arXiv:2305.05409v1 [math.CV] 9 May 2023

位于某些 Levi 平坦超曲面中的紧集的多项式凸性 $\mathbb{C}^2$

SUSHIL GORAI 和 GOLAM MOSTAFA MONDAL

Abstract. 本文首先证明，位于某些 Levi 平坦超曲面中的全实圆盘是多项式凸的。作为应用，我们证明，位于某些多项式多面体边界上的全实圆盘是多项式凸的。我们还给出了位于 Hartog 三角形边界上的全实圆盘具有多项式凸性的充要条件。此外，我们还为位于这些超曲面上的一般紧子集具有多项式凸性提供了充分条件。

1. Introduction

设 K 是复欧几里得空间 $\mathbb{C}^n$. 的一个紧子集。设 $\mathcal{C}(K)$ 是定义在 K 上的连续复值函数空间， $\mathcal{P}(K)$ 是定义在 K 上的多项式的一致极限所构成的空间。紧集 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ 的多项式凸包记为 K，并定义为 $K := \{z \in \mathbb{C}^n : |p(z)| \leq \sup_K |p|, \forall p \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]\}$. K。若 $K = K$，则称其为多项式凸的。若一个紧集 $K \subset \mathbb{C}^n$ 满足 $K = \{z \in \mathbb{C}^n : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in Rat(K)\}$，则称其为有理凸集，其中 $Rat(K)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上所有极点位于 K 外部的有理函数的集合。

一致代数理论中的一个基本问题是刻画满足以下条件的 $\mathbb{C}^n$ 中的紧子集 K

$$\mathcal{P}(K) = \mathcal{C}(K). \tag{1.1}$$

注意， $\mathcal{P}(K)$ 和 $\mathcal{C}(K)$ 都是交换巴拿赫代数；若 $\mathcal{P}(K) = \mathcal{C}(K)$，则它们的极大理想空间也相同。根据一致代数理论，我们知道， $\mathcal{C}(K)$ 的极大理想空间可与 $K\hat{}$ 视为同一，而 $\mathcal{P}(K)$ 的极大理想空间可与 $K.$ 视为同一。由上述讨论可知，多项式凸性自然地出现在一致逼近的研究中。 $\widehat{\quad}$Lavrentiev [10] 证明，对于 $K \subset \mathbb{C}$， $\mathcal{P}(K) = \mathcal{C}(K)$ 当且仅当 $K = K$ 且$int(K) = \emptyset$. 在更高维的情形下，尚无此类刻画；通常很难判断 $\mathbb{C}^n$ 中哪些紧集满足（1.1）。因此，自然会考虑特定类别紧集上的这一问题。本文研究 $\mathbb{C}^2$ 的全实子流形中的紧子集。

回顾一下，若 C^1-光滑子流形 M of $\mathbb{C}^n$ 在 $p \in M$ 处满足 $T_pM \cap iT_pM = \{0\}$，则称其在该点是全实的；其中，切空间 T_pM 被视为 $\mathbb{C}^n$. 的实线性子空间。若流形 M 在

日期：2023年5月10日。2010年数学主题分类：主要分类：32E20。关键词和短语：多项式凸性；全实圆盘，拟次调和函数。1

M 的所有点处都是全实的，则称其为全实流形。全实子流形之所以重要，是因为以下原因。

(i) 此类流形局部多项式凸（见 [11]）。(ii) 设 K 是全实流形 M. 的一个紧子集。那么，在 K 上的任意连续函数都可以一致地逼近为一个在 K的某个邻域内全纯的函数，该函数定义在 K. 上。若 K 是多项式凸的，则可用多项式替代全纯函数（见 [8]）。因此，在这种情况下，(1.1)成立。

对于多项式凸集 K，有多篇论文讨论了 ([2, 3, 14,18, 20],)，例如见 1.1成立的情形。

闭全实圆盘是全实子流形的一个紧子集，与闭平面圆盘微分同胚。$\mathcal{C}^1$ 中的全实圆盘未必是多项式凸的，以下例子便说明了这一点。

例1.1 (Wermer[8])。设 $M := \{(z,\ f(z)) \in \mathbb{C}^2 :\ \ z \in \mathbb{C}\}$，其中

$$f(z) = -(1+i)\bar{z} + iz\bar{z}^2 + z^2\bar{z}^3.$$

那么 M 是全实的。令 $K := \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \overline{\mathbb{D}}\} \subset M$. 那么 K 不是多项式凸的。

Wermer [20], O'Farrell 和 Preskenis [12, 13]以及 Duval [5] 对图形式的全实圆盘的多项式凸性进行了研究。Duval 的定理尤其值得关注。我们在此列出该定理：

结果1.2（Duval）。设 $M = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \overline{\mathbb{D}}\}$，其中 f 在 $\mathbb{D}$ 的某个邻域内是 $\mathcal{C}^1$-光滑的。假设对所有 $a \in \overline{\mathbb{D}}$，$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\right| > \left|\frac{\partial f}{\partial z}(a)\right|$。那么 M 是多项式凸的。

对全实圆盘的研究——它们通常并非图形式——源于 CR 函数可去奇点问题的研究。J¨oricke [9]在这一方向上取得了一项重要成果。

结果1.3（J¨oricke）。单位球边界上的任意 $\mathcal{C}^2$-光滑全实圆盘在 $\mathbb{C}^2$ 中都是可去的。

结合 Lupacciolu 和 Stout 的一项结果（见[17]），显然，$\partial\mathbb{B}^2$ 中的任意$\mathcal{C}^2$-光滑全实圆盘都是多项式凸的。Stout 在 [17]中提到，类似的论证也适用于位于严格拟凸域 Ω 边界上的 $\mathcal{C}^2$-光滑全实圆盘，前提是 Ω 是多项式凸的。在[1] 中，Alexander 证明了以下结果：

结果 1.4（Alexander）。包含于 $\{(z_1, z_2)$ 中的任意 $\mathcal{C}^2$-光滑全实圆盘 $\in \mathbb{C}^2 : |z_1| = 1\}$ 都是多项式凸的

在完成了 [9] 和 [1] 的工作之后，J¨oricke 在问题集 [7], 中提出了如下问题：

问题 1.5. $\mathbb{C}^2$ 中哪些闭全实圆盘是多项式凸的?

Alexander 在 [1] 中考虑的超曲面是 Levi 平坦的。这促使我们进一步研究一些 Levi平坦超曲面及其中的全实圆盘示例。回顾一下，若一个超曲面的 Levi形式处处恒为零，则称其为 Levi 平坦超曲面。我们还在某些情况下对 J¨oricke 的问题给出了部分解答。我们的第一个结果展示了 $\mathbb{C}^2$中的一类全实圆盘，它们位于某些非奇异 Levi平坦超曲面中，并且是多项式凸的。这些结果推广了 Alexander 的结果。更确切地说，我们给出：

定理 1.6. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个 Runge 域，且 h 是 Ω 上的全纯函数。设 $M := \{z \in \Omega : |h(z)| = 1\}$，其中对所有 $z \in M$. 均有 $dh(z) \neq 0$ 。则 M 中的每个全实圆盘都是多项式凸的。

现在我们介绍一个颇为有趣的推论。

推论 1.7. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个 Runge 域，且 g 是 Ω 上的全纯函数。设 $M := \{z \in \Omega: \mathrm{Re} g(z) = 0\}$，其中对所有 $z \in M$. 均有 $dg(z) \neq 0$ 。则 M 中的每个 $\mathcal{C}^2$- 光滑全实圆盘都是多项式凸的。

这里给出 $\mathbb{C}^2$中的另一类域，它不属于严格拟凸域这一类，而对于严格拟凸域，全实圆盘是多项式凸的。若 p_1、$\cdots$、p_l 是 $\mathbb{C}^n$中的全纯多项式，则

$$\mathfrak{D}_l := \{z \in \Omega : |p_1(z)| < 1, \cdots, |p_l(z)| < 1\}, l \in \mathbb{N},$$

在 $\mathbb{C}^2$ 中称为多项式多面体。定义

- $\Sigma_j := \{z \in \mathbb{C}^n : |p_j(z)| = 1\}$;
- $\Sigma_{J_k} := \Sigma_{j_1} \cap \cdots \cap \Sigma_{j_k}$, where $J_k = \{j_1, \cdots, j_k\}$.

显然，$\mathfrak{D}_l$ 的拓扑边界 $\partial\mathfrak{D}_l$ 包含于 $\cup_j \Sigma_j$.。若对于任意递增的集合 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$、$k \leq n$，$\mathfrak{D}_l$ 均满足.....，则称多项式多面体 $\mathfrak{D}_l$ 为复非退化的。

$$dp_{j_1} \wedge \cdots \wedge dp_{j_k}(z) \neq 0 \ \forall z \in \Sigma_{J_k}.$$

推论1.8. 位于 $\mathbb{C}^2$ 中复非退化多项式多面体边界的非奇异部分内的任何全实圆盘都是多项式凸的。

下面的结果也是定理 1.6的一个直接推论。它讨论位于多重调和函数零点集中的紧子集。这里需要将区域的单连通性作为一个假设。

推论 1.9. 设 Ω 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单连通 Runge 域，且 h 是 Ω 上的实值多重调和函数。设 $M := \{z \in \Omega : h(z) = 0\}$，其中 $dh(z) \neq 0$ 对所有 $z \in M$. 均成立。那么，M 中每个 $\mathcal{C}^2$-光滑的全实圆盘都是多项式凸的。

另一种与上述情况截然不同的情形如下：

定理 1.10. 若 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是光滑映射，且 $E_h := \{x + iy \in \mathbb{C} : h(x, y) = 0\}$. 若 $dh \neq 0$ 在 E_h上，则 $M := E_h \times \mathbb{C}$ 中的每个 $\mathcal{C}^2$-光滑全实圆盘都是多项式凸的。

在 推论 1.7 中，如果我们取 $\Omega = \mathbb{C}^2$ 和 $g(z, w) = iz$ 那么我们得到：

推论 1.11。设 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$。那么 M 中每个全实 $\mathcal{C}^2$-光滑圆盘都是多项式凸的。

推论 1.11 也可以独立地由推论 1.9 和 定理 1.10 推出。

在本文的第二部分，我们将考虑位于某些 Levi 平坦超曲面内的一般紧子集。这里的紧集不一定是全实的。我们需要先给出一些定义，以陈述本部分的结果。以下定义见于 Stolzenberg [16]。

定义 1.12。设 K 是 $\mathbb{C}^n$. 的一个紧子集。如果 $f\colon K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 具有 $f = \exp(\psi)$ 的形式，其中 ψ 是某个映射 $K \to \mathbb{C}$，我们称 $\ln(f)$ 有定义，且 ψ 是 $\ln(f)$ 的一个分支。

定义 1.13. 设 K 为 $\mathbb{C}^n$. K 的一个紧子集，若对于每个映射 $f\colon K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\ln(f)$ 都有定义，则称其为单重余连通的。

注 1.14（Stolzenberg）。 K 是单连通余连通的，当且仅当 $\check{H}^1(K;\mathbb{Z}) = 0$.

因此，任何可缩集合都是单连通余连通的。

定义 1.15。设 V 是 $\mathbb{C}^n$. V 中的一个解析簇，若对每个 $K \subset V$， $K \subset V$.，则称其为 Runge 簇。

定义 1.16。若对每个一维 Runge 簇 V，只要 $K \cap V$ 是紧的， $K \cap V$ 就是多项式凸的，则称 K 在一维意义下是多项式凸的。

现在我们可以给出本部分的第一个定理。

定理 1.17。设 P 是 $\mathbb{C}^2$. 中的全纯多项式。令 $M := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon |P(z_1, z_2)| = 1\}$ 满足对所有 $z \in M$，均有 $dP(z) \neq 0$，且 $K \subset M$ 是紧的、单连通余连通的。若对所有 $c \in \partial\mathbb{D}$， $P^{-1}\{c\} \cap K$ 都是多项式凸的，则 K 是多项式凸的。

我们还给出了一个类似于定理 1.10 的结果，适用于一般紧集。

定理 1.18。设 $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是光滑映射，且 $E_h := \{x+iy \in \mathbb{C}\colon h(x, y) = 0\}$ 在 E_h. 上满足 $dh \neq 0$ 。设 K 是 $M := E_h \times \mathbb{C}$ 的连通且单连通的紧子集，并且每个纤维 $K_c = \{w \in \mathbb{C} : (c, w) \in K\}$ 都是多项式凸的。那么 K 是多项式凸的。

现在我们将注意力转向奇异 Levi 平坦超曲面。若一个奇异超曲面的正则部分是 Levi 平坦的，则称该超曲面为 Levi 平坦。下面我们给出一个非多项式凸紧子集的例子：它除了超曲面的奇异点之外均为全实。这个例子表明，Levi 平坦超曲面中的奇异性会影响多项式凸性。

例 1.19. 考虑 $M := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon |z| = |w|\}$, $K := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon |z| = \mathrm{Re}w$, $0 \leq \mathrm{Re}w \leq 1, \mathrm{Im}w = 0\} \subset M$. 那么，由于 $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon |z| \leq 1, \mathrm{Re}w = 1$, $\mathrm{Im}w = 0\} \subset \widehat{K}$.， K 不是多项式凸的。注意， K 是可缩的。

设 Ω 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个 Runge 域，并且 $h:\Omega \to \mathbb{C}$ 是一个全纯函数，且$M:=\{z\in\Omega: |h(z)|=1\}$. 设 $M^*:=\{z\in G: |h(z)|=1\}$ 是 M的正则部分，其中 $G:=\Omega\setminus\{z\in\Omega: |h(z)|=1, dh(z)=0\}$. 我们用 M_{sing}表示 M.的奇异部分。

定理 1.20. 设 K 是 M^*. 中的一个全实圆盘。那么 K 是多项式凸的$\widehat{}$当且仅当 $K\cap M_{sing}=\emptyset$.

作为定理 1.20 的一个应用，我们给出了特定类型 Levi 平坦超曲面中的全实圆盘成为多项式凸集的充要条件，该超曲面具有如下形式$\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2: 实部(z_1^m+z_2^n)=0\}$, m, $n\geq 2$。对于$n=2$, $m=2$ 它是所列 Levi 平坦二次曲面的一种标准形，该列表见[4]。

推论 1.21. 奇异 Levi 平坦超曲面$M:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2: 实部(z_1^m+z_2^n)=0\}$ 中的每个全实圆盘 K 都是多项式凸的，当且仅当$\widehat{}$(0,0) $\notin K$.

接下来我们回到 Levi 平坦超曲面 $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2: |z|=|w|\}$，并给出其中全实圆盘为多项式凸的充要条件。这个超曲面还提供了 $\mathbb{C}^2$ 中 Levi 平坦二次曲面的另一种标准形，见[4]列表。

定理 1.22. K 中每个全实圆盘 $M:=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2: |z|=|w|\}\setminus\{(0,0)\}$ 都是多项式凸的，当且仅当 $\widehat{K}\cap\{zw=0\}=\emptyset$.

现在我们陈述一个关于 Hartogs 三角形边界的推论。

推论 1.23. Hartogs 三角形 $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2: |z_1|<|z_2|<1\}$ 边界的非奇异部分中的每个全实圆盘 K 都是多项式凸的，当且仅当$\widehat{}$(0,0) $\notin K$.

证明推论 1.23 可由结果 1.4 和定理 1.22。

2. Technical Results

在本节中，我们首先汇集一些文献中的结果，这些结果将在我们的证明中使用。以下结果可见于 [16, 推论 27]。

结果 2.1 (Stolzenberg). 每个有理凸的单连通余连通集合在一维时都是多项式凸的。

我们还使用以下结果 [16, 第269页，断言（12）]。

结果 2.2（Stolzenberg）。设 K 为纯一维$\widehat{}$解析簇 V 在 $\mathbb{C}^n$ 中的一个紧子集，满足 $K\subset V.$，则 K 是有理凸的。

以下结果也出自 Stolzenberg [16]。

结果 2.3（Stolzenberg）。设 X 是 $\mathbb{C}^n$. 的一个紧子集。若 X 是单连通的-$\widehat{}$余连通的，且存在一个函数 f，它在 X 的某个邻域内全纯，并且满足$\widehat{}$使得 $f(X)\cap f(X\setminus X)=\emptyset$，则 X 是多项式凸的。

以下结果归功于 Stolzenberg（参见 [6,引理 2。3]）。

结果 2.4（Stolzenberg）。设 E 是 $\mathbb{C}^n$. 的一个紧子集。假设 $\mathcal{P}(E)$ 包含一个函数 ϕ，使得 $\phi(E)$ 具有空内部，且 $\mathbb{C}\setminus\phi(E)$ 是连通的。那么，当且仅当对于每个 $c\in\phi(E)$，$\phi^{-1}(c)\cap E$ 是多项式凸时，E 才是多项式凸的。

TStout 的著作中的以下结果也将对我们的证明有所帮助。

结果 2.5。（*[19,* 引理 1.6。*18]*）设 X 是 $\mathbb{C}$. 的一个紧的、多项式凸的子集。那么，∂X（X 的边界）中的每一点都是代数 $\mathcal{P}(X)$ 的峰点。

以下结果归于 Samuelsson 和 Wold [15, 命题 4。7]。我们将在证明中关键性地使用这一结果。

结果 2.6（Samuelsson-Wold）。设 X 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个紧子集，且 $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 是在 X 上整函数的一致极限。设 $K=F(X)$。如果 $\alpha\in K$ 是代数 $\mathcal{P}(K)$ 的峰点，那么

$$F^{-1}\{\alpha\}\cap\widehat{X}=\widehat{F^{-1}\{\alpha\}\cap X}.$$

接下来我们提及常微分方程理论中的几个标准结果。考虑如下微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} &= F(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y).\end{cases}\tag{2.1}$$

结果 2.7 (庞加莱)。 系统（*2.1*）的每条闭路径都必然包围至少一个临界点。

结果 2.8 (庞加莱-本迪克松)。 设 Ω 是相平面中的一个有界区域及其边界，并假设 Ω 不包含系统（*2.1*）的任何临界点。若 $V:=(x(t)\ y(t))$ 是系统（*2.1*）的一条路径，且对所有 $t\geq t_0$，都位于 Ω 中，V 则它要么本身是一条闭路径，要么当 $t\to\infty$.时螺旋趋近一条闭路径。因此，无论哪种情况，系统（*2.1*）在 Ω 中都有闭路径。

接下来我们陈述并证明几个将在证明中用到的引理。第一个引理很容易证明，但在我们的语境中很有用。

引理 2.9。设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 Runge 域，且 f 是 Ω 上的全纯函数。那么，f 的每个水平集都是 Runge 簇。

证明。设 $Z_c:=\{z\in\Omega:\ f(z)=c\}$，其中 $c\in\partial\mathbb{D}$. 令 K 为 Z_c. 的任意紧子集。我们断言，K 的多项式凸包 K 也包含于 $\backsim Z_c$. 中。由于 Ω 是 Runge 域，$K\Subset\Omega$。假设 $\alpha\in\Omega\setminus Z_c$.。于是，$f(\alpha)\neq c$.。定义$g(z):=f(z)-c$.。因此，

$$|g(\alpha)|>0=\sup_K|g|.$$

由于 Ω 是 Runge 的，g 可以在 K. 上由全纯多项式逼近。因此$\backsim$ $\backsim\alpha\notin K$，即 $K\subset Z$. □

设 M 是 $\mathbb{C}^2$ 的三维光滑子流形， N 是 M 的二维全实子流形，且其边界可以为空。 N 上的线场定义如下：对每个 $p \in N$,

$$L_p = T_pN \cap T_p^{\mathbb{C}}M.$$

这里， $T_p^{\mathbb{C}}M$ 是经过 p 且与 M 相切的唯一复直线（其中$T_p^{\mathbb{C}}M = T_pM \cap iT_pM$）。始终与直线 L_p 相切的曲线，是由该线场定义的 N 的叶状结构的叶。换言之，当且仅当对于每个 $t \in (a,b)$，导数 $\gamma'(t)$ 落在直线 $L_{\gamma(t)}$ 上时，曲线$\gamma : (a,b) \to M$ 才包含于该叶状结构的一片叶中。这给出了 N的 $\mathcal{C}^1$ 类叶状结构，也称为 N 的特征叶状结构（详见 Stout $[19,$ 第 $258]$页）。

引理 2.10。设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 是一个域，且 $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{C}^2$-光滑的，并且在 M 上 $d\rho \neq 0$: $= \{z \in \Omega : \rho(z) = 0\}$。设 K 是三维流形 $M.$ 中的一个全实 $\mathcal{C}^2$-光滑圆盘。那么，在 $K.$ 上存在一个特征叶状结构。

证明。由于 K 是 M 中的一个全实圆盘，因此存在 $\overline{\mathbb{D}}$ 的一个邻域 U 、 $\mathbb{C}^2$ 中的一个全实光滑子流形 N ， 以及一个 C^2-光滑微分同胚 $\phi : U \to N$ ， 使得 $\phi(\overline{\mathbb{D}}) = K$。缩小 U （如有必要）后，我们可以假设U 也是可缩的，并取 $\triangle :$ $= \phi(U)$。因此， $\triangle$ 也是 M 中包含 $K.$ 的一个 $\mathcal{C}^2$- 光滑全实圆盘。我们取

$$\phi(t,s) = (\phi_1(t,s), \phi_2(t,s), \phi_3(t,s), \phi_4(t,s)).$$

因此,

$$d\phi|_{(t,s)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\phi_1}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\phi_2}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\phi_3}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\phi_4}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} A(t,s) & B(t,s) \end{pmatrix},$$

其中

$$A(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial t}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial t}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial t}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial t}(t,s) \end{pmatrix} \text{ and } B(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial s}(t,s) \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix}.$$

令 $\lambda = a(t,s)\frac{\partial}{\partial t} + b(t,s)\frac{\partial}{\partial s}$ 是 $U.$上的一个处处非零向量场。现在，对于定义在 K 上的光滑 f ， 我们计算:

$$d\phi(\lambda)(f) = \lambda(f \circ \phi) = \left(a(t,s)\frac{\partial}{\partial t} + b(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\right)(f \circ \phi). \tag{2.2}$$

现在，根据链式法则，我们得到：

$$\frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial t}=\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\phi(t,s)}+\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\phi(t,s)}+\frac{\partial\phi_3}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{\phi(t,s)}+\frac{\partial\phi_4}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{\phi(t,s)}\right)(f),$$

and

$$\frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial s}=\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\phi(t,s)}+\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\phi(t,s)}+\frac{\partial\phi_3}{\partial s}\frac{\partial}{\partial u}\bigg|_{\phi(t,s)}+\frac{\partial\phi_4}{\partial s}\frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{\phi(t,s)}\right)(f).$$

由于 λ 是 U 上处处非零的向量场，且 ϕ 是微分同胚，因此，$\nu=a(t,s)A(t,s)+b(t,s)B(t,s)$ 也是 $\triangle$. 上处处非零的向量场

现在我们将看到，上述向量场 ν 在 K. 上诱导出一个 $\mathcal{C}^1$-光滑的特征叶状结构。为此，我们在这里进行一些计算：令 $\nu_\alpha\in T^{\mathbb{C}}_\alpha M$. 。则

$$\begin{aligned}&\langle J(a(t,s)A(t,s)+b(t,s)B(t,s),\nabla\rho)\rangle=0\ ,\\ &\implies a(t,s)\langle JA(t,s),\nabla\rho\rangle+b(t,s)\langle JB(t,s),\nabla\rho\rangle=0,\end{aligned}$$

其中，J 是 $\mathbb{C}^2$ 上的标准复结构，而 $\langle,\rangle$ 是标准实内积。函数 a 和 b 的一个自然选取如下：

$$\begin{cases}a(t,s)=\langle JB(t,s),\nabla\rho\rangle\ \text{ and}\\ b(t,s)=-\langle JA(t,s),\nabla\rho\rangle.\end{cases}\tag{2.3}$$

由（2.3），可得

$$\begin{aligned}a(t,s)&=-\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial s}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial\phi_4}{\partial s}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\frac{\partial\phi_3}{\partial s}\frac{\partial\rho}{\partial v}\ \text{and}\\ b(t,s)&=\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\phi_4}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial u}-\frac{\partial\phi_3}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial v}.\end{aligned}$$

由于 ϕ 是 C^2-光滑的，且 ρ 是 C^∞ -光滑的，因此由上述计算可知，$a(t,s)$ 和 $b(t,s)$ 是光滑函数。我们将每个点 $\alpha\in K$ 对应到 $\nu_\alpha\in\mathcal{L}_\alpha:=T_\alpha K\cap T^{\mathbb{C}}_\alpha M$. 由于 K 是三维流形 M 中的全实圆盘，维数为 $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{L}_\alpha=1\ \forall\alpha\in K$. 。因此，上述对应在 $\triangle$. 上给出一个光滑的一维分布。由于每个一维分布都是可积的，故在 K. 上诱导出特征叶状结构 □

引理 2.11。 如果 $\rho(z):=|h(z)|^2-1$，其中 h 是在 K 的 引理 2.10邻域内的全纯函数，那么 h 在特征叶状结构的每个叶上都是常数 K.

证明。设积分曲线 $\gamma(t):=(\gamma_1(t)+i\gamma_2(t)\ \gamma_3(t)+i\gamma_4(t)):(a,b)\to\triangle$ in$\triangle$ 是 $\triangle$. 上特征叶状结构的一片叶。那么 $\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}K\cap T^{\mathbb{C}}_{\gamma(t)}M\ \forall t\in(a,b)$。注意，$\nabla\rho|_{\gamma(t)}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x},\frac{\partial\rho}{\partial y},\frac{\partial\rho}{\partial u},\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)|_{\gamma(t)}$ 是 $\gamma(t)$ 处 M 的法向量。由于$\gamma'(t)\in T^{\mathbb{C}}_{\gamma(t)}M$, $i\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}M$. 因此，

$$\langle\gamma'(t),\nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle=0=\langle i\gamma'(t),\nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle.$$

因此 $\langle \gamma'(t)\ \nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle = 0$ 意味着

$$\gamma_1'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial x}+\gamma_2'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial y}+\gamma_3'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial u}+\gamma_4'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial v}=0, \tag{2.4}$$

且 $\langle i\gamma'(t)\ \nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle = 0$ 蕴含

$$-\gamma_2'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial x}+\gamma_1'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial y}-\gamma_4'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial u}+\gamma_3'(t)\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial v}=0. \tag{2.5}$$

由（2.4）和（2.5）可得

$$\begin{aligned}(\gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial z}+(\gamma_3'(t)+i\gamma_4'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial w}+(\gamma_1'(t)-i\gamma_2'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial\bar z}\\ +(\gamma_3'(t)-i\gamma_4'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial\bar w}=0\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}i(\gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial z}+i(\gamma_3'(t)+i\gamma_4'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial w}-i(\gamma_1'(t)-i\gamma_2'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial\bar z}\\ -i(\gamma_3'(t)-i\gamma_4'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial\bar w}=0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&(\gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial z}+(\gamma_3'(t)+i\gamma_4'(t))\frac{\partial\rho(\gamma(t))}{\partial w}=0\\ \Longrightarrow\ &(\gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t))\frac{\partial h(\gamma(t))}{\partial z}+(\gamma_3'(t)+i\gamma_4'(t))\frac{\partial h(\gamma(t))}{\partial w}=0\\ \Longrightarrow\ &d(h\circ\gamma)(t)=0\\ \Longrightarrow\ &h\circ\gamma=c,\ \text{where c is some constant.}\end{aligned}$$

因此，我们可以说，ν 在 K 中的每条积分曲线都包含在 $h^{-1}\{c\}\cap K$ 中，其中 c. □为某个常数。

3. Nonsingular Levi-flat hypersurfaces

本节将证明定理 1.6、推论 1.7、推论1.8、推论 1.9、定理 1.17、推论 1.11 和定理 1.18。我们首先定义$\rho(z) := h(z)\overline{h(z)} - 1$ 以及 K，令其为 M 中的光滑全实圆盘：$= \{z \in \Omega :\ \rho(z) = 0\}$. 由于 $dh(z) \neq 0$，M 是 Ω 中的实三维子流形 $\subset \mathbb{C}^2$. 因此，复切空间 $T^{\mathbb{C}}_{\alpha}M$ 的复维数对于每个 $\alpha \in M$. 都是 1

证明定理 1.6。我们将定理 1.6的证明分为以下几个步骤。

Ste步骤 I：证明每个纤维 $h^{-1}\{c\} \cap K$ 都是多项式凸的。

由于 $dh|_{\alpha} \neq 0$ 在 $h^{-1}\{c\}$，$\{z \in \Omega :\ h(z) = c\}$ 是一个纯维数 1 的复流形。鉴于 引理 2.9，我们可以说 $h^{-1}\{c\}$ 对每个 $c \in \partial\mathbb{D}$而言都是 Runge 簇，并记 $K_c :\ = h^{-1}\{c\} \cap K$. 以下两种情形成立。

情形 I：$\check{}H^1(K_c,\ \mathbb{Z}) = 0$. 这意味着 K_c 是单连通余连通的（见 注 1.14）。由于 $h^{-1}\{c\}$ 是一个 Runge 簇，通过使用 结果 2.2，我们得到 K_c 是有理凸的。因此，通过使用 结果 2.1，我们可以说 K_c 是多项式凸的

在一维情形下。由于 $h^{-1}\{c\}$是一维 Runge 簇，因此，$K_c \cap h^{-1}\{c\} = K_c$ 是多项式凸的。

情形 II：$\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$. $\triangle$ 的特征叶状结构的叶是曲线η，使得对所有 t, $\eta'(t) \in T_{\eta(t)}K \cap T^{\mathbb{C}}_{\eta(t)}M$. 在圆盘 $\triangle$上，存在处处不消失的向量场 V（见引理 2.10），使得向量 V_x 在所有点 $x \in \triangle$. 处都与经过 x 的特征叶状结构的叶相切。因此，微分方程 $x' = V_x$ 的解曲线包含在叶状结构的叶中。根据庞加莱-本迪克松定理（结果 2.8），该叶状结构的所有积分曲线都是弧，与区间 $[0, 1]$, 同胚，端点位于 $\partial\triangle$. 。事实上，设 γ 是该叶状结构的一条积分曲线。如果 γ 位于$\sim\triangle$中，那么在 U上存在一个非消失向量场 V的一条闭积分曲线 $\widetilde{\gamma}$，（其中 $\phi(U) = \triangle$）。因此，由结果 2.8，$\widetilde{\gamma}$ 要么是闭的，要么在 $t \to \infty$. 时螺旋趋近于一条闭路径。因此，由结果 2.7，U. 中存在一个临界$\widetilde{}$点。这与 V 是U. 上的处处不消失向量场相矛盾。注意，$\triangle$ 包含所有纤维 $h^{-1}\{c\} \cap K$. 。由于 $\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$，$\triangle \setminus K_c$ 不连通。取 $\alpha \in K \setminus K_c$，且 γ 是经过 α. 的积分曲线。我们断言 $\gamma \cap K_c = \emptyset$：若不然，假设 $\gamma \cap K_c \neq \emptyset$ 且 $\xi \in \gamma \cap K_c$. 。由于每条积分曲线都位于某个常数 $c_1 \in \partial\mathbb{D}$对应的 $h^{-1}\{c_1\}$ 中，令 $\gamma \subset h^{-1}\{c_1\}$. 。于是我们有 $h(\alpha) = c_1$. 。另一方面，$h(\xi) = c$ 且 $\xi \in \gamma$. 。但我们知道，h沿每条积分曲线保持常数（由引理 2.11）。这与假设 $\gamma \cap K_c \neq \emptyset$. 矛盾。因此，$\gamma \cap K_c = \emptyset$. 。这就证明了该断言。接下来我们断言 $\gamma \cap K_c = \emptyset$ 是不可能的。根据庞加莱-本迪克松定理（结果 2.8），经过 α 的每条积分曲线 γ 都将 α 连接到 $\triangle$. 的边界。但$\triangle \setminus K_c$不连通，因此 $\gamma \cap K_c = \emptyset$ 是不可能的。因此，$\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$ 是不可能的，也就是说，情形 II 不可能发生。

步骤 II：完成证明。

$\widehat{\ }$我们声称，$h(K) \cap h(K \setminus K) = \emptyset$. 若有可能，假设 $h(K) \cap h(K \setminus K) \neq \emptyset$. $\widehat{\ }$令 $\alpha \in h(K) \cap h(K \setminus K)$。那么存在 $\eta \in K$ 和 $\xi \in K \setminus K$，使得 $h(\eta) = \alpha$ 且 $h(\xi) = \alpha$. 我们声称 $\xi \in h^{-1}\{\alpha\} \cap K$，即纤维 $h^{-1}\{\alpha\} \cap K$ 不是多项式凸的。令 $Y = h(K)$。由于 $h(K) \subset \partial\mathbb{D}$，$Y$ 中的每一点都是一致代数 $\mathcal{P}(Y)$的峰点，由结果 2.6 可得

$$h^{-1}\{\alpha\} \cap \widehat{K} = \widehat{h^{-1}\{\alpha\} \cap K}.$$

因此，

$$\xi \in h^{-1}\{\alpha\} \cap \widehat{K} = \widehat{h^{-1}\{\alpha\} \cap K}.$$

因此，$h^{-1}\{\alpha\} \cap K$ 不是多项式凸的。这与步骤 I矛盾。因此，$h(K) \cap h(\widehat{K} \setminus K) = \emptyset$. 因此，根据结果 2.3，$K$ 是多项式凸的。□

证明推论 1.7。证明推论 1.7 可由定理 1.6推出。为此，我们定义 $h(z) := e^{g(z)}$ 在 Ω 上。那么 $\{z \in \Omega : |e^{g(z)}| = 1\} = \{z \in \Omega : \text{实部} g(z) = 0\} = M$. 由于 Ω 是 Runge，且 $e^{g(z)}$ 在 Ω 上全纯，因此，包含于 $\{z \in \Omega : |e^{g(z)}| = 1\}$ 中的每个全实光滑圆盘都是多项式凸的。这就证明了该定理。□

推论 1.9 的证明。推论 1.9 可由推论 1.7 轻易推出。由于 Ω 是单连通的，存在一个全纯函数 P 在 Ω 上，使得 $h(z) = \text{实部}P(z)$。根据推论 1.7，我们可以说，$\{z \in \Omega: \text{实部}P(z) = 0\}$ 中的每个全实光滑圆盘都是多项式凸的。因此，$\{z \in \Omega: h = \text{实部}P(z) = 0\}$ 中的每个全实光滑圆盘都是多项式凸的。□

证明 定理 1.17。由于 K 在一维中是多项式凸的，$h^{-1}\{c\} \cap\!\!\!\subset K$ 对于所有 $c \in \partial\mathbb{D}$. 因此 $h(K) \cap h(K \setminus K) = \emptyset$（见 证明的步骤 II，即 定理 1.6。）再次，K 是单连通余连通的，因此，根据结果 2.3，我们可以说 K 是多项式凸的。□

定理 1.10 的证明。首先，我们断言，M 的特征叶状结构的积分曲线是包含在某个 c 对应的 $P^{-1}\{c\}$ 中的曲线，其中 $P: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (z, w) \mapsto z$ 是投影映射。为此，设 (x, y, u, v) 是 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. 的坐标。定义 $\rho: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$，使得 $\rho(x, y, u, v) = h(x, y)$，于是 $M = \rho^{-1}\{0\}$。在 (x, y, u, v) 处，M 的法向量为

$$\nabla\rho|_{(x,y,u,v)} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}, \frac{\partial\rho}{\partial u}, \frac{\partial\rho}{\partial v}\right)\Bigg|_{(x,y,u,v)} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 0, 0\right). \tag{3.1}$$

令 $\gamma(t) = (x(t)\ y(t)\ u(t)\ v(t))$ 为 $M.$ 的特征叶状结构的一条积分曲线。由于 $\gamma'(t) \in T^{\mathbb{C}}_{\gamma(t)}M$, $i\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$，因此，

$$\langle\gamma'(t), \nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle = 0 = \langle i\gamma'(t), \nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle.$$

因此 $\langle\gamma'(t)\ \nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle = 0$ 推出

$$\frac{\partial h}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}y'(t) = 0, \tag{3.2}$$

并且 $\langle i\gamma'(t)\ \nabla\rho|_{\gamma(t)}\rangle = 0$ 推出

$$-\frac{\partial h}{\partial x}y'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}x'(t) = 0. \tag{3.3}$$

由（3.2）和（3.3），可得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} & -\frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ 在 M 上，因此 $x'(t) = 0 = y'(t)$。这意味着 $x(t) = c_1$, $y(t) = c_2$，其中某个 $(c_1, c_2) \in E_h$.。因此 $\gamma \subset P^{-1}\{c\}$，这就证明了我们的断言。

设 K 是 $M.$ 按照 定理 1.6的证明，我们可以证明每个纤维 $K_c = P^{-1}(c) \cap K = (\{c\} \times \mathbb{C}) \cap K$ 都是多项式凸的。为此，定义 $K_c := P^{-1}\{c\} \cap K$ 以及 $V_c = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = c\}$.

情形 I: $\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) = 0$. 这意味着 K_c 是单连通余连通的（参见 注 1.14）。由于 V_c 是 Runge 簇，利用 结果 2.2，我们得到 K_c 是有理凸的。因此，利用 结果 2.1，我们可以说 K_c 是一维多项式凸的。由于 V_c 是一维 Runge 簇，因此，$K_c \cap V_c = K_c$是多项式凸的。

情形 II: $\check{}H^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$。通过与定理 1.6 (步骤 I，情形 II) 类似的论证，$\check{}H^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$ 不可能发生。
因此， $K_c = P^{-1}\{c\} \cap K$ 是多项式凸的。 K 是多项式凸的，这可由结果 2.3推出。□

推论推论 1.11的证明。设 $\Omega = \mathbb{C}^2$ 且 $f(z_1) = e^{-iz_1}$，则 $M := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |e^{-iz_1}| = 1\} := \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. 推论推论 1.11 的证明现在可由定理 1.6得到。

或者，若取 $h(z_1, z_2) = \mathrm{Im} z_1$，则 $\mathbb{R} \times \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}^2 : h(z) = 0\}$.现在，证明可由定理 1.10得到。□

定理 1.18 的证明。设 $P: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, P(z, w) = z$ 是投影映射。由于 K 在一维上是多项式凸的，因此对所有 $c \in \mathbb{C}.$， $P^{-1}\{c\} \cap K$ 都是多项式凸的。现在我们断言， $Y := P(K)$ 中的每个点都是代数 $\mathcal{P}(Y)$ 的峰点。首先，我们证明 $Y \subset \{\alpha \in \mathbb{C} : h(\alpha) = 0\}$: 设 $\alpha \in Y$，则存在 $(\xi, \eta) \in K \subset E_h \times \mathbb{C}$ 使得 $P(\xi, \eta) = \alpha$. 这意味着 $\xi = \alpha$，且由于 $(\xi, \eta) \in E_h \times \mathbb{C}, h(\xi) = 0$，即 $h(\alpha) = 0$. 因此， $Y \subset \{\alpha \in \mathbb{C} : h(\alpha) = 0\}$.

由于 $dh \neq 0$ 位于 E_h 上，因此 E_h 是一个实维数为一的光滑子流形。注意， $Y = P(K)$ 是 E_h. 的一个连通子集
情形 I: $\mathbb{C} \setminus P(K)$ 是连通的，因此 $P(K)$ 是多项式凸的。根据 结果 2.5，我们可以说 $\partial P(K) = P(K)$ 中的每一点都是代数$\mathcal{P}(P(K))$的峰点。

情形 II: $\mathbb{C} \setminus P(K)$ 不连通。于是 $P(K)$ 是 $P(K)$ 与 $\mathbb{C} \setminus P(K)$ 的所有有界分支之并。由于 $P(K)$ 连通，因此 $\partial P(K) = P(K)$。根据结果 2.5，我们可以说 $P(K)$ 中的每一点都是代数$\mathcal{P}(P(K))$ 的峰点。

根据结果 2.6，我们得到

$$P^{-1}\{c\} \cap \widehat{K} = \widehat{P^{-1}\{c\} \cap K}$$

对所有 $c \in \mathbb{C}.$ 因此， $P(K) \cap P(K \setminus K) = \emptyset$. 由于 K 是单连通余连通的，根据结果 2.3， K 是多项式凸的。□

4. Singular Levi-flat hypersurfaces

本节给出关于奇异 Levi 平坦超曲面的定理的证明。首先，我们证明定理 1.20。

定理的证明 定理 1.20。 若 K 是多项式凸的，那么显然 $K \cap M_{sing} = \emptyset$.

现在证明逆向部分。由于 $dh|_\alpha \neq 0$， 在 $h^{-1}\{c\} \cap G$ 上，于是 $\{z \in G : h(z) = c\}$ 是一个纯维数为 1 的复流形。 根据 引理 2.10，存在特征叶状结构 K，根据 引理 2.11，可知函数 $h(z, w)$ 在 $\triangle$.的特征叶状结构的每个叶上都是常数

步骤 I: 证明每个纤维 $h^{-1}\{c\} \cap G \cap K$ 都是多项式凸的。

我们定义 $K_c := P^{-1}\{c\} \cap G \cap K$ 和 $V_c = \{z \in \mathbb{C}^2 : h(z) = c\}$. 由于 $K \cap M_{sing} = \emptyset$，因此 $K_c = V_c \cap K$. 所以，只需证明 $V_c \cap K$ 是多项式凸的。

情形 I：$\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) = 0$. 这意味着 K_c 是单连通余连通的（参见 注 1.14）。容易看出 V_c 是一个 Runge 簇。于是利用 结果 2.2，可得 K_c 是有理凸的。因此，利用 结果 2.1，可知 K_c在一维情形下是多项式凸的。由于 V_c 是一个一维 Runge 簇，因此 $K_c \cap V_c = K_c$ 是多项式凸的。

情形 II：$\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$。按照与 定理 1.6 (步骤 I，情形 II) 类似的论证，$\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$ 是不可能成立的。

因此，$K_c = P^{-1}\{c\} \cap K$ 是多项式凸的。

步骤 II：完成证明：

现在我们证明 K 是多项式凸的。注意，h 在 $\mathbb{C}^2$. $\widehat{K}$ 中是全纯的。我们声称，$h(K) \cap h(K \setminus K) = \emptyset$. 若不然，假设 $h(K \setminus K) \neq \emptyset$. 令 $\alpha \in h(K) \cap h(K \setminus K)$。那么存在 $\eta \in K$ 和 $\xi \in K \setminus K$，使得 $h(\eta) = \alpha$ 且 $h(\xi) = \alpha$. 我们声称 $\xi \in h^{-1}\{\alpha\} \cap K$，也就是说，纤维 $h^{-1}\{\alpha\} \cap K$ 不是多项式凸的。令 $Y = h(K)$。由于 $h(K) \subset \partial\mathbb{D}$，$Y$ 中的每个点都是一致代数 $\mathcal{P}(Y)$的峰点，因此根据结果 2.6，我们得到

$$h^{-1}\{\alpha\} \cap \widehat{K} = h^{-1}\widehat{\{\alpha\}} \cap K.$$

因此，

$$\xi \in h^{-1}\{\alpha\} \cap \widehat{K} = h^{-1}\widehat{\{\alpha\}} \cap K.$$

因此 $h^{-1}\{\alpha\} \cap K$ 不是多项式凸的。这是一个矛盾。因此$h(K) \cap h(K \setminus K) = \emptyset$. 因此，根据 结果 2.3，$K$ 是多项式凸的。□

推论 1.21 的证明。定义全纯函数 $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ by$h(z_1, z_2) := e^{z_1^m + z_2^n}$. 于是 $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |h(z_1, z_2)| = 1\} = M$ 且 $M_{sing} = \{(0, 0)\}$. 现在由定理 1.20 即得。□

现在我们给出定理 1.22的证明。

定理*1.22*的证明。若 K 是多项式凸的，那么显然 $K \cap \{zw = 0\} = \emptyset$.

现在证明逆向结论。考虑区域 $G := \mathbb{C}^2 \setminus \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 0\}$ 以及全纯函数 $P(z, w) = \frac{z}{w}$. 于是 $M := \rho^{-1}\{0\}$，其中$\rho(z, w) = \frac{z}{w}\frac{\overline{z}}{\overline{w}} - 1$. 注意，由于 $dP|_\alpha \neq 0$，在 $P^{-1}\{c\}$ 上有 $\{z \in G : P(z) = c\}$是一个纯维数 1 的复流形。由引理 2.10，存在特征叶状结构 K；由引理 2.11，可知函数 $h(z, w) = \frac{z}{w}$ 在 $\triangle$. 的特征叶状结构的每个叶上均为常数

步骤 I：证明每个纤维 $P^{-1}\{c\} \cap K$ 都是多项式凸的。

我们定义 $K_c := P^{-1}\{c\} \cap K$ 和 $V_c = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z = cw\}$. 由于 $K \cap \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 0\} = \emptyset$，因此 $K_c = V_c \cap K$. 所以，只需证明 $V_c \cap K$ 是多项式凸的。

情形 I: $\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) = 0$. 这意味着 K_c 是单连通余连通的（见 注 1.14）。由于 V_c 是一个 Runge 簇，利用 结果 2.2，可得 K_c 是有理凸的。因此，利用 结果 2.1，可知 K_c 在一维时是多项式凸的。由于 V_c 是一个一维 Runge 簇，因此，$K_c \cap V_c = K_c$ 是多项式凸的。

情形 II: $\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$。按照与 定理 1.6 (步骤 I，情形 II) 类似的论证，$\check{H}^1(K_c, \mathbb{Z}) \neq 0$ 不可能成立。

因此，$K_c = P^{-1}\{c\} \cap K$ 是多项式凸的。

步骤 II: 完成证明:

现在我们证明 K 是多项式凸的。根据假设，我们有 $K \cap \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 0\} = \emptyset$，因此，$P$ 在 $\widehat{K}$ 的某个邻域内是全纯的。我们断言 $P(K) \cap P(K \setminus K) = \emptyset$. 若有可能，假设 $P(K \setminus K) \neq \emptyset$. 令 $\alpha \in P(K) \cap p(K \setminus K)$。那么存在 $\eta \in K$ 和 $\xi \in K \setminus K$，使得 $P(\eta) = \alpha$ 且 $P(\xi) = \alpha$. 我们断言 $\xi \in p^{-1}\{\alpha\} \cap K$，也就是说，纤维 $P^{-1}\{\alpha\} \cap K$ 不是多项式凸的。令 $Y = P(K)$。由于 $P(K) \subset \partial\mathbb{D}$，$Y$ 中的每个点都是一致代数 $\mathcal{P}(Y)$ 的峰点，因此由结果 2.6 可得

$$P^{-1}\{\alpha\} \cap \widehat{K} = \widehat{P^{-1}\{\alpha\} \cap K}.$$

因此,

$$\xi \in P^{-1}\{\alpha\} \cap \widehat{K} = \widehat{P^{-1}\{\alpha\} \cap K}.$$

因此 $P^{-1}\{\alpha\} \cap K$ 不是多项式凸的。这是一个矛盾。因此 $P(K) \cap P(K \setminus K) = \emptyset$. 因此，根据结果 2.3，$K$ 是多项式凸的。□

令 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，且 $E_h := \{z \in \mathbb{C} : h(z) = 0\}$. 令 $E_h^* := \{z \in G : h(z) = 0\}$ 为 E_h 的正则部分，其中 $G := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : h(z) = 0, dh(z) = 0\}$. 由 $(E_h)^{sing}$ 表示 E_h. 的奇异部分

定理 4.1. 设 K 是奇异超曲面 $E_h^* \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$. 中的一个全实圆盘。那么 K 是多项式凸的。

证明。证明可由定理 1.10得出。 □

注 4.2。 设 $M := \{z \in \mathbb{C}^2 : \rho(z) = 0\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个奇异 Levi 平坦二次实超曲面，其具有如下标准形（见 [4]）：

(i) $\rho(z) = (z_1^2 + 2z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_1^2)$ (ii) $\rho(z) = (z_1^2 + 2\lambda z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_1)$ $\lambda \in (0,1)$ (iii) $\rho(z) = \mathrm{Re}\, z_1 \mathrm{Re}\, z_2$

在第一种情况下， M 是非奇异的。在第二种情况下，奇异集为 $\{o\}\times\mathbb{C}$，在第三种情况下，奇异集为 $\{(iy_1,\ iy_2)\in\mathbb{C}^2:\ y_j\in\mathbb{R}\}$。如果一个全实圆盘位于 M^* 中，且属于 M的非奇异部分，那么根据定理 4.1，它是多项式凸的。

5. Examples and concluding remarks

在 th 本节我们给出一些例子，以支持本文中的定理。 .

例 5.1. 设 $E_{a,b}:=\{z\in\mathbb{C}:\ a^2x^2+b^2y^2=1\}\,(a,b\in\mathbb{R})$, 以及 $M=E_{a,b}\times\mathbb{C}$为一个超曲面 $\mathbb{C}^2$。于是，根据定理 1.10，其中每个全实光滑圆盘都是多项式凸的M 。

例 5.2. 考虑 $M:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\ |z_2+\phi(z_1)|=1\}$, $K:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\ z_2=e^{i(\mathrm{Re}z_1)^2}-\phi(z_1)\ |z_1|\le 1\}\subset M$，其中 ϕ 是 $z_1.$ 中的一个多项式。利用定理 1.17，我们可以证明 K 是多项式凸的。注意， K 并非全实（在 $(0,1-\phi(0)).$ K 是闭单位圆盘在光滑映射 $\xi\to(\xi,e^{i(\mathrm{Re}\xi)^2}-\phi(\xi))$ 下的像，本质上是闭单位圆盘上 $e^{i(\mathrm{Re}z_1}$ 的图像）$^2-\phi(z_1)$。因此， K 是单连通余连通的（事实上是可缩的）。剩下要证明每个纤维 $P^{-1}\{c\}\cap K$ 都是多项式凸的，其中 $P(z_1,z_2)=z_2+\phi(z_1)$。我们计算：

$$\begin{aligned}P^{-1}\{c\}\cap K=&\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:z_2+\phi(z_1)=c,w=e^{i(\mathrm{Re}z_1)^2}-\phi(z_1),|z_1|\le 1\}\\=&\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:z_2+\phi(z_1)=c,e^{i(\mathrm{Re}z_1)^2}=c=e^{it},|z_1|\le 1,t\in[0,2\pi]\}\\=&\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:z_2+\phi(z_1)=c,\mathrm{Re}z_1=\pm t,|z_1|\le 1\}\\=&\mathrm{Gr}_h(L_1\cup L_2),\end{aligned}$$

其中 $h=c-\phi(z_1)$ $L_1\cup L_2$ 是多项式凸的。因此，作为多项式凸集上的多项式图像，$P^{-1}\{c\}\cap K$ 是多项式凸的。

例 5.3. 设 $P(z_1,z_2)=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$，且 $M:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\ |P(z_1,z_2)|=1\}.$ 考虑映射 $\phi:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}^2$，它由 $\phi(t,s)=(\cos t+t,\sin\ s+s,\cos\ t-t,\sin\ s-s)$ 定义。则 ϕ 是一个微分同胚，因此 $K:=\phi(\overline{\mathbb{D}})$ 是 $M.$ 的一个单连通紧子集。注意，$P^{-1}\{c\}\cap K=\{(c+\overline{\xi},c-\overline{\xi}):\ |\xi|\le 1\}$是多项式凸的。利用定理 1.17，我们得出 K 是多项式凸的。

例5.4. 令 $h:\ \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 由 $h(x,y)=x^2+y^2-1$ 定义，且令 $\phi:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}^2$ 由 $\phi(t,s)=(\cos t,\sin\ t,(t-3)^3,(s-2)^3)$定义。则 ϕ 是一个微分同胚。因此， $K:=\phi(\overline{\mathbb{D}})$ 是 $E_h\times\mathbb{C}.$ 的单连通紧子集。令 $P(z,w)=z$为投影映射。则对所有 $c\in\mathbb{C}.$，$P^{-1}\{c\}\cap K=\{(z,w):\ z=c,w=((t-3)^3,(s-2)^3))\ t^2+s^2\le 1\}$ 都是多项式凸的。利用定理 1.18，我们得出 K 是多项式凸的。

现在我们作一些总结性评论。本文所讨论的超曲面均为整体李维平坦，即从两侧看都是伪凸的。在这里讨论的所有非奇异超曲面中，位于其中的任何全实圆盘都被证明是多项式凸的。这促使我们提出第一个猜想：

猜想 5.5. 位于 $\mathbb{C}^2$ 中非奇异李维平坦超曲面内的任何全实圆盘都是多项式凸的。

鉴于 推论 1.21、定理 1.22 以及 注 4.2 我们推断，位于 Levi 平坦二次曲面中的全实圆盘（它们是 Burns 和 Gong 给出的标准形） [4], 是多项式凸的，前提是全实圆盘的多项式包与奇异集没有交集。这使我们能够提出下面的猜想。

猜想 5.6. 任何位于奇异 Levi-平面超曲面中的全实圆盘，如果 K 与奇异集没有非空交集，则它是多项式凸的。

<escape>在注 4.2 的第三个超曲面中，奇异集具有以下形式： $S := \{(iy_1, iy_2) \in \mathbb{C}^2 : y_j \in \mathbb{R}\}$，它是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个具有最大维数的全实子空间。因此，任何包含于 S 中的紧子集都是多项式凸的。全实圆盘可以位于其中。因此，我们提出以下问题：</escape>

问题 5.7。刻画位于 $\mathbb{C}^2$ 中奇异 Levi-平坦超曲面内且多项式凸的全实圆盘。

致谢。第一位作者获得了 SERB、印度政府科学技术部提供的 MATRICS 研究资助（MTR/2017/000974）和核心研究资助（CRG/2022/003560）的部分支持。第二位作者的工作获得了 SERB、印度政府科学技术部提供的 INSPIRE 奖学金（IF 160487）以及研究资助（30121582）的部分支持。

References

[1] H. Alexander. C^2 中的全实集。《美国数学会会刊》，111(1):131–133, 1991。[2]J. T. Anderson、A. J. Izzo 和 J. Wermer。C^n 中三维实解析子流形上的多项式逼近。《美国数学会会刊》，129(8):2395–2402，2001。[3] J. T. Anderson、A. J. Izzo 和 J. Wermer。C^n 中实解析簇上的多项式逼近。《美国数学会会刊》，132(5):1495–1500，2004。[4] D. Burns 和 X Gong。奇异 Levi-平坦实解析超曲面。《美国数学杂志》，121(1):23–53，1999。[5]J. Duval。一个多项式凸圆盘的例子。《数学年刊》，281(4):583–588，1988。[6] S. Gorai。关于 $\mathbb{C}^2$ 中有限个全实平面的并集的多项式凸性的一则注记。《数学分析及其应用杂志》，418(2):842–851，2014。[7] V.P. Havin 和 N.K. Nikolski。《线性与复分析问题集 3：第二部分》。数学讲义，Springer Berlin Heidelberg，2006。[8] L. H¨ormander 和 J. Wermer。C^n 中紧集上的一致逼近。《斯堪的纳维亚数学杂志》，23:5–21 （1969），1968。[9] B. J¨oricke。CR 函数的可去奇点。《Arkiv för Matematik》，26(1):117–143，1988。

[10] M. A. Lavrentiev。关于可表示为多项式级数的复变函数。1936。[11] R. Nirenberg 和 R. O. Wells, Jr.。复流形可微子流形上的逼近定理。《美国数学会汇刊》，142:15–35，1969。[12] A. G. O'Farrell 和 K. J. Preskenis。用两个微分同胚进行多项式逼近。《美国数学会通报》（新系列），10(1):105–107，1984。[13] A. G. O'Farrell 和 K. J. Preskenis。用两个函数进行多项式一致逼近。《数学年刊》，284(4):529–535，1989。[14] A. G. O'Farrell、K. J. Preskenis 和 D. Walsh。Lipschitz 范数下的全纯逼近。载于《Banach 代数与多复变量会议论文集》（康涅狄格州纽黑文，1983），Contemp. Math. 第32卷，第187–194页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1984。[15] H. Samuelsson 和 E. F. Wold。流形上的一致代数与逼近。《数学发明》，188(3):505–523，2012。[16] G. Stolzenberg。多项式凸集与有理凸集。《数学学报》，109:259–289，1963。[17] E. L. Stout。全纯函数边界值的可去奇点。载于《多复变函数》（斯德哥尔摩，1987/1988），Math. Notes 第38卷，第600–629页。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993。[18] E. L. Stout。紧的、全纯凸的实解析簇上的全纯逼近。《美国数学会会刊》，134(8):2302–2308，2006。[19] E. L. Stout。《多项式凸性》，数学进展第261卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2007。[20] J. Wermer。圆盘上的逼近。《数学年刊》，155:331–333，1964。

Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Mohanpur – 741 246电子邮箱地址：sushil.gorai@iiserkol.ac.in、sushil.gorai@gmail.comDepartment of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Re-search Pune, Pune – 411 008电子邮箱地址：golammostafaa@gmail.com