arXiv:2305.05387v1 [math.RA] 22 Feb 2023

非交换分次环上的分次经典弱素子模

Jebrel M. Habeb* 和 Rashid Abu-Dawwas

Abstract. 本文旨在提出并研究非交换分次环上的分次经典弱素子模这一概念，它是交换分次环上的分次经典弱素子模概念的推广。我们将在各种分次模范畴中探讨这类子模的结构。

1. 引言

本文中，所有环均为结合环，且具有非零单位元 1；所有模均为含幺左模。设 G 为一个单位元为 e 的乘法群，A 为一个具有非零单位元 1 的环。若 A 满足$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$，且对所有 $g, h \in G$都有 $A_gA_h \subseteq A_{gh}$，其中 A_g是 A 的加法子群（对所有 $g \in G$），这里 A_gA_h 表示 A 的加法子群，它由所有满足 $a_g \in A_g$ 和 $b_h \in A_h$的元素 a_gb_h 的有限和组成，则称 A 为 G分次环。我们将此记作 $G(A)$。A_g 中的元素称为次数为 g的齐次元。若 $a \in A$，则 a 可唯一地写成 $a = \sum_{g\in G} a_g$，其中 a_g 是 a 在 A_g 中的分量，且除有限多个外，$a_g = 0$。加法子群 A_e 实际上是 A 的子环，并且$1 \in A_e$。A 中所有齐次元的集合为 $\bigcup_{g\in G} A_g$，记作 $h(A)$。设 P 是 G分次环 A的左理想。若$P = \bigoplus_{g\in G}(P \cap A_g)$，即对 $a \in P, a = \sum_{g\in G} a_g$，其中对所有 $g \in G$都有 $a_g \in P$，则称 P 为分次左理想。分次环的左理想不一定是分次左理想，参见（[3],例 1.1）。

设 A 是一个 G-分次环。若左 A-模 M 满足 $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$，且对所有 g、$h \in G$ 都有 $A_gM_h \subseteq M_{gh}$，其中对所有 $g \in G$，M_g 是 M 的一个加法子群，则称其为 G-分次模。M_g 中的元素称为次数为 g 的齐次元。若 $m \in M$，则 m 可唯一地写成 $m = \sum_{g\in G} m_g$，其中 m_g 是 m 的分量

2020年数学主题分类。主要分类：16W50；次要分类：13A02、13A15。关键词和短语：分次素子模；分次弱素子模；分次经典素子模。此项工作是在第一作者于2022—2023学年从亚尔穆克大学休学休假期间完成的。

*通讯作者：Jebrel M. Habeb：电子邮箱 jhabeb@yu.edu.jo。

在 M_g 和 $m_g = 0$ 中，除有限多个外均如此。当然，对所有 $g \in G$， M_g 都是一个 A_e-模。 M 的所有齐次元构成的集合为 $\bigcup_{g\in G} M_g$，记作 $h(M)$。设 K 是 M 的一个 A- 子模。若 K 满足 $K = \bigoplus_{g\in G}(K \cap M_g)$，即对 $x \in K$、 $x = \sum_{g\in G} x_g$，其中对所有 $g \in G$ 均有 $x_g \in K$，则称其为 M 的分次子模。与分次理想的情形类似，分次 A-模的一个 A- 子模不一定是分次子模。更多细节和术语请参见 [**10, 14**]。

交换分次环的分次素理想已在 [**17**] 中被引入并得到研究。交换分次环 A 的一个真分次理想 P 称为分次素理想，如果对于任意 $x, y \in h(A)$，只要满足 $xy \in P$，则必有 $x \in P$ 或 $y \in P$。分次素理想及其推广概念在分次交换代数中占有重要地位。它们是确定分次交换环性质的有力工具。关于分次素理想的许多推广形式已被广泛研究。事实上，Atani 在 [**5**] 中引入了分次弱素理想的概念。交换分次环 A 的一个真分次理想 P 称为分次弱素理想，如果对于任意 x, $y \in h(A)$，只要满足 $0 \neq xy \in P$，则有 $x \in P$ 或 $y \in P$。根据（[**5**], 定理 2.12），对于 $G(A)$ 的一个分次理想 P，若满足 $P \neq A$，则以下陈述等价，其中 A 是一个交换分次环:

(1) P 是 $G(A)$的分次弱素理想。**(2)** 对每个 g、$h \in G$，若 $0 \neq IJ \subseteq P$，且 I 是 A_g的 A_e-子模、 J 是 A_h 的 A_e-子模，则 $I \subseteq P$或 $J \subseteq P$。

对于不一定交换的分次环，显然(2)并不蕴含(1)。因此，Alshehry 和 Abu-Dawwas 在 [**3**] 中定义了$G(A)$的分次左理想，其中 A 不必是交换的，并如下定义分次弱素理想：若 P 是 $G(A)$的分次左理想且 $P \neq A$，则称其为 $G(A)$的分次弱素理想，条件是对每个 g、$h \in G$，若 $0 \neq IJ \subseteq P$，且 I 是 A_g的 A_e-子模、 J是 A_h的 A_e-子模，则 $I \subseteq P$或 $J \subseteq P$。等价地，只要 x、$y \in h(R)$满足 $0 \neq xRy \subseteq P$，则 $x \in P$ 或 $y \in P$ ([**3**], 命题 2.3)。在 [**2**], 中，非交换分次环 A的分次素理想 P 的标准定义是： $P \neq A$，且当 I 和 J 是 A 的分次左理想并满足 $IJ \subseteq P$时， $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。因此，在 [**3**], 中，他们将分次环 A 的分次左理想定义为分次弱素理想如下：若 P是 A 的真分次左理想，则称其为 A 的分次弱素理想，条件是当 I 和 J 是 A 的分次左理想且满足 $0 \neq IJ \subseteq P$时， $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。

设 K 是左 A-模 M的分次 A-子模。则 $(K :_A M) = \{a \in A : aM \subseteq K\}$ 是 A [**8**]的分次双边理想。若 K 满足$Ann_A(K) = (0 :_A K) = 0$，则称其为忠实的。在 [**2**], 中，若非交换分次环 A 上的分次A-模 M 的真分次 A-子模 K 满足以下条件：对于任意分次 A-子模 L 和分次理想 I，只要 $IL \subseteq K$，则或者 $L \subseteq K$，或者 $I \subseteq (K :_A M)$，则称 K 为分次素。如果 A 是交换的，则此定义等价于：若分次 A-模 M 的真分次 A-子模 K 满足以下条件：对于任意满足 $ax \in K$的 $a \in h(A)$ 和 $x \in h(M)$，则或者 $x \in K$，或者 $a \in (K :_A M)$，则称其为分次素。类似地，若非交换分次环 A 上的分次 A-模 M 的真分次 A-子模K 满足以下条件：对于任意分次 A-子模 L 和分次理想 I，只要 $0 \neq IL \subseteq K$，则或者 $L \subseteq K$，或者 $I \subseteq (K :_A M)$，则称 K 为分次弱素。如果 A 是

交换时，此定义等价于：若一个分次 A-模 K 的真分次 A-子模 M 满足：对于满足 $a \in h(A)$ 和 $x \in h(M)$ 的任意元素，只要 $0 \neq ax \in K$，则 $x \in K$ 或 $a \in (K :_A M)$ 成立，就称其为分次弱素子模。设 K 是 M 的一个分次 A- 子模，且 $g \in G$ 满足 $K_g \neq M_g$。若对于 M_g 的任意 A_e-子模 L 和 A_e 的任意理想 I，只要 $IL \subseteq K$，则 $L \subseteq K$ 或 $I \subseteq (K :_A M)$ 成立，就称 K 为 M 的一个 g-素 A-子模。

Abu-Dawwas 和 Al-Zoubi 在 [1] 中提出并研究了交换分次环上的分次弱经典素子模这一概念。设 A 是交换分次环， M 是其上的分次模， K 是 M 的真分次 A-子模。如果对于 x、$y \in h(A)$ 和 $m \in h(M)$，只要 $0 \neq xym \in K$，就有 $xm \in K$ 或 $ym \in K$，则称 K 是分次弱经典素子模。本文引入并考察非交换分次环上的分次经典弱素子模这一概念。事实上，本文的研究受到 [11] 中所探讨的概念和方法的启发。我们提出如下定义：设 A 是非交换分次环， M 是其上的分次模， K 是 M 的真分次 A-子模。如果对于 x、$y \in h(A)$，且 L 是 M 的一个分次 A-子模，只要 $0 \neq xAyL \subseteq K$，就有 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$，则称 K 是分次经典弱素子模。本文还考察了若干性质，并研究了分次模的不同范畴中分次经典弱素子模的结构。

2. 分次经典弱素子模

本节介绍并研究非交换分次环上的分次经典弱素子模。

Definition 2.1. 设 A 是一个分次环， M 是一个分次 A-模， K 是 M 的一个分次A-子模，且 $g \in G$。那么

(1) 如果满足 $K \neq M$，并且对于任意 x、$y \in h(A)$ 以及满足$0 \neq xAyL \subseteq K$ 的 M 的分次 A-子模 L，都有 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$，则称 K 为 M 的分次经典弱素 A-子模。(2) 如果满足 $K \neq M$，并且对于任意 x、$y \in h(A)$ 以及满足 $0 \neq xyz \in K$的 $z \in h(M)$，都有 $xz \in K$ 或 $yz \in K$，则称 K 为 M 的分次完全经典弱素 A-子模。(3) 如果满足 $K_g \neq M_g$，并且对于任意 x、$y \in A_e$，以及满足 $0 \neq xA_eyL \subseteq K$的 M_g 的一个 A_e-子模 L，都有 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$，则称 K 为 M 的 g-经典弱素 A-子模。

显然，若 A 是带单位元的交换分次环，则分次经典弱素子模与分次完全经典弱素子模的概念相同。事实上，下面的例子说明，对于非交换分次环，情况并非如此：

Example 2.2. 考虑 $A = M = M_2(\mathbb{Z})$（整数环上的 2×2 矩阵 $\mathbb{Z}$）和 $G = \mathbb{Z}_4$（模4整数加法群）。那么 A 是由 $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$、$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix}$ 和 $A_1 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 给出的G分次。 M 也按照 A 的相同分次成为一个 G-分次左 A-模。于是， $K = M_2(2\mathbb{Z})$ 是 M 的一个分次素 A-子模，因此 K 是 M 的一个分次经典弱素A-子模。另一方面， K 不是一个分次完全经典弱素.....

M 的素 A-子模，因为 $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in h(A)$、$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in h(A)$ 和 $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in h(M)$ 满足 $0 \neq xyz \in K$、$xz \notin K$ 和 $yz \notin K$。

显然，根据定义，对于所有 $g \in G$，零子模始终是分次经典弱素的，也是 g-经典弱素的。下面的例子表明，可以找到 $g \in G$，使得零子模不是 g-素的。

Example 2.3. 考虑 $A = M = M_2(\mathbb{Z})$ 和 $G = \mathbb{Z}_4$。则 A 是$A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$、$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & 0 \end{pmatrix}$ 和 $A_1 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$下的 G-分次模。M 在 A的相同分次下也是一个 G-分次左 A-模。取 $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A_0$。则$I = A_0xA_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ 是 A_0的一个理想。取 $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$。则$L = A_0y = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 M_2的一个 A_0-子模。考虑 M的分次 A-子模$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。此时 $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq M_2$ 和 $IL \subseteq K$，但 $L \nsubseteq K$ 且$I \nsubseteq (K :_A M)$。因此，K不是 M的一个 2-素 A-子模。

Theorem 2.4. 设 M 是一个分次 A-模，K 是 M的一个分次 A-子模，且 $g \in G$ 满足 $K_g \neq M_g$，并且 M_g 的每个 A_e-子模都是忠实的。那么，K 是 M 的一个 g-经典弱素 A-子模，当且仅当对于 A_e 的任意理想 I, J，以及满足 $0 \neq IJL \subseteq K$的 M_g 的任意 A_e-子模 L，都有 $IL \subseteq K$ 或$JL \subseteq K$。

Proof. 设 K 是 M的一个 g-经典弱素 A-子模。假设 I, J是 A_e的理想，且 L是满足 $0 \neq IJL \subseteq K$的 M_g的一个 A_e-子模。设 $IL \nsubseteq K$ 且 $JL \nsubseteq K$。那么存在 $r \in I$ 和 $s \in J$，使得$rL \nsubseteq K$ 且 $sL \nsubseteq K$，于是 $rA_esL \subseteq IJL \subseteq K$，这意味着 $rA_esL = 0$，因为 K 是 g-弱经典素的。因此，$rsL = 0$，从而 $rs = 0$。事实上，我们证明 $IJ = 0$。设 $a \in I$ 且 $b \in J$。若 $aL \nsubseteq K$ 且 $bL \nsubseteq K$，则如上所述有 $ab = 0$。若 $aL \nsubseteq K$ 且 $bL \subseteq K$，则 $(s + b)L \nsubseteq K$，于是 $a(s + b) = 0$。由于 $as = 0$，$ab = 0$。类似地，若 $aL \subseteq K$ 且 $bL \nsubseteq K$，则 $ab = 0$。若 $aL \subseteq K$ 且 $bL \subseteq K$，则 $(r+a)L \nsubseteq K$ 且 $(s+b)L \nsubseteq K$，于是 $(r+a)s = r(s+b) = (r+a)(s+b) = rs = 0$，由此可得 $ab = 0$。因此 $IJ = 0$，继而 $IJL = 0$，这就产生了矛盾。所以，$IL \subseteq K$或 $JL \subseteq K$。反过来，设 $x, y \in A_e$，且 L是满足 $0 \neq xA_eyL \subseteq K$的一个 A_e-子模 M_g。那么 $I = A_ex$ 和 $J = A_ey$ 是 A_e的理想，且满足 $0 \neq IJL \subseteq K$。根据假设，$IL \subseteq K$或 $JL \subseteq K$，从而 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$。因此，K 是 M的一个 g-经典弱素 A-子模。□

Corollary 2.5. 设 M 为一个分次 A-模，$g \in G$ 满足 M_g 的每个 A_e-子模都是忠实的，且 K 是M的一个 g-经典弱素 A-子模。假设 L 是 M_g的一个 A_e-子模，$x \in A_e$，且 I 是 A_e的一个理想。

(1) 若 $0 \neq xIL \subseteq K$，则 $xL \subseteq K$ 或 $IL \subseteq K$。 (2)

若 $0 \neq IxL \subseteq K$，则 $xL \subseteq K$ 或 $IL \subseteq K$。

THEOREM 2.6. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M 的一个 g-经典弱素 A-子模。若 L 是 M_g 的忠实 A_e-子模，且 $L \nsubseteq K_g$，则 $(K_g:_{A_e} L)$ 是 A_e 的一个弱素左理想。

PROOF. 显然，$(K_g :_{A_e} L)$ 是 A_e 的左理想，且由于 $L \nsubseteq K_g$，$(K_g :_{A_e} L)$ 是 A_e 的真理想。设 I, J 是 A_e 的两个理想，使得 $0 \neq IJ \subseteq (K_g :_{A_e} L)$。那么 $0 \neq IJL \subseteq K_g \subseteq K$，由定理 2.4 可知，$IL \subseteq K$ 或 $JL \subseteq K$。另一方面，$IL \subseteq A_eM_g \subseteq M_g$，同理，$JL \subseteq M_g$。因此，$IL \subseteq K \bigcap M_g = K_g$ 或 $JL \subseteq K \bigcap M_g = K_g$，于是 $I \subseteq (K_g :_{A_e} L)$ 或 $J \subseteq (K_g :_{A_e} L)$。因此，$(K_g :_{A_e} L)$ 是 A_e 的弱素左理想。□

同样，可以证明如下结论:

THEOREM 2.7. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M的一个 g-经典弱素A-子模。若 L 是 M_g 的一个忠实 A_e-子模，且满足 $L \nsubseteq K$，则 $(K :_{A_e} L)$ 是 A_e的一个弱素左理想。

THEOREM 2.8. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M的一个 g-经典弱素A-子模。若 $Ann_{A_e}(M_g)$ 是 A_e的一个弱素理想，则 $(K_g:_{A_e} M_g)$ 是 A_e的一个弱素左理想。

PROOF. 由于 K 是 M的一个 g-经典弱素 A-子模，故 $K_g \neq M_g$，从而 $(K_g :_{A_e} M_g)$ 是 A_e 的一个真左理想。设 I、J 是 A_e 的两个理想，使得 $0 \neq IJ \subseteq (K_g:_{A_e} M_g)$。于是 $IJM_g \subseteq K_g$。若 $IJM_g \neq 0$，则 $0 \neq IJM_g \subseteq K_g \subseteq K$，根据定理 2.4，可得 $IM_g \subseteq K$ 或 $JM_g \subseteq K$。另一方面，$IM_g \subseteq A_eM_g \subseteq M_g$，类似地，$JM_g \subseteq M_g$。因此，$IM_g \subseteq K \bigcap M_g = K_g$或$JM_g \subseteq K \bigcap M_g = K_g$，从而 $I \subseteq (K_g:_{A_e} M_g)$ 或 $J \subseteq (K_g:_{A_e} M_g)$。若$IJM_g = 0$，则 $0 \neq IJ \subseteq Ann_{A_e}(M_g)$，于是 $I \subseteq Ann_{A_e}(M_g) \subseteq (K_g:_{A_e} M_g)$ 或 $J \subseteq Ann_{A_e}(M_g) \subseteq (K_g :_{A_e} M_g)$。因此，$(K_g :_{A_e} M_g)$ 是 A_e的一个弱素左理想。□

设 M、S 是两个 G-分次 A-模。若一个 A-同态 $f: M \to S$ 满足对所有 $g \in G$ [14] 均有 $f(M_g) \subseteq S_g$，则称其为分次 A-同态。

THEOREM 2.9. 设 M、S 是两个 G-分次 A-模，且 $f: M \to S$ 是一个分次 A-同态。

(1) 若 f 是单射，且 K 是 S 的一个分次经典弱素 A-子模，并且 $f^{-1}(K) \neq M$，则 $f^{-1}(K)$ 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。(2) 若 f 是满射，且 K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模，并且 $Ker(f) \subseteq K$，则 $f(K)$ 是 S 的一个分次经典弱素 A-子模。

PROOF. (1) 根据（[15], 引理 3.11 (1)），$f^{-1}(K)$ 是 M 的一个分次 A-子模。设 x、$y \in h(A)$，且 L 是 M 的一个分次 A-子模，使得 $0 \neq xAyL \subseteq f^{-1}(K)$。根据（[15], 引理 3.11 (2)），$f(L)$ 是 S 的一个分次 A-子模，且满足 $0 \neq xAyf(L) = f(xAyL) \subseteq K$；于是，要么 $f(xL) = xf(L) \subseteq K$，要么 $f(yL) = yf(L) \subseteq K$，这意味着要么 $xL \subseteq f^{-1}(K)$，要么 $yL \subseteq f^{-1}(K)$。因此，$f^{-1}(K)$ 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。

(2) 根据（[15], 引理 3.11 (2)），$f(K)$ 是 S 的一个分次 A-子模。设 $x, y \in h(A)$，且 L 是 S 的一个分次 A-子模，使得 $0 \neq xAyL \subseteq f(K)$。那么根据（[15], 引理 3.11 (1)），$T = f^{-1}(L)$ 是 M 的一个分次 A-子模

使得 $f(xAyT) = xAyf(T) = xAyL \subseteq f(K)$，于是 $0 \neq xAyT \subseteq K$ 因为 $Ker(f) \subseteq K$。因此，或者 $xT \subseteq K$，或者 $yT \subseteq K$，于是要么 $xL = xf(T) = f(xT) \subseteq f(K)$，要么 $yL = yf(T) = f(yT) \subseteq f(K)$。因此，$f(K)$ 是 S 的一个分次经典弱素 A-子模。

□

设 M 是一个 G 分次 A-模，且 T 是 M的一个分次 A-子模。则根据 $(M/T)_g = (M_g + T)/T$，M/T是一个 G 分次 A-模，对所有 $g \in G$均成立。根据（[18],引理 3.2），若 K 是 M 的一个 A-子模，且满足 $T \subseteq K$，则 K 是 M 的一个分次 A-子模，当且仅当 K/T 是 M/T 的一个分次 A-子模。

THEOREM 2.10. 设 M 是一个分次 A-模，且 T、K 是 M 的真分次 A-子模，并满足 $T \subsetneq K$。若 K 是 M的一个分次经典弱素 A-子模，则 K/T是 M/T的一个分次经典弱素 A-子模。

PROOF. 设 x、$y \in h(A)$ 和 L/T 是 M/T 的一个分次 A-子模，使得 $(0 + T)/T \neq (xAyL + T)/T = xAy((L + T)/T) \subseteq K/T$。则 L 是 M 的一个分次 A-子模，满足 $0 \neq xAyL \subseteq K$，于是 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$成立，这意味着 $x((L + T)/T) = (xL + T)/T \subseteq (K + T)/T \subseteq K/T$或$y((L+T)/T) = (yL+T)/T \subseteq (K+T)/T \subseteq K/T$成立。因此，$K/T$是 M/T的一个分次经典弱素 A-子模。□

THEOREM 2.11. 设 M 是一个分次 A-模，且 T、K 是 M 的真分次 A-子模，并且 $T \subsetneq K$。若 T 是 M 的分次经典弱素 A-子模，且 K/T 是 M/T 的分次经典弱素 A-子模，则 K 是 M 的分次经典弱素 A-子模。

PROOF. 设 x、$y \in h(A)$ 和 L 是 M 的分次 A-子模，满足 $xAyL \subseteq K$。若 $xAyL \subseteq T$，则按要求有 $xL \subseteq T \subsetneq K$ 或 $yL \subseteq T \subsetneq K$。假设 $xAyL \nsubseteq T$。则 $(0 + T)/T \neq xAy((L + T)/T) = (xAyL + T)/T \subseteq (K + T)/T \subseteq K/T$，于是 $(xL + T)/T = x((L + T)/T) \subseteq K/T$ 或 $(yL + T)/T = y((L + T)/T) \subseteq K/T$，这意味着 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$。因此，K 是 M 的分次经典弱素 A-子模。□

非交换分次环上的分次弱二吸收理想已在 [4] 中引入并加以研究。若 P 是 A 的真分次理想，并且对于满足 $0 \neq xAyAz \subseteq P$ 的任意 x、y、$z \in h(A)$，都有 $xy \in P$ 或 $yz \in P$ 或 $xz \in P$，则称 P 是 A 的分次弱二吸收理想。本文引入并研究非交换分次环上的分次弱二吸收子模，定义如下:

DEFINITION 2.12. 设 M 为一个分次 A-模，且 K 为 M 的一个真分次 A-子模。那么

(1) 如果对于任意 x、$y \in h(A)$ 以及 M 的任意分次 A-子模 L，只要 $0 \neq xAyL \subseteq K$，就有 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$ 或 $xAy \subseteq (K :_A M)$，则称 K 是 M 的分次弱 2-吸收子模。(2) 如果对于任意 x、$y \in h(A)$ 以及 $z \in h(M)$，只要 $0 \neq xyz \in K$，就有 $xz \in K$ 或 $yz \in K$ 或 $xy \in (K :_A M)$，则称 K 是 M 的分次完全弱 2-吸收子模。

显然，每个分次经典弱素子模都是分次弱 2-吸收子模，每个分次完全经典弱素子模都是分次完全弱 2-吸收子模。此外，如果 A 是带单位元的交换分次环，

那么分次弱 2-吸收子模与分次完全弱 2-吸收子模的概念是一致的。事实上，对于非交换分次环，情况并非如此；如例2.2所示， K 是 M 的一个分次弱 2-吸收 A-子模，因为它是分次素的；但 K 不是 M 的分次完全弱 2-吸收 A-子模，因为 $0 \neq xyz \in K$、 $xz \notin K$、$yz \notin K$ 和 $xy \nsubseteq$ （$K:_{A} M$）。

Proposition 2.13. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M 的真分次A-子模。若 K 是 M 的分次弱 2-吸收 A-子模，且 $(K:_A M)$ 是 A 的分次弱素理想，则 K 是 M 的分次经典弱素 A-子模。

Proof. 设 x、 $y \in h(A)$ 和 L 是 M 的一个分次 A-子模，满足 $0 \neq xAyL \subseteq K$。由于 K 是 M 的分次弱 2-吸收 A-子模，因此 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$ 或 $xAy \subseteq (K:_{A} M)$。若 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$，则结论成立。假设 $xAy \subseteq (K:_{A} M)$。由于 $0 \neq xAy$，且 $(K:_A M)$ 是 A 的分次弱素理想，因此 $x \in (K:_{A} M)$ 或 $y \in (K:_A M)$，进而 $xL \subseteq xM \subseteq K$ 或 $yL \subseteq yM \subseteq K$。因此， K 是 M 的分次经典弱素A-子模。□

Definition 2.14. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M 的一个真分次 A-子模。若对于任意 x、 $y \in h$（A）以及满足 $xAyL \subseteq K$ 的 M 的分次 A-子模 L，都有 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$，则称 K 是 M 的一个分次经典素 A-子模。

显然，每个分次经典素子模都是分次经典弱素子模。然而，下面的例子表明，分次经典弱素子模不一定是分次经典素子模:

Example 2.15. 考虑 $A = M = M_2(\mathbb{Z}_8)$和 $G = \mathbb{Z}_4$。 M 在 A的相同分次下也是一个 G-分次左 A-模。因此，根据 $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_8 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_8 \end{pmatrix}$、 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_8 \\ \mathbb{Z}_8 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $A_1 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$， A 是 G-分次的。现在， $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 M的一个分次经典弱素 A-子模，但 K 不是 M 的分次经典素 A-子模，因为 $x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in h(A)$，且 $L = Ax$ 是 M 的一个分次A-子模，其中 $xAxL \subseteq K$ 和 $xL \nsubseteq K$。

Proposition 2.16. 设 M 为一个分次 A-模。如果 K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模，但不是分次经典素子模，则存在 x、 $y \in h$（A）以及 M 的一个分次 A-子模 L，使得 $xAyL = 0$、 $xL \nsubseteq K$和 $yL \nsubseteq K$。

Proof. 由于 K 不是 M的分次经典素 A-子模，因此存在x、 $y \in h$（A）以及 M 的一个分次 A-子模 L，使得 $xAyL \subseteq K$、 $xL \nsubseteq K$ 和$yL \nsubseteq K$。若 $xAyL \neq 0$，则由于 K 是 M的一个分次经典弱素 A-子模，因此 $xL \nsubseteq K$ 或 $yL \nsubseteq K$，这与假设矛盾。因此， $xAyL = 0$。□

Definition 2.17. 设 M 是一个分次 A-模， K 是 M的真分次 A-子模， L 是 M的分次 A-子模，且 x、 $y \in h(A)$。若 $xAyL = 0$、 $xL \nsubseteq K$ 且 $yL \nsubseteq K$，则称(x, y, L)是 K 的分次经典三元零点。

Remark 2.18. 如果 K 是 M 的分次经典弱素 A-子模，但不是分次经典素子模，那么根据命题 2.16，存在一个分次经典

K 的三元零点。注意，在例 2.15 中，(x, x, L) 是 K 的一个分次经典三元零点。

PROPOSITION 2.19. 设 M 是一个分次 A-模，K 是 M 的一个分次经典弱素 A- 子模，并且对于某些 x、$y \in h(A)$ 以及 M 的某个分次 A- 子模 L，有 $xAyL \subseteq K$。如果 (x, y, L) 不是 K的分次经典三元零点，则 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$。

PROOF. 如果 $xAyL = 0$，那么由于 (x, y, L) 不是 K的分次经典三元零点，因此 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$。如果 $xAyL \neq 0$，那么由于 K 是 M的一个分次经典弱素 A-子模，因此 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$。□

COROLLARY 2.20. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M的一个分次经典弱素 A-子模。如果对于所有 x、$y \in h(A)$ 以及 M的所有分次 A-子模 L，(x, y, L) 都不是 K的分次经典三元零点，则 K 是 M的一个分次经典素 A-子模。

PROPOSITION 2.21. 设 M 是一个分次 A-模，K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模，且 $IJL \subseteq K$；对于 A 的某些分次理想 I、J，以及 M 的某个分次 A-子模 L。若对于所有 $x \in I \bigcap h(A)$ 和 $y \in J \bigcap h(A)$，(x, y, L) 都不是 K 的分次经典三元零点，则对于所有 $x \in I$、$y \in J$ 和 $g \in G$，有 $x_g L \subseteq K$ 或 $y_g L \subseteq K$。

PROOF. 设 $x \in I$、$y \in J$ 和 $g \in G$。由于 I 和 J 是分次理想，因此 $x_g \in I$ 且 $y_g \in J$，进而 $x_g A y_g L \subseteq IJL \subseteq K$。若 $x_g A y_g L \neq 0$，则由于 K 是 M 的分次经典弱素 A-子模，故 $x_g L \subseteq K$ 或 $y_g L \subseteq K$。若 $x_g A y_g L = 0$，则由于 (x_g, y_g, L) 不是 K 的分次经典三元零点，故 $x_g L \subseteq K$ 或 $y_g L \subseteq K$。□

COROLLARY 2.22. 令 M 为分次 A-模，K 为 M的分次经典弱素 A-子模，且 $IJL \subseteq K$，其中 I、J是 A 的某些分次理想，L 是 M的某个分次 A-子模。若对于所有 $x \in I \bigcap h(A)$ 和 $y \in J \bigcap h(A)$，(x, y, L) 不是 K的分次经典三元零点，则对于所有 $g \in G$，有 $I_g L \subseteq K$ 或$J_g L \subseteq K$。

THEOREM 2.23. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。设 L 是 M 的一个分次 A-子模，并且 $x, y \in h(A)$。若 (x, y, L) 是 K 的一个分次经典三元零点，则以下结论成立：

(1) $xAyK = 0$。(2) 如果对于某个 $g \in G$，有 $y \in A_g$，则 $x(K :_{A_g} M)L = 0$。(3) 如果对于某个 $g \in G$，有 $x \in A_g$，则 $(K :_{A_g} M) yL = 0$。(4) 如果对于某个 $g \in G$，有 $x, y \in A_g$，则 $(K :_{A_g} M)^2 L = 0$。(5) 如果对于某个 $g \in G$，有 $y \in A_g$，则 $x(K :_{A_g} M)K = 0$。(6) 如果对于某个 $g \in G$，有 $x \in A_g$，则 $(K :_{A_g} M)yK = 0$。(7) 如果对于某个 $g \in G$，有 $x, y \in A_g$，则 $(K :_{A_g} M)^2 K = 0$。

PROOF. (1) 假设 $xAyK \neq 0$。那么存在 $z \in K$ 使得$xAyz \neq 0$，进而存在 $g \in G$ 使得 $xAyz_g \neq 0$，因此$xAyAz_g \neq 0$。注意，由于 K 是一个分次 A-子模，故 $z_g \in K$。令$T = L + Az_g$。那么 T 是 M 的一个分次 A-子模，且满足 $0 \neq xAyT \subseteq K$，于是 $xT \subseteq K$ 或 $yT \subseteq K$，这意味着 $xL \subseteq xT \subseteq K$ 或 $yL \subseteq yT \subseteq K$，矛盾。因此 $xAyK = 0$。

(2) 假设 $x(K:_{A_g} M)L \neq 0$。那么存在 $s \in (K:_{A_g} M)$ 使得 $xsL \neq 0$，进而得到 $xAsL \neq 0$，因此 $0 \neq xA(y+s)L \subseteq K$。所以，要么 $xL \subseteq K$，要么 $(y+s)L \subseteq K$，进而要么 $xL \subseteq K$，要么 $yL \subseteq K$，这与假设矛盾。因此，$x(K:_{A_g} M)L = 0$。(3) 与 (2) 类似。(4) 假设 $(K:_{A_g} M)^2 L \neq 0$。那么存在 r、$s \in (K:_{A_g} M)$，使得 $rsL \neq 0$，进而得到 $rAsL \neq 0$，因此由 (2) 和 (3) 可得，$0 \neq (x+r)A(y+s)L \subseteq K$。所以，要么 $(x+r)L \subseteq K$，要么 $(y+s)L \subseteq K$，进而要么 $xL \subseteq K$，要么 $yL \subseteq K$，这与假设矛盾。因此，$(K:_{A_g} M)^2 L = 0$。(5) 假设 $x(K:_{A_g} M)K \neq 0$。那么存在 $s \in (K:_{A_g} M)$，使得 $xsK \neq 0$，进而得到 $xAsK \neq 0$，因此由 (1) 可得，$xA(y+s)K \neq 0$，这意味着对于某个 $z \in K$，有 $xA(y+s)z \neq 0$，因此存在$h \in G$ 使得 $xA(y+s)z_h \neq 0$。注意，由于 K 是一个分次 A-子模，因此 $z_h \in K$。令 $T = L + Az_h$。那么 T 是 M 的一个分次 A-子模，使得 $0 \neq xA(y+s)T \subseteq K$，进而要么 $xT \subseteq K$，要么 $(y+s)T \subseteq K$，因此要么 $xT \subseteq K$，要么 $yT \subseteq K$，这意味着要么 $xL \subseteq xT \subseteq K$，要么 $yL \subseteq yT \subseteq K$，这与假设矛盾。因此，$x(K:_{A_g} M)K = 0$。(6) 与 (5) 类似。(7) 假设 $(K:_{A_g} M)^2 K \neq 0$。那么存在 r、$s \in (K:_{A_g} M)$ 和$z \in K$，使得 $rsz \neq 0$，进而存在 $h \in G$ 使得 $rsz_h \neq 0$。注意，由于 K 是一个分次 A-子模，因此 $z_h \in K$。令 $T = L + Az_h$。那么T 是 M 的一个分次 A-子模，由 (2) 和 (3) 可得 $0 \neq (x+r)A(y+s)T \subseteq K$，进而要么 $(x+r)T \subseteq K$，要么 $(y+s)T \subseteq K$，因此要么 $xT \subseteq K$，要么 $yT \subseteq K$，这意味着要么 $xL \subseteq xT \subseteq K$，要么 $yL \subseteq yT \subseteq K$，这与假设矛盾。因此，$(K:_{A_g} M)^2 K = 0$。

□

PROPOSITION 2.24. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。若存在 K 的一个分次经典三元零点（x, y, L），满足 $x, y \in A_e$，则 $(K:_{A_e} M)^3 \subseteq Ann_{A_e}(M)$。

PROOF. 由定理 2.23 (7)，$(K:_{A_e} M)^2 K = 0$。因此，$(K:_{A_e} M)^3 = (K:_{A_e} M)^2 (K:_{A_e} M) \subseteq ((K:_{A_e} M)^2 K:_{A_e} M) = (0:_{A_e} M) = Ann_{A_e}(M)$。□

由命题 2.24 可得：

COROLLARY 2.25. 设 M 是一个忠实分次 A-模，且 K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。若存在 K 的一个分次经典三元零点（x, y, L），满足 $x, y \in A_e$，则 $(K:_{A_e} M)^3 = 0$。

此外，作为定理 2.23 (7) 的推论，我们有如下结论：

COROLLARY 2.26. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M的一个忠实分次经典弱素 A-子模。若存在 K的一个分次经典三元零点（x, y, L），满足 $x, y \in A_g$，其中某个 $g \in G$，则 $(K:_{A_g} M)^2 = 0$。

此外，作为定理 2.23 (4) 的推论，我们有如下结论：

COROLLARY 2.27. 设 M 是一个分次 A-模，且 K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。若存在 K 的一个分次经典三元零点 (x, y, L)，满足 $x, y \in A_g$，其中 $g \in G$，且 L 是忠实的，则 $(K:_{A_g} M)^2 = 0$。

设 M 和 S 是两个 G-分次 A-模。则对所有 $g \in G$ [14]，由 $(M \times S)_g = M_g \times S_g$ 可知 $M \times S$ 是一个 G-分次 A-模。此外， $N = K \times T$ 是 $M \times S$ 的分次A-子模，当且仅当 K 是 M 的分次 A-子模，且 T 是 S 的分次 A-子模（[18], 引理 3.10 和引理 3.12）。

THEOREM 2.28. 设 M和 S是两个 G分次 A模。若 $K \times S$是 $M \times S$的一个分次经典弱素 A子模，则 K 是 M的一个分次经典弱素 A子模。

PROOF. 设 $x, y \in h(A)$ 和 L 是 M 的一个分次 A子模，且满足 $0 \neq xAyL \subseteq K$。那么 $L \times \{0\}$ 是 $M \times S$ 的一个分次 A子模，满足 $(0, 0) \neq xAy(L \times \{0\}) \subseteq K \times S$，进而要么 $x(L \times \{0\}) \subseteq K \times S$，要么 $y(L \times \{0\}) \subseteq K \times S$，因此要么 $xL \subseteq K$，要么 $yL \subseteq K$。由此， K 是 M的一个分次经典弱素A子模。□

THEOREM 2.29. 设 M和 S是两个 G-分次 A-模，且 $K \times S$是 $M \times S$的一个分次经典弱素 A-子模。若 (x, y, L) 是 K的一个分次经典三元零点，则 $xAy \subseteq Ann_A(S)$。

PROOF.假设 $xAy \nsubseteq Ann_A(S)$。则存在 $s \in S$ 使得$xAys \neq 0$，进而存在 $g \in G$ 使得 $xAys_g \neq 0$。现在， $L \times As_g$ 是 $M \times S$的一个分次 A-子模，并且 $(0, 0) \neq xAy(L \times As_g) \subseteq K \times S$，因此 $x(L \times As_g) \subseteq K \times S$或 $y(L \times As_g) \subseteq K \times S$，从而 $xL \subseteq K$或 $yL \subseteq K$，这就产生了矛盾。因此 $xAy \subseteq Ann_A(S)$。□

我们以介绍一个关于分次乘法模上的分次弱素子模的优美结果来结束本节（定理 2.31）。若对于每个分次 A-子模K of M，都有 $K = IM$，其中 I是 A 的某个分次 deal，则称分次A-模 M 为分次乘法模。在这种情况下，已知$I = (K :_A M)$。Escoriza 和 Torrecillas 首先在 [7], 中引入并研究了分次乘法模，之后也有多位作者得到了进一步结果，例如参见 [6, 12]。

LEMMA 2.30. 设 M 是一个分次 A-模。那么 M 的每个分次极大 A-子模都是分次素的。

PROOF. 设 K 是 M的一个分次极大 A-子模。假设 $IL \subseteq K$，其中 I 是 A 的某个分次理想，且 L 是 M的某个分次 A-子模。设$L \nsubseteq K$。由于 K 是 M的一个分次极大 A-子模，故 $L + K = M$，从而$IM = IL + IK \subseteq K$，这意味着 $I \subseteq (K :_A M)$。因此， K 是 M的一个分次素 A-子模。□

THEOREM 2.31. 设 M 是一个分次乘法 A-模。如果 M 的每个真分次 A-子模都是分次弱素的，那么 M 至多有两个分次极大 A-子模。

PROOF. 设 X、 Y 和 Z 是 A 的三个不同的分次极大子模。由于 M 是分次乘法的，故 $X = IM$，其中 I 是 A 的某个分次理想。若 $IY = 0$，则 $IY \subseteq Z$；又由于根据引理 2.30， Z 是分次素的，因此 $Y \subseteq Z$ 或 $X = IM \subseteq Z$，这产生矛盾。因此， $IY \neq 0$。现在， $IY \subseteq Y$ 且 $IY \subseteq IM = X$，所以 $0 \neq IY \subseteq X \bigcap Y$；又由于根据假设， $X \bigcap Y$ 是分次弱素的，因此 $Y \subseteq X \bigcap Y$ 或 $X = IM \subseteq X \bigcap Y$，这意味着 $Y \subseteq X$ 或 $X \subseteq Y$，矛盾。因此， M 至多有两个分次极大 A-子模。□

Corollary 2.32. 设 M 是一个分次乘法 A-模，且 M 的每个真分次 A-子模都是分次弱素的。若 $X = IM$ 和 $Y = JM$ 是 M 的两个不同的分次 A-子模，其中 I、J 是 A 的分次理想，则 X 和 Y 按包含关系可比较，或 $IY = JX = 0$。特别地，若 X 和 Y 是 M 的两个不同的分次极大 A-子模，则 $IY = JX = 0$。

3. Duo 分次环上的分次经典弱素子模

本节研究 Duo 分次环上的分次经典弱素子模。若环 A 的每个左理想都是双边理想 [9, 13]，则称其为左 Duo 环。显然，若 A 是左 Duo 环，则对所有 $x \in A$，都有 $xA \subseteq Ax$。

Theorem 3.1. 设 A 为左 Duo 环，M 为分次 A-模，且 K 为 M 的分次经典弱素 A-子模。若 x、$y \in h(A)$ 以及 $m \in h(M)$ 满足 $0 \neq xym \in K$，则 $xm \in K$ 或 $ym \in K$。

Proof. 由于 A 是左 Duo 环，$Axy = AxAyA$，于是 Am 是 M 的分次 A-子模，且 $0 \neq xAyAm \subseteq K$，因此 $xAm \subseteq K$ 或 $yAm \subseteq K$，这意味着 $xm \in K$ 或 $ym \in K$。□

定理 3.1 指出，在左 Duo 环上的分次模中，每个分次经典弱素子模都是分次完全经典弱素。由定理 3.1 可得以下结论：

Corollary 3.2. 设 A 是左 Duo 环，M 是分次 A-模，K 是 M的分次经典弱素 A-子模。若 $x, y \in h(A)$ 且 $m \in h(M)$，满足 $xym \in K$，并且 (x, y, Am) 不是 K的分次经典三元零点，则 $xm \in K$ 或 $ym \in K$。

设 M 是一个 A-模，K 是 M的一个 A-子模。若对于 M的某些 A-子模 K_j，只要 $K \subseteq \bigcup K_j$，就有 $_{j=1}K \subseteq K_j$，其中某个 $1 \leq j \leq n$成立，则称 K 为一个$_n$ u-子模。若 M 的每个 A-子模都是 [16] u-子模，则称 M 为一个 u-模。设 M 是一个 A-模，K 是 M 的一个 A-子模，且 $r \in A$。则 $(K :_M r) = \{m \in M : rm \in K\}$ 是包含 K的 M的一个 A-子模。

Theorem 3.3. 设 M 是一个分次 A-模，其中 A_e 是左 Duo 环，且对于某个 $g \in G$，M_g 是 A_e 上的 u-模。假设 K 是 M 的一个分次 A-子模，且 $K_g \neq M_g$。考虑以下陈述：

(1) K 是 M的 g-经典弱素 A-子模。(2) 如果 x、$y \in A_e$ 和 $m \in M_g$ 满足 $0 \neq xym \in K$，那么 $xm \in K$ 或$ym \in K$。(3) 对所有 x、$y \in A_e$，$(K :_{M_g} xy) = (0 :_{M_g} xy)$，或$(K :_{M_g} xy) = (K :_{M_g} x)$，或$(K :_{M_g} xy) = (K :_{M_g} y)$。(4) 如果 x、$y \in A_e$ 且 L 是 M_g 的一个 A_e-子模，并满足 $0 \neq xyL \subseteq K$，那么 $xL \subseteq K$ 或 $yL \subseteq K$。(5) 如果 $x \in A_e$ 且 L 是 M_g 的一个 A_e-子模，并满足 $xL \nsubseteq K$，那么$(K :_{A_e} xL) = (0 :_{A_e} xL)$，或$(K :_{A_e} xL) =(K :_{A_e} L)$。(6) 如果 $x \in A_e$、I 是 A_e 的理想，且 L 是 M_g 的一个 A_e-子模，并满足 $0 \neq IxL \subseteq K$，那么 $IL \subseteq K$ 或 $xL \subseteq K$。

(7) 如果 I 是 A_e 的理想，且 L 是 M_g 的一个 A_e-子模，并满足 $IL \nsubseteq K$，那么($K :_{A_e} IL) = (0 :_{A_e} IL)$，或$(K :_{A_e} IL) = (K :_{A_e} L)$。于是(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (6) ⇒ (7)。

Proof. (1) ⇒ (2)：与定理 3.1 的证明类似。

(2) ⇒ (3)：设 x、$y \in A_e$ 和 $m \in (K :_{M_g} xy)$。则 $xym \in K$。若 $xym = 0$，则 $m \in (0 :_{M_g} xy)$。若 $xym \neq 0$，则由 (2)，$xm \in K$ 或 $ym \in K$，因此 $m \in (K :_{M_g} x)$ 或 $m \in (K :_{M_g} y)$。于是，$(K :_{M_g} xy) \subseteq (0 :_{M_g} xy) \bigcup (K :_{M_g} x) \bigcup (K :_{M_g} y)$，进而 $(K :_{M_g} xy) \subseteq (0 :_{M_g} xy)$ 或 $(K :_{M_g} xy) \subseteq (K :_{M_g} x)$ 或 $(K :_{M_g} xy) \subseteq (K :_{M_g} y)$，因为 M_g 是 A_e上的一个 u-模，因此结论成立，因为 A_e 是左 Duo 环。

(3) ⇒ (4)：显然，$L \subseteq (K :_{M_g} xy)$以及 $K \nsubseteq (0 :_{M_g} xy)$，因此根据(3)，或者$L \subseteq (K :_{M_g} x)$，或者 $L \subseteq (K :_{M_g} y)$，于是或者 $xL \subseteq K$，或者 $yL \subseteq K$。

(4) ⇒ (5)：设 $r \in (K :_{A_e} xL)$。则 $rxL \subseteq K$。如果 $rxL = 0$，则 $r \in (0 :_{A_e} xL)$。如果 $rxL \neq 0$，则根据 (4)，$rL \subseteq K$。因此，$(K :_{A_e} xL) \subseteq (0 :_{A_e} xL) \bigcup (K :_{A_e} L)$。由于 A_e 是左 Duo 环，故结论成立。

(5) ⇒ (6)：显然，$I \subseteq (K :_{A_e} xL)$以及 $I \nsubseteq (0 :_{A_e} xL)$，因此根据(5)，或者 $xL \subseteq K$，或者 $I \subseteq (K :_{A_e} L)$，于是或者 $xL \subseteq K$，或者 $IL \subseteq K$。

(6) ⇒ (7)：设 $x \in (K :_{A_e} IL)$。则 $xIL \subseteq K$。若 $xIL = 0$，则 $x \in (0 :_{A_e} IL)$。若 $xIL \neq 0$，由于 A_e 是左 Duo 环，故 $0 \neq IxL \subseteq K$，于是由 (6) 得 $xL \subseteq K$，从而 $x \in (K :_{A_e} L)$。因此 $(K :_{A_e} IL) \subseteq (0 :_{A_e} IL) \bigcup (K :_{A_e} L)$。所以，由于 A_e 是左 Duo 环，结论成立。□

设 A 是左 Duo 环。若 A 是分次环，则显然，$Grad_A(I) = \{x \in A : \forall g \in G, \exists n_g \in \mathbb{N}$ 使得 $x_g^{n_g} \in I\}$ 是 A 的一个包含 I 的分次理想。显然，若 $x \in h(A)$，则 $x \in Grad_A(I)$ 当且仅当存在某个 $n \in \mathbb{N}$使得 $x^n \in I$。

Proposition 3.4. 设 M 是一个分次 A-模，且 A_e 是左 Duo 环，K 是 M 的一个分次经典弱素 A-子模。若存在 K 的一个分次经典三元零点 (x, y, L)，满足 $x, y \in A_e$，则 $Grad_{A_e}(Ann_{A_e}(M)) = Grad_{A_e}((K :_{A_e} M))$。

Proof. 由命题 2.24，$(K :_{A_e} M) \subseteq Grad_{A_e}(Ann_{A_e}(M))$，进而$Grad_{A_e}((K :_{A_e} M)) \subseteq Grad_{A_e}(Grad_{A_e}(Ann_{A_e}(M))) = Grad_{A_e}(Ann_{A_e}(M))$。另一方面，由于 $Ann_{A_e}(M) \subseteq (K :_{A_e} M)$，$Grad_{A_e}(Ann_{A_e}(M)) \subseteq Grad_{A_e}((K :_{A_e} M))$。因此，$Grad_{A_e}(Ann_{A_e}(M)) = Grad_{A_e}((K :_{A_e} M))$。□

参考文献

[1] R. Abu-Dawwas 和 K. Al-Zoubi，关于分次弱经典素子模，伊朗数学科学与信息学杂志，12 (1) (2017)，153-161。[2]R. Abu-Dawwas、M. Bataineh 和 M. Al-Muanger，非交换环上的分次素子模，越南数学杂志，46 (3) (2018)，681-692。[3] A. S. Alshehry 和 R. Abu-Dawwas，非交换环的分次弱素理想，代数通讯，49 (11) (2021)，4712-4723。[4]A. S. Alshehry、J. M. Habeb、R. Abu-Dawwas 和 A. Alrawabdeh，非交换分次环上的分次弱 2-吸收理想，Symmetry，14 (7) (2022)，1472；https://doi.org/10.3390/sym14071472。[5] S. E. Atani，关于分次弱素理想，土耳其数学杂志，30 (2006)，351-358。[6] M. Bataineh、R. Abu-Dawwas 和 J. Shtayat，几乎分次乘法模与几乎分次余乘法模，Demonstratio Mathematica，53 (2020)，325-331。[7] J. Escoriza 和 B. Torrecillas，交换 Grothendieck 范畴中的乘法对象，代数通讯，26 (1998)，1867-1883。

[8] F. Farzalipour, P. Ghiasvand，关于分次素子模的并，泰国数学杂志，9 (1) (2011)，49-55.
[9] J. M. Habeb，关于零交换环与二元环的一则注记，冈山大学数学杂志，32，(1990)，73–76.
[10] R. Hazrat，分次环与分次格罗滕迪克群，剑桥大学出版社，2016.[11] M. Jamali 和 R. J. Nezhad，关于经典弱素子模，大学学报：数学与信息学系列，37 (1) (2022)，17-30.[12] K. Khaksari 和 F. R. Jahromi，乘法分次模，国际代数学杂志，7 (1) (2013)，17-24.[13] G. Marks，二元环与 Ore 扩张，代数杂志，280 (2004)，463-471.[14] C. Nastasescu 和 F. Oystaeyen，分次环的方法，数学讲义，1836，施普林格出版社，柏林，2004.[15] M. Refai 和 R. Abu-Dawwas，关于分次二次子模的推广，Proyecciones 数学杂志，39 (6) (2020)，1537-1554.[16] P. Quartararo 和 H. S. Butts，理想与模的有限并，美国数学会会刊，52 (1975)，91-96.[17] M. Refai、M. Hailat 和 S. Obiedat，分次根与分次素谱，远东数学科学杂志，(2000)，59-73.[18] H. Saber、T. Alraqad 和 R. Abu-Dawwas，关于分次 s-素子模，AIMS 数学，6 (3) (2020)，2510-2524.

Department of Mathematics, Yarmouk University, Irbid, Jordan电子邮箱地址：jhabeb@yu.edu.jo

Department of Mathematics, Yarmouk University, Irbid, Jordan电子邮箱地址：rrashid@yu.edu.jo