arXiv:2305.05412v1 [math.DS] 9 May 2023

PROCEEDINGS A

rspa.royalsocietypublishing.org

研究

引用本文： Müller A. 2023年《受约束与自由漂浮多体及空间系统的Hamel方程与几何力学》。20220732。英国皇家学会哲学汇刊A辑 479，2023年。
h
ttp://dx.doi.org/10.1098/rspa.2022.0732

提交至期刊的文章

主题领域：
几何力学、李群、计算力学、机器人学

关键词：
几何力学、哈梅尔方程、哈梅尔系数、Euler-Poincaré方程、拉格朗日约化、机械联络、锁定速度、运动学重构、规范场、空间系统

通讯作者： Andreas Müller电子邮件：a.mueller@jku.at

THE ROYAL SOCIETY
PUBLISHING

《受约束与自由漂浮多体及空间系统的Hamel方程与几何力学》

Andreas Müller [1]

[1]奥地利林茨约翰内斯·开普勒大学

现代几何方法的分析力学建立在构型空间的丛结构之上。该丛上的联络使约化欧拉-拉格朗日方程得以进行内在分解。另一方面，Hamel方程为局部坐标中的非完整力学提供了一种通用方法。Hamel公式与局部坐标中的几何方法之间的联系尚未得到充分讨论。本文采用Hamel的原始形式推导约化欧拉-拉格朗日方程以及联络的曲率。借助锁定速度，实现了欧拉-拉格朗日方程与Euler-Poincaré方程的内在分解，以及惯性解耦。文中还讨论了该方法的若干方面。

1. 引言

许多动力系统和受控多体系统具有对称不变量，并且可以在主丛上建模。拉格朗日系统的丛表述作为几何力学中的一个关键概念，在 [1,2] 中得到发展；几何力学将构型空间视为具有对称群 $Q = G \times Q/G$ 的主丛 G。联络是其中的核心概念，因为它能够对系统的特定对称性进行编码[3–6]。由系统动量推导出的（自然）机械联络最早于 [7–9] 提出。给定一个G不变的拉格朗日量 ℓ，在某个（左）平凡化的丛坐标$(\Omega^\alpha,\ \dot r^I)$中，其中 Ω^α 是锁定速度，无约束浮动基系统的动力学由拉格朗日-庞加莱方程支配 [3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\alpha} = \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\beta}\left(-\mathcal{E}^\beta_{I\alpha}\dot r^I + c^\beta_{\alpha\lambda}\Omega^\lambda\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot r^I} - \frac{\partial \ell}{\partial r^I} = \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\beta}\left(-\mathcal{B}^\beta_{IJ}\dot r^J + \mathcal{E}^\beta_{I\alpha}\Omega^\alpha\right) \tag{1.2}$$

其联络系数为 $\mathcal{A}^\alpha_I$，曲率为 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ}$。

© 作者。由英国皇家学会根据知识共享署名许可协议 http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/发布，该协议允许不受限制地使用，但须注明原作者和来源。

系数 $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta I} = c^{\alpha}_{\beta\lambda}\mathcal{A}^{\lambda}_{I}$，以及曲率系数

$$\mathcal{B}^{\alpha}_{IJ} = \frac{\partial \mathcal{A}^{\alpha}_{I}}{\partial r^{J}} - \frac{\partial \mathcal{A}^{\alpha}_{J}}{\partial r^{I}} \pm c^{\alpha}_{\beta\lambda}\mathcal{A}^{\beta}_{I}\mathcal{A}^{\lambda}_{J} \tag{1.3}$$

由李代数的结构常数确定 $c^{\alpha}_{\beta\lambda}$ $\mathfrak{g}$ 的 G。对称群编码了拉格朗日量的不变性。最突出的例子是浮动基多体系统[1]，，其中基体的运动 g 在 G 欧氏运动群的一个子群 $SE(3)$中演化，其体速度为$\hat{}$ $\boldsymbol{\xi} = g^{-1}\dot{g} \in \mathfrak{g}$，而 Q/G 是“关节空间”（将与 $\mathbb{V}^n$等同），其关节坐标为 r^I。此时动能具有 G不变性，而锁定速度则根据机械联络定义为 $\Omega^{\alpha} := u^{\alpha}$ （见第5节），其中

$$u^{\alpha} = \xi^{\alpha} + \mathcal{A}^{\alpha}_{I}(r^{I})\dot{r}^{I}. \tag{1.4}$$

当且仅当由动量守恒定义的约束因而Pfaff系统（1.4）可积时，曲率才为零。类似地，对于受约束系统，引入了运动学联络，定常约束表示为 $u^{\alpha} = 0$。空间运动受约束的力学系统是典型示例，其中约束限制了基体在 G中的运动。此时，对称群体现了约束的不变性，且当且仅当约束可积时曲率为零。受约束系统的动力学方程显然可由（1.2）令 $\Omega^{\alpha} = 0$得到。因此，在这两种情况下，均适用形式为（1.4）的运动学关系，曲率会出现在运动方程中，并且是运动规划与控制中的核心对象。

几何力学为有限维（离散）以及无限维（连续体）系统的建模、分析和控制提供了内在且无坐标框架。局部坐标表述，如上文所示，用于计算，在此过程中可能需要在不同的局部坐标图之间切换。在此背景下，(1.1、1.2) 是局部坐标下有限维系统的 Hamel方程 [10,11] 的一种具体形式，这一点值得重视，也是本文的主题。在几何力学中，Hamel方程如今以一种优雅的现代形式被引入，例如 [12],但代价是失去了其与原始 Hamel方程的联系。此外，几何框架与 Hamel 形式之间的关系，以及构型空间（丛）的联络和曲率与哈梅尔系数之间的关系，在文献中均未加以讨论。在未明确提及原始表述的情况下，(1.1、1.2) 被称为 Hamel方程 [8]。此外，在机器人学和多体系统动力学中，(1.1) 中的欧拉-庞加莱方程 $SE(3)$ 也常被交替称为 Hamel方程或欧拉-庞加莱方程，例如 [13]。

本文表明，式（1.1、1.2）中的系数可自然地推导为哈梅尔系数。这为原始 Hamel 形式与丛表述建立了联系。显式推导还使得能够统一文献中不同的局部曲率坐标表达式，这对于应用上述方程至关重要（见注5.3）。使用几何形式时，还需考虑若干方面。其中之一是锁定速度的概念 [3], 以及相关的平均速度概念 [14,15]；事实证明，这些概念是控制浮动基系统的有力工具。文中指出，不存在一个参考系能够与该速度相联系，且其运动是 $g \in G$ 和$\mathbf{r} \in \mathbb{V}^n$的函数，这对浮动基系统的控制有影响。本文讨论的另一方面是，由锁定速度所诱导的 Q 机械联络会将约化欧拉-拉格朗日方程内在地分解为水平和垂直两部分。一个重要结果是，方程（1.1、1.2）实现了惯性解耦，这与计算多体动力学相关。全文假设所有约束均为线性（即静定）且定常。

[1]本文中，“浮动基系统”涵盖一大类机械（控制）系统，其特征是基体可在空间中自由运动，其他刚体（连杆）通过关节等方式与其建立几何连接。

本文结构如下。第 2 节概述了无约束系统和受约束系统的经典哈梅尔方程。第 3 节将哈梅尔公式与（局部）平凡丛上的表述联系起来。由此得到的局部坐标中的哈梅尔系数关系，是后续各节推导的基础。第 4 节讨论具有对称性的运动学约束系统，此时构型空间 Q 是一个主丛，曲率系数 $\mathcal{B}^{\alpha}_{IJ}$ 则作为局部丛坐标中的哈梅尔系数得出。第 5 节将这一主丛方法用于具有 G-不变拉格朗日量的无约束系统，其中系数 $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta I}$ 可直接作为哈梅尔系数得出。本文以滚动球和漂浮卫星为例，展示方程的应用。最后，第 6 节讨论具有守恒动量的无约束浮动基系统，并简述几何相位和伪完整运动。第 6 节及补充材料 [16]报告了卫星和空间机器人 [3,17] 的数值模拟结果。关于背景知识，几何力学的优秀入门介绍可参见教科书 [4,9,18]以及综述文章 [3,19,20]。微分几何和丛的相关概念可参见 Q。所有推导均以哈梅尔的原始方法为出发点。该方法依赖于 Q/G 上的坐标，因此还需在对称群上引入局部坐标（但最终表述（1.1、1.2）只需要在参数空间为 Q的 $\mathbb{V}^n$上引入局部坐标）。这种方法适用于有限维系统，因为这类系统总能在 G 上找到局部坐标，并在 G 上找到典范坐标，例如多体系统。这与现代几何力学形成对比：现代几何力学以坐标无关的方式推导全局有效的方程，并在需要时引入局部坐标。不过，坐标表述有助于将几何方法与哈梅尔公式联系起来。本文始终假定 $\mathfrak{g}$ 是一个具有局部坐标的有限维李群。设李代数 $\mathbb{R}^n$与向量空间 $\in \mathfrak{g}$ 同构。那么，$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$表示与向量 $\mathbf{x} B^a_I u^I = \sum_I B^a_I u^I$ 对应的李代数元素。本文采用 Ricci 求和约定，例如 I表示对指标 求和。符号说明见附录 A。

2. 哈梅尔方程

(a) 准速度中的玻尔兹曼–哈梅尔方程

构型由以下内容描述： n 广义坐标 q^a、 $a=1$、……、 n，其参数流形为 $Q=\mathbb{V}^n$，并充当构型空间。以具有 n_{t} 平移和 n_{r} 转动关节的多体系统为例， $\mathbb{V}^n = T^{n_{\mathrm{r}}} \times \mathbb{R}^{n_{\mathrm{t}}}$，其中 n_{r}环面 $T^{n_{\mathrm{r}}}$ 以及 $n = n_{\mathrm{r}} + n_{\mathrm{t}}$。对于此类系统，广义坐标可能仅在局部有效。拟速度坐标 u^a、 $a=1$、……、 n，它们与广义速度相关$\dot{q}^a$ 通过

$$u^a = A^a_b \dot{q}^b, \quad \dot{q}^a = B^a_b u^b \tag{2.1}$$

其中 A^a_b和 B^a_b是$\mathbf{q}$的光滑函数。对于广义坐标向量$\mathbf{q} \in \mathbb{V}^n$ 和准速度$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$，这些关系可写成矩阵形式：

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\,\mathbf{u}. \tag{2.2}$$

假设 q^a 是有效的局部坐标，使得$\mathbf{A}$ 是正则的，并且$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$。 与相应拟坐标$u^a$ 之间的关系 π^a，$a=1$，……， n 由微分形式$d\pi^a = A^a_b dq^b$描述，逆关系则由 $dq^a = B^a_b d\pi^b$给出。当且仅当微分形式是恰当的，拟坐标才是广义坐标；否则， u^a 称为非完整速度 [21,22], 以下 [11, 第 473], [23, 页 218]。

记 $L(q^a, u^a)$ 为以准速度坐标 u^a表示的拉格朗日量，对于力学系统，它定义为动能 $T(q^a, u^a)$ 减去势能 $U(q^a)$。于是，哈梅尔方程 [10,11,22,24] 的变分形式为

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^a} - \frac{\partial L}{\partial \pi^a} - Q_a \right) \delta\pi^a + \frac{\partial L}{\partial u^a}\left(\frac{d\delta\pi^a - \delta d\pi^a}{dt} \right) = 0 \tag{2.3}$$

其中 Q_a 是与 u^a对偶的广义力。玻尔兹曼–哈梅尔方程的显式形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^a} - \frac{\partial L}{\partial q^b}B_a^b + \frac{\partial L}{\partial u^b}\gamma_{ac}^b u^c = Q_a \tag{2.4}$$

在代入过渡关系后得到

$$\frac{d\delta\pi^a - \delta d\pi^a}{dt} = \gamma_{cb}^a u^b \delta\pi^c \tag{2.5}$$

其中 γ_{cb}^a 是按如下方式定义的哈梅尔系数

$$\gamma_{ab}^c := \left(\frac{\partial A_r^c}{\partial q^s} - \frac{\partial A_s^c}{\partial q^r}\right) B_a^r B_b^s. \tag{2.6}$$

当且仅当（2.1）可积时，哈梅尔系数才恒等于零，即 u^a 是完整速度。方程（2.4）与运动学方程（2.1）共同支配非完整切丛中的动力学（即由非完整约束定义的切空间）。它们被称为玻尔兹曼–哈梅尔方程（例如见 [25,26]），因为玻尔兹曼曾于 [27,28] 提出过（形式非常相似的）方程，哈梅尔则于 [10,11,29]提出过相关方程。不过，是哈梅尔将它们推广到了李群上的系统 [24,29]。

许多力学系统的运动可描述在一个 n 维李群 G 上，因此准速度属于相应的李代数 $\mathfrak{g}$。如果 $g(t) \in G$，则可将此类准速度引入为左不变或右不变向量场，分别记为 $\hat{\mathbf{u}} = g^{-1}\dot{g}$ 或 $\hat{\mathbf{u}} = \dot{g}g^{-1}$。设 q^a为 G上的典范坐标，且 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 为 $\hat{\mathbf{u}} \in \mathfrak{g}$的向量表示，则（2.2）是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$的映射。采用准速度的左不变定义时，哈梅尔系数（2.6）与李群的结构常数 c_{ab}^c 相同。Hamel [24, 已在第 428] 页利用过渡关系 $d\delta\pi^a - \delta d\pi^a = \gamma_{cb}^a d\pi^c \delta\pi^c$证明了这一点。采用右不变准速度则会导致符号改变：$\gamma_{ab}^c = -c_{ab}^c$。此类准速度的典型例子包括角速度（其中 $G = SO(3)$）和刚体旋量（其中$G = SE(3)$）。于是，左不变性意味着角速度或旋量采用体固定表示，而右不变性则意味着采用空间表示 [30,31]。利用哈梅尔系数的定义，对 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 的哈梅尔系数进行明确推导，可参见[32]。显然，当且仅当 G 为阿贝尔群时，π^a 才是完整坐标。必须强调的是，G 上的典范坐标一般只在局部有效。这一点尤其适用于$SO(3)$，因而也适用于 $SE(3)$；由于它并非单连通，因此会产生众所周知的旋转参数化奇异性。

总之，李群上的哈梅尔方程是拉格朗日量 $L(q^a, u^a)$ 所对应的受迫欧拉-庞加莱方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^a} \pm c_{ac}^b \frac{\partial L}{\partial u^b}u^c = \frac{\partial L}{\partial q^b}B_a^b + Q_a \tag{2.7}$$

其中，正号适用于左不变准速度，负号适用于右不变准速度。这些是如下系统的约化欧拉-拉格朗日方程：其拉格朗日量在对称群作用下是（左或右）不变的 G [9,33]。

（b）受约束系统中的准速度哈梅尔方程

受约束系统的原始哈梅尔方程见于 [24]。速度 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ 现在受到 $\bar{m}$ 普法夫约束的限制，写作 $u^\alpha = 0$，$\alpha = 1, \ldots, \bar{m}$，其中

$$u^\alpha := A_a^\alpha(q^a)\,\dot{q}^a. \tag{2.8}$$

假设普法夫约束系统是正则的，即 $\bar{m}$ 约束是¯独立的。于是，引入 $\delta := n - \bar{m}$ 独立拟速度坐标，定义为

$$u^I = A_a^I(q^a)\,\dot{q}^a, \quad I = \bar{m}+1, \ldots, n \tag{2.9}$$

¯其中 δ 是系统的微分自由度（也称为瞬时自由度）[34,35]。上横线¯表示 δ 和 $\bar{m}$ 表明约束通常是非完整的。如果它们是可积的，则

¯是 $m=\bar{m}$ 几何约束，且 $\delta=n-m=\delta$ 是有限自由度。 $n-\bar{m}$ 独立坐标以大写拉丁字母 I, J,K为指标。Pfaff系统（2.8）和解（2.9）可概括为 $u^a=A_b^a(q^a)\,\dot{q}^b$，如式（2.1）所示，指标集为 $\{a\}=\{\alpha,I\}$。独立坐标仅在局部有效。此外，受约束系统的构型空间通常并非全局流形，而是具有奇异点。这严格限制了所有坐标表述的全局有效性。

用 $\mathcal{L}(q^a,u^b)$ 表示：$=L(q^a,B_b^a u^b)$，其中的拉格朗日量通过（ $\dot{q}^a$ 替换为 u^a，利用（2.1）得到。以独立速度u^I表示的受约束系统的哈梅尔方程，可由（2.4）得到：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^I}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^a}B_I^a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^a}\gamma_{IJ}^a u^J=Q_I,\quad I=\bar{m}+1,\ldots,n \tag{2.10}$$

其中， u^α、 $\alpha=1$、 $\ldots\bar{m}$ 在求导后置为零。广义力为 $Q_I=B_I^aQ_a$。（2.10）中的哈梅尔系数由（2.6）将指标限制为 I、 J后得到：

$$\gamma_{IJ}^a=\left(\frac{\partial A_b^a}{\partial q^c}-\frac{\partial A_c^a}{\partial q^b}\right)B_I^bB_J^c. \tag{2.11}$$

将 $n-\bar{m}$ 方程（2.10）与 n 运动学方程

$$\dot{q}^a=B_I^a\left(q^a\right)u^I,\quad I=\bar{m}+1,\ldots,n \tag{2.12}$$

共同构成以状态变量(q^a,u^I)表示的系统动力学。如果约束并非完全非完整，则并非所有 q^a 都相互独立。关系式（2.12）由（2.2）得出，假设 u^I 是切空间上的局部有效坐标，且约束是正则的。

准速度 u^I 可积，当且仅当 $\gamma_{IJ}^K\equiv0$。约束 (2.8)，以及由约束定义的余分布 $D^*\subset T^*\mathbf{q}Q$ with $D_{\mathbf{q}}^*:=$span (A (q))，在（Pfaff 意义下）可积，当且仅当 $\gamma_{IJ}^\alpha\equiv0$。因此，由 $D_{\mathbf{q}}:=$ker A (q) $\subset T_{\mathbf{q}}Q$ 定义在 Q 上的约束分布 D，在嘉当意义下可积，当且仅当哈梅尔系数为零且约束是正则的（A 的秩为常数）。这可能不适用于非正则约束。

3. 平凡丛上的运动学约束系统

许多运动学控制问题都可以在平凡丛上表述。之所以称为平凡，是因为存在独立速度与从属速度的全局分解。独立速度用作控制输入。此外，许多控制系统具有 Chaplygin 形式，即运动学关系仅取决于独立坐标。

（a）以完整速度表示的受约束哈梅尔方程

考虑由坐标 q^a 及其时间导数 $\dot{q}^a$而非非完整速度 u^I描述的（机械）系统，该系统受到定常非完整普法夫约束（2.8）的约束。可以选择一组（局部）独立的速度坐标。

¯一种特定的独立速度选取方式是使用 $\delta:=n-\bar{m}$ 坐标的时间导数。为此，将坐标划分为 $\mathbf{q}=(s^\alpha,r^I)\in\mathbb{V}^{\bar{m}}\times\mathbb{V}^{\bar{\delta}}=:Q$，其中$\dot{s}^\alpha$、1、.....、 $\bar{m}$ 为从属坐标，其余的 $\dot{r}^I,I=\bar{m}+1$,.....、 n 为独立速度坐标，即 $u^I:=\dot{r}^I$。这假定 $\dot{r}^I$ 是 Q上的有效局部坐标。请注意，对于非完整约束，这种依赖关系并不适用于坐标 s^α,r^I，而 Q则构成 n维构型空间。于是，约束（2.8）可写为

$$u^\alpha:=A_\beta^\alpha\left(q^a\right)\dot{s}^\beta+A_I^\alpha\left(q^a\right)\dot{r}^I,\alpha=1,\ldots,\bar{m} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{s}}\\ \dot{\mathbf{r}}\end{pmatrix},\ \text{with}\ \mathbf{A}_1=\left(A_\beta^\alpha\right),\mathbf{A}_2=\left(A_I^\alpha\right). \tag{3.2}$$

其中（3.2）与矩阵形式（2.2）相似。（3.1）和（3.2）的逆关系分别为

$$\dot{s}^{\alpha}=B_{\beta}^{\alpha}\left(q^{a}\right)u^{\beta}+B_{I}^{\alpha}\left(q^{a}\right)\dot{r}^{I} \tag{3.3}$$

$$\left(\begin{array}{c}\dot{\mathbf{s}}\\ \dot{\mathbf{r}}\end{array}\right)=\mathbf{B}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{u},\ \text{with}\ \mathbf{B}=\left(\begin{array}{cc}\mathbf{B}_{1} & \mathbf{B}_{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right),\ \text{with}\ \mathbf{B}_{1}=\mathbf{A}_{1}^{-1},\mathbf{B}_{2}=-\mathbf{A}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{2}. \tag{3.4}$$

结合$\mathbf{A}$在（3.2）和$\mathbf{B}$ 在（3.4）可由表达式（2.11得到哈梅尔系数

$$\begin{aligned}\gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}&=\left(\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial s^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}^{\alpha}}{\partial s^{\mu}}\right)B_{\beta}^{\mu}B_{\lambda}^{\nu}\\ \gamma_{IJ}^{\alpha}&=\left(\frac{\partial A_{r}^{\alpha}}{\partial q^{s}}-\frac{\partial A_{s}^{\alpha}}{\partial q^{r}}\right)B_{I}^{r}B_{J}^{s}\\ &=\frac{\partial A_{I}^{\alpha}}{\partial r^{J}}-\frac{\partial A_{J}^{\alpha}}{\partial r^{I}}+\left(\frac{\partial A_{\beta}^{\alpha}}{\partial s^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial s^{\beta}}\right)B_{I}^{\beta}B_{J}^{\mu}+\left(\frac{\partial A_{I}^{\alpha}}{\partial s^{\beta}}-\frac{\partial A_{\beta}^{\alpha}}{\partial r^{I}}\right)B_{J}^{\beta}+\left(\frac{\partial A_{\beta}^{\alpha}}{\partial r^{J}}-\frac{\partial A_{J}^{\alpha}}{\partial s^{\beta}}\right)B_{I}^{\beta}\\ \gamma_{\beta J}^{\alpha}&=\left(\frac{\partial A_{r}^{\alpha}}{\partial q^{s}}-\frac{\partial A_{s}^{\alpha}}{\partial q^{r}}\right)B_{\beta}^{r}B_{J}^{s}=\left(\frac{\partial A_{\nu}^{\alpha}}{\partial s^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial s^{\nu}}\right)B_{\beta}^{\nu}B_{J}^{\mu}+\left(\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial r^{J}}-\frac{\partial A_{J}^{\alpha}}{\partial s^{\beta}}\right)B_{\beta}^{\mu},\ \alpha=1,\ldots,\bar{m}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由于速度可积，因此 $\gamma_{ab}^{K}\equiv 0$成立。当且仅当约束为完整约束时，哈梅尔系数才为零。全文将以表达式（3.5）为核心，因为（3.5）中的各项使我们能够直接从哈梅尔表述推导具有对称性的系统的约化欧拉-拉格朗日方程的坐标形式。

拉格朗日量写作 $L(s^{\alpha},r^{I},\dot{s}^{\alpha},\dot{r}^{I})$，以表示坐标划分。与（2.10）中一样，用 $\mathcal{L}(s^{\alpha},r^{I},u^{a}):=L(s^{\alpha},r^{I},B_{\beta}^{\alpha}u^{\beta}+B_{I}^{\alpha}u^{I},u^{I})$ 表示将 $\dot{r}^{I}=u^{I}$和$\dot{s}^{\alpha}$ 替换为（3.3）后的拉格朗日量。哈梅尔方程由（2.10）得出。注意到 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^{\alpha}}=\frac{\partial L}{\partial\dot{s}^{\beta}}B_{\alpha}^{\beta}$，并且（稍微滥用一下记号）令 $u^{I}=\dot{r}^{I}$，便得到以独立完整速度表示的哈梅尔方程 $\dot{r}^{I}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}^{I}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r^{I}}+\frac{\partial L}{\partial\dot{s}^{\alpha}}\gamma_{IJ}^{\alpha}\dot{r}^{J}=Q_{I},\ \ I=\bar{m}+1,\ldots,n \tag{3.6}$$

其中 u^{α} 设为零，即解

$$\dot{s}^{\alpha}=B_{I}^{\alpha}\left(q^{a}\right)\dot{r}^{I} \tag{3.7}$$

对约束求导后施加。动力学方程（3.6）与运动学方程（3.7）共同描述受约束系统的非完整动力学，其状态$(q^{a},\ \dot{q}^{a})$ 在非完整切丛上演化。

（b）用丛联络表示的运动学约束

现在用 $u^{\alpha}=0$ 来表述运动学约束

$$u^{\alpha}:=\dot{s}^{\alpha}+\mathcal{A}_{I}^{\alpha}\left(q^{a}\right)\dot{r}^{I},\alpha=1,\ldots,\bar{m} \tag{3.8}$$

其中 $(\mathcal{A}_{I}^{\alpha}):=\mathbf{A}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{2}=-\mathbf{B}_{2}$，，其中 $\mathbf{B}_{2}=(B_{I}^{\alpha})$ 见（3.3）。结合 $u^{I}:=\dot{r}^{I}$，可将其写成矩阵形式:

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{A}}\left(\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}}=\left(\begin{array}{cc}\mathbf{I} & -\mathbf{B}_{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\dot{\mathbf{s}}\\ \dot{\mathbf{r}}\end{array}\right). \tag{3.9}$$

它具有显然的逆矩阵关系 $\dot{s}^{\alpha}=u^{\alpha}-\mathcal{A}_{I}^{\alpha}(q^{a})\ u^{I}$，类似于（3.7），因此

$$\dot{\mathbf{q}}=\bar{\mathbf{B}}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{u}=\left(\begin{array}{cc}\mathbf{I} & \mathbf{B}_{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right)\mathbf{u}. \tag{3.10}$$

注意到（3.9）和（3.10）的特定结构，且只有 $\mathcal{A}_I^\alpha$依赖于 $\mathbf{q}$，由（2.11）可得相应的哈梅尔系数 $\gamma_{\beta J}^\alpha = -\gamma_{J\beta}^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{A}_J^\alpha}{\partial s^\beta}$， 以及

$$\gamma_{IJ}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial r^J} - \frac{\partial \mathcal{A}_J^\alpha}{\partial r^I} + \frac{\partial \mathcal{A}_J^\alpha}{\partial s^\beta}\mathcal{A}_I^\beta - \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial s^\beta}\mathcal{A}_J^\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, \bar{m};\ I, J = \bar{m}+1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

构型空间 $Q = \mathbb{V}^{\bar{m}} \times \mathbb{V}^{\bar{\delta}}$被视为底流形 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$上的平凡丛[2]，其纤维为 $\mathbb{V}^{\bar{m}}$，丛坐标为 $(s^\alpha, r^I) \in \mathbb{V}^{\bar{m}} \times \mathbb{V}^{\bar{\delta}}$。该平凡丛的水平空间即为约束分布，也就是满足约束的速度所构成的向量空间。齐次运动学约束 (3.8) 在此丛上定义了一个联络。将约束写成普法夫形式 $\omega^\alpha := u^\alpha dt = ds^\alpha + \mathcal{A}_I^\alpha dr^I$ 的形式后，引入如下联络： $\mathcal{A} = \omega^\alpha \frac{\partial}{\partial s^\alpha}$。参照原始文献，该联络称为 Ehresmann 联络 [3,18,33]；[36]，和 $\mathcal{A}_I^\alpha$ 是该联络的局部坐标。由于它源于运动学约束，因此称为运动学联络 [18]。该联络将底流形 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$上的（独立）运动与纤维中的运动联系起来。该联络（即约束）是否为完整约束，可由其曲率揭示，曲率记为 $\mathcal{B}_{IJ}^\alpha$。此外，运动学联络的曲率在受约束机械系统的控制 [3,18,37]以及运动规划 [38] 中起着关键作用，因为它编码了底流形上的运动如何生成纤维中的运动。在平凡向量丛上，曲率 (1.3) 中的李括号是向量场 $\mathcal{A}_I, \mathcal{A}_J$在 Q上的李括号 $[\mathcal{A}_J, \mathcal{A}_I]^\alpha = \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial s^\beta}\mathcal{A}_I^\beta - \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial s^\beta}\mathcal{A}_J^\beta$，因此局部曲率为 $\mathcal{B}_{IJ}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial r^J} - \frac{\partial \mathcal{A}_J^\alpha}{\partial r^I} + [\mathcal{A}_J, \mathcal{A}_I]^\alpha$ [18, p。 32], [3, p。 108]。由此可见，Hamel 系数 (3.11) 与曲率的坐标形式有如下明确关系。

命题3.1。 哈梅尔系数（3.11）与运动学联络的曲率分量完全相同，运动学联络为 $\mathcal{A}$，在由约束（3.8）诱导的丛坐标s^I， r^α）中，即 $\mathcal{B}_{IJ}^\alpha = \gamma_{IJ}^\alpha$。

尽管本文使用了局部坐标，但需要指出的是，联络的曲率 $\mathcal{A}$是其协变导数，以无坐标形式写为 $\mathcal{B}(X, Y) = \mathrm{d}\mathcal{A}(X, Y) - [\mathcal{A}(X) \mathcal{A}(Y)],$，其中水平向量场为 X， Y，即 $\mathcal{B}^\alpha(X, Y) = \mathcal{B}_{IJ}^\alpha X^I Y^J = \gamma_{IJ}^\alpha X^I Y^J$。

注3.1。 当且仅当运动学联络是平坦的时，约束才是完整的，即曲率2-形式的 $\mathcal{B}_{IJ}^\alpha$分量恒等于零。在这种情况下， $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 充当构型空间。如果 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{r})$，则称约束为*Chaplygin*形式，这一术语源自*Chaplygin*的出版物 *[39,40]*。在这种情况下，哈梅尔系数（2.10）化为 $\gamma_{IJ}^\alpha = \frac{\partial A_I^\alpha}{\partial r^J} - \frac{\partial A_J^\alpha}{\partial r^I}$，这意味着$\frac{\partial A_I^\alpha}{\partial r^J} \equiv \frac{\partial A_J^\alpha}{\partial r^I}$ 对于 $ds^\alpha + \mathcal{A}_I^\alpha(r^J)dr^I = 0$的可积性，必须满足显然的条件。

(c) 平凡丛上的哈梅尔方程，Lagrange–d'Alembert方程

现在可以将哈梅尔系数视为局部曲率的分量。
受约束系统在完整丛坐标（r^I， s^α）下的哈梅尔方程如下
由（3.6）得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}^I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^I} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}^\alpha}\mathcal{B}_{IJ}^\alpha \dot{r}^J = Q_I, \quad I = \bar{m}+1, \ldots, n \tag{3.12}$$

其中 $Q_I = \mathcal{A}_I^a Q_a$，令 u^α 为零，并将 u^I 替换为 $\dot{r}^I$。动力学方程用丛的底流形上的坐标 r^I 表示。其余坐标，即纤维坐标，可由以下方程求解

$$\dot{s}^\alpha = -\mathcal{A}_I^\alpha\left(q^a\right)\dot{r}^I. \tag{3.13}$$

约束动力学由 Hamel 方程 (3.12) 以及运动学方程 (3.13) 支配。 方程 (3.12) 是通过约束的拉格朗日–达朗贝尔[2]$Q = M \times F$得到的。若一个丛可写为流形 M与 F的笛卡尔积，且存在投影 $\pi\colon Q \to M$ [19]，则该丛称为平凡丛。 F称为标准纤维。对于所研究的系统，底流形是与独立速度相对应的坐标子空间 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$，而纤维是与从属速度相对应的子空间 $\mathbb{V}^{\bar{m}}$。

方程的变分满足约束 $0=\delta s^{\alpha}+\mathcal{A}_I^{\alpha}(r^I)\delta r^I$ [3,8,18]；使用联络引入约束时，这是 Hamel 方程的一种特殊形式。

注 3.2。 引入约束拉格朗日函数 $L_{\mathrm{c}}(s^{\alpha},r^I,\dot{r}^I):=L(s^{\alpha},r^I,-\mathcal{A}_I^{\alpha}\dot{r}^I,\dot{r}^I)$ $=$ $\mathcal{L}$ s^{α} r^I $u^{\alpha}=0$ $u^I=\dot{r}^I$ (,,: , :),

即消去了约束后的拉格朗日量。哈梅尔方程（3.12）呈现出一种具有启发性的形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{\mathrm{c}}}{\partial\dot{r}^I}-\frac{\partial L_{\mathrm{c}}}{\partial r^I}+\frac{\partial L_{\mathrm{c}}}{\partial s^{\alpha}}\mathcal{A}_I^{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{s}^{\alpha}}\gamma_{IJ}^{\alpha}\dot{r}^J=Q_I,\quad I=\bar{m}+1,\ldots,n, \tag{3.14}$$

这揭示了约束非完整性的影响。这些方程见 *[37,第 326]*（令 $\gamma_{IJ}^{\alpha}=\mathcal{B}_{IJ}^{\alpha}$），而对于与 s^I 无关的约束，*Chaplygin* *[22,39]*也给出了类似形式。哈梅尔系数揭示了非完整约束的影响。显然，若这些约束完全是完整约束，则所得方程就是经典的拉格朗日方程。直接计算表明，（3.14）可写成如下形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}^I}-\frac{\partial L}{\partial r^I}+\mathcal{A}_I^a\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{s}^{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial s^{\alpha}}\right)=\mathcal{A}_I^aQ_a,\quad I=\bar{m}+1,\ldots,n \tag{3.15}$$

这些方程由沃罗涅茨 *[41,42]*, 提出，并称为沃罗涅茨方程 *[25,43]*。

4. 具有对称性的运动学约束机械系统

许多运动学约束系统具有主对称性，即运动学约束在对称群作用下保持不变 G。此时，构型空间可视为主丛[3]。此外，当运动学约束与群变量无关时，该主丛是平凡主丛。移动平台、机械臂或运动系统都是这类系统的例子，其中 G 通常是 $SE(3)$（刚体，即欧几里得）运动群的子群，而 $g\in G$ 描述基体的运动。其控制方程是主丛上的约化欧拉-拉格朗日方程。

(a) 平凡主丛上以联络表示的约束

假设（非完整）约束在李群 G的作用下保持不变。恰普雷金系统是其中的一个特例，其对称群为阿贝尔对称群。系统的构型空间被视为底流形 $Q=G\times\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 上的平凡主丛$\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$，其纤维为 G。假设 G 的维数等于约束的数量，并记为 $\bar{m}$ （与上一节保持一致）。通常，纤维元素$g\in G$ 表示系统在环境空间中的整体构型，常称为“体坐标”（或“刚性坐标”）。坐标 $\mathbf{r}=(r^I)\in\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 表示内部形状，称为“形状坐标”（或“内部变量”），而 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 称为形状空间。对于多体系统，$\mathbf{r}$ 是关节变量向量。请注意，r^I 通常仅是局部有效的坐标。当约束数量小于对称群 G 的维数时，文献 [44]探讨了非完整受约束机械控制系统的运动规划问题。

在 G 的作用下左不变的运动学约束可表示为 Pfaff 系统 $u^{\alpha}=0$，$\alpha=1,\ldots,\bar{m}$，其中

$$u^{\alpha}:=\xi^{\alpha}+\mathcal{A}_I^{\alpha}(r^I)\dot{r}^I \tag{4.1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\xi}}=g^{-1}\dot{g}\in\mathfrak{g}$，而 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^{\alpha})\in\mathbb{R}^n$ 是左平凡化下的纤维坐标。更准确地说，对于刚体系统（其中 $G=SE(3)$），$\boldsymbol{\xi}$是速度（也称为旋量），

[3]空间 $Q=G\times Q/G$ 是一个主丛，其中 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，它在 Q上自由且适当地作用，并配备投影 $\pi:Q\to Q/G$ [20]。在局部平凡化中，基空间 Q/G 可识别为流形B，使得 $Q=G\times B$。如果这种分解在全局上成立，则 Q 是一个平凡主丛。在局部平凡化中，采用局部坐标（$\xi^{\alpha},\dot{r}^I$），B 可识别为 $\mathbb{V}^{\delta}$。给定一个$\mathbf{r}\in\mathbb{V}^{\delta}$，$\pi^{-1}(\mathbf{r})$是位于$\mathbf{r}$上方的纤维。对于力学系统，$\mathbf{r}$描述系统的内部构型（形状），而纤维元素 $g\in G$ 表示基体的位姿。

采用“随体”表示法的参考体。约束（4.1）在平凡主丛上导出一个主丛联络，记作 $\mathcal{A}d\mathbf{r}=(\mathcal{A}_I^\alpha dr^I)$,

$$\mathcal{A}^{\text{kin}}=Ad_g(g^{-1}dg+\mathcal{A}d\mathbf{r})=dgg^{-1}+Ad_g(\mathcal{A}d\mathbf{r}) \tag{4.2}$$

因此，该联络的水平子空间就是满足约束的速度空间，而 $\mathcal{A}^{\text{kin}}$ 是一个 $\mathfrak{g}$-值一形式（可视为一种特殊类型的 Ehresmann 联络），称为运动学联络，因为它由（4.1）通过要求其满足G-等变性 [3] 而得到。之所以这样命名，是因为它根据运动学约束关联了底空间运动与纤维运动。使用（ $\mathcal{A}_I^\alpha$ （4.1）中的局部联络形式即可，因为它编码了所有相关信息。符号 $\mathcal{A}^{\text{kin}}$ 用于将其与局部形式 $\mathcal{A}_I^\alpha$ 的系数区分开来。接下来推导哈梅尔系数，并将其识别为运动学联络曲率的系数。

(b) 哈梅尔系数与运动学联络

受约束系统的动力学由约化的 Lagrange-d’Alembert-Poincaré 方程支配，这些方程由变分原理推导得出 [9,45]。为推导这些方程由于受约束哈梅尔方程需要相应的哈梅尔系数。

引理 4.1。 对于受到左 G不变约束的系统，*(2.10)* 中非零的哈梅尔系数为

$$\gamma_{IJ}^\alpha=\frac{\partial\mathcal{A}_I^\alpha}{\partial r^J}-\frac{\partial\mathcal{A}_J^\alpha}{\partial r^I}+c_{\lambda\mu}^\alpha\mathcal{A}_I^\lambda\mathcal{A}_J^\mu,\quad\alpha=1,\ldots,\bar{m}. \tag{4.3}$$

证明。为了应用哈梅尔系数的原始定义（2.6），在局部典范坐标 s^α，$\alpha=1$，……，$\bar{m}$ 上引入 G。然后将纤维坐标表示为$\xi^\alpha=A_\beta^\alpha(s^\alpha)\,\dot{s}^\beta$，其逆矩阵关系为 $\dot{s}^\alpha=B_\beta^\alpha(s^\alpha)\,\xi^\beta$，而（4.1）可写为

$$u^\alpha=A_\beta^\alpha\left(s^\alpha\right)\dot{s}^\beta+\mathcal{A}_I^\alpha(r^J)\dot{r}^I. \tag{4.4}$$

这类似于关系（3.1），其中 $A_\beta^\alpha=A_\beta^\alpha\left(s^\alpha\right)$ 以及 $A_I^\alpha=A_I^\alpha\left(r^J\right)$。逆矩阵关系为

$$\dot{s}^\alpha=B_\beta^\alpha\left(s^a\right)u^\beta-B_\beta^\alpha\left(s^a\right)\mathcal{A}_I^\beta(r^J)u^I \tag{4.5}$$

其中 B_β^α定义于 (3.4)。注意到 A_a^I =为常数，受约束系统唯一非零的哈梅尔系数为 γ_{IJ}^α。将 (3.5) 中的 $A_I^\alpha(r^J)$ 替换为 $\mathcal{A}_I^\alpha(r^J)$，并将 B_I^α替换为 $-B_\beta^\alpha(s^a)\,\mathcal{A}_I^\beta(r^J)$，即可立即求得它们:

$$\gamma_{IJ}^\alpha=\frac{\partial\mathcal{A}_I^\alpha}{\partial r^J}-\frac{\partial\mathcal{A}_J^\alpha}{\partial r^I}+\left(\frac{\partial A_\delta^\alpha}{\partial s^\lambda}-\frac{\partial A_\lambda^\alpha}{\partial s^\delta}\right)B_\gamma^\delta B_\mu^\lambda\mathcal{A}_I^\gamma\mathcal{A}_J^\mu. \tag{4.6}$$

Hamel 已经证明 [24, 第 428] 这些项 $\gamma_{\beta\lambda}^\alpha=\left(\frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial s^\nu}-\frac{\partial A_\nu^\alpha}{\partial s^\mu}\right)B_\beta^\mu B_\lambda^\nu=c_{\beta\lambda}^\alpha$ 是……的结构常数 G。较新的参考文献见 [46, 第 301]。这一点在 [32] 中针对 $SO(3)$ 和$\overline{SE}(3)$ 使用哈梅尔系数的原始定义进行了明确推导。 □

表达式（4.3）是联络 $\mathcal{A}^{\text{kin}}$ 在主丛上的局部曲率系数，可能相差一个符号 [19,47]（符号约定见注 5.3）。在几何力学的语境下，可以表述如下 [18, 请注意第 44]页上的更正。

命题 4.1。 左不变运动学约束（4.3）的哈梅尔系数（4.1）是相应左平凡化主丛上以丛坐标 $(\xi^\alpha,\ \dot{r}^I)$ 定义的运动学联络的曲率（1.3）的分量：$\mathcal{B}_{IJ}^\alpha=\gamma_{IJ}^\alpha$。注意到曲率系数与哈梅尔系数相同，因此，当且仅当约束是完整的时，联络才是平坦的。

此外，主丛上的曲率也可以无坐标地定义为协变导数 $\mathcal{B}(X,\ Y)=\mathrm{d}\mathcal{A}(X,\ Y)-[\mathcal{A}(X)\ \ \mathcal{A}(Y)],$，其中水平向量场为 $X,\ Y$，此处使用 $\mathfrak{g}$ 上的李括号。在局部坐标中，它为 $\mathcal{B}^{\alpha}(X,\ Y)=\gamma_{IJ}^{\alpha}X^{I}Y^{J}$。

注 4.1。若采用右平凡化，即 $\hat{\boldsymbol{\xi}}=\dot{g}g^{-1}\in\mathfrak{g}$ 为右不变向量场（例如使用空间速度），则 $\gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}=\left(\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial s^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}^{\alpha}}{\partial s^{\mu}}\right)B_{\beta}^{\mu}B_{\lambda}^{\nu}=-c_{\beta\lambda}^{\alpha}$，且哈梅尔系数（4.3）为

$$\gamma_{IJ}^{\alpha}=\frac{\partial\mathcal{A}_{I}^{\alpha}}{\partial r^{J}}-\frac{\partial\mathcal{A}_{J}^{\alpha}}{\partial r^{I}}-c_{\lambda\mu}^{\alpha}\mathcal{A}_{I}^{\lambda}\mathcal{A}_{J}^{\mu},\ \ \alpha=1,\ldots,\bar{m}. \tag{4.7}$$

注 4.2。约束（4.1）在 G上导出一个运动学控制系统，可写为$\xi^{\alpha}=-\mathcal{A}_{I}^{\alpha}(r^{I})\,\dot{r}^{I}$。具有对称性的此类控制系统已在多篇文献中讨论，例如 *[38,44,48,49]*。该无漂移控制问题的可控性由控制向量场 $\mathcal{A}_{I}^{\alpha}$以及它们所定义的纤维上的分布编码。写作 $\dot{g}=-g\mathcal{A}\dot{d}\mathbf{r}$ 表明，联络描述了形状空间中的一条路径如何提升为群中的一条路径（称为该曲线的水平提升），这是运动学控制的基础。水平提升形状空间中的一条闭曲线后，群变量的净变化即为整体单值群（在此语境中称为几何相位）。后者与运动学联络的曲率相关。设 ϕ 为 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$中的一条闭合路径。几何相位可由下式求得

$$g\left(\phi\right)=-\oint_{\phi}g\mathcal{A}d\mathbf{r}=-\int_{\Phi}\mathcal{B}+\mathrm{hot}. \tag{4.8}$$

利用 $\dot{g}=g\hat{\boldsymbol{\xi}}=-g\mathcal{A}\dot{\mathbf{r}}$，其中 Φ是路径在 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$中所围成的面积，且 $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_{IJ}^{\alpha}dr^{I}dr^{J})$。如果约束是完整的，即曲率为零，那么几何相位也为零。这是运动规划中的一个重要关系：闭合路径 ϕ 代表一种步态，而目标是使步态 *[38]*在 G 中产生的净运动最大化。第 6节将进一步讨论几何相位。

（c）哈梅尔方程、拉格朗日–达朗贝尔–庞加莱方程

假设定义在构型空间 Q上的拉格朗日量 $L(g,r^{I},\dot{g},\dot{r}^{I})$具有（左或右） G-不变性，因此可以在相应的丛平凡化上引入约化拉格朗日量 $l(r^{I},\xi^{\alpha},\dot{r}^{I})$。假设 G 中的运动完全由底流形上的运动决定，即群轨道与约束互补。这称为“主运动学情形” [3,18]，因为此时纤维上不再有动量方程。

Pfaff 方程（4.1）可解析为 $\xi^{\alpha}=u^{\alpha}-\mathcal{A}_{I}^{\alpha}\dot{r}^{I}$。在 Hamel 形式中，将$u^{\alpha}$ 视为中间坐标，并令 $u^{\alpha}=0$，即可得到约束解。用 $\ell(r^{I},u^{\alpha},u^{I}):=l(r^{I},\xi^{\alpha}:=u^{\alpha}-\mathcal{A}_{I}^{\alpha}\dot{r}^{I},\dot{r}^{I}:=u^{I})$ 表示关于 (4.1) 中的 u^{α} 和 $\dot{r}^{I}:=u^{I}$ 的拉格朗日量。受约束系统的哈梅尔方程（2.10）利用命题 4.1 表示为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\ell}{\partial\dot{r}^{I}}-\frac{\partial\ell}{\partial r^{I}}=\frac{\partial l}{\partial u^{\beta}}\mathcal{B}_{IJ}^{\beta}\dot{r}^{J}+Q_{I},\ \ I=\bar{m}+1,\ldots,n \tag{4.9}$$

其中 u^{α}设为零，并且 $u^{I}=\dot{r}^{I}$。当令 $\Omega^{\alpha}=u^{\alpha}=0$1.2时，这些确实就是方程（1.2）。纤维中的速度通过运动学联络得到，即 $\xi^{\alpha}=-\mathcal{A}_{I}^{\alpha}(\mathbf{r})\,\dot{r}^{I}$，这是（3.13）的主丛等价形式。在几何力学中，方程（4.9）可作为拉格朗日–达朗贝尔–庞加莱方程得到，其变分满足约束 $u^{\alpha}=0$，其中（4.1）。通过求解运动学重构方程(t)，可得到纤维 G 中的运动 运动学重构方程

$$\dot{g}=g\hat{\boldsymbol{\xi}}\ \ (\text{left trivialization})\quad\ \text{or}\quad\ \dot{g}=\hat{\boldsymbol{\xi}}g\ \ (\text{right trivialization}) \tag{4.10}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=-\mathcal{A}\dot{\mathbf{r}}$。哈梅尔方程（4.9）与重构方程（4.10）共同支配主丛 Q 上受约束系统的动力学。恰普雷金系统（注 3.1）是具有阿贝尔对称群 $G=\mathbb{R}^{\bar{m}}$ 的特殊情形，其中 $\mathcal{B}_{IJ}^{\alpha}=\frac{\partial\mathcal{A}_{J}^{\alpha}}{\partial r^{I}}-\frac{\partial\mathcal{A}_{I}^{\alpha}}{\partial r^{J}}$。

注 4.3。 方程（4.10）是 G 上的泊松方程。在刚体运动学中，它们被称为左、右泊松–达布方程，指的是 *[50]*，，或者被称为广义泊松–达布方程 *[51]*。为求解 G 上的这些微分方程，g 被表示为某个 $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathfrak{g}$的指数，并且（4.10）被以下 $\mathfrak{g}$上的微分方程所替代

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \mathrm{dexp}^{-1}_{-\hat{\boldsymbol{\eta}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = -\mathrm{dexp}^{-1}_{-\hat{\boldsymbol{\eta}}}(\mathcal{A}\dot{\mathbf{r}}), \text{ with } g = g_0 \exp(\hat{\boldsymbol{\eta}}) \text{ (left trivialization)} \tag{4.11}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \mathrm{dexp}^{-1}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = -\mathrm{dexp}^{-1}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(\mathcal{A}\dot{\mathbf{r}}), \text{ with } g = \exp(\hat{\boldsymbol{\eta}}) g_0 \text{ (right trivialization)}$$

初值为 $g_0 \in G$，其中 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \in \mathfrak{g}$ 表示 G的局部典范参数化，而 $dexp$ 是 G上 exp 映射的右平凡化微分。后者定义为 $\dot{g}g^{-1} = dexp_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}})$，假设 $g = exp(\hat{\boldsymbol{\eta}})g_0$。这一替换是李群积分方案中的关键步骤 *[52–54]*。对于许多与固体力学相关的李群，$dexp$ 映射存在闭式表达，尤其是 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ *[55]*。$dexp$ 和 $dexp^{-1}$ 映射可通过截断级数展开求值。

（d）示例：均质球无滑动、无自旋滚动

作为一个简单示例，考虑一个在水平面上作纯滚动的球，也就是说，除了满足无滑动滚动约束外，还受到进一步约束，不能绕其瞬时垂直轴自旋；该轴与平面法向平行。其构型由球的朝向及其与平面的接触点位置描述。构型空间是丛 $SO(3) \times \mathbb{R}^2$，其底空间为 $M = \mathbb{R}^2$。纤维 $G = SO(3)$（即朝向）中的运动完全由接触点的运动决定，因此该示例属于“主运动学情形”。由于约束和势能（引力）具有右G不变性，动能具有双不变性，因此构型空间可视为右平凡化的平凡主丛。假设球的质心（COM）位于其几何中心。记从接触点指向球质心的向量为 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$，以 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ 表示接触点的位置，而 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 描述体固定参考系 $\mathcal{F}_\mathrm{b}$ 相对于惯性坐标系 $\mathcal{F}_0$的旋转。球的空间表示角速度 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \cong so(3)$ 定义为

$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \in so(3)$。所有向量均在惯性坐标系$\mathcal{F}_0$中表示。引入该参考系，使其 3 轴平行于平面法向并沿其方向，因此 $\boldsymbol{\rho} = (0,\ 0,\ R)^T$，其中 R为球的半径。

滚动条件为 $\mathbf{0} = \dot{\mathbf{p}} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\omega}$，可转化为 $\mathbf{0} = \tilde{\boldsymbol{\rho}}\dot{\mathbf{p}} + R^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T)\boldsymbol{\omega}$。这里，$\tilde{\boldsymbol{\rho}}$是反对称矩阵，使得向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的叉积为 $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$，用分量表示为 $\varepsilon_{ijk}x^j y^k$，其中 ε_{ijk}为列维-奇维塔符号。无自旋条件为 $0 = \boldsymbol{\rho}^T\boldsymbol{\omega}$，这意味着约束 $\omega^3 = 0$，滚动条件可简化为

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{R^2}\tilde{\boldsymbol{\rho}}\dot{\boldsymbol{\rho}} \qquad 0 = \frac{1}{R^2}\varepsilon_{\alpha JI}\rho^J = \mathbf{p}。$$

$$\frac{1}{R}\varepsilon_{\alpha 3I} \qquad = r^4\ r^5 = p^1\ p^2 \in \mathbb{R}^2$$

由于沿着平面法向，滚动条件为 。‘形状坐标’ $\mathbf{r}(\,,)(\,,)$ 是接触点的坐标

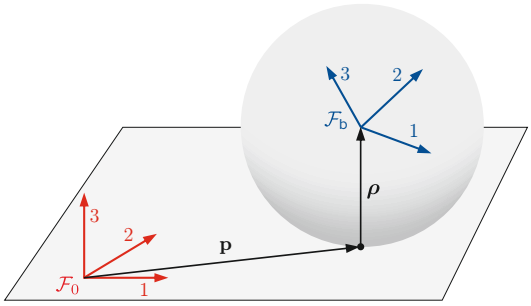

图 1. 球绕垂直轴滚动且不自旋。

¯在平面上的位置。为简洁起见，记 $I=I-3$。局部丛坐标为 ω^α，$\alpha=1$，2，3 和 $\dot r^I=\dot{\bar p}^{\bar I}$，$I=4$，5。$\bar m=3$ 运动学约束为 $0=u^\alpha$，$\alpha=1$，2，3，

$$u^\alpha:=\omega^\alpha+\mathcal{A}^\alpha_I\dot r^I,\quad \mathcal{A}^\alpha_I:=\begin{cases}\frac{1}{R}\varepsilon_{\alpha 3\bar I}, & \alpha=1,2\\ 0, & \alpha=3\end{cases}. \tag{4.12}$$

哈梅尔系数为 $\gamma^\alpha_{IJ}=-c^\alpha_{\beta\mu}\mathcal{A}^\beta_I\mathcal{A}^\mu_I$，　I，$J=4$，5（负号源于右平凡化），仅当 $\alpha=3$　β $\mu=1$ 2　$c^\alpha_{\beta\mu}\mathcal{A}^\beta_I\mathcal{A}^\mu_J=$as，，时非零。计算得 $\frac{1}{R^4}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}\varepsilon_{\beta r\bar I}\varepsilon_{\mu s\bar J}\rho^r\rho^s=\frac{1}{R^4}\ \delta_{\mu r}\delta_{\alpha\bar I}-\delta_{\mu\bar I}\delta_{\alpha r}\ \varepsilon_{\mu s\bar J}\rho^r\rho^s=-\frac{1}{R^4}\rho^\alpha\varepsilon_{\bar I s\bar J}\rho^s=-\frac{1}{R^2}\rho^\alpha\mathcal{A}^\beta_J\delta^{\bar I}_\beta$ 出¯（），因此

$$\gamma^\alpha_{IJ}=\begin{cases}0, & \alpha=1,2\\ \frac{1}{R}\mathcal{A}^{\bar I}_J, & \alpha=3\end{cases}. \tag{4.13}$$

总之，非零系数为 $\mathcal{A}^2_4=-\mathcal{A}^1_5=\frac{1}{R}$ 和 $\mathcal{B}^3_{54}=-\mathcal{B}^3_{45}=\gamma^3_{54}=\frac{1}{R^2}$。

拉格朗日量与动能相同（势能不会影响球的运动）。右约化拉格朗日量为 $l(\omega^\alpha,\ \dot r^I)=\frac{m}{2}\delta_{IJ}\dot r^I\dot r^J+\frac{1}{2}\Theta_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta$，其中 $\Theta_{\alpha\beta}$ 是均质球相对于其质心、在空间惯性系 $\mathcal{F}_0$ 中表示的惯性张量，m 是其质量。用 $u^I=\dot r^I$ 和 u^α 表示的拉格朗日量（见4.12）为

$$\ell(u^\alpha,u^I)=l(\omega^\alpha:=u^\alpha-\mathcal{A}^\alpha_Ju^I,\dot r^I:=u^I)=\frac{m}{2}\delta_{IJ}u^Iu^J+\frac{1}{2}\Theta_{\alpha\beta}(u^\alpha-\mathcal{A}^\alpha_Iu^I)(u^\beta-\mathcal{A}^\beta_Ju^J). \tag{4.14}$$

哈梅尔方程（4.9）在 $Q_I=0$ 条件下可写为（其中 $r^I=p^{\bar I}$）

$$(m\delta_{IJ}-\Theta_{\alpha\beta}\mathcal{A}^\alpha_I\mathcal{A}^\beta_J)\ddot r^J-\frac{1}{R}\Theta_{3\beta}\mathcal{A}^\beta_K\dot r^K\mathcal{A}^{\bar I}_J\dot r^J=0,\quad I=4,5 \tag{4.15}$$

其中 α，$\beta\in\{1,2\}$。式（4.15）中的第二项是纯滚动产生的陀螺力矩所导致的力。为说明这一点，注意到 $\pi_3=\Theta_{3\beta}\mathcal{A}^\beta_K\dot r^K$ 是滚动所产生的角动量 $\pi_\alpha=\Theta_{\alpha\beta}\omega^\beta$ 的垂直分量（注意 $\omega^3=0$），而陀螺力矩为 $\varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\omega^\beta\pi_\lambda$。该力由此力矩与 $\boldsymbol{\rho}$ 的叉积得到，注意 $\pi_1=\pi_3=0$ 和 $\omega_3=0$。

注释 4.4。通过允许拉格朗日量在对称群的某个子群作用下保持不变，可以扩展主运动学情形 G，即该子群的无穷小生成元属于约束分布。此时称系统具有水平对称性（相对于约束）[3,4,18]。在这种情况下，可以引入运动学联络，以及一个用于描述水平对称性的联络。具有水平对称性的力学系统的一个例子是球在平面上运动，即可以绕平面法向自由自旋的滚动球，这一例子曾用于[4,18]。水平对称性源于动量在子群 $SO(2)\subset SO(3)$ 绕平面法向旋转的作用下保持不变。其 $\bar m$ 滚动约束是上文条件的第 *1* 和第 *2* 个分量 $\mathbf{0}=\dot{\mathbf{r}}+\tilde{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\omega}$。不变动量是 $\boldsymbol{\Theta\omega}$ 的第 *3* 个分量。

5. 具有对称性的浮动基座机械系统

如果拉格朗日量 $L\colon TQ\to\mathbb{R}$ 具有 G-不变性，且可写为 $L(g,r^I,\dot g,\dot r^I)$，则将 n 维构型空间视为一个主丛，它允许局部平凡化 $Q=G\times Q/G$。这与第 4 节中对受约束系统的表述相似，在那里，G 是约束的对称群。商空间 Q/G 仍是形状空间，在局部可将其识别为 $\mathbb{V}^{\bar\delta}$。这一框架适用于许多具有对称不变量的力学系统。典型例子是浮动多体系统（人形机器人、空中飞行器、空间机器人），其中纤维 G 是 $SE(3)$ 的一个子群，表示整体空间运动，而 $Q/G\cong\mathbb{V}^{\bar\delta}$ 表示内部形状。在这一框架下，早期被视为受控浮动基座系统的问题之一是坠落猫问题 [56–61]。

例如，考虑人体（或人形机器人）模型。髋部空间运动由 $g\in G=SE(3)$ 描述，身体段的运动（身体形状）相对于髋部由关节变量（角度）$\mathbf{r}\in\mathbb{V}^{\bar\delta}$ 描述。动能在左侧保持不变

G-作用，而势能在绕引力向量的旋转下保持不变。因此，在显然的选择 $G=SE(3)$ 下，并将拉格朗日量定义为动能减去势能，Q 不是主丛。这种情况称为对称性破缺。然而，对于大多数力学系统，都可以定义一个 G-不变的拉格朗日量，例如将其限制为动能，并单独纳入势力。此外，对于离散机械系统而言，该丛通常是平凡的，因此构型空间为 $Q=G\times M$，形状空间为 M，在下文中将其识别为 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$，如第 4 节所述。对于浮动基座多体系统而言，这自然成立。下文假设 Q 是一个主丛，并假设存在局部平凡化。在局部丛平凡化中，拉格朗日量写为 $l(r^I,\xi^\alpha,\dot{r}^I)=T(r^I,\xi^\alpha,\dot{r}^I)-V(r^I)$（注意，仍然可以引入依赖于形状变量 r^I 的势能，例如用于描述柔性元件）。

（a）玻尔兹曼–哈梅尔方程 约化欧拉–拉格朗日方程

玻尔兹曼–哈梅尔方程用速度坐标（u^a）$=(\xi^\alpha、\ \dot{r}^I)$ 表示，其中 $\xi^\alpha=A^\alpha_\beta\ (s^\alpha)\ \dot{s}^\beta$ 用典范坐标 s^β 在 G 上表示（如第 4(b) 节所示）。注意到 $\dot{r}^I$ 是可积的，哈梅尔系数 $\gamma^I_{bc}\equiv 0$ 可立即得到；再注意到 ξ^α 与 r^I无关，$\gamma^\alpha_{bc}\equiv 0$可由（2.6）得到。其余系数 $\gamma^\alpha_{\beta\delta}=\pm c^\alpha_{\beta\delta}$ 是 G 的结构常数（引理 4.1）。因此，作用于拉格朗日量 l（r^I、ξ^α、$\dot{r}^I$）的玻尔兹曼–哈梅尔方程（2.4）即为众所周知的方程 [9,33]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \xi^\alpha}\pm\frac{\partial l}{\partial \xi^\beta}c^\beta_{\alpha\lambda}\xi^\lambda=0 \tag{5.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \dot{r}^I}-\frac{\partial l}{\partial r^I}=0 \tag{5.2}$$

其中在（5.1）中，正号适用于左-平凡化 （$\hat{}\xi=g^{-1}\dot{g}$ 体速度），而
使用右平凡化（$\hat{}\xi=\dot{g}g^{-1}$ 空间速度）时，符号为负。基座运动是
结合相应的运动学方程（4.10）重构。

<escape>上述方程显然分为欧拉-庞加莱方程（5.1）和欧拉-拉格朗日方程（5.2），其中第一个方程（5.1）在使用动量 G 表示时，也可以写成 $\Pi_\alpha=\frac{\partial l}{\partial \xi^\alpha}$ 上的李-泊松方程。尽管这里仅使用 Hamel 形式推导了这些方程，但它们也曾作为约化欧拉-拉格朗日方程，通过 [9,33] 上的变分原理推导得到 Q。所涉及的变分并非内在的，因为它们没有分别分解为纤维和底流形上的变分。这种分解能够使方程解耦，并使定义动能的质量矩阵实现块对角化。具体而言，通过对 ξ^α 进行变分，同时令 $\dot{r}^I$ 的变分为零，即将形状速度设为零，从几何角度看，这等价于主丛垂直空间中的变分。接下来将使用联络对这一过程进行形式化描述。</escape>

（b）机械联络与锁定速度

引入联络不像运动学约束那样显而易见。起点是约化拉格朗日量 $l(r^I,\xi^\alpha,\dot{r}^I)=T(r^I,\xi^\alpha,\dot{r}^I)-V(r^I)$，其势能为 $V(r^I)$，动能为

$$T(r^I,\xi^\alpha,\dot{r}^I)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}^T & \dot{\mathbf{r}}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{L}(\mathbf{r}) & \mathbf{K}(\mathbf{r})\\ \mathbf{K}^T(\mathbf{r}) & \mathbf{S}(\mathbf{r})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \dot{\mathbf{r}}\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

用质量矩阵表示

$$\mathbf{M}(\mathbf{r})=\begin{pmatrix}\mathbf{L}(\mathbf{r}) & \mathbf{K}(\mathbf{r})\\ \mathbf{K}^T(\mathbf{r}) & \mathbf{S}(\mathbf{r})\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

它定义了一个 G上的不变度量 Q。因此，与纤维相关的动量 $\Pi_\alpha = \frac{\partial l}{\partial \xi^\alpha}$ 为$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}\ \boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{L}(\mathbf{r})\ \boldsymbol{\xi} + \mathbf{K}(\mathbf{r})\ \dot{\mathbf{r}}$。 如果 $\boldsymbol{\xi}$与 $\dot{\mathbf{r}}$之间的这一关系无法积分以定义 g 与$\mathbf{r}$之间的关系，则称该动量为非完整的。

对于一个浮动多体系统，例如，其中 ξ^α 是浮动基体的旋量坐标，动量余旋量 $\boldsymbol{\Pi} \in \mathfrak{g}^* = se^*$ (3) 包含角动量和线动量。于是可以引入锁定速度 $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega^\alpha) \in \mathfrak{g}$，使得$\mathbf{L}(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{L}(\mathbf{r})\ \boldsymbol{\xi} + \mathbf{K}(\mathbf{r})\ \dot{\mathbf{r}}$。这个名称源于这样的观察： $\boldsymbol{\Omega}$是基体速度；当系统被视为刚体时，也就是当 $\dot{\mathbf{r}} = 0$时，它会产生相同的动量 $\boldsymbol{\Pi}$。在人形机器人示例中，这就是所有关节瞬时锁定时髋部所达到的速度。因此，$\mathbf{L}(\mathbf{r}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ 称为锁定惯性张量，而$\mathbf{S}$ 是与形状坐标相关的惯性，$\mathbf{K}$ 是交叉耦合惯性。如果 ξ^α 是体固定表示（即左不变）下基体旋量的坐标，那么 $\boldsymbol{\Omega} \in \mathfrak{g}$ 通常称为锁定体速度。

对 $\mathfrak{g}$ 的这种坐标变换通过主丛 Q 上的联络 $\mathcal{A}^{\text{mech}} = Ad_g(g^{-1}dg + \mathcal{A}d\mathbf{r})$ 形式化。局部联络一形式定义为 $(\mathcal{A}_I^\alpha) := \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}$，从而速度偏移为

$$\Omega^\alpha = \xi^\alpha + \mathcal{A}_I^\alpha(r^I)\dot{r}^I. \tag{5.5}$$

因此定义的联络称为机械联络 [8,9] 其建立在 [62]中讨论的概念之上。与运动学联络不同，它通过动量定义。该联络可视为 Chaplygin 形式，因为它独立于群变量。请注意，这严格依赖于局部丛平凡化，因为 Q 可能不是平凡主丛。锁定速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 是相对于机械联络的垂直部分。

注释 5.1。 锁定速度的一个重要特性是，它无法与运动由 $h(g,\mathbf{r}) \in G$ 依赖于某个 g和 $\mathbf{r}$的参考系相关联，因此 $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = h^{-1}\dot{h}$。这是由以下事实直接推出的： Ω是由非完整动量 $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}\ \boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{r}})$ 定义的（见第5(e)节）。

注释 5.2。 浮动基系统的主丛观点与规范理论有着有趣的联系。在规范理论中，对称性与规范不变性相关联， G 称为“规范群”，而联络一形式 $\mathcal{A}$ 在 （5.5） 中称为“规范势” *[47]*。文献 *[60]*, 讨论了坠落猫问题及类似的非完整控制系统；文献 *[63,64]*,则更一般地讨论了“可变形体”（能够改变形状的力学结构），而文献 *[1]*讨论了麦克斯韦场或杨–米尔斯场。在规范理论中，联络的等变条件描述了从局部规范$\mathcal{A}$ 到新的 $\mathcal{A}' = Ad_g(g^{-1}dg + \mathcal{A}d\mathbf{r})$ *[19,65]*的规范变换。对于力学系统，它描述了从一个体固定参考系到另一个体固定参考系的变换，在这些参考系中测量速度。在 *[63,64]*， $\mathcal{A}_I^\beta$ 被称为主规范，而其曲率则被视为场强。

（c）Hamel 系数与机械联络

这里再次采用哈梅尔系数的原始定义（2.6），推导出如今使用几何力学的方法所得到的关系。

引理 5.1。丛坐标 $(\Omega^\alpha, \dot{r}^I)$ 中的哈梅尔系数为 $\gamma_{ab}^I \equiv 0$，且

$$\gamma_{\beta\delta}^\alpha = \pm c_{\beta\delta}^\alpha \tag{5.6}$$

$$\gamma_{J\beta}^\alpha = -\gamma_{\beta J}^\alpha = \pm c_{\beta\delta}^\alpha \mathcal{A}_J^\delta \tag{5.7}$$

$$\gamma_{IJ}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial r^J} - \frac{\partial \mathcal{A}_J^\alpha}{\partial r^I} + \gamma_{J\beta}^\alpha \mathcal{A}_I^\beta = \frac{\partial \mathcal{A}_I^\alpha}{\partial r^J} - \frac{\partial \mathcal{A}_J^\alpha}{\partial r^I} \pm c_{\beta\lambda}^\alpha \mathcal{A}_I^\beta \mathcal{A}_J^\lambda \tag{5.8}$$

其中， $\pm$ 的正号适用于左平凡化，负号适用于 G-丛的右平凡化。

证明。 典范坐标 s^α 定义于 G，它们与纤维坐标的关系为 $\xi^\alpha = A^\alpha_\beta(s^\alpha)\,\dot{s}^\beta$ 和 $\dot{s}^\alpha = B^\alpha_\beta(s^\alpha)\,\xi^\beta$，分别参见第 4(b)节。关系式（5.5）及其逆矩阵可写为

$$\Omega^\alpha = A^\alpha_\beta\left(s^\alpha\right)\dot{s}^\beta + \mathcal{A}^\alpha_I(r^J)\dot{r}^I \tag{5.9}$$

$$\dot{s}^\alpha = B^\alpha_\beta\left(s^a\right)\Omega^\beta - B^\alpha_\beta\left(s^a\right)\mathcal{A}^\beta_I(r^J)u^I \tag{5.10}$$

采用锁定速度，准速度表示为 $(u^a) = (u^\alpha, u^I) = (\Omega^\alpha, \dot{r}^I)$，因此可表示为 (2.1) 的形式，其中 $B^I_J = \delta^I_J$ 且 $B^I_\beta \equiv 0$，或者写成矩阵形式

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \left(A^\alpha_\beta\right) & \left(\mathcal{A}^\alpha_I\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(B^\alpha_\beta\right) & -\left(B^\alpha_\beta\mathcal{A}^\beta_I\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{u}. \tag{5.11}$$

关系式 (2.6) 按坐标 Ω^α 和 $\dot{r}^I$分别拆分。系数 $\gamma^\alpha_{\beta\delta} = \left(\frac{\partial A^\alpha_\mu}{\partial s^\lambda} - \frac{\partial A^\alpha_\lambda}{\partial s^\mu}\right) B^\mu_\beta B^\lambda_\delta = \pm c^\alpha_{\beta\delta}$同样由 G 的结构常数确定，因此

$$\gamma^\alpha_{\beta J} = \left(\frac{\partial A^\alpha_\delta}{\partial s^\lambda} - \frac{\partial A^\alpha_\lambda}{\partial s^\delta}\right) B^\lambda_\beta B^\delta_\gamma \mathcal{A}^\gamma_J = \pm c^\alpha_{\beta\delta}\mathcal{A}^\delta_J.$$

其余系数 γ^α_{IJ} 见式 (4.3)。 □

哈梅尔系数 (5.8) 与丛坐标下机械联络曲率的分量 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ} = \gamma^\alpha_{IJ}$，即 (1.3)，完全相同。它们在形式上确实与运动学联络的曲率系数 (4.3) 完全相同。

(d) 丛坐标中的玻尔兹曼–哈梅尔方程作为约化欧拉-拉格朗日方程

将 $\ell(r^I, \Omega^\alpha, \dot{r}^I) := l(r^I, \xi^\alpha := \Omega^\alpha - \mathcal{A}^\alpha_I\dot{r}^I, \dot{r}^I)$ 表示为关于锁定速度的约化拉格朗日量 Ω^α。哈梅尔方程（2.4）为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\alpha} + \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\beta}\left(\gamma^\beta_{\alpha I}\dot{r}^I + \gamma^\beta_{\alpha\lambda}\Omega^\lambda\right) = Q_\alpha \tag{5.12}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{r}^I} - \frac{\partial \ell}{\partial r^I} + \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\beta}\left(\gamma^\beta_{IJ}\dot{r}^J + \gamma^\beta_{I\alpha}\Omega^\alpha\right) = Q_I. \tag{5.13}$$

在 G 中的运动由重构方程（4.10）给出，此时 $\xi^\alpha = \Omega^\alpha - \mathcal{A}^\alpha_I(\mathbf{r})\,\dot{r}^I$ 由机械联络定义。重要的是，运动是从ξ^α推导出来的，而非从 Ω^α推导，因为后一种情况一般不能归因于标架运动（注 5.1和第 5(e) 节）。方程（ 5.12,5.13 ）具有以下几何解释。

命题5.1。 对于左 G-不变拉格朗日量 $\ell(r^I, \Omega^\alpha, \dot{r}^I)$，哈梅尔方程（5.12,5.13）就是以丛坐标 $(\Omega^\alpha, \dot{r}^I)$表示的约化欧拉-拉格朗日方程（1.1,1.2），其系数$\mathcal{E}^\alpha_{\beta I} = \gamma^\alpha_{I\beta} = c^\alpha_{\beta\lambda}\mathcal{A}^\lambda_I, c^\alpha_{\beta\lambda} = \gamma^\alpha_{\beta\lambda}$和曲率 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ} = \gamma^\alpha_{IJ}$由哈梅尔系数确定。

方程（1.1、1.2）已在 [9], 中推导，并发表于 [33, 第 397], 页；推导时先将锁定速度（5.5）代入拉格朗日量 ℓ（r^I，Ω^α，$\dot{r}^I$），再求欧拉-拉格朗日导数。文献中尚未报道过以锁定速度为变量，将其推导为哈梅尔方程的过程。第一个方程（1.1），亦即（5.12），实际上是将 ξ^α 替换为锁定系统的速度 Ω^α 后得到的欧拉-庞加莱方程（5.1），因此（1.1、1.2）也称为拉格朗日-庞加莱方程 [45, 第 3395], [3, 页 146]。（5.12）和（5.13）中含有 $\gamma^\beta_{\alpha I}$ 的项可视为相互作用项（或耦合项）。显然，正如 [4, 第912, 913], 页所述，当联络系数和曲率均为零时，（5.12、5.13）就化为哈梅尔方程（5.1、5.2），即在局部坐标（ξ^α，$\dot{r}^I$）下表示时。然而，正如本文所示，由于 Hamel 形式适用于任意选取的局部坐标，因此不应

认为（5.12、5.13）会化为哈梅尔方程，只要使用局部坐标（ξ^α，$\dot{r}^I$），正如有时所说的那样，例如 [66, 第 226]页。

根据哈梅尔系数的定义，机械联络是平坦的，即曲率 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ}$ 消失，当且仅当动量 $\Pi_\alpha = \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\alpha}$（等价地，$\Pi_\alpha = \frac{\partial l}{\partial \xi^\alpha}$）定义了一个关于 ξ^α 和 $\dot{r}^I$ 的非可积关系。 —— ——

备注 *5.3.* 关于曲率系数 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ}$ 的符号约定，有必要说明一下。给定一个联络，局部曲率通常定义为 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ} = -\gamma^\alpha_{IJ}$，其中 γ^α_{IJ} 见式 *(4.3)*（右丛的情形见 *[47]*），这与规范理论中所用的曲率定义一致 *[19, 第 247]* 页。*[9, 第 157]* 页和 *[45, 第 3395]*, 页采用了这一约定，因此 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ}$ 在约化欧拉-拉格朗日方程 *(1.2)* 中带正号。在 *[4, 第 910]* 页以及 *[18, 中，请注意第 44]*, 页上的修正：局部曲率被定义为 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ} = \gamma^\alpha_{IJ}$，与本文一致，同时给出了约化欧拉-拉格朗日方程 *(1.1,1.2)*。在 *[3, 第 117,146]*, 页，曲率被推导为 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ} = -\gamma^\alpha_{IJ}$，但随后在约化欧拉-拉格朗日方程中却以负号使用。类似地，在 *[66]*, 中，曲率被定义为 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ} = \gamma^\alpha_{IJ}$，但在式 *(1.2)* 中却以正号使用。应用方程 *(4.9)* 和 *(1.1,1.2)* 时，应特别注意这些不一致之处。

(e) 庞加莱方程与拉格朗日方程的惯性解耦

机械联络允许将变分内在地分解为垂直部分和水平部分[4]。因此，以锁定速度表示的方程的质量矩阵 $\mathbf{M}$ 是对角的 [3, p. 147]。将（5.5）代入（5.3）得到质量矩阵

$$\mathbf{M}^\Omega(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{r}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{r}) - \mathcal{A}^T(\mathbf{r})\,\mathbf{L}(\mathbf{r})\,\mathcal{A}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

以及动能 $\ell(r^I, \Omega^\alpha, \dot{r}^I) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \mathrm{L}(\mathbf{r})\,\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^T\left(\mathrm{S}(\mathbf{r}) - \mathcal{A}^T(\mathbf{r})\,\mathrm{L}(\mathbf{r})\,\mathcal{A}(\mathbf{r})\right)\dot{\mathbf{r}}$。事实上，动量 $\Pi_\alpha = \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\alpha}$ 仅取决于纤维坐标 Ω^α，因此方程 (5.12) 和 (5.13) 是惯性解耦的（在加速度层面上并未耦合）。方程之间的耦合通过涉及 $\gamma^\beta_{\alpha I}$ 的速度项实现。利用锁定速度进行惯性解耦的方法，已用于浮动基座机器人 [13,67] 和空间机器人的建模，见 [68,69]。

与方程解耦密切相关的一个概念是质心动量，该概念由 [70], 引入，并广泛用于人形机器人的全身控制 [15,71,72]，例如。在此背景下 $\mathfrak{g} = se(3)$，且 $\mathrm{V} \in se(3)$ 是基体的速度（旋量）（使用符号 V 代替 ξ），而 $\dot{\mathrm{r}}$ 是关节速度。引入了一个参考系 $\mathcal{F}_\mathrm{G}$，该参考系位于系统的总质心处，并与惯性坐标系 $\mathcal{F}_0$对齐。 $\mathcal{F}_\mathrm{G}$ 相对于附着在基体上的参考系 $\mathcal{F}_\mathrm{b}$ 的构型由 $g_{\mathrm{bG}} \in SE(3) = G$ 描述。质心动量定义为 $\boldsymbol{\Pi}_\mathrm{G} = \mathrm{Ad}^T_{g_{\mathrm{bG}}}\boldsymbol{\Pi}$，其中动量对偶旋量 $\boldsymbol{\Pi} \in se^*(3)$ 在第 5(b) 节中定义。这也表示为 $\boldsymbol{\Pi}_\mathrm{G} = \mathrm{M}_\mathrm{G}\mathrm{V}_\mathrm{G}$，其中 V_G 称为平均速度，而 $\mathrm{M}_\mathrm{G} = \mathrm{Ad}^T_{g_{\mathrm{bG}}}\mathrm{M}_{\mathrm{bb}}\mathrm{Ad}_{g_{\mathrm{bG}}}$ 称为质心复合惯性矩阵，且 $\mathrm{Ad}^T_{g_{\mathrm{bG}}}(\mathrm{L}, \mathrm{K})$ 称为质心动量矩阵 [14,15]。将其与锁定速度 $\mathrm{L}(\mathrm{r})\,\mathrm{V}_{\mathrm{loc}} = \boldsymbol{\Pi}$ 的定义进行比较可知，$\mathrm{V}_\mathrm{G} = \mathrm{Ad}^{-1}_{g_{\mathrm{bG}}}\mathrm{V}_{\mathrm{loc}}$。此外，$\mathrm{V}_\mathrm{G} = (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ave}}, \dot{\mathrm{p}}_{\mathrm{com}})$，其中 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ave}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{loc}}$ 称为平均角速度 [70]，而 $\dot{\mathrm{p}}_{\mathrm{com}}$ 是系统总质心的速度，二者均在 $\mathcal{F}_0$ 中表示。重要的是，$\mathrm{M}_\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}_\mathrm{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{m}\,\mathrm{I} \end{pmatrix}$ 是一个分块对角矩阵，其中 $\bar{m}$ 是总质量，而 $\boldsymbol{\Theta}_\mathrm{G}$ 是相对于总质心并在 $\mathcal{F}_0$ 中表示的总惯性张量。当运动方程使用 V_G表示时，这将取代 (5.14) 中的锁定惯性 L。

采用质心动量 $\boldsymbol{\Pi}_\mathrm{G} = (\boldsymbol{\Theta}_\mathrm{G}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ave}}, \bar{m}\,\dot{\mathbf{p}}_{\mathrm{com}})$ 的动机在于，线动量和角动量彼此解耦（此外，式（5.12）和

[4]垂直空间是群轨道的切空间 $\ker T_q\pi$，也就是形状坐标锁定时基体可能具有的速度。水平空间则是不产生锁定速度的速度空间。

（5.13））也实现了惯性解耦，因此二者可以独立控制。然而，通常不存在与 $\mathrm{V_G}$ （注 5.1）相关联、可用于表示系统方向的参考系。这意味着该参考系的运动可由一个 $g_{\mathrm{bG}}(g,\mathrm{r})$ 表示，使得 $\hat{}\mathrm{V}_{\mathrm{G}} = \dot{g}_{\mathrm{bG}} g^{-1}\,\mathrm{bG}$。显然，根据动量定义 $\mathrm{V_G}$ （以及 $\mathrm{V_{loc}}$），当且仅当动量定义了可积关系时，这样的参考系才存在；也就是说，曲率为零，而通常并非如此。这个看似显而易见的事实已在 [73] 中得到证明。为确定相对于 $\mathcal{F}_0$ 的基准构型 $g \in SE(3)$，必须求解重构方程（4.10）；此时方程为 $\hat{}\mathrm{V_b} = g^{-1}\dot{g}$，并取 $\mathrm{V_b} = \mathrm{V_{loc}} - \mathrm{L}^{-1}\mathrm{K}\cdot\mathrm{r}$，具体做法见 [71]。最后需要指出，质心运动学和动力学可以用重心向量 [74,75] 表示。

(f) 示例：配备三个对称反作用轮的卫星

本文考虑一颗配备三个反作用轮的卫星的简化模型。图 2 展示了其基本机械装置的示意图。为简便起见，下文将反作用轮称为转子。三个转子的轴线彼此正交，转子任意安装在卫星上，并假设它们具有对称性（因此卫星的总质心保持不变）。卫星的主体建模为刚体。假设没有引力或其他势力作用于卫星，因此拉格朗日量即为动能。主体的运动是演化于李群G中的刚体运动，并由 $g \in G$ 表示。动能对于 G 作用保持不变。三个转子的旋转由转角 φ^i、$i = 1$、2、3 描述。因此，卫星模型的构型空间为 $Q = G \times T^3$，其构型为 $q = (g, \boldsymbol{\varphi})$，其中 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$。后者作为形状空间 $r^I := \varphi^{\bar{I}}$ 上的坐标。文献中采用了不同的 G 选择。多体系统动力学领域的大多数早期表述采用直积群 $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3$，而近期研究则采用适当的刚体运动群 $SE(3)$（这主要得益于李群积分方法 [76]，的发展，以及科塞拉特连续体 [77,78] 的几何精确建模）。对称群的具体选择，以及

无论采用左平凡化还是右平凡化，都会导致刚体速度和运动方程的定义不同。下文采用多体动力学和机器人学中的记法，其中 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^6 \cong \mathfrak{g}$ 表示参考系（刚体）的速度，而 $\mathfrak{g}$ 为 $so(3) \times \mathbb{R}^3$ 或$se(3)$。详细说明和数值结果见补充材料 [16]。

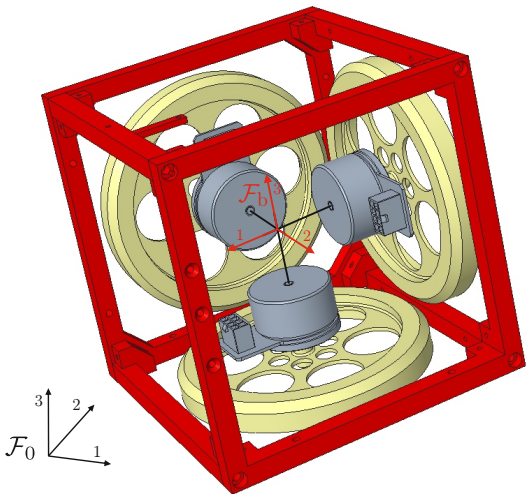

图2。 卫星模型的示意图。该图展示了报道于 [79]。

(i) 刚体速度的混合表示 – 对称群 $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3$

主体的构型（位姿）表示为 $(\mathrm{R}, \mathrm{p}) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$，其中 $\mathrm{R} \in SO(3)$，而 $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^3$ 描述体固定参考系（RFR）$\mathcal{F}_\mathrm{b}$ 相对于惯性参考系（IFR）$\mathcal{F}_0$的旋转和平移。直积群上的群乘法为 $(\mathrm{R}_1, \mathrm{p}_1) \cdot (\mathrm{R}_2, \mathrm{p}_2) = (\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2, \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)$。由于旋转和平移彼此解耦，这显然不是坐标系变换（即刚体运动）。通过左平凡化定义的相应速度为 $\hat{\mathrm{V}}_\mathrm{b} = g^{-1}\dot{g} = (\mathrm{R}^{-1}\dot{\mathrm{R}}, \dot{\mathrm{p}}) = (\hat{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\mathrm{p}}) \in \mathfrak{g} = so(3) \times \mathbb{R}^3$；其向量表示为 $\mathrm{V}_\mathrm{b} = (\boldsymbol{\omega}, \dot{\mathrm{p}}) \in \mathbb{R}^6$，其中 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ 是主体相对于 $\mathcal{F}_0$ 的角速度，并在 $\mathcal{F}_\mathrm{b}$中表示。这称为刚体速度的混合表示，因为 $\boldsymbol{\omega}$ 在体坐标系中表示，而 $\dot{\mathrm{p}}$ 在惯性系中表示。关于动力学，只有当体固定RFR位于质心处时，旋转和平移的解耦才成立；这是采用直积群 G时的主要前提，因为此时角动量和线动量彼此解耦。因此，主体和转子的速度将在卫星的总质心处测量（主体包括转子），于是 p 是在IFR中表示的总质心位置向量，而 $\mathcal{F}_\mathrm{b}$ 位于总质心处。将转子 $i = 1$的混合速度记为 $\mathrm{V}_i = (\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\mathrm{p}})$，其中 $i = 1$为 2、3。无损一般性地，RFR与转子轴对齐。于是$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} + \mathrm{e}_i\dot{\varphi}^i$，其中 $\mathrm{e}_i \in \mathbb{R}^3$ 是第 i个单位向量（例如 $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0)$），因此 $\mathrm{V}_i = \mathrm{V}_\mathrm{b} + \mathrm{V}_i$，其中 $\mathrm{V}_i = (\mathrm{e}_i\dot{\varphi}^i, 0)$。

—

—

混合表示下主体的动量为 $\boldsymbol{\Pi}^\mathrm{b} = \mathbf{M}^\mathrm{b}\mathbf{V}_\mathrm{b} \in \mathbb{R}^6 \cong \mathfrak{g}^* = so^*(3) \times \mathbb{R}^3$，第 i 个转子的动量为 $\boldsymbol{\Pi}^i = \mathbf{M}^i\mathbf{V}_i$，其中分别为主体和第 i 个转子的惯性矩阵，

$$\mathbf{M}^\mathrm{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}^\mathrm{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_\mathrm{b}\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_i\mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

其中，$\boldsymbol{\Theta}^\mathrm{b}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}^i$ 分别为主体和第 i个旋翼相对于总质心的惯性张量，m_b 和 m_i 分别为主体和第 i 个旋翼的质量。

速度坐标为$(\xi^\alpha, \dot{r}^I) = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \dot{p}^1, \dot{p}^2, \dot{p}^3, \dot{\varphi}^1, \dot{\varphi}^2, \dot{\varphi}^3) = (V^\alpha\mathrm{b}\ \dot{\varphi}^i) = (\mathrm{V}_\mathrm{b}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})$，纤维坐标为$(\xi^\alpha) = (V^\alpha\mathrm{b}) = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \dot{p}^1, \dot{p}^2, \dot{p}^3)$ $\alpha = 1, \ldots, 6$ 和 $(\dot{r}^I) = (\dot{\varphi}^1, \dot{\varphi}^2, \dot{\varphi}^3)$，$I = 7, 8, 9$。下文使用指标 $i, j, k, l = 1, 2, 3$ 和记号 $I = I - 6$。卫星的动能为

$$\begin{aligned} T(\mathbf{V}_\mathrm{b}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) &= \frac{1}{2}\mathbf{V}_\mathrm{b}^T\boldsymbol{\Pi}^\mathrm{b} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{V}_i^T\boldsymbol{\Pi}^i \\ &= \frac{1}{2}\Theta^\mathrm{b}_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\Theta^i_{jk}(\omega^j + \delta^j_i\dot{\varphi}^i)(\omega^k + \delta^k_i\dot{\varphi}^i) + \bar{m}\dot{p}^i\dot{p}^i\right] \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中 $\bar{m} := m_\mathrm{b} + \sum_{i=1}^3 m_i$ 是卫星的总质量。动能在 G 的左作用下保持不变（这是由于体固定角速度）。

哈梅尔方程 直积群上的结构系数 $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ 为 $c^\beta_{\alpha\lambda} = \varepsilon_{\alpha\lambda\beta}$，当 α，β，$\lambda = 1$，2，3，并且 $c^\beta_{\alpha\lambda} = 0$ 在其他情况下。欧拉-庞加莱方程（5.1）可写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega^i} + \frac{\partial T}{\partial \omega^j}c^j_{ik}\omega^k &= \bar{\Theta}_{ij}\dot{\omega}^j + \varepsilon_{ikj}\omega^k\bar{\Theta}_{jl}\omega^l + \sum_{j=1}^{3}(\Theta^j_{ij}\ddot{\varphi}^j + \varepsilon_{ikl}\omega^k\Theta_{lj}\dot{\varphi}^j) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}^j} &= \bar{m}\ddot{p}^j \end{aligned} \tag{5.17}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\Theta}} := \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{b}} + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\Theta}^{i}$ 是卫星（包括主体和转子）的复合惯性张量。它们也可以写成向量形式，其中矩阵$\mathbf{ad}_{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} - \mathbf{ad}_{\boldsymbol{\omega}}^{T}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \bar{\boldsymbol{\Theta}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{3}\left(\boldsymbol{\theta}^{i}\ddot{\varphi}^{i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\theta}^{i}\dot{\varphi}^{i}\right) \tag{5.18}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \bar{m}\ddot{\mathbf{p}} \tag{5.19}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}^{i} := \boldsymbol{\Theta}^{i}\mathbf{e}_{i}$ 是 $\boldsymbol{\Theta}^{i}$ 的第 i 列。

欧拉-拉格朗日方程（5.2），注意到 T不依赖于 $\varphi^{i}(=r^{\bar{I}})$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}^{i}} = \Theta_{ij}^{i}\dot{\omega}^{j} + \Theta_{ii}^{i}\ddot{\varphi}^{i} \tag{5.20}$$

其中，对角元素 Θ_{ii}^{i} 是绕旋转器 i轴的转动惯量。

上述方程可归纳为卫星的运动方程组

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}^{1} & \boldsymbol{\theta}^{2} & \boldsymbol{\theta}^{3} \\ \mathbf{0} & \bar{m}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}^{1^{T}} & \mathbf{0} & \Theta_{11}^{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}^{2^{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{22}^{2} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}^{3^{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{33}^{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\varphi}^{1} \\ \ddot{\varphi}^{2} \\ \ddot{\varphi}^{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{3}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\theta}^{i}\dot{\varphi}^{i} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{5.21}$$

质量矩阵的形式为（5.4），其非零子矩阵为 $\mathbf{K}$。由于假设转子对称且转轴与 RFR轴对齐，该矩阵为常数。

通过求解运动学重构方程（4.10）可得卫星的位姿。为此，求解方程 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{dexp}_{-}^{-1}\mathbf{xV}_{\mathrm{b}} = \left(\mathbf{dexp}_{-\mathbf{x}}^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}},\ \dot{\mathbf{p}}\right)$ 以求得坐标向量$\mathbf{X} = (\mathbf{x},\ \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{6} \cong so(3) \times \mathbb{R}^{3}$。这里，$\mathbf{dexp}_{\mathbf{x}}$是 exp 映射在 $SO(3)$ [55]上的右平凡化微分的矩阵形式。

平凡主丛上的欧拉-拉格朗日方程 按照质量矩阵的分块（5.4），联络系数 $\mathcal{A}_{I}^{\alpha}$定义为

$$\mathcal{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\theta}}^{1} & \bar{\boldsymbol{\theta}}^{2} & \bar{\boldsymbol{\theta}}^{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

锁定速度（5.5）为 $\mathbf{V}_{\mathrm{loc}} = \mathbf{V}_{\mathrm{b}} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}$，因此根据（5.22），$\omega_{\mathrm{loc}}^{\alpha} = \omega^{\alpha} - \mathcal{A}_{I}^{\alpha}\dot{\varphi}^{\bar{I}}$ 并且$\dot{p}_{\mathrm{loc}}^{\alpha} = \dot{p}^{\alpha}$。用锁定速度表示，动能为

$$\begin{aligned} T\left(\mathbf{V}_{\mathrm{loc}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) = {} & \frac{1}{2}\Theta_{\alpha\beta}^{\mathrm{b}}\left(\omega_{\mathrm{loc}}^{\alpha} - \mathcal{A}_{\bar{I}}^{\alpha}\dot{\varphi}^{\bar{I}}\right)\left(\omega_{\mathrm{loc}}^{\beta} - \mathcal{A}_{\bar{J}}^{\beta}\dot{\varphi}^{\bar{J}}\right) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Theta_{\alpha\beta}^{i}\left(\omega_{\mathrm{loc}}^{\alpha} + \left(\delta_{\bar{I}}^{\alpha} - \mathcal{A}_{\bar{I}}^{\alpha}\right)\dot{\varphi}^{\bar{I}}\right)\left(\omega_{\mathrm{loc}}^{\beta} + \left(\delta_{\bar{J}}^{\beta} - \mathcal{A}_{\bar{J}}^{\beta}\right)\dot{\varphi}^{\bar{J}}\right) + \frac{\bar{m}}{2}\dot{p}^{\alpha}\dot{p}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

直接计算可得，利用由（5.21）导出的分块矩阵 $\mathbf{S}$、$\mathbf{K}$、$\mathbf{L}$，

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}_{\mathrm{loc}}} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{m}\mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{V}_{\mathrm{loc}},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \left(\mathbf{S} - \mathcal{A}^{T}\mathbf{L}\mathcal{A}\right)\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\mathbf{S} - \mathbf{K}^{T}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\right)\dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{5.24}$$

with

$$\mathbf{S} - \mathbf{K}^{T}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Theta_{11}^{1} - \boldsymbol{\theta}^{1^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{1} & -\boldsymbol{\theta}^{1^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{2} & -\boldsymbol{\theta}^{1^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{3} \\ -\boldsymbol{\theta}^{2^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{1} & \Theta_{22}^{2} - \boldsymbol{\theta}^{2^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{2} & -\boldsymbol{\theta}^{2^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{3} \\ -\boldsymbol{\theta}^{3^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{1} & -\boldsymbol{\theta}^{3^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{2} & \Theta_{33}^{3} - \boldsymbol{\theta}^{3^{T}}\bar{\boldsymbol{\theta}}^{3} \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

因此，以锁定速度表示的运动方程中的质量矩阵具有块对角形式（5.14）。哈梅尔系数（5.6）-（5.8）由非零结构系数 $c_{\alpha\lambda}^{\beta} = \varepsilon_{\alpha\lambda\beta}$确定，其中 α，β，$\lambda = 1$，2，3。由于联络系数为常数，曲率

系数（5.8）为 $\mathcal{B}^{\alpha}_{IJ}=[\mathcal{A}_I,\mathcal{A}_J]^{\alpha}$。在向量表示中，$\mathcal{A}_I$是$\bar{I}$（5.22）中的第$[\mathcal{A}_I,\mathcal{A}_J]=(\bar{\boldsymbol{\theta}}^{\bar{I}}\times\bar{\boldsymbol{\theta}}^{\bar{J}}$、$\mathbf{0})$列。由于向量场 $\mathcal{A}_I$关于 $\mathfrak{g}=so$（3） $\times\mathbb{R}^3$上的李括号不满足交换性（转子轴不平行），该项非零。该项非零（联络非平坦）意味着动量并未定义转子与基座运动之间的可积关系。

(ii) 刚体速度的体固定表示 — 对称群 $G=SE(3)$

半直积群 $SE(3)=SO(3)\ltimes\mathbb{R}^3$描述了正则刚体运动。主体的构型再次表示为 $(\mathrm{R},\mathrm{p})\in SE(3)$，但其群乘法为 $(\mathrm{R}_1,\mathrm{p}_1)\cdot(\mathrm{R}_2,\mathrm{p}_2)=(\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2,\mathrm{p}_1+\mathrm{R}_1\mathrm{p}_2)$，这能够正确考虑旋转和平移之间的耦合。因此，体固定 RFR 可以任意定位。主体（即 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$）的速度（也称为旋量）在体固定表示 [30,31] 中通过左平凡化定义为 $\hat{\mathrm{V}}_{\mathrm{b}}=g^{-1}\dot{g}=(\mathrm{R}^{-1}\dot{\mathrm{R}},\mathrm{R}^{-1}\dot{\mathrm{p}})=(\hat{\boldsymbol{\omega}},\mathrm{v})\in\mathfrak{g}=se(3)$，在向量表示中则为 $\mathrm{V}_{\mathrm{b}}=(\boldsymbol{\omega},\mathrm{v})\in\mathbb{R}^6$，其中 $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3$现在表示主体相对于 $\mathcal{F}_0$ 的线速度，该速度在 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$中表示。为简化推导，主体和转子的速度均在主体处的体固定 RFR 中表示。转子 $i=1$、2、3 的速度为 $\mathrm{V}_i=(\boldsymbol{\omega}_i,\mathrm{v}_i)$。再次假设 RFR 与转子轴对齐，则有 $\mathrm{V}_i=\mathrm{V}_{\mathrm{b}}+\mathrm{V}_i$。

—

主体在体固定表示下的动量为 $\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{b}}=\mathbf{M}^{\mathrm{b}}\mathbf{V}_{\mathrm{b}}\in\mathbb{R}^6\cong\mathfrak{g}^*=se^*(3)$，而第 i 个转子的动量为 $\boldsymbol{\Pi}^i=\mathbf{M}^i\mathbf{V}_i$，其中主体和第 i 个转子相对于任意 RFR 的惯性矩阵

$$\mathbf{M}^{\mathrm{b}}=\begin{pmatrix}\Theta^{\mathrm{b}} & m_{\mathrm{b}}\widetilde{\mathbf{d}}_{\mathrm{b}}\\ -m_{\mathrm{b}}\widetilde{\mathbf{d}}_{\mathrm{b}} & m_{\mathrm{b}}\mathbf{I}\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}^i=\begin{pmatrix}\Theta^i & m_i\widetilde{\mathbf{d}}_i\\ -m_i\widetilde{\mathbf{d}}_i & m_i\mathbf{I}\end{pmatrix} \tag{5.26}$$

其中，Θ^{b} 和 Θ^i 分别是主体和第 i 个转子相对于 RFR 的惯性张量，$\mathbf{d}_{\mathrm{b}}$、$\mathbf{d}_i$ 是相对于 RFR 的质心位置向量。卫星的总动能为

$$T(\mathbf{V}_{\mathrm{b}},\dot{\boldsymbol{\varphi}})=\frac{1}{2}\mathbf{V}_{\mathrm{b}}^T\mathbf{M}^{\mathrm{b}}\mathbf{V}_{\mathrm{b}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{V}_i^T\,\mathbf{M}^i\,\mathbf{V}_i=\frac{1}{2}\mathbf{V}_{\mathrm{b}}^T\mathbf{M}^{\mathrm{b}}\mathbf{V}_{\mathrm{b}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\mathbf{V}_{\mathrm{b}}+\overline{\mathbf{V}}_i(\dot{\boldsymbol{\varphi}})\right)^T\mathbf{M}^i\left(\mathbf{V}_{\mathrm{b}}+\overline{\mathbf{V}}_i(\dot{\boldsymbol{\varphi}})\right). \tag{5.27}$$

哈梅尔方程 下文将为简便起见，以矩阵形式给出方程。半直积群 $SE(3)$ 上的结构系数导出伴随算子 [55,80] 的矩阵形式。

$$\mathbf{ad}_{\mathbf{V}_{\mathrm{b}}}=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}} & \mathbf{0}\\ \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{b}} & \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}\end{pmatrix} \tag{5.28}$$

使得李括号为 $\mathbf{ad}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}=[\mathbf{X},\ \mathbf{Y}]$。欧拉-庞加莱方程 (5.1) 为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\mathbf{V}_{\mathrm{b}}}-\mathbf{ad}^T_{\mathbf{V}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial T}{\partial\mathbf{V}_{\mathrm{b}}}=\mathbf{L}\dot{\mathbf{V}}_{\mathrm{b}}+\sum_{i=1}^{3}\mathbf{M}^i\dot{\overline{\mathbf{V}}}_i-\mathbf{ad}^T_{\mathbf{V}_{\mathrm{b}}}\left(\mathbf{L}\mathbf{V}_{\mathrm{b}}+\sum_{i=1}^{3}\mathbf{M}^i\overline{\mathbf{V}}_i\right) \tag{5.29}$$

具有固定的质量矩阵 $\mathbf{L}=\mathbf{M}^{\mathrm{b}}+\sum_{i=1}^{3}\mathbf{M}^i$。显式写出后可得以下有启发性的形式。

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\omega}-\bar{m}(\dot{\widetilde{\mathbf{v}}}+\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\widetilde{\mathbf{v}})\mathbf{d}+\sum_{i=1}^{3}\left(\boldsymbol{\theta}^i\ddot{\varphi}^i+\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\theta}^i-m_i\widetilde{\mathbf{v}}\mathbf{a}_i\right)\dot{\varphi}^i\right) &= \mathbf{0}\\ \bar{m}\left(\dot{\mathbf{v}}+\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{v}+(\dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}+\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\widetilde{\boldsymbol{\omega}})\mathbf{d}\right)-\sum_{i=1}^{3}m_i\left(\mathbf{a}_i\ddot{\varphi}^i+\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{a}_i\dot{\varphi}^i\right) &= \mathbf{0}\end{aligned} \tag{5.30}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\Theta}}:=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{b}}+\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\Theta}^i$ 和 $\boldsymbol{\theta}^i:=\boldsymbol{\Theta}^i\mathbf{e}\sum_{i=1}^{3}{}_i m_i/\bar{m}$ 如上，且 $\mathbf{a}:=\widetilde{\ }\mathbf{de}$，其中 $\mathbf{d}:$ (dd) 是在 RFR 中测得的总质心的位置向量。

欧拉-拉格朗日方程（5.2）可立即写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}^i} = \Theta^i_{ii}\ddot{\varphi}^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}^T\boldsymbol{\theta}^i - m_i\mathbf{a}_i^T\dot{\mathbf{v}} \quad \text{(no summation over } i\text{)}. \tag{5.31}$$

显然，若 $\mathbf{d}=\mathbf{0}$，即 RFR $\mathcal{F}_\mathrm{b}$ 位于总质心处，则在 $G=SO(3)\times\mathbb{R}^3$ 上对系统建模时，这些方程与（5.18-5.20）中的方程等价。

运动方程的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}} & \bar{m}\tilde{\mathbf{d}} & \boldsymbol{\theta}^1 & \boldsymbol{\theta}^2 & \boldsymbol{\theta}^3 \\ -\bar{m}\tilde{\mathbf{d}} & \bar{m}\mathbf{I} & -m_1\mathbf{a}_1 & -m_2\mathbf{a}_2 & -m_3\mathbf{a}_3 \\ \boldsymbol{\theta}^{1^T} & -m_1\mathbf{a}_1^T & \Theta^1_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}^{2^T} & -m_2\mathbf{a}_2^T & \mathbf{0} & \Theta^2_{22} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}^{3^T} & -m_3\mathbf{a}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta^3_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \ddot{\varphi}^1 \\ \ddot{\varphi}^2 \\ \ddot{\varphi}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * \\ ** \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.32}$$

其中 $*:=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\omega} - \bar{m}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{v}\mathbf{d} + \sum_{i=1}^3(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\theta}^i - m_i\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{a}_i)\,\dot{\varphi}^i$，且 $**:=\bar{m}\,(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{v} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{d}) - \sum_{i=1}^3 m_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{a}_i\dot{\varphi}^i$。

平凡主丛上的欧拉-拉格朗日方程 式（5.32）中的质量矩阵按照（5.4）进行分块，其中

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\Theta}} & \bar{m}\tilde{\mathbf{d}} \\ -\bar{m}\tilde{\mathbf{d}} & \bar{m}\mathbf{I} \end{pmatrix},\ \mathbf{K}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 & \boldsymbol{\theta}^2 & \boldsymbol{\theta}^3 \\ -m_1\mathbf{a}_1 & -m_2\mathbf{a}_2 & -m_3\mathbf{a}_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{S}=\begin{pmatrix} \Theta^1_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Theta^2_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta^3_{33} \end{pmatrix}.$$

由此，定义锁定速度的局部联络 $\mathbf{V}_\mathrm{loc}=\mathbf{V}_\mathrm{b}+\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 在（5.5）中为

$$\mathcal{A}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}=\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{m}}^1 & \bar{\mathbf{m}}^2 & \bar{\mathbf{m}}^3 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

其中列向量为 $\bar{\mathbf{m}}^i:=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}^i\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$。$\mathbf{L}$，$\mathbf{K}$ $\mathcal{A}$ 的显式表达式见补充材料 [16]。用锁定速度表示的动能为

$$T\left(\mathbf{V}_\mathrm{loc},\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{V}_\mathrm{loc}-\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)^T\mathbf{M}^\mathrm{b}\left(\mathbf{V}_\mathrm{loc}-\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\left(\mathbf{V}_\mathrm{loc}+\overline{\mathbf{V}}_i\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)-\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)^T\mathbf{M}^i\left(\mathbf{V}_\mathrm{loc}+\overline{\mathbf{V}}_i\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)-\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right). \tag{5.34}$$

（5.12）和（5.13）中的偏导数（将 Ω^α 替换为 $V^\alpha{}_\mathrm{loc}$，将 $\dot{r}^I$ 替换为 $\dot{\varphi}^i$，$i=\bar{I}$）可得

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}_\mathrm{loc}}=\mathbf{L}\left(\mathbf{V}_\mathrm{loc}-\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right)+\sum_{i=1}^3\mathbf{M}^i\overline{\mathbf{V}}_i=\mathbf{L}\mathbf{V}_\mathrm{loc} \tag{5.35}$$

并且$\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{\varphi}}}$同（5.24）中一样。因此，质量矩阵在（5.14）中成为分块对角形式。哈梅尔系数（5.6–5.8）由 $SE(3)$上的结构常数 $c^\alpha_{\beta\delta}$ 确定。同样，由于 $G=SE(3)$的非交换性，曲率 $\mathcal{B}^\alpha_{IJ}=[\mathcal{A}_I,\mathcal{A}_J]^\alpha$并不为零，其中$[\mathcal{A}_I,\mathcal{A}_J]=[\bar{\mathbf{m}}_{\bar{I}},\bar{\mathbf{m}}^{\bar{J}}]=\mathrm{ad}_{\bar{\mathbf{m}}_{\bar{I}}}\bar{\mathbf{m}}^{\bar{J}}$是（5.28）中 $se(3)$上的李括号，即螺旋积 [80]。因此，欧拉-拉格朗日方程（5.12）、（5.13）得以显式确定。最后，锁定质量矩阵的逆矩阵具有如下闭式

$$\mathbf{L}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{U} & -\mathbf{U}\tilde{\mathbf{d}} \\ \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{U} & \frac{1}{\bar{m}}\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{U}\tilde{\mathbf{d}} \end{pmatrix},\ \text{with}\ \mathbf{U}=(\bar{\boldsymbol{\Theta}}+\bar{m}\tilde{\mathbf{d}}\tilde{\mathbf{d}})^{-1}. \tag{5.36}$$

卫星位姿通过求解局部运动学重构方程$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{dexp}_{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{V}_\mathrm{b}$得到瞬时螺旋坐标向量$\mathbf{X}=(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\in\mathbb{R}^6\cong se(3)$，参见补充材料 [16]。方程 $SE(3)$ 中dexp映射的矩阵形式也具有闭式解 [55]。

6.具有对称性和守恒动量的浮动基座机械系统

(a) 哈梅尔方程、拉格朗日–达朗贝尔–庞加莱方程

守恒定律可用于引入联络。对于具有 G-不变拉格朗日量 $l(r^I,\ \xi^\alpha,\ \dot{r}^I)$的浮动系统，其动量 $\boldsymbol{\Pi} \in \mathfrak{g}^*$在局部丛坐标中为

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial l}{\partial \xi^\alpha} = L_{\alpha\beta}\xi^\beta + K_{\alpha J}\dot{r}^J. \tag{6.1}$$

假设初始动量为零，动量守恒 $\Pi_\alpha = 0$ 施加了非完整动力学约束 $u^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \ldots, \bar{m}$，这些约束用机械联络表示为

$$u^\alpha = \xi^\alpha + \mathcal{A}_I^\alpha(r^I)\dot{r}^I. \tag{6.2}$$

哈梅尔方程即为拉格朗日–达朗贝尔–庞加莱方程(4.9)，其中机械联络的曲率现在见式（5.5）。联络编码了动量守恒所导致的动力学约束。若初始动量为零，则锁定速度也为零。比较由式（$\xi^\alpha = u^\alpha - \mathcal{A}_I^\alpha \dot{r}^I$6.2）得到的 $\xi^\alpha = \Omega^\alpha - \mathcal{A}_I^\alpha \dot{r}^I$，以及由式（5.5）得到的，可知当方程（5.13）中以锁定速度表示的 Ω^α 设为零并采用机械联络时，即可得到方程（4.9）：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{r}^I} - \frac{\partial \ell}{\partial r^I} + \frac{\partial \ell}{\partial \Omega^\beta}\mathcal{B}_{IJ}^\beta \dot{r}^J = Q_I \tag{6.3}$$

其中，$\ell(r^I, \Omega^\alpha, \dot{r}^I) := l(r^I, \xi^\alpha := \Omega^\alpha - \mathcal{A}_I^\alpha \dot{r}^I, \dot{r}^I)$，曲率 $\mathcal{B}_{IJ}^\beta = \gamma_{IJ}^\beta$由式（5.8）中的哈梅尔系数给出，其中在求导后将 Ω^α 设为零。因此，系统动力学可通过底流形（形状空间）上的坐标 r^I 来描述。 G中的运动则由运动学重构方程（4.10）的解确定，其中 $\xi^\alpha = -\mathcal{A}_I^\alpha(\mathbf{r})\ \dot{r}^I$由动力学约束 $\Pi_\alpha = 0$定义。

例如，考虑第 5 节(f) 中的卫星，其拉格朗日量 ℓ 等于动能 T。根据（6.3），用转子角 φ^i, $i = \bar{I}$表示的哈梅尔方程为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}^{\bar{I}}} - \frac{\partial T}{\partial V_{\mathrm{loc}}^\beta}\mathcal{B}_{IJ}^\beta \dot{\varphi}^{\bar{J}} = Q_I \tag{6.4}$$

其中 $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}^{\bar{I}}}$，且 $\frac{\partial T}{\partial V^{\alpha}_{\mathrm{loc}}}$ 在（5.24）中，若 $G = SO$（3）$\times \mathbb{R}^3$，~~并且~~ $\frac{\partial T}{\partial V^{\alpha}_{\mathrm{loc}}}$ 在（5.35）中，若 $G = SE$（3）。曲率的分量就是哈梅尔系数 γ_{IJ}^α，它们在（5.8）中给出，并由相应对称群的结构常数确定 G。

（b）几何相位与伪完整运动

机械联络在主丛上的意义在于，它揭示了几何相位偏移(整体单值群) $dg = -g\mathcal{A}d\mathbf{r}$，即纤维中的运动，它是沿形状空间中的闭曲线运动的结果（注4.2），并且与曲率成正比（此处采用左平凡化表示）。这是由动量守恒施加的不可积条件所致（而对于受约束系统，这是由非完整运动学约束所致，注4.2）。形状空间中的闭合路径 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 是否会形成 G 中的闭合路径，是空间机器人运动规划中出现的一个问题。尽管对于非完整系统而言，这在全局上是不可能的，但可能存在表现出这种循环性的轨迹。这种现象被称为伪完整，并且文献 [81,82] 报告了平面空间机器人的必要条件。对于执行空间运动的一般空间机器人，文献尚未探讨这一方面。根据（4.8），由中值定理可知，一个必要条件是存在一点$\mathbf{r}_0 \in \mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 位于形状空间中闭合路径所围成的区域内，使得机械联络的曲率为零，即 $\mathcal{B}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$。如何将这一条件转化为循环“伪完整”路径规划，是当前的研究课题。作为一个简单示例，补充材料 [16]讨论了一种浮动基座机器人，其机械臂由两个轴线平行的转动关节组成。对于这种空间机器人，两个关节的简单循环运动会产生伪完整行为，使得基座运动也呈循环状态（零几何

相位）。也就是说，沿着这条路径，基座运动是机械臂运动的函数，尽管动量守恒施加了一个非完整约束。

(c) 非零动量与动力学相位

方程（6.3）也适用于总动量非零的情况。质心动量$\boldsymbol{\Pi}^0_{\mathrm{G}}$ =const 是守恒量，它与其体固定表示之间的关系为$\boldsymbol{\Pi}^0$（g）=$\mathbf{Ad}^{-T}_{g_{\mathrm{bG}}}\boldsymbol{\Pi}^0_{\mathrm{G}}$（第5(e)节）。群变量的净变化由扩展的重构方程确定

$$dg = g\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\Pi}^0 dt - g\widehat{\mathcal{A}d\mathbf{r}} \tag{6.5}$$

用于替代方程 (4.10)。沿着 $\mathbb{V}^{\bar{\delta}}$ 中的一条闭合路径完成一个周期，求解重构方程，可得总相位偏移，如式 (4.8) 所示，但现在还多出一项 $g\mathrm{L}^{-1}\boldsymbol{\Pi}^0$。后一项给出了本质上由（初始）动量引起的动力学相位，并导致对称性从 G 破缺为保持初始动量的对称群。如果将 (6.5) 视为一个控制问题，这一项就是漂移向量场。举例来说，考虑第 5(f) 节中具有特定参数的卫星。规定飞轮的转动为 r (t) =(π (cos (2πt) − 1) π sin (2πt) π/2 sin (4πt))，其周期时间为 1 s。几何参数、动力学参数以及动画见补充材料 [16]。首先假设总动量为零。基体的运动（即位于基体几何中心的基座坐标系 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 的运动，如图 2 所示）由重构方程 (4.11) 得出。图 3a) 显示了 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 在 $\mathcal{F}_0$ 的 x-y 平面内经过 6 s（即转子运动六个周期）的平移轨迹，起点为原点。图中标出了每个周期结束后的所在位置，对应于几何相位的平移分量。$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 的平移由绕总质心的旋转引起，而总质心并非 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 的原点。图 3b) 显示了初始动量不为零时的平移情况。例如，将动量设为 $\boldsymbol{\Pi}^0 = \mathrm{K}\dot{\mathrm{r}}$ (0)，这等于基体静止时转子注入的动量。这类似于一颗卫星在飞轮旋转的状态下被释放的情形。基体运动由转子的转动通过非完整运动学，以及由动量引起的动力学共同驱动；它们决定了总相位。为完整起见，由守恒的棋牌游戏官网】【。

仅当转子静止时的动量以虚线表示，由此得到动力学相位。

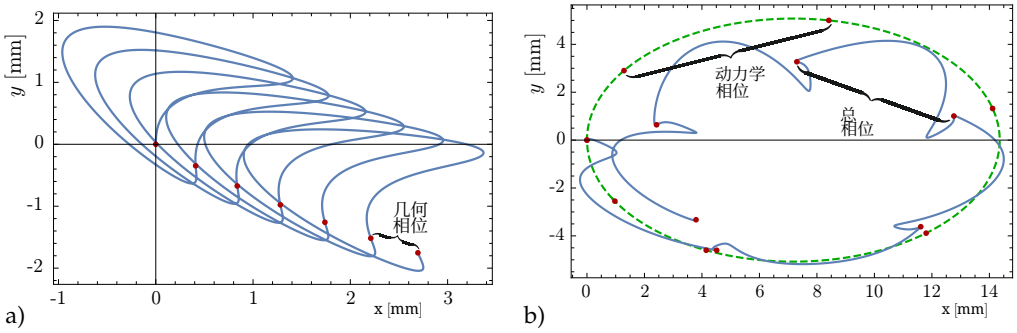

图3. a) 基座坐标系的平移 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 投影到 x-y-平面 $\mathcal{F}_0$ (图 2)，此时总动量为零，且 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ 和 $\mathcal{F}_0$ 初始时重合。图中标出了转子运动完整周期（1 s）后的各位置（几何相位）。b) 初始动量非零时的基座运动（实线），并标出了转子运动完整周期后的各位置。虚线单独显示了仅由初始动量引起的运动及相应的动力学相位。

7. 关于经典黎曼几何表述的评论

应当指出，离散机械系统分析动力学的几何方法历史悠久。最初，这些方法是在黎曼几何框架下，为拉格朗日量关于 $\dot{q}^a$ [21,83,84]呈二次型的无约束系统发展起来的，其中构型空间 $\mathbb{V}^n$ 被视为具有由拉格朗日量诱导的度量的黎曼空间。后来，这些方法扩展到采用非完整准速度的系统以及非完整约束系统；Hamel 方程被视为构型流形上的拉格朗日-达朗贝尔方程，该流形的切空间由非完整约束定义（在经典文献中，这类切丛称为非完整切丛）。经典坐标表述的综述见 [22,25]，，而采用现代微分几何记法的综述见 [85]。只有少数出版物讨论时变系统，以及拉格朗日量关于 $\dot{q}^a$呈非二次型的系统。这类系统建模于 $n+1$维事件空间 $\mathbb{V}^n \times \mathbb{R}_+$中，并将该空间视为芬斯勒空间。因此，相应的基于模型的控制方案是在事件空间 [86]中发展的。在这一经典框架下，联络及其曲率同样起着关键作用。例如，考虑一个拉格朗日量为 $L(q^a,\ \dot{q}^a)$ 的无约束完整系统：$=\frac{1}{2} g_{ab}\,(q)\ \dot{q}^a \dot{q}^b$ 由动能定义。质量矩阵在构型空间上定义了一个系数为 g_{ab} 的黎曼度量 $\mathbb{V}^n$。该系统在完整切丛 $T\mathbb{V}^n$ 上的动力学由以下方程支配：

–

$$\frac{D}{dt}\dot{q}^a = Q^a \tag{7.1}$$

其中 $D\xi^a = d\xi^a + \Gamma^a_{bc}\xi^b dq^c$ 是逆变向量场 ξ^a的绝对微分，而广义力 $Q^a = g^{ab}Q_b$。第二类克里斯托费尔符号 Γ^a_{bc} 定义了一种自然的仿射联络，它是度量相容且对称的（$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$），因此构型空间 $\mathbb{V}^n$ 无挠。虽然这是一个经典结果，但线性化方程中有一个鲜为人知的优美关系。记 $(x^a) \in \mathbb{R}^n$ 为叠加在名义轨迹上的小扰动q^a，使得 $q^a\,(t)\ + x^a(t)$ 是扰动轨迹。沿名义轨迹 q^a 的线性化方程以协变形式表示为，其中 黎曼–克里斯托费尔曲率张量 R_{cbda}，

$$g_{ab}\frac{D^2x^b}{dt^2} + \left(R_{cbda}\dot{q}^c\dot{q}^d - \nabla_b Q_a\right)x^b = \Phi_a \tag{7.2}$$

协变导数 $\nabla_b Q_a = \frac{\partial Q_a}{\partial q^b} - \Gamma^c_{ba}Q_c$，以及与 x^a对偶的小广义力 Φ_a。因此，曲率是扰动动力学稳定性的一种度量。

8. 结论

经典的哈梅尔公式是分析力学中一种普遍适用的方法，用于通过局部坐标描述有限维系统的动力学，并可扩展到连续体 [87]。通常，将在几何力学框架下以无坐标形式推导出的方程的坐标形式称为哈梅尔方程。然而，这两种概念上截然不同的方法之间的联系尚未得到充分探讨。本文确立了这种联系，其关键在于将哈梅尔系数识别为约化欧拉-拉格朗日方程，或拉格朗日-庞加莱方程坐标形式中出现的系数。局部曲率系数尤其重要，它们在构型空间为非线性流形或李群的力学系统的控制和计算处理中发挥着核心作用。由此，建立了由源于某些对称性的联络所定义的主丛上支配动力学的方程与原始哈梅尔公式之间的清晰联系。在这一背景下，丛坐标的选择至关重要。为此，本文讨论了锁定速度及其相关概念平均速度。锁定速度可实现惯性解耦，这对于控制和计算研究十分重要。这应当促使人们进一步研究如何利用它们推导出性能更佳的表述

效率。一项日益受到关注的问题是，平均速度不能用于运动学重构 [67,71,73,88,89]。例如，这可以通过最小化整体性的规范变换加以解决，即引入一个既不固定于刚体、也不与惯性系对齐的参考系。作为非完整系统运动的一个几何方面，本文讨论了几何相位如何导致浮动系统发生姿态变化，以及可能存在伪完整运动。由于几何方法自然涵盖了这些现象，这将促使人们在几何框架下处理Hamel形式。对于约束和拉格朗日量具有（可能互补的）对称性的通常情形，如何扩展哈梅尔公式仍有待研究，相关处理见 [9,18]，，其中引入了非完整联络，对运动学联络和机械联络进行了推广。作为附带贡献，本文还指出了文献中局部曲率定义的一些差异和不一致之处；在应用方程（1.1、1.2）时，这一点至关重要。

A. 符号表

n –（广义）坐标的数量$\bar{m}$ – i) 普法夫约束的数量，ii) 对称群的维数 $G_\delta = n - \bar{m}$ – 由 $\bar{m}$ 普法夫约束定义的微分（瞬时）自由度$a, b, c, \ldots$ – 遍历所有坐标的指标： $a = 1, \ldots, nI, K, L, \ldots$ – 指标 $I = \bar{m}+1, \ldots, n$，分别对应 i) 独立速度，ii) 受约束或不受约束系统的形状坐标（即主丛底流形的坐标）$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – 指标 $\alpha = 1, \ldots, \bar{m}$，分别对应 i) 约束方程，ii) 从属速度坐标，iii) 对称群上的典范坐标 $Gi, j, k, l, \ldots$ – 笛卡尔向量的指标 $i, j, k, l = 1, 2, 3$，例如 $\mathrm{x} = (x^i) \in \mathbb{R}^3 q^a$, $\mathrm{q} = (q^a)$ – 不受约束系统的局部坐标、广义坐标r^I, $\mathrm{r} = (r^I)$ – 独立（局部）坐标，$I = \bar{m}+1, \ldots, ns^\alpha$, $\mathrm{s} = (s^\alpha)$ – 从属（局部）坐标，$\alpha = 1, \ldots, \bar{m}\gamma^a_{bc}, \gamma^\alpha_{IJ}, \gamma^\alpha_{\beta J}$ – 哈梅尔系数u^α – i) 准速度，ii) 丛坐标，iii) 普法夫约束 Ω^α – 锁定速度的局部坐标 $\mathcal{A}^\alpha_I, \mathcal{B}^\alpha_{IJ}$ – 局部联络和局部曲率的系数ε_{ijk} – 列维-奇维塔符号δ_{ij} – 克罗内克δ符号$\tilde{}\mathrm{x}$ – 与向量 $\mathrm{x} = (x^k) \in \mathbb{R}^3 \mathrm{x} = (\varepsilon_{ikj} x^k)$ 相关联的反对称矩阵 $\tilde{} \times \mathrm{y}$ – x、y 的叉积 $\in \mathbb{R}^3$，可写作 $\tilde{}\mathrm{xy}$ $\hat{}\boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{g}$ – 李代数 $\mathfrak{g}$ 的元素，对应于向量 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g} c^\alpha_{\beta\lambda}$ – 李代数的结构系数 $[X, Y]$ $[X, Y] = c^\alpha_{\beta\lambda} X^\beta Y^\lambda$ X $\mathfrak{g}$ – $, Y \in \mathfrak{g}$的李括号$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_\mathrm{b}$ – 惯性参考系（IFR） $\mathcal{F}_0$、体固定参考系 $\mathcal{F}_\mathrm{b} SE(3)$ – 特殊欧几里得群（刚体运动群） $SE(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3 SO(3)$ – 特殊正交群（旋转群）

Ricci 求和约定：例如 $B^a_I u^I = \sum_I B^a_I u^I$, $c^\alpha_{\beta\lambda} X^\beta Y^\lambda = \sum_\beta \sum_\lambda c^\alpha_{\beta\lambda} X^\beta Y^\lambda$

参考文献

1. R. Montgomery、J. E. Marsden 和 T. S. Ratiu，“带规范的李-泊松结构”，《当代数学》，第 28 卷，第 101–114 页，1984 年。2. R. W. Montgomery，《力学中的丛图像》。加州大学伯克利分校，1986 年。3. A. M. Bloch，《非完整力学与控制》。施普林格，2003 年。4. W.-S. Koon 和 J. E. Marsden，“具有对称性与拉格朗日约化的完整和非完整力学系统的最优控制”，《*SIAM* 控制与优化杂志》，第 35 卷，第 3 期，第 901–929 页，1997 年。

5. N. Sreenath，“形状空间中平面多体系统的非线性控制”，控制、信号与系统数学，第 5 卷，第 4 期，第 343–363 页，1992 年。6. E. A. Shammas、H. Choset 和 A. A. Rizzi，“迈向具有非完整约束的动态欠驱动机械系统运动规划的统一方法”，《国际机器人研究杂志》，第 26 卷，第 10 期，第 1075–1124 页，2007 年。7. A. Guichardet，“分子的转动与振动运动”，载于《*IHP*理论物理年刊》，第 40 卷，第 3 期，1984 年，第 329–342 页。8. J. E. Marsden，《力学讲义》。剑桥，1992 年。9. J. Marsden 和 J. Scheurle，“约化欧拉-拉格朗日方程”，菲尔兹研究所通讯，第 1 卷，第 139–164 页，1993 年。10. G. Hamel，“《论非完整系统》”，《数学年刊》，第 92 卷，第 1 期，第 33–41 页，1924 年。11. ——，《理论力学：力学全领域的统一导论》。施普林格出版社，柏林-海德堡，1949 年。12. D. V. Zenkov，“论Hamel方程”，《理论与应用力学》，第 43 卷，第 2 期，第 191–220 页，2016 年。13. H. Mishra、M. De Stefano、A. M. Giordano、R. Lampariello 和 C. Ott，“用于全驱动机器人捕获翻滚目标的几何控制器”，载于*2020*年美国控制会议*(ACC)*。电气与电子工程师协会，2020 年，第 2150–2157 页。14. D. E. Orin 和 A. Goswami，“人形机器人的质心动量矩阵：结构与性质”，载于*2008*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议，2008 年，第 653–659 页。15. D. E. Orin、A. Goswami 和 S.-H. Lee，“人形机器人的质心动力学”，《自主机器人》，第 35 卷，第 2 期，第 161–176 页，2013 年。16. A. Müller，“《受约束与自由漂浮多体及空间系统的Hamel方程与几何力学》的补充材料”，*Figshare，DOI*：*10.6084/m9.figshare.c.6607449*。17. D. D. Holm，《几何力学——第一部分：动力学与对称性》。世界科技出版公司，2011 年。18. A. M. Bloch、P. Krishnaprasad、J. E. Marsden 和 R. M. Murray，“具有对称性的非完整机械系统”，《理性力学与分析档案》，第 136 卷，第 1 期，第 21–99 页，1996 年。19. J. C. Baez 和 J. P. Muniain，《规范场、纽结与引力》。世界科技出版公司，1994 年，第 4 卷。20. T. Frankel，《物理学的几何》。剑桥，2004 年。21. E. T. Whittaker，《粒子与刚体分析动力学论（第*4*版）》。剑桥，1988 年。22. J. Papastavridis，《分析力学：面向工程师、物理学家和数学家的受约束系统动力学综合论述》。牛津大学出版社，2002 年。23. A. Sommerfeld，《理论物理学讲义，第*1*卷：力学，。学术出版社，莱比锡，1948 年。24. G. Hamel，“《论力学中的虚位移》”，《数学与物理年刊》，第 LIX 卷，第 416–434 页，1904 年。25. P. Maisser，“多体动力学中的微分几何方法”，《非线性分析：理论、方法与应用》，第 30 卷，第 8 期，第 5127–5133 页，1997 年。26. J. M. Maruskin 和 A. M. Bloch，“最优控制的玻尔兹曼-哈梅尔方程”，载于*2007*年第*46*届*IEEE*决策与控制会议。电气与电子工程师协会，2007 年，第 554–559 页。27. L. Boltzmann，“非完整广义坐标的拉格朗日方程形式”，维也纳帝国科学院数学与自然科学班会议报告，第 111 卷，第 1603–1614 页，1902 年 12 月 18 日。28. ——，《力学原理讲义：第二部分》。约翰·安布罗修斯·巴特出版社，莱比锡，1904 年。29. G. Hamel，“《力学中的拉格朗日-欧拉方程》”，《数学与物理杂志》，第 50 卷，第 1 期，第 1–57 页，1904 年。30. R. Murray、Z. Li 和 S. Sastry，《机器人操作数学导论》。CRC出版社，1994 年。31. A. Müller，“多体运动学中的螺旋理论与李群理论”，《多体系统动力学》，第 43 卷，第 1 期，第 37–70 页，2018 年。32. ——，“关于刚体的Hamel系数和玻尔兹曼-哈梅尔方程”，《非线性科学杂志》，第 31 卷，第 2 期，第 1–39 页，2021 年。33. J. E. Marsden 和 T. S. Ratiu，“《力学与对称性导论》”，《今日物理》，第 48 卷，第 12 期，第 65 页，1995 年。34. T. G. Ionescu、P. Antonescu、I. Biro、G. Bögelsack 和 A. K. Breteler，“机构与机器科学术语”，《机构与机器理论》，第 38 卷，第 767–901 页，2003 年。

35. A. Müller 和 D. Zlatanov，《机构与操作器的奇异构形》。施普林格，2019年。36. C. Ehresmann，“可微纤维丛中的无穷小联络”，载于拓扑学讨论会，布鲁塞尔，第29卷，1950年，第55–75页。37. A. M. Bloch、J. E. Marsden 和 D. V. Zenkov，“非完整动力学”，美国数学学会通报，第52卷，第3期，第324–333页，2005年。38. R. L. Hatton 和 H. Choset，“几何运动规划：局部联络、斯托克斯定理与坐标选择的重要性”，《国际机器人研究杂志》，第30卷，第8期，第988–1014页，2011年。39. S. A. Chaplygin，“重旋转体在水平面上的运动”，《规则与混沌动力学》*[英文译本]*, 第7卷，第2期，第119–130页，2002年。40. ——，“关于面积定理的一些推广及其在滚动球体问题中的应用（《数学文集》，第20卷，1897年，第（俄文）页）”，英文译本：《规则与混沌动力学》，第17卷，第2期，第199–217页，2012年。41. P. Voronets，“非完整系统的运动方程”，《数学文集》，第22卷，第4期，第659–686页，1901年。42. P. Woronetz，“关于一个在任意曲面上无滑动滚动的刚体的运动”，《数学年刊》，第70卷，第3期，第410–453页，1911年。43. S. Soltakhanov、M. Yushkov 和 S. Zegzhda，《非完整系统力学 – 一类新的控制系统》。施普林格，2009年。44. E. A. Shammas、H. Choset 和 A. A. Rizzi，“面向具有非完整约束的动态欠驱动机械系统运动规划的统一方法”，《国际机器人研究杂志》，第26卷，第10期，第1075–1124页，2007年。45. J. E. Marsden、T. S. Ratiu 和 J. Scheurle，“约化理论与拉格朗日–劳斯方程”，《数学物理学杂志》，第41卷，第6期，第3379–3429页，2000年。46. J. McCauley，《经典力学》。剑桥，1997年。47. Y. Choquet-Bruhat、C. DeWitt-Morette 和 M. Dillard-Bleick，《分析、流形与物理学：第一部分》。北荷兰出版公司，1996年。48. S. D. Kelly 和 R. M. Murray，“几何相位与机器人运动”，《机器人系统杂志》，第12卷，第6期，第417–431页，1995年。49. J. Ostrowski 和 J. Burdick，“机器人运动的力学与控制的几何视角”，第536–547页，1996年。50. G. Darboux，“关于无穷小微积分理论及其几何应用的课程”，*Gautiers-Villars*，巴黎，第4卷，1887年。51. D. Condurache，“对偶李代数中泊松–达布问题的扩展”，载于*AAS/AIAA*轨道动力学专家会议，美国华盛顿州史蒂文森，2017年。52. H. Munthe-Kaas，“李群上的龙格–库塔方法”，《*BIT*数值数学》，第38卷，第1期，第92–111页，1998年。53. ——，“流形上的高阶龙格–库塔方法”，《应用数值数学》，第29卷，第1期，第115–127页，1999年。54. A. Iserles、H. Z. Munthe-Kaas、S. P. Nørsett 和 A. Zanna，“李群方法”，《数值学报》，第9卷，第215â€“365页，2000年。55. A. Müller，“关于SE(3)上的指数映射和凯莱映射的评述：其与广义泊松方程及柔性多体系统的李群积分相关”，《皇家学会会刊*A*辑》，第477卷，第2253期，2021年。56. D. McDonald，“人如何在空中旋转？”，《新科学家》，第10卷，第237期，第501–503页，1961年。57. T. Kane 和 M. Scher，“落猫现象的动力学解释”，《国际固体与结构杂志》，第5卷，第7期，第663–670页，1969年。58. H. Essén，“猫用脚着地问题再探：非刚性机械系统的角动量守恒与无力矩转动”，《美国物理学杂志》，第49卷，第8期，第756–758页，1981年。59. M. Enos，“SO(3)xSO(3)上的最优控制问题与落猫”，美国数学学会（编）：《机械系统的动力学与控制》，1993年。60. R. Montgomery，“落猫的规范理论”，*Fields*研究所通讯，第1卷，第193–218页，1993年。61. D. Gerritsen 和 M. Kuipers，“自由下落的人体或动物体的角运动”，《工程数学杂志》，第13卷，第4期，第347–353页，1979年。

62. S. Smale，“拓扑与力学 II”，《数学发明》，第 11 卷，第 1 期，第 45–64 页，1970 年。63. A. Shapere 和 F. Wilczek，“低雷诺数下的自推进”，《物理评论快报》，第 58 卷，第 20 期，第 2051 页，1987 年。64. ——，“ 可变形体的规范运动学 ”，《美国物理学杂志》，第 57 卷，第 6 期，第 514–518 页，1989 年。65. C. J. Isham，面向物理学家的现代微分几何，第 2 版。世界科技出版公司，1999年，第 61 卷。66. H. Cendra、J. E. Marsden 和 T. S. Ratiu，“几何力学、拉格朗日约化与非完整系统”，载于《数学：无限——*2001*及以后》。施普林格，2001 年，第 221–273 页。67. G. Garofalo、B. Henze、J. Englsberger 和 C. Ott，“浮动基机器人动力学的惯性解耦结构”，《*IFAC*论文集》，第 48 卷，第 1 期，第 322–327 页，2015 年。68. A. M. Giordano、D. Calzolari 和 A. Albu-Schäffer，“自由漂浮空间机器人操作的工作空间固定”，载于*2018*年*IEEE*机器人与自动化国际会议（*ICRA*）。电气与电子工程师协会，2018 年，第 889–896 页。69. A. M. Giordano、C. Ott 和 A. Albu-Schäffer，“空间机器人中航天器姿态与末端执行器的协调控制”，《*IEEE*机器人与自动化快报》，第 4 卷，第 2 期，第 2108–2115 页，2019年。70. H. Essén，“平均角速度”，《欧洲物理学杂志》，第 14 卷，第 5 期，第 201 页，1993年。71. G. Nava、L. Fiorio、S. Traversaro 和 D. Pucci，“欠驱动飞行人形机器人的位置与姿态控制”，载于*2018*年*IEEE-RAS*第*18*届人形机器人国际会议（*Humanoids*）。电气与电子工程师协会，2018 年，第 1–9 页。72. S.-H. Lee 和 A. Goswami，“反作用质量摆（rmp）：人形机器人质心角动量的显式模型”，载于*2007*年*IEEE*机器人与自动化国际会议论文集。电气与电子工程师协会，2007年，第 4667–4672 页。73. A. Saccon、S. Traversaro、F. Nori 和 H. Nijmeijer，“关于质心动力学与平均角速度的可积性”，《*IEEE*机器人与自动化快报》，第 2 卷，第 2 期，第 943–950 页，2017年。74. S. Dubowsky 和 E. Papadopoulos，“自由飞行和自由漂浮空间机器人系统的运动学、动力学与控制”，《*IEEE*机器人与自动化汇刊》，第 9 卷，第 5 期，第 531–543 页，1993年。75. E. G. Papadopoulos，“自由漂浮空间机械臂中的非完整行为及其应用”，载于《非完整运动规划》。施普林格，1993 年，第 423–445 页。76. E. Celledoni 和 B. Owren，“刚体动力学的李群方法与流形上的时间积分”，《应用力学与工程中的计算方法》，第 192 卷，第 3 期，第 421–438 页，2003 年。77. M. Borri 和 C. Bottasso，“ 基于螺旋近似的内禀梁模型 —— 第一部分：公式”，《国际数值方法工程杂志》，第 37 卷，第 13 期，第 2267–2289 页，1994 年。78. V. Sonneville、A. Cardona 和 O. Brüls，“在特殊欧几里得群 SE(3) 上表述的几何精确梁有限元”，《应用力学与工程中的计算方法》，第 268 卷，第 451–474 页，2014 年。79. H. Gattringer、A. Reiter、C. Stöger、M. Jörgl、P. Hörmandinger 和 A. Müller，“自平衡立方体的动力学建模与起摆控制”，载于阿尔卑斯—亚得里亚海—多瑙河地区机器人学国际会议。施普林格，2016 年，第 144–151 页。80. J. M. Selig，机器人学几何基础。施普林格科学与商业媒体，2004 年。81. R. Mukherjee 和 M. Zurowski，“平面空间机器人的伪完整行为”，载于*1994*年*IEEE*机器人与自动化国际会议电气与电子工程师协会，1994 年，第 2405–2410 页。82. R. Mukherjee，“平面空间机器人的伪全纯行为”，《制导、控制与动力学杂志》，第 19 卷，第 1 期，第 251–253 页，1996年。83. J. L. Synge 和 A. Schild，张量分析。多伦多大学出版社，1949 年。84. A. I. Lurie，《分析力学（俄文）》。国家出版社，物理与数学文献，莫斯科，1961年；英文译本：A.I. Lurie，《分析力学》，施普林格，2002年。85. F. Bullo 和 A. D. Lewis，《机械系统的几何控制：简单机械控制系统的建模、分析与设计》。施普林格，2004 年，第 49 卷。86. U. Jungnickel、G. Kielau、P. Maisser 和 A. Müller，“具有非二次拉格朗日量的欧拉-拉格朗日系统的基于无源性的控制”，《*ZAMM*应用数学与力学杂志》，第 982–992 页，2008 年。87. D. Shi、D. V. Zenkov 和 A. M. Bloch，“经典场论的Hamel形式”，《非线性科学杂志》，第 30 卷，第 4 期，第 1307–1353 页，2020 年。88. J. I. Mulero-Martínez，“科里奥利/向心矩阵的一种新因式分解”，《*Robotica*》，第 27 卷，第 5 期，第 689–700 页，2009年。89. W. Du、Z. Wang、E. Moullet 和 F. Benamar，“多体浮动运动系统中有意义的质心坐标系定向”，载于*IEEE*机器人与自动化国际会议，2021年，第 3061–3067 页。