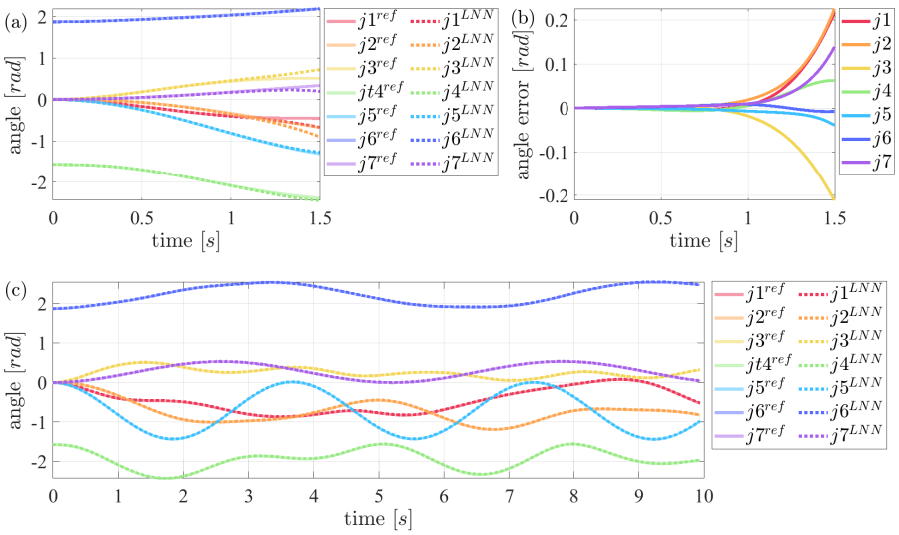


图11：Franka Emika Panda 学习模型的预测结果：(a) 展示连续1500步的预测；(b) 为预测结果相对于真实值的角度误差；(c) 展示窗口大小为50步的长期预测结果。

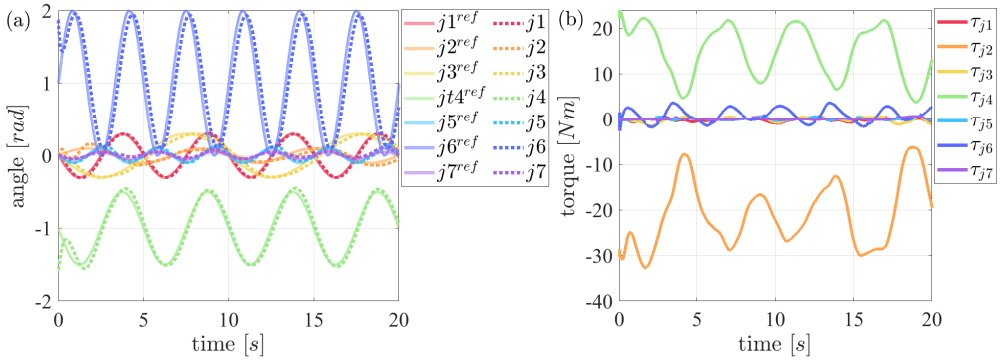


图12：使用拉格朗日神经网络学习的模型所设计的基于模型的控制器的性能。期望轨迹以虚线绘制。

6 实验验证

6.1 单段腱驱动软体机械臂 – NECK

我们在图13所示的平台上验证了所提出的方法，该平台基于 [54, 57] 构建。我们考虑了两种不同的数据预处理方法。(i) 移动平均法：该方法降低了数据中的噪声和离群值，使底层趋势的表示更加稳定。然而，它可能忽略变量之间复杂的关系，导致部分信息丢失。(ii) 多项式拟合：该方法捕捉了数据中的非线性模式。然而，它容易受到离群值的影响，产生虚假信息，进而可能降低训练模型的质量。

训练与测试信息如表7所示。

通过使用 `movmean`function 函数，以预设的50个点窗口大小在 MATLAB 中实现移动平均法。处理后的数据用于训练拉格朗日神经网络。在图14中，我们比较了黑箱学习模型与基于拉格朗日的学习模型的连续预测能力。该图中的预测性能表明，在此样本中，基于拉格朗日的学习模型具有更高的预测准确度。此外，图14(c)显示，该学习模型能够在短期更新的情况下实现长期预测。

数据的多项式拟合在 MATLAB 中使用函数 `polyfit` 完成。模型的预测结果如图15所示。当.....时，学习模型表现良好。

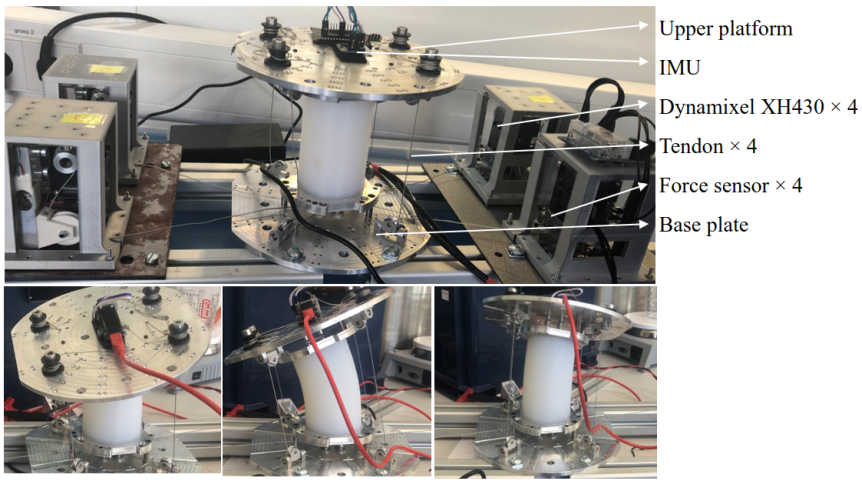


图13：实验平台：配备惯性测量单元的单段腱驱动软体机械臂

表7：腱驱动软体机器人 NECK 的训练与测试信息

		黑箱模型	基于拉格朗日的学习模型
平滑	模型	60×3	$21\times2, 25\times2, 10\times2$
	样本数	69426	69426
	训练轮次	10000	3000
	训练误差	$1.985e^{-2} \pm 1.85e^{-1}$	$2.277e^{-2} \pm 2.39e^{-1}$
	预测误差 [°]	13.229 ± 60.762 (5秒)	2.429 ± 1.259 (5秒)
拟合	模型	60×3	$21\times2, 25\times2, 10\times2$
	样本数	57950	48200
	训练轮次	5000	5000
	训练误差	$4.431e^{-3} \pm 3.07e^{-2}$	$2.758e^{-3} \pm 2.84e^{-2}$
	预测误差[°]	8.368 ± 12.575 (5秒)	6.426 ± 36.237 (5秒)

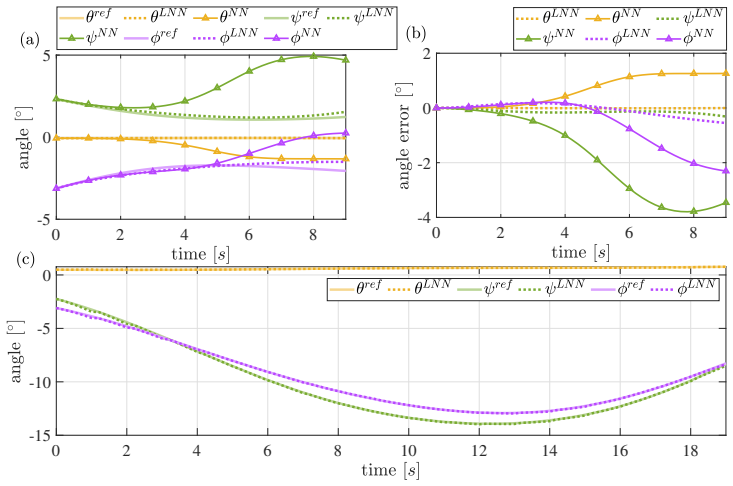


图14：平滑数据黑色-b
(b) 显示 43 个预测步数 i
ox 模型（△）和基于物理的学习模型（- -）的连续预测结果：(a) 和
排列成一行；(c) 展示了采用 5 步窗口大小时的预测结果。

窗口大小减小，如图15(c)所示。与先前模型相比，该模型表现出显著的预测误差，如表7所示。这可能是由传感器中的显著噪声以及用于拟合数据的近似方法所引起的信息失真造成的。

6.2 刚性机器人 – Franka Emika Panda

收集到的数据通过 MATLAB 中的巴特沃斯滤波器进行处理，以减少噪声。更多详情见表8。在实验中，我们观察到关节加速度较小，因此

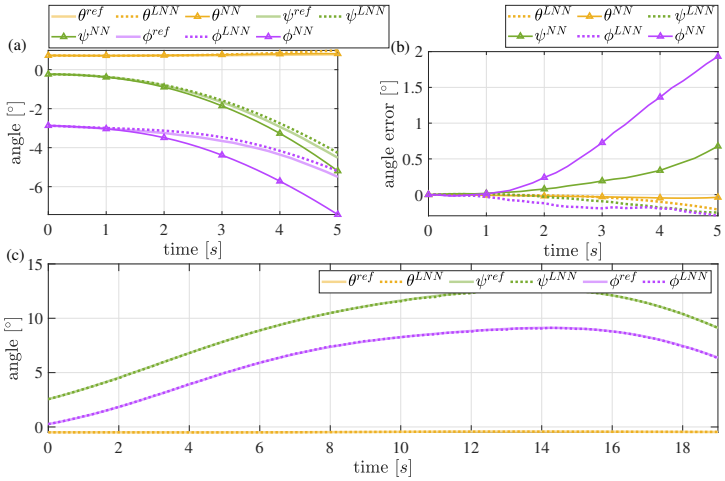


图15：拟合数据黑箱模型（△）和基于物理的学习模型（···）的连续预测结果：(a) 和 (b) 展示了连续 25 个预测步数的结果；(c) 展示了步长窗口大小为 5 时的预测结果。

速度变化极小。为防止网络只专注于学习较大的质量矩阵，而忽略其他重要因素，我们采用缩放 sigmoid 函数。该函数可确保质量矩阵中的元素缩放至特定范围内。对于此特定情况，我们将缩放因子设为 3.50。

表8：Franka 实验详细信息（500Hz）

	黑箱模型	基于拉格朗日的学习模型
模型（宽度 × 深度）	120×5	$40\times3, 20\times2$
样本数	550000	25000
训练轮次	10000	3000
训练误差	$1.371e^{-5}\pm2.03e^{-5}$	$1.68e^{-7}\pm6.64e^{-6}$
预测误差$[rad]$	182.495 ± 64.645 (2秒)	2.681 ± 1.383 (2秒)

图16展示了我们基于物理的模型的预测性能，其中图16 (b) 描绘了2秒或1000个预测步数内的连续预测误差，而 (c) 表明，使用实时状态数据更新模型输入有助于进行长时间预测。

我们为实际机器人提出了一种基于公式 (22) 的控制器。比例增益矩阵 K_{P} 设为对角矩阵，其对角元素依次为600、600、600、600、250、150和50。微分增益矩阵 K_{D} 设为对角矩阵，其对角元素依次为30、30、30、30、10、10和5。图17展示了一系列照片，呈现了机器人在10秒内跟踪正弦轨迹所用的周期性运动。整体跟踪性能见图18。

此外，我们还展示了末端执行器的轨迹，该轨迹为图19所示的螺旋运动，其产生的控制效果已在图18中进行了直观展示。

在这些图中，我们可以观察到，所设计的控制器具有令人满意的性能，这一点从其能够跟踪期望轨迹即可得到证明。尽管某些关节存在跟踪误差，但该误差仍处于可接受范围内，并未显著影响控制器在实际应用中的整体性能。对控制器性能的考察表明，尽管其总体上有效，但在不同关节之间，其性能呈现出一定程度的差异。控制器的整体性能仍处于可接受水平，表明其有望有效应用于现实应用。

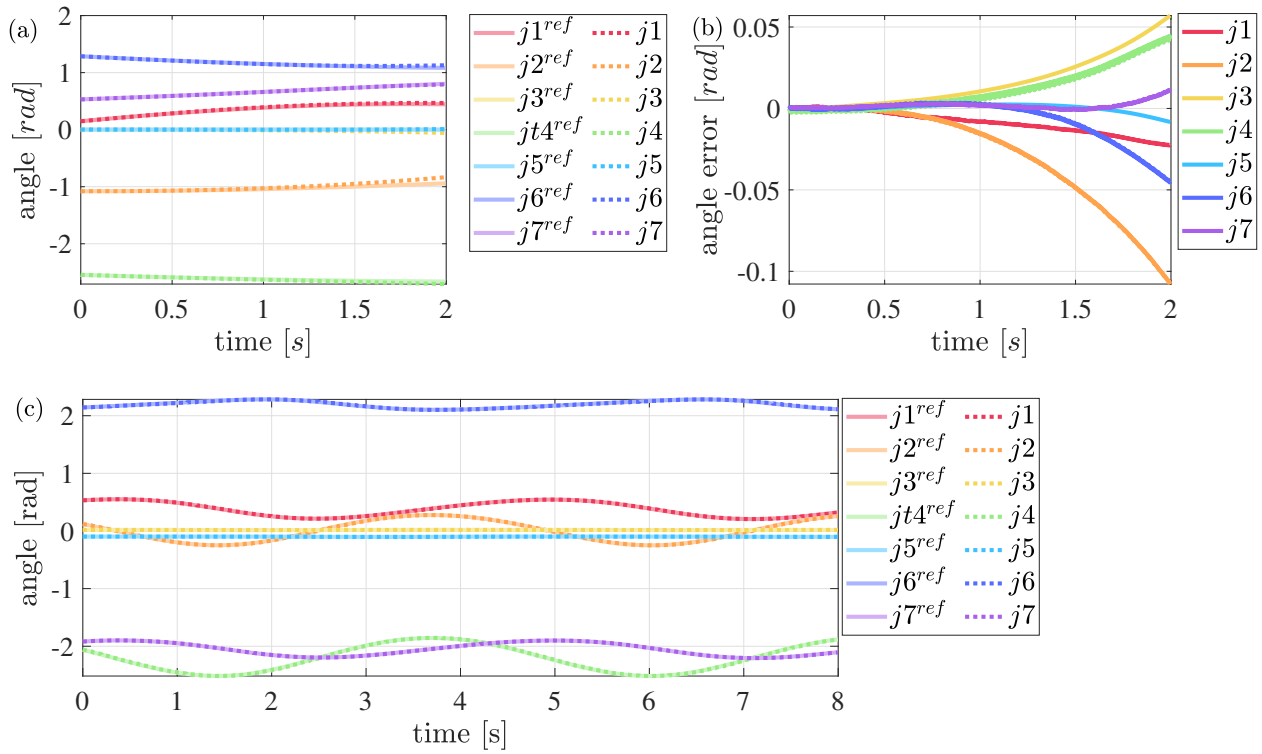


图16：Panda 基于物理的学习模型的预测结果：(a) 和 (b) 展示了连续约 800 步的预测；(c) 展示了窗口大小为 5 步时的预测结果。

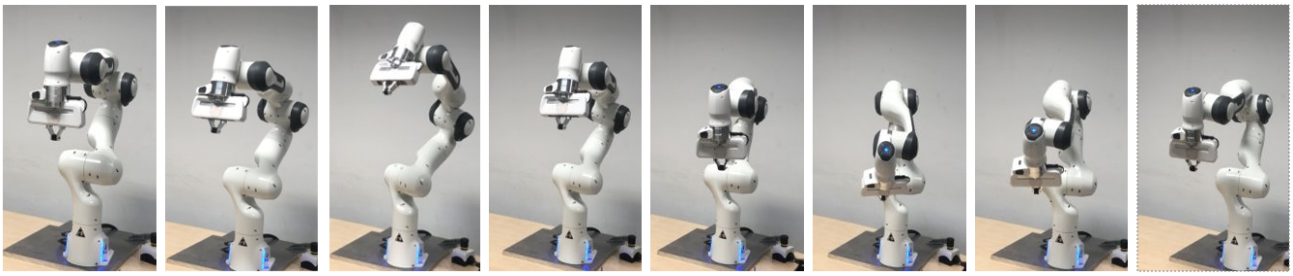
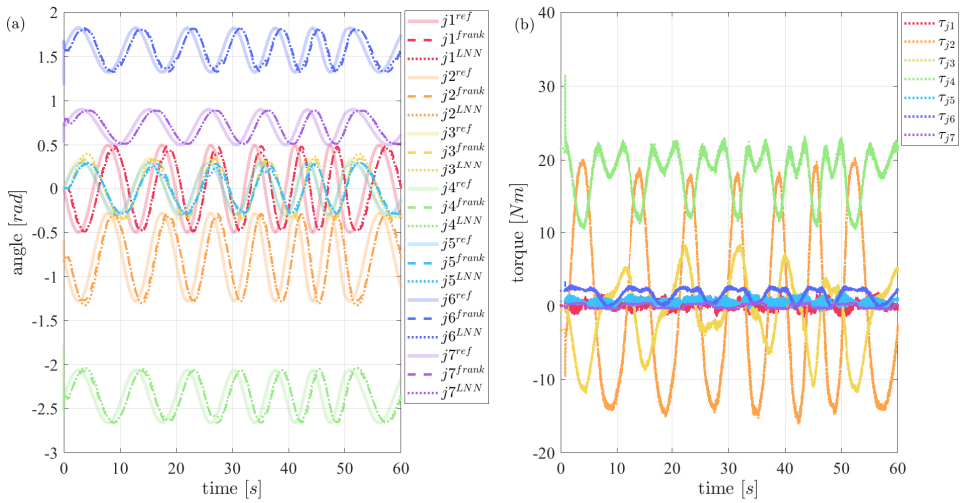


图17：应用基于LNN模型的控制器跟踪轨迹所产生的一次周期性运动的照片序列

7 结论

本文提出了一种在物理信息神经网络（PINNs）——具体而言，即拉格朗日神经网络（LNNs）和哈密顿神经网络（HNNs）——中考虑阻尼以及机器人与执行器之间相互作用的方法，从而提高了这些神经网络在动力学模型学习方面的适用性。此外，我们采用四阶龙格-库塔法，以避免使用通常难以获取的加速度测量值。改进后的物理信息神经网络被证明适用于刚性机械臂和软体机械臂的动力学模型学习。对于后者，我们采用 PCC 近似来获得系统的简化模型。

改进后的物理信息神经网络方法利用了系统底层物理规律的知识，因此，与使用全连接网络训练的基线模型相比，学习得到的模型精度大幅提升。结果表明，由于该方法嵌入了先验知识，物理信息神经网络展现出更具指导性和方向性的学习过程。值得注意的是，使用较少数据训练的基于物理的学习模型，比传统黑箱模型具有更强的泛化能力和鲁棒性。因此，该模型能够实现连续的长期预测，并支持可变步长。此外，学习模型能够实现良好的前瞻性控制；正如在 Panda机器人上进行的实验所示，将简单的比例微分控制器集成其中即可获得良好的性能。



Fi图 18：使用学习模型设计的基于模型的控制器的性能。

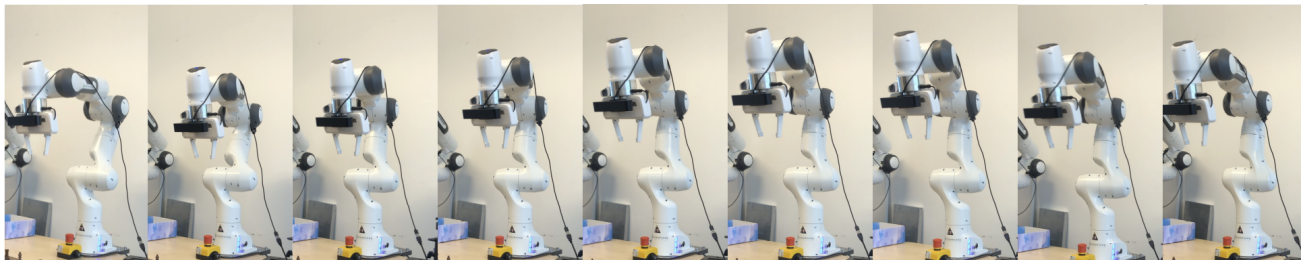


图19：使用基于LNN模型的控制器实现末端执行器螺旋运动的照片序列

致谢

我们谨向 EMERGE 致以谢意，感谢他们提供的资金支持，使我们得以开展这项研究。我们也由衷感谢 NECK 实验平台的发明者 Bastian Deutschmann，该平台为我们的工作提供了极大便利。我还要特别感谢 Francesco Stella 和 Tom´as Coleman 在实验过程中给予的宝贵指导和帮助。最后，我们感谢同事们提出的深刻见解和建设性批评，这些意见帮助我们完善了思路和方法。

参考文献

[1] A. I. Chen、M. L. Balter、T. J. Maguire、M. L. Yarmush，《自然·机器智能》**2020年**，*2*，2 104。[2] J. Ichnowski、Y. Avigal、V. Satish、K. Goldberg，《科学·机器人学》**2020年**，*5*，48 eabd7710。[3] D. Mukherjee、K. Gupta、L. H. Chang、H. Najjaran，《机器人学与计算机集成制造》**2022年**，*73* 102231。[4] F. Stella、C. Della Santina、J. Hughes，《自然·机器智能》**2023年**。[5] L. Bu¸soniu、T. De Bruin、D. Toli´c、J. Kober、I. Palunko，《控制年度评论》2018，*46* 8。[6] P. R. Wurman、S. Barrett、K. Kawamoto、J. MacGlashan、K. Subramanian、T. J. Walsh、R. Capo- bianco、A. Devlic、F. Eckert、F. Fuchs 等，《自然》**2022年**，*602*，7896 223。[7] N. Rudin、D. Hoeller、P. Reist、M. Hutter，载于机器人学习会议。PMLR，**2022年** 91–100。[8] I. Akkaya、M. Andrychowicz、M. Chociej、M. Litwin、B. McGrew、A. Petron、A. Paino、M. Plappert、G. Powell、R. Ribas 等，*arXiv*预印本 *arXiv:1910.07113* **2019年**。

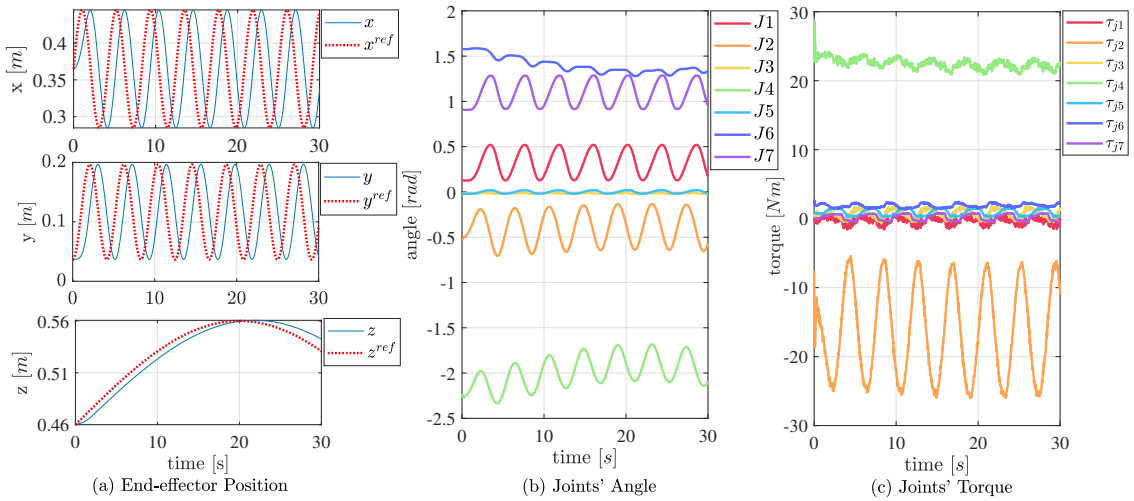


图20：使用学习模型设计的基于模型的控制器的性能：(a) 显示期望的末端执行器轨迹；(b) 显示相应的关节角度和控制结果；(c) 显示该运动对应的控制器输入转矩。

[9] W. Zhao、J. P. Queralta、T. Westerlund，发表于《2020年 IEEE 计算智能研讨会系列会议（SSCI）》。IEEE，2020年，第737–744页。[10] P. Kulkarni、J. Kober、R. Babuˇska、C. Della Santina，Advanced Intelligent Systems，2022年，4卷，1期，2100095。[11] N. S¨underhauf、O. Brock、W. Scheirer、R. Hadsell、D. Fox、J. Leitner、B. Upcroft、P. Abbeel、W. Burgard、M. Milford 等，国际机器人研究杂志，2018年，37卷，4-5期，405。[12] G. Antonelli、S. Chiaverini、P. Di Lillo，Nonlinear Dynamics，2023年，111卷，7期，6487。[13] H. Beik-Mohammadi、S. Hauberg、G. Arvanitidis、G. Neumann、L. Rozo，arXiv预印本 arXiv:2106.04315，2021年。[14] A. Simeonov、Y. Du、A. Tagliasacchi、J. B. Tenenbaum、A. Rodriguez、P. Agrawal、V. Sitzmann，发表于2022年国际机器人与自动化会议（ICRA）。IEEE，2022年，第6394–6400页。[15] J. Urain、N. Funk、G. Chalvatzaki、J. Peters，arXiv预印本 arXiv:2209.03855，2022年。[16] A. Daw、A. Karpatne、W. Watkins、J. Read、V. Kumar，arXiv预印本 arXiv:1710.11431，2017年。[17] G. E. Karniadakis、I. G. Kevrekidis、L. Lu、P. Perdikaris、S. Wang、L. Yang，Nature Reviews Physics，2021年，3卷，6期，422。[18] F. Djeumou、C. Neary、E. Goubault、S. Putot、U. Topcu，发表于学习动力学与控制会议。PMLR，2022年，第263–277页。[19] M. Chen、R. Lupoiu、C. Mao、D.-H. Huang、J. Jiang、P. Lalanne、J. Fan，2021年。[20] B. Huang、J. Wang，IEEE Transactions on Power Systems，2022年，38卷，1期，572。[21] Z. Mao、A. D. Jagtap、G. E. Karniadakis，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2020年，360卷，112789。[22] S. A. Niaki、E. Haghighat、T. Campbell、A. Poursartip、R. Vaziri，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2021年，384卷，113959。[23] M. Cranmer、S. Greydanus、S. Hoyer、P. Battaglia、D. Spergel、S. Ho，arXiv预印本 arXiv:2003.04630，2020年。

[24] S. Greydanus, M. Dzamba,J.Yosinski, 神经信息处理系统进展 **2019年**，*32*。

[25] Y. D. Zhong, B. Dey, A. Chakraborty，《神经信息处理系统进展》2021年，34，21910。[26] R. Bhattoo, S. Ranu, N. A. Krishnan，《机器学习：科学与技术》2023年，4，1，015003。[27] M. A. Roehrl, T. A. Runkler, V. Brandtstetter, M. Tokic, S. Obermayer，IFAC-PapersOnLine 2020年，53，2，9195。[28] Y. D. Zhong, B. Dey, A. Chakraborty，载于《动力学与控制学习》。PMLR，2021年，1218–1229。[29] R. Bhattoo, S. Ranu, N. Krishnan，《神经信息处理系统进展》2022年，35，29789。[30] M. Lutter, J. Peters，《国际机器人研究杂志》2023年，42，3，83。[31] C. Della Santina, M. G. Catalano, A. Bicchi, M. Ang, O. Khatib, B. Siciliano，《机器人学百科全书》2020年，489。[32] J. K. Gupta, K. Menda, Z. Manchester, M. J. Kochenderfer，arXiv预印本 arXiv:1902.08705，2019年。[33] J. K. Gupta, K. Menda, Z. Manchester, M. Kochenderfer，载于《动力学与控制学习》。PMLR，2020年，328–337。[34] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry, S. S. Sastry，《机器人操作数学导论》，CRC出版社，1994年。[35] H. K. Khalil，2015年。[36] C. Della Santina, C. Duriez, D. Rus，《IEEE控制系统杂志》2023年，43，3，30。[37] Y. Zheng, C. Hu, X. Wang, Z. Wu，《过程控制杂志》2023年，128，103005。[38] S. Sanyal, K. Roy，arXiv预印本 arXiv:2209.09025，2022年。[39] L. Hewing, J. Kabzan, M. N. Zeilinger，《IEEE控制系统技术汇刊》2019年，28，6，2736。[40] I. Mitsioni, P. Tajvar, D. Kragic, J. Tumova, C. Pek，《IEEE机器人学汇刊》2023年。[41] F. Arnold, R. King，《人工智能工程应用》2021年，101，104195。[42] S. Mowlavi, S. Nabi，《计算物理学杂志》2023年，473，111731。[43] J. Nicodemus, J. Kneifl, J. Fehr, B. Unger，IFAC-PapersOnLine 2022年，55，20，331。[44] M. Lutter, K. Listmann, J. Peters，载于《2019年IEEE/RSJ智能机器人与系统国际会议（IROS）》。IEEE，2019年，7718–7725。[45] C. Della Santina，《机器人学百科全书》2021年，20。[46] C. Laschi, T. G. Thuruthel, F. Lida, R. Merzouki, E. Falotico，《IEEE控制系统杂志》2023年，43，3，100。[47] P. Pustina, C. Della Santina, F. Boyer, A. De Luca, F. Renda，arXiv预印本 arXiv:2306.07258，2023年。[48] M. Lutter, C. Ritter, J. Peters，arXiv预印本 arXiv:1907.04490，2019年。[49] L. N. Trefethen, D. Bau，《数值线性代数》，第181卷，SIAM，2022年。

[50] K. B. Petersen, M. S. Pedersen, 《矩阵烹饪手册》, 丹麦技术大学, **2008年**。[51] M. Montagna, P. Pustina, A. De Luca, 载于*I-RIM*会议。**2023年** 。[52] P. Tomei, *IEEE*自动控制汇刊 **1991年**, *36*, 10, 1208。[53] R. Kelly, R. Salgado, *IEEE*机器人与自动化汇刊 **1994年**, *10*, 4, 566。[54] B. Deutschmann, J. Reinecke, A. Dietrich, 载于*2022*年*IEEE*第五届国际软体机器人会议（*RoboSoft*）。**2022年**, 54–61。[55] M. W. Hannan, I. D. Walker, 《机器人系统期刊》**2003年**, *20*, 2, 45。[56] C. Della Santina, A. Bicchi, D. Rus, *IEEE*机器人与自动化快报 **2020年**, *5*, 2, 1001。[57] B. Deutschmann, 腱驱动连续体,
`https://github.com/DLR-RM/TendonDrivenContinuu`

m,

2022年.