arXiv:2305.05435v1 [math-ph] 9 May 2023

与吉布斯-亥姆霍兹方程相关的完整几何模型和非完整几何模型

Cristina-Liliana Pripoae、Iulia-Elena Hirica、Gabriel-Teodor Pripoae 和 VasilePreda

摘要

通过将内能替换为自由能，作为“可观测量空间”中的坐标，我们对 [57, 58, 63] 中已知的三个非完整几何化进行了略微修改，并证明曲率张量场、里奇张量场和标量曲率函数的系数仍然是有理函数。此外，我们以规范方式定义并研究了一种新的完整黎曼几何模型，该模型与经典热力学中的吉布斯-亥姆霍兹方程相关。我们确定了主要的几何不变量，并推导出它们的一些性质。利用这一几何化，我们通过三个随机积分方程，分别刻画吉布斯-亥姆霍兹熵与玻尔兹曼-吉布斯-香农熵、Tsallis熵和Kaniadakis熵之间的等价性。我们证明，某些特定的（无限）正态概率分布族是这些方程的溶液。

关键词： 吉布斯-亥姆霍兹方程；自由能；压力；体积；温度；玻尔兹曼-吉布斯-香农熵；热（热量）容量；热压力系数；化学热力学

1 引言

1.1 研究动机

经典热力学由吉布斯-亥姆霍兹方程所支配，该方程关联封闭系统的若干宏观可观测量（体积、自由能（或内能）、压力、温度和“熵”）。若将其视为 $\mathbb{R}^5$（的某个开子集）上的普法夫方程，我们可以考察其核；该核是一个不可积（非完整）的正则四维分布。非完整性使得我们无法按标准（规范）方式将黎曼几何工具应用于积分（子）流形，因此必须借助非完整几何化方法。尽管这些非完整工具聊胜于无，却仍无法通过相关分布捕捉物理模型中隐藏的全部重要信息。

我们的论文有两个主要目标：首先，我们对三种已知的 GH 方程的黎曼非完整几何化方法稍作调整，并比较新旧方法。其次，我们通过选择其他坐标，避免先前分布缺乏可积性的问题。这使我们能够对 GH 方程进行完整几何化，从而大大简化整个框架。

1.2 历史

19世纪末，J. W. Gibbs 和 H. Helmholtz 的论文促成了吉布斯-亥姆霍兹方程的诞生，并为（化学）热力学奠定了严谨的（数学）基础。其有趣的故事可见于 [3, 5, 4, 49, 52] 以及 Peter Mander 的精彩博客 [41]。GH 方程是一种特定的普法夫方程。普法夫方程这一数学概念早在 100 年前便由 J.F. Pfaff 定义；GH 方程还涉及所谓的“热力学熵”（又称“吉布斯-亥姆霍兹熵”或“宏观熵”等可观测量）。

大约在同一时期，L. Boltzmann（不久之后还有 M. Planck 和 J. W. Gibbs）引入了另一种适用于统计力学的熵；后来，Shannon 将其用于信息论。如今，人们称之为玻尔兹曼–吉布斯–香农（BGS）熵（又称“吉布斯熵”“香农熵”“信息熵”或“统计熵”）（[49]）。

这两类熵概念在认识论上都源自卡诺于19世纪初发表的关于热机的论文，以及克劳修斯在19世纪中叶的工作（[49]）。一个世纪之后，对它们的研究分化为两种（表面上）相互背离的理论。如今，一个重要的开放问题是判定这两种熵是否等价；如果它们确实等价，那么建立两种理论之间的“词典”，并寻求一种统一的熵大统一理论，将会很有意义。这个等价问题在某种意义上类似于相对论中的惯性质量与引力质量的等价（即“等效原理”）。在（物理、数学、认识论）文献中，人们分别提出了支持和反对两种观点（等价与不等价）的论据 [3, 7, 11, 12, 14, 17, 21, 26, 31, 32, 35, 39, 40, 42, 43, 48, 50, 51, 55, 59, 68, 69]。

要判断何处为真理，因所采用的数学方法各不相同，便愈发困难。热力学熵是一个确定性概念，主要通过 GH 方程加以研究，其模型化基于接触几何（[6, 9, 16, 22, 24, 25, 34, 36, 44, 54, 56] 及其中的参考文献）和/或不同的非完整相关不变量。BGS 熵的研究则以概率论和统计工具为基础；不过，也存在与之相关的一些几何对象，例如费舍尔度量、统计流形等（参见 [28, 29, 30] 及其中的参考文献）。但与已有两个世纪之久的普法夫形式相比，所有这些概念都源自近年；其长远意义及适用性仍有待证实。

黎曼非完整几何化可追溯至20世纪20年代，始于 Gh. Vranceanu [45, 66, 67] 的论文，以及 Z. Horak 独立发表的论文（引自 [33]）。人们将一些黎曼不变量与普法夫系统相关联，这些系统确定了物理学（尤其是力学）中感兴趣的不可积分布D；这些不变量与已知的完整模型中的不变量类似。此后不久，这一理论沿着多个方向发展，尤其是 E. Cartan 和 C. Ehresmann 的纤维空间联络理论。

通过笛卡尔技巧的高维类比，相对于黎曼度量 g_D，一个互补的正交分布 $D^\perp$ 建立了一个“正交标架”$(D,\ D^\perp)$，从而可以将其“分解”为两部分；现在可以利用黎曼几何工具，得到度量不变量。给定分布D，存在无穷多个这样的非完整黎曼模型（D, $D^\perp$, g_D）（在半黎曼情形下则更多）。这种方法的灵活性可能是一种优势，但有时也可能成为劣势，这既体现了非完整几何的成就，也揭示了它的局限。（我们不在此深入这一争论，因为它值得更细致的探讨，也需要更恰当的框架。）

一种极具原创性的动力系统几何化路径，通过普法夫方程和非完整几何实现，即 C. Udriste 的几何动力学 [60]。特别是，这一工具也被应用于 GH 方程的研究（ [6, 57, 58, 63, 61, 62]仅举几例）。

1.3 我们的贡献

本文探讨三个（表面上互不相关的）主题：经典热力学与吉布斯-亥姆霍兹方程的几何化（通过完整模型和非完整模型）；从内蕴几何和外蕴几何两个角度详细研究超曲面 $\mathfrak{S}$ in $\mathbb{R}^4$；经典（热力学）熵与统计熵之间的等价问题。这三个主题的统一之处在于超曲面 $\mathfrak{S}$ 所发挥的双重作用：首先，用于证明完整方法相较于非完整方法的优势；其次，作为一种工具，从解析角度刻画前述熵概念之间可能存在的等价关系。

在第 2 节中，我们回顾 Udriste 及其合作者提出的三种 GH 方程的（非完整）黎曼几何化。通过用自由能替代内能，我们得到三种与前述几何化相对应的新型非完整几何化。新的黎曼不变量同样可表示为有理函数。

在第 3 节中，我们利用一个特殊的参数化超曲面 $\mathfrak{S}$ ，在 $\mathbb{R}^5$ 中对 GH 方程进行了新的完整几何化。我们计算了该超曲面的基本形式矩阵、平均曲率、主曲率，以及它的一些内蕴不变量（测地线、曲率系数、里奇系数、标量曲率）。与非完整模型所提供的局部/不完整工具不同， $\mathfrak{S}$ 的几何结构可以使用完整的黎曼几何工具，从而帮助理解和控制热力学系统。

在第 4 节中，我们使用第 3 节中的模型，分别将 GH 熵与统计力学中的 BGS 熵、Tsallis 熵和 Kaniadakis 熵进行比较。它们的等价性由特定的随机积分方程刻画。文中还给出了这些方程的溶液示例。

我们将自己的方法与 Gao等人 ([19, 20]) 的最新结果进行比较。该结果指出，在一组特定的物理假设下，BGS 熵（以及可能的 Tsallis 熵）只有对广义玻尔兹曼分布才等于热力学熵。

在第 5 节中，我们对所得结果作出一些热力学解释。

1.4 约定

我们的一些定义和结果可以轻松推广，用于处理广义吉布斯-亥姆霍兹方程 [4, 55, 52]。我们更倾向于限制研究范围，并尽可能保持论述浅显，以免只见树木不见森林。

我们假设所有物理量都经过了适当的归一化，因此从物理学的角度来看，所有方程都有意义。

2 吉布斯–亥姆霍兹方程的三种非完整黎曼几何化的体现形式

考虑一个封闭的热力学系统，其中：（吉布斯）自由能为 G，压力为 p，熵为 S，温度为 T，内能为 U，体积为 V。我们知道（[6, 8]）

$$U = G - pV + TS \quad . \tag{1}$$

这些可观测量之间的相互关系由吉布斯–亥姆霍兹方程描述

$$dG + SdT - Vdp = 0 \quad . \tag{2}$$

利用关系式 (1)，该方程可写成等价形式

$$dU + pdV - TdS = 0 \quad . \tag{3}$$

在两个合适的开子集（作为“构形空间”） $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{E}$ 上，分别相对于坐标 (G, p, S, T, V) 和 (U, p, S, T, V)，定义两个微分一形式 $\omega := dG + SdT - Vdp$ 和 $\eta := dU + pdV - TdS$，它们属于 $\mathbb{R}^5$。于是，方程 (2) 和 (3) 可分别用普法夫方程 $\omega = 0$ 和 $\eta = 0$建模，并由其相应的四维（正则且非可积）分布 $ker\omega$ 和 $ker\eta$表示。我们有

$$ker\omega = span\Big\{\frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial V}, \frac{\partial}{\partial p} + V\frac{\partial}{\partial G}, \frac{\partial}{\partial T} - S\frac{\partial}{\partial G}\Big\} \tag{4}$$

and

$$ker\eta = span\Big\{\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial S} + T\frac{\partial}{\partial U}, \frac{\partial}{\partial V} - p\frac{\partial}{\partial U}\Big\} \quad . \tag{5}$$

注记 1. 分布 $ker\omega$ （或者 $ker\eta$）的非完整性 是尝试积分 GH 方程时遇到困难的根本原因。因此，人们提出了经验性的或更精细的尝试，并考察了许多特例，方法是“切分”构形空间，或使用理想化模型（例如类卡诺尝试）。

由（2）式可得

$$S = V\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial G}{\partial T} \tag{6}$$

and

$$V = S\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial G}{\partial p} \quad . \tag{7}$$

类比地，由（3）式可得

$$p = T\frac{\partial S}{\partial V} - \frac{\partial U}{\partial V} \tag{8}$$

and

$$T = p\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial U}{\partial S} \quad . \tag{9}$$

Udriste及其合作者采用基于（3）的形式体系，并通过非完整几何的特定技术，构造了与分布 ker η 相关联的三个黎曼度量（[57, 58, 60, 63] 及其中的参考文献）。他们考虑了全局

坐标（x^1，x^2，x^3，x^4，x^5）：=（U，T，S，p，V），并确定了相应的曲率不变量（黎曼曲率、Ricci 曲率和标量曲率），将其表示为变量 x^i、$i=1$，5 的有理函数。

注记 2. 另一种类似的方法是从方程 (2) 出发。相对于新坐标 (G，p，S，T，V)，我们可以得到三个类似的非完整几何化及其相应的黎曼不变量。坐标变换是非线性的，但只涉及有理函数；因此，先前的曲率不变量也是有理函数，不过其变量为 G，p，S，T和 V。一般协变律确立了在这两组坐标系中计算时曲率不变量之间的对应关系。这一简单注记在应用中可能很重要，尤其是当我们希望考虑系统的自由能而非内能时。从理论角度看，与吉布斯-亥姆霍兹方程 (2) 和 (3) 的等价形式相关联的这两种形式体系导出相同的几何化。

注记 3. 设 $\mathfrak{V}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域，其坐标为 (p，G，V)（“构型空间”）。那么，公式 (6) 中的熵函数 S 可以解释为 $\mathfrak{V}$ 上的“拉格朗日量”，即 $S: T\mathfrak{V} \to \mathbb{R}$，相对于温度 T，而非相对于时间。通过形式上的欧拉-拉格朗日方程，我们可以确定系统的“驻定”曲线，其形式为

$$T \to (p_0, G(T), V_0) \quad ,$$

其中压力和体积均保持恒定。我们不走这条路，因为这种几何化同样是非完整的，只不过非完整性更隐蔽地藏在“速度空间” $T\mathfrak{V}$之后。

在下一节中，我们将离开非完整几何的领域，转而探寻热力学系统的几何性质，并采用与之相关的完整 模型。

3 GH 方程的完整几何化

沿用前面的记号，考虑 $\tilde{p}$ 压力对温度的导数˜（又称 [1]热压力系数）以及 G热容（亦称热容量），即自由能关于 T的变化率。（热容的记号并不常见！）我们可以利用公式（6）将熵表示为 $\tilde{p}$、$\tilde{G}$和体积的函数，即 $S = S(\tilde{p}, \tilde{G}, V)$。考虑坐标（$x^1$，$x^2$，$x^3$）：=($\tilde{p}$，$\tilde{G}$，$V$)，其中定义在 $\mathbb{R}^3$的开子集 $\mathfrak{U}$上。定义在 $\mathfrak{U}$ 上的熵函数 S(x^1，x^2，x^3) $= x^1x^3 - x^2$构成 $\mathbb{R}^4$中的一个（正则的、Monge 型、三维）超曲面。该参数化超曲面的像是一个超二次曲面 $\mathfrak{S}$，即 $\mathbb{R}^4$中的一个双曲柱面。图 1 展示了 S 的等值集如何在 $\mathbb{R}^3$上形成叶状结构。

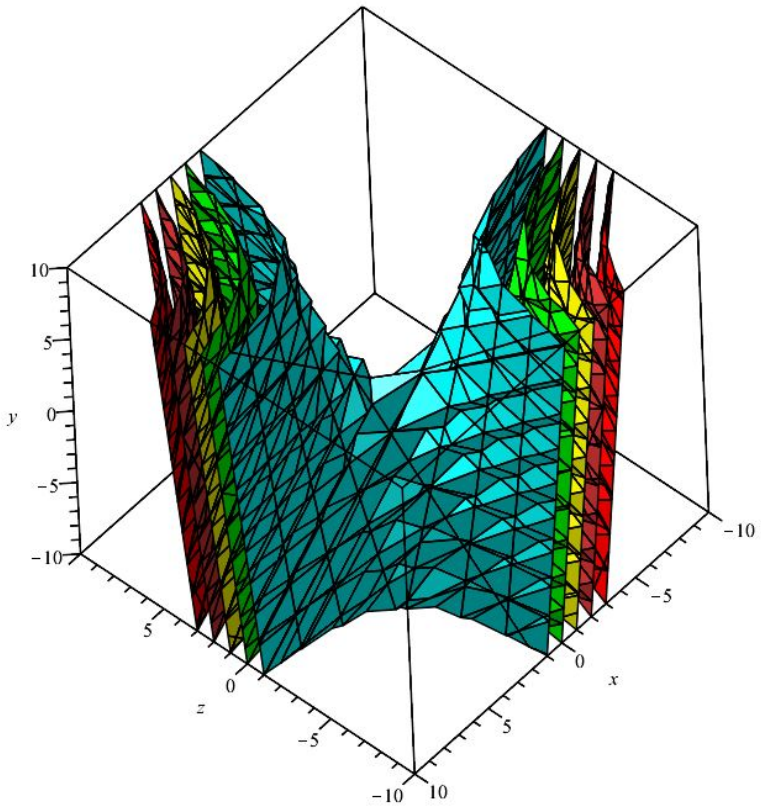


图1: S的等值集。

$\mathfrak{S}$ 的第一基本形式和第二基本形式分别为

$$(g_{ij})_{i,j=1,3} = \begin{pmatrix} 1+(x^3)^2 & -x^3 & x^1x^3 \\ -x^3 & 2 & -x^1 \\ x^1x^3 & -x^1 & 1+(x^1)^2 \end{pmatrix} \quad , \tag{10}$$

$$(h_{ij})_{i,j=1,3} = a^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{11}$$

其中， $a(x^1, x^3) := \sqrt{2+(x^1)^2+(x^3)^2}$。单位法向量场为

$$N = a^{-1} \cdot (x^3, -1, x^1, -1) \quad . \tag{12}$$

$\mathfrak{S}$ 的平均曲率函数是第二基本形式相对于第一基本形式的特征多项式的系数，即

$$det(h_{ij} - tg_{ij}) = 0 \quad ,$$

撰写

$$t^3 - 3H_1t^2 + 3H_2t - H_3 = 0 \quad .$$

我们计算:

$$H_1 = \frac{6}{a^3} \cdot x^1 x^3 \ , \ H_2 = -\frac{6}{a^4} \ , \ H_3 = 0 \quad . \tag{13}$$

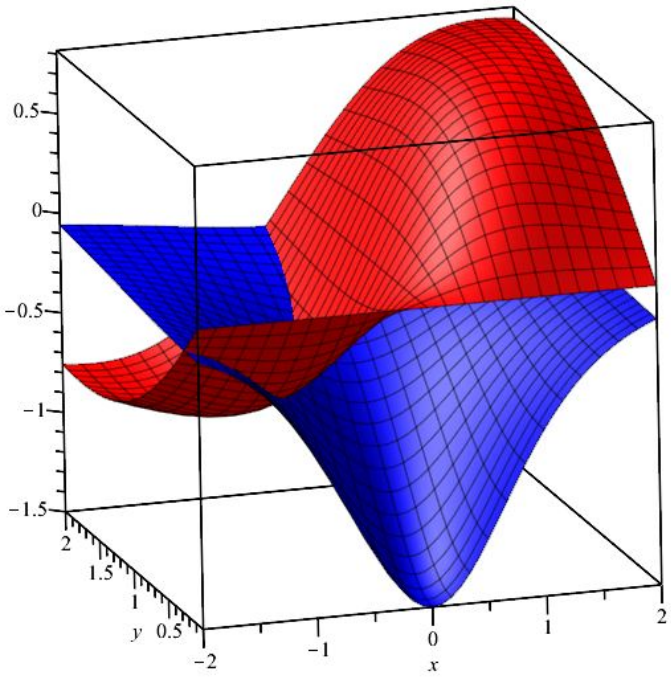


图 2: 第一平均曲率函数（红色）和第二平均曲率函数（蓝色）。记号: $x := x^1, y := x^3$

我们分别以较大的比例绘制前两个平均曲率函数（图 3 和图 4 中的图形仅需保留 $x^3 > 0$ zone）。

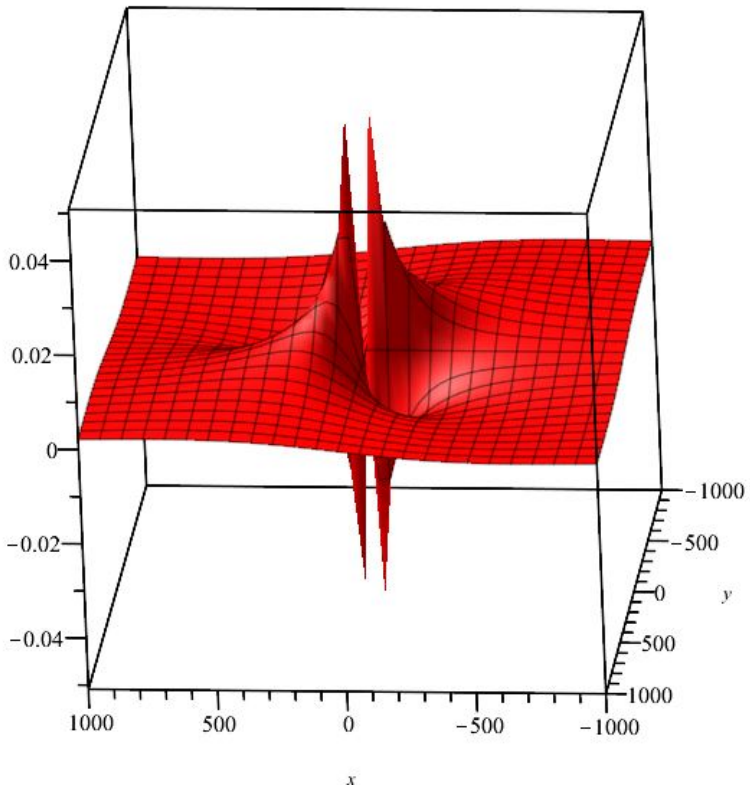


图3：大尺度下的第一个平均曲率函数。记号： $x := x^1$, $y := x^3$

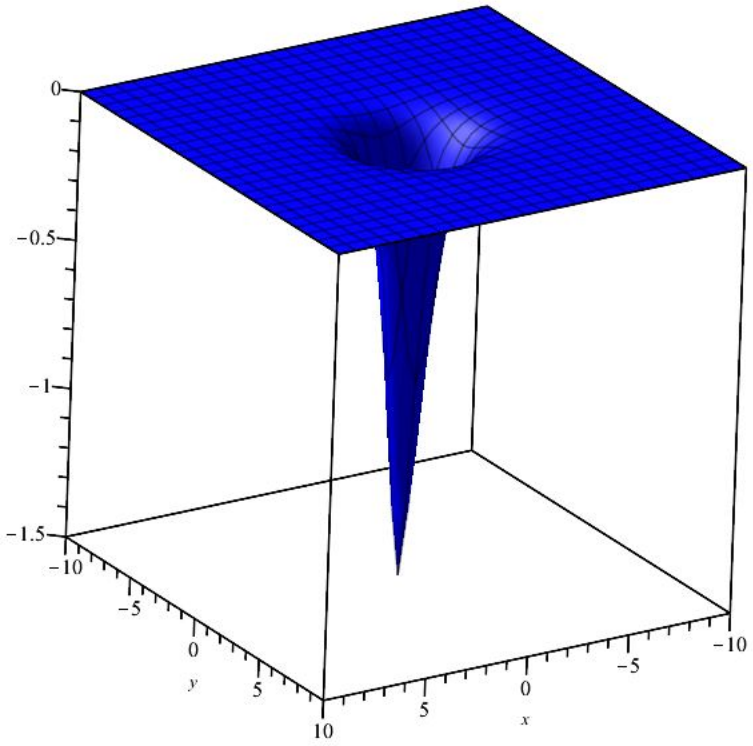


图 4：大尺度下的第二平均曲率函数。记号： $x := x^1, y := x^3$

前述特征多项式的根是 $\mathfrak{S}$ 的主曲率函数。我们计算如下：

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^3} \cdot \left\{ x^1 x^3 + \sqrt{(2 + (x^1)^2)(2 + (x^3)^2)} \right\} \quad ,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{a^3} \cdot \left\{ x^1 x^3 - \sqrt{(2 + (x^1)^2)(2 + (x^3)^2)} \right\} \quad ,$$

$$\lambda_3 = 0 \quad .$$

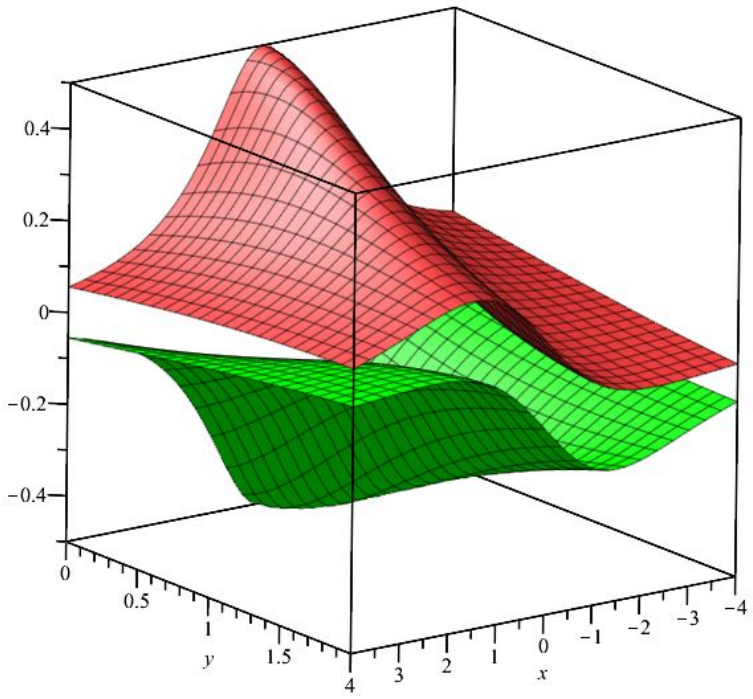


图 5：第一主曲率函数（橙色）和第二主曲率函数（绿色）。记号： $x := x^1$, $y := x^3$

命题 1. 超曲面 $\mathfrak{S}$ 具有以下性质：

(i) 其几何不变量仅取决于 x^1 和 x^3 。

(ii) 它既不是极小曲面，也不是全测地或全脐的。此外，它没有脐点。

(iii) 它有一个零主曲率函数、一个正的光滑主曲率函数和一个负的光滑主曲率函数。正主曲率函数 $\lambda_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，当且仅当 $x^3 = x^1 = 0$时取等号。负主曲率函数 $\lambda_2 \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，当且仅当 $x^3 = x^1 = 0$时取等号。

(iv) 它是渐近平坦的。

(v) H_1不存在极值，且在 $(0,0)$ 附近无界；相反， $H_2 \leq 0$ 且它在 $x^3 = x^1 = 0$ 处有全局最小值 $-\frac{3}{2}$ 。

$\mathfrak{S}$ 的内蕴黎曼几何仅能由第一基本形式推导得出。非零的克里斯托费尔符号为：

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{x^3}{a^2}\ ,\ \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\frac{1}{a^2}\ ,\ \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{x^1}{a^2} \quad .$$

测地线是以下常微分方程组的解：

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \quad , i = 1,2,3 \quad ,$$

可写成详细形式

$$\frac{d^2x^1}{dt^2}+\frac{2x^3}{a^2}\cdot\frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dx^3}{dt}=0 \quad , \tag{14}$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2}-\frac{2}{a^2}\cdot\frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dx^3}{dt}=0 \quad ,$$

$$\frac{d^2x^3}{dt^2}+\frac{2x^1}{a^2}\cdot\frac{dx^1}{dt}\cdot\frac{dx^3}{dt}=0 \quad .$$

注 4。 (i) 与平均曲率和主曲率公式相比，前述常微分方程组（形式上）取决于变量 x^2。

(ii) 对常微分方程组 (14) 进行数值求解，并采用初始条件

$$x^1(0)=x^2(0)=x^3(0)=1\ ,\ \frac{dx^1}{dt}(0)=\frac{dx^3}{dt}(0)=1\ ,\ \frac{dx^2}{dt}(0)=10 \quad ,$$

and

$$x^1(0)=x^2(0)=x^3(0)=1\ ,\ \frac{dx^1}{dt}(0)=\frac{dx^3}{dt}(0)=10\ ,\ \frac{dx^2}{dt}(0)=1 \quad ,$$

分别得到图 6 和图7中的测地线。

(iii) 由于常微分方程组 (14) 是非线性的，求其精确解是一项艰巨的任务。我们仅考虑非退化测地线。整体黎曼几何中的一个一般性结论保证了所有测地线都是完备的。因此， $\mathfrak{S}$ 中的任意两点都可以由一条极小测地线连接。

第一族测地线具有如下形式

$$x^1(t)=k_1t+k_2\ ,\ x^2(t)=k_3t+k_4\ ,\ x^3(t)=0 \quad ,$$

其中 k_1、 k_2、 k_3 和 k_4 是任意常数，且 $(k_1)^2+(k_3)^2\neq 0$。另一族类似的测地线为

$$x^1(t)=0\ ,\ x^2(t)=k_5t+k_6\ ,\ x^3(t)=k_7t+k_8 \quad ,$$

其中 k_5、 k_6、 k_7 和 k_8 是任意常数，且 $(k_5)^2+(k_7)^2\neq 0$。

假设在实数轴的某个开区间上， $x^1=x^1(t)$和 $x^3=x^3(t)$均不为零。那么，我们还有另一族测地线，其中 $x^1=x^3$；函数 x^1必须满足如下形式的隐式方程

$$x^1(t)\sqrt{(x^1(t))^2+1}+ln\Big(x^1(t)+\sqrt{(x^1(t))^2+1}\Big)=k_9t+k_{10} \quad ,$$

其中 k_9、 k_{10} 是任意常数。测地线的第二分量可由式 (14) 中的第二个方程恢复，表示为原函数

$$x^2(t)=\int\Big\{\int\Big[\frac{1}{(x^1(t))^2+1}\cdot\Big(\frac{dx^1}{dt}(t)\Big)^2\Big]dt\Big\}dt \quad .$$

变量 x^2 将取决于另外两个任意常数。

图 6 和图7中的两条特定测地线（经数值积分后绘制）属于最后这一族。

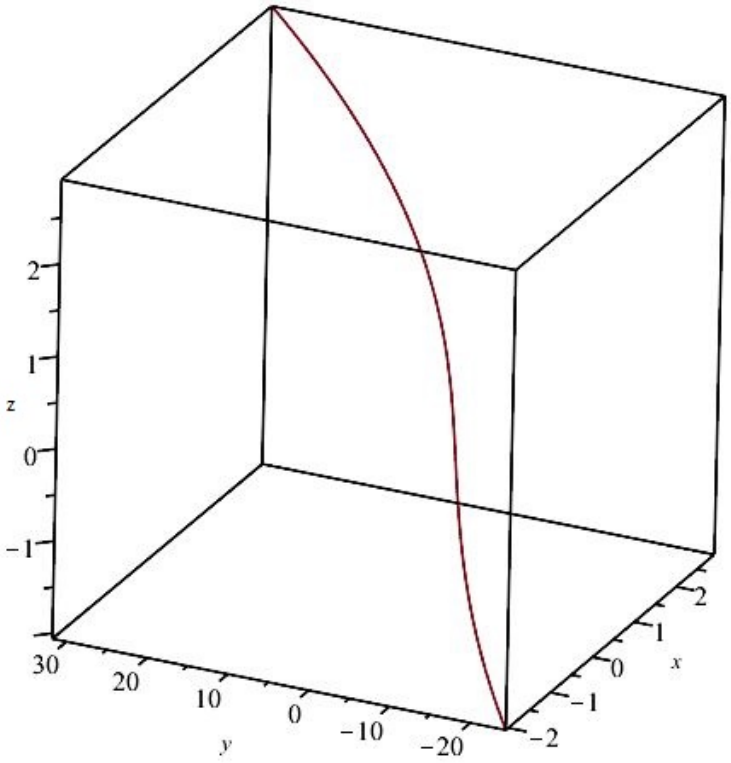


图 6：第一条测地线。符号说明： $x := x^1$, $y := x^2$, $z := x^3$

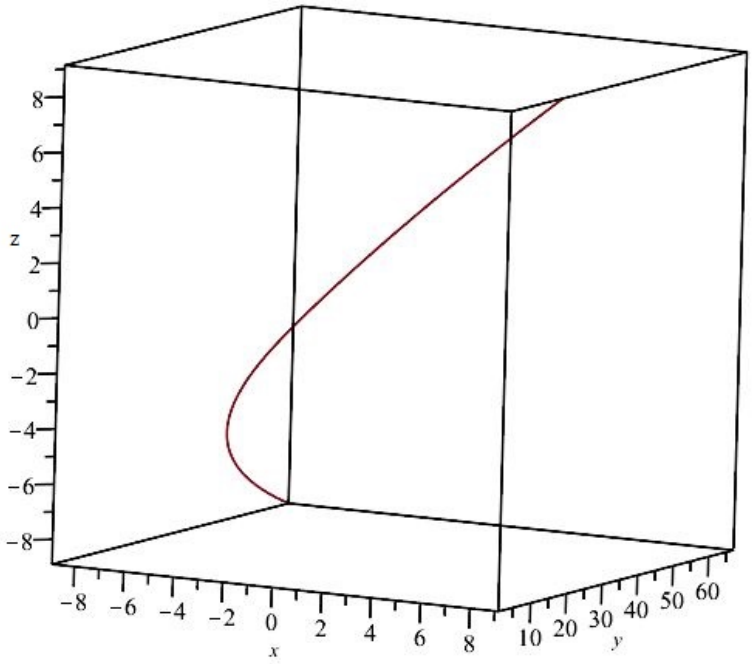


图7：第二条测地线。记号： $x := x^1, y := x^2, z := x^3$

现在计算非零的 (0,4) 黎曼曲率系数:

$$R_{1313} = -R_{1331} = -R_{3113} = R_{3131} = -\frac{1}{a^2} \quad ,$$

非零的里奇系数:

$$Ric_{11} = -\frac{2 + (x^3)^2}{a^4} \ , \ Ric_{13} = Ric_{31} = -\frac{x^1 x^3}{a^4} \ , \ Ric_{33} = -\frac{2 + (x^1)^2}{a^4} \quad ,$$

以及标量曲率

$$\rho = -\frac{4}{a^4} \quad .$$

命题 2. $\mathfrak{S}$ 的标量曲率渐近平坦，且有界$-1 \leq \rho < 0$。其唯一的全局最小点为 *(0,0,0)*，且 $\rho(0,0,0) = -1$。此外，$\rho = \frac{2}{3} H_2$。

由于最后一个性质，标量曲率的图形与第二平均曲率的图形非常相似，因此我们不单独绘制。更有趣的似乎是 $\mathbb{R}^3$ 按其等值集形成的叶状分解，这些等值集是沿着 x^2 轴的圆柱面。

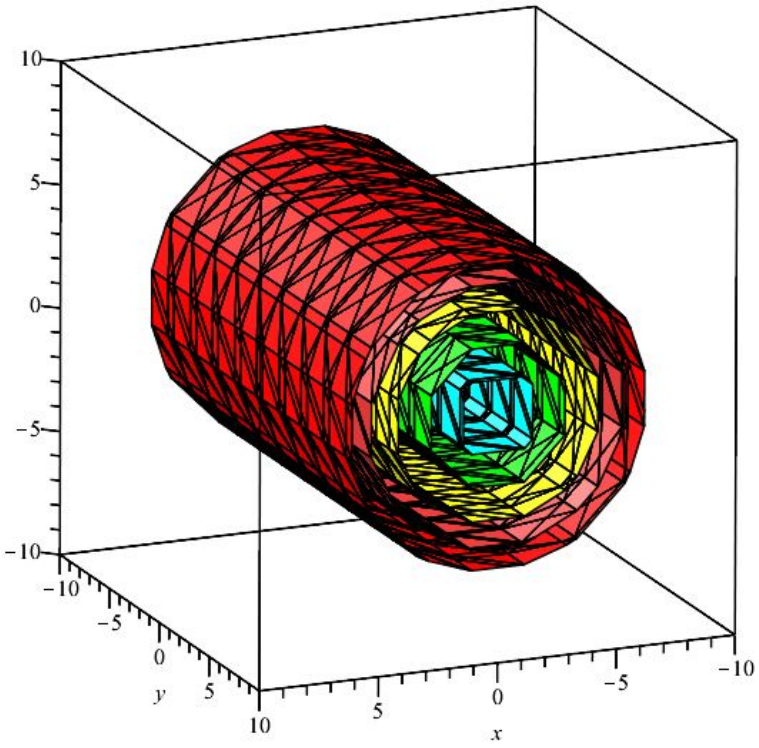


图 8： ρ 的等值集。

4 GH 熵与 BGS 熵、Tsallis 熵和 Kaniadakis 熵之间等价性的刻画

考虑第 3 节中的热力学系统。设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集， $f = f(x,\ y)$ 是一个由概率分布（概率密度函数）构成的参数族， f: $\mathfrak{U} \times M \to \mathbb{R}$，其中 $\int_{y \in M} f(x,\ y)dy = 1$, $f \geq 0$。

熵等价公设。 我们假设 *GH* 熵与 *BGS* 熵相一致。 （为简化计算，将玻尔兹曼常数归一化为 1。）

这一性质可由以下等价方程来表征:

$$x^1 x^3 - x^2 + \int_{y \in M} f(x,y) \cdot log f(x,y) dy = 0 \quad . \tag{15}$$

当我们想要确定适用于给定热力学模型的未知概率密度函数 f 时，这个随机积分方程可能会有所帮助。

例 1. 设

$$\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\Big\{x^1 x^3 - x^2 - \frac{1}{2}\Big\} \tag{16}$$

以及定义在 $\mathfrak{U}$ 上的任意实值函数 $\mu = \mu(x)$。考虑实数轴上的参数化正态概率密度函数族，其形式如下：

$$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)} exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\frac{y-\mu(x)}{\sigma(x)}\Big)^2 \Big\} \quad . \tag{17}$$

那么， f 是方程 (15) 的一个解。我们注意到，均值可以任意依赖于热力学变量。相反，离散度与 GH 熵函数成反比。

对于其他广义对数，也可以寻找方程 (15) 的类似解，而不使用自然对数。接下来的两个示例分别使用 Tsallis 对数和 Kaniadakis 对数。

示例 2. 我们来寻找等价方程的解

$$x^1 x^3 - x^2 + \int_{y\in M} f(x,y)\cdot log_q^T f(x,y) dy = 0 \quad , \tag{18}$$

该方程是方程 (15) 的对应形式，其中 BGS 熵和自然对数被 Tsallis 熵和 Tsallis q-对数 ([30]) 所取代

$$log_q^T(z) := \frac{z^{1-q}-1}{1-q} \ , \ q \neq 1 \quad .$$

设 $q < 2$ ，并令

$$\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2-q)^{\frac{1}{2(q-1)}} \cdot \Big[1 + (q-1)(x^1x^3 - x^2)\Big]^{\frac{1}{q-1}} \tag{19}$$

以及一个任意的实值函数 $\mu = \mu(x)$，定义在 $\mathfrak{U}$ 上。考虑由 (17) 给出的实数轴上的参数化正态概率密度函数族。那么， f 是方程 (18) 的一个解。我们注意到，均值可以任意依赖于热力学变量。离散度对 GH 熵函数的依赖方式比示例 1 中更为微妙。

当 $q \geq 2$ 时，某些积分会发散，先前的推理不再适用。

例 3. 现在我们来求等价方程的溶液

$$x^1 x^3 - x^2 + \int_{y\in M} f(x,y)\cdot log_k^K f(x,y) dy = 0 \quad , \tag{20}$$

它是方程 (14) 的类似形式，其中 BGS 熵和自然对数被 Kaniadakis 熵和 Kaniadakis k-对数 ([30]) 所取代

$$log_k^K(z) := \frac{z^k - z^{-k}}{2k} \ , \ k \in (-1,1) \ , \ k \neq 0 \quad .$$

考虑

$$\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Big\{ \frac{k\sqrt{1-k^2}(x^1x^3 - x^2) + \sqrt{k^2(1-k^2)(x^1x^3-x^2)^2 + \sqrt{1-k^2}}}{\sqrt{1+k}} \Big\}^{\frac{1}{k}} \tag{21}$$

以及定义在 $\mathfrak{U}$ 上的任意实值函数 $\mu = \mu(x)$。考虑由式 (17) 给出的实数轴上的参数化正态概率密度函数族。那么， f 是下列方程的解：

方程 (20)。我们注意到，均值可以任意依赖于热力学变量。离散度取决于 GH 熵函数，但其依赖方式比示例 1 和 2 中更为复杂。

注记 5。 (i) 前面的三个例子引出了以下自然问题：哪些是*PDF* 的族 F （不一定是正态分布的！）以及广义“对数” φ ([30])，使得

$$x^1x^3 - x^2 + \int_{y\in M} F(x,y)\cdot\varphi(F(x,y))dy = 0 \quad ? \tag{22}$$

该方程确立了由前两项给出的热力学熵与和广义“对数” φ相关的（统计）广义熵之间的等价性。求解该方程要困难得多，因为未知量既包括确定性的（φ），也包括随机性的（F）。

在前面的注记中，我们解释了为什么只考虑经典 GH 方程，而不考虑广义形式。在广义 GH 方程的情形下，（22）式中的前两项应替换为另一个表达式，并且最终可能需要使用更广义的坐标（对应于更多热力学状态函数以及可能的其他统计量）。问题的性质并未改变；所有复杂性都只是由于在更高维空间中计算的复杂程度所导致的。

(ii) 最近（[19, 20]），Gao 等人证明，在三个特定的假设（源于物理直觉）下，唯一能使 GBS 熵等于（经典）热力学熵的概率密度函数是广义玻尔兹曼分布（即指数型分布）。有迹象表明，这一结果或许也能推广至 Tsallis 熵。这一重要结果部分回答了问题 (22)。

然而，从数学角度来看，Gao 提出的三个假设对框架的限制相当严格，因此有必要采用更弱的假设。此外，方程 (22) 背后还存在一些隐含的必要条件，例如广延性；由此可知，热力学熵与统计熵（即前者）必须同为广延量，或同为非广延量（例如 Tsallis 熵和 Kaniadakis 熵 [65]）。

(iii) 我们必须澄清术语。通常，人们将“熵”理解为定义在概率密度函数集合上的泛函 $E = E[f]$ ，而将“熵”理解为该泛函的一个特定值 $E[f_0]$。（在更基础的层面上，这就像我们说“函数 $sint$”，而不是“函数 sin”。）

分别用 E^{BGS}、E^T、 E^K 表示 BGS、Tsallis 和 Kaniadakis 熵泛函。用 f_{BGS}、f_T、 f_K 表示在前面三个示例中得到的概率密度函数参数化族。我们证明了热力学熵 $S = S(x)$ 与 $E^{BGS}[f_{BGS}(\cdot,y)]$、 $E^T[f_T(\cdot,y)]$ 和 $E^K[f_K(\cdot,y)]$ 一致（作为 x 的函数）。这并不意味着 S （它是一个函数！）与泛函（！） E^{BGS}、 E^T、 E^K 相一致。这才是式 (15) 和 (22) 中所述等价关系的真正含义。

注记 6. 将 $f = f(x,\ y)$ 表示为 $\mathfrak{U}\times M$ 上的一个概率密度函数族， φ 为一个广义对数，且

$$H[f](x) := -\int_{y\in M} F(x,y)\cdot\varphi(F(x,y))dy \tag{23}$$

一族由任意广义熵泛函参数化的函数族。记 $g^{H,f}$ 为定义在 $\mathfrak{U}$ 上的黎曼广义费舍尔度量，该度量由 H 和 f [30] 规范地关联确定。

如果基本热力学熵 S 与熵 $H[f]$ 满足第一基本形式 g 在式（10）中与 $g^{H,f}$ 重合，则称二者度量等价。变体可能包括：

- g 和 $g^{H,\ f}$ 是位似的；
- g 和 $g^{H,\ f}$ 是共形的；
- g 和 $g^{H,\ f}$ 存在测地对应。

现在可以表述新的“等价问题”：求出 H 和 f 使得 S 与 $H[f]$度量等价。

这种熵的等价关系并不比式（22）中的前一种关系更一般，也不是它的扩展或特例；它具有不同的性质，是一种借助导出对象实现的中间等价关系。式（22）中的等价关系与“度量等价”在逻辑上互不相关。此处不再详述，因为这项研究需要运用广义费舍尔度量背后的整套理论工具[30]。

5 热力学解释与应用

前几节的内容更偏重数学。现在，我们将着重探讨第 3 节和第 4 节中完整模型的一些物理解释。

(i) 首先需要说明，我们使用了一些不太常见的变量作为“构型空间” $\mathfrak{U}$ 的坐标（除常用且频繁使用的体积 x^3之外），即热压力系数 x^1 和热容量x^2。不过，尽管这些变量/观测量在文献中并不常见，但也并非完全没有出现（例如 $[13, 37]$）。

(ii) 超曲面 $\mathfrak{S}$ 的内蕴几何和外蕴几何不依赖于变量 x^2，因此与热容 $\tilde{G}$无关。相反，该超曲面的集合性质取决于 x^2。

(iii) 我们的形式体系在超曲面$\mathfrak{S}$上进行微积分时可能会有所帮助，例如计算压力对温度的高阶导数（关于二阶导数，参见 $[2]$ ）。

（iv）几何性质与物理性质之间可以相互转换：例如，第一平均曲率函数 H_1 唯一为零的点，正是压力函数（关于温度）的临界点。

熵函数 S 的等值集（见图1）具有深刻的物理意义。我们考察它们与标量曲率函数 ρ 的等值集（见图8）的交集，后者具有有趣的数学意义。具体而言，设 $R \geqq \sqrt{2}$ 和 a 为实常数。考虑满足以下条件的点（ $x,\ S$ （ x ））$\in \mathfrak{S}$:

$$S(x) = a \quad , \quad \rho(x) = -\frac{4}{R^2+2} \quad .$$

两个二水平集的交线满足由两个隐式方程和一个不等式组成的方程组

$$x^1 x^3 - x^2 = a \quad , \quad (x^1)^2 + (x^3)^2 = R^2 \quad , \quad x^3 > 0 \quad .$$

存在唯一的 $\theta \in (0, \pi)$，使得

$$x^1 = Rcos\theta \quad , \quad x^2 = \frac{1}{2}R^2 sin2\theta - a \quad , \quad x^3 = Rsin\theta \quad .$$

参数化交线 $\theta \to (Rcos\theta, \frac{1}{2}R^2 sin2\theta - a, Rsin\theta)$ 的图像如图 9 所示。

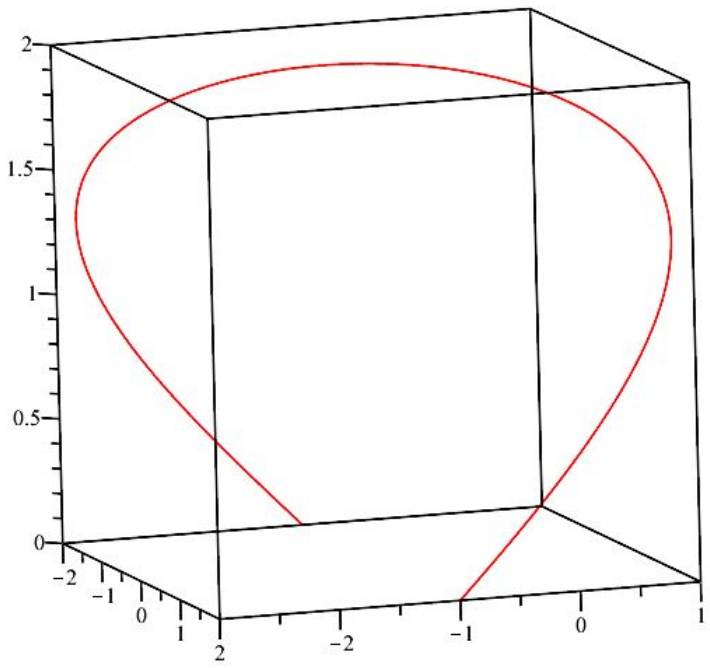


图 9：两个等值集的交集。

交线的第二个坐标（对应于沿交线限制的热˜容 G ）表明存在一个点

$$(\frac{1}{2}R^2 cos2\theta, \frac{1}{2}R^2 sin2\theta - a) \quad ,$$

位于圆心为 $(0, -a)$ 、半径为 $\frac{R^2}{2}$ 的虚拟圆上。形式上，我们记作$\tilde{G}^d := \frac{1}{2}R^2 cos2\theta$ ，并称之为沿交线的伴随热容。以下公式成立

$$(\tilde{G}^d)^2 + (\tilde{G}^2 + a)^2 = \frac{1}{4}R^4 \quad .$$

我们不知道这个量能否扩展为一个（形式上的、推测性的、奇特的新）状态变量；无论如何，它具有一种有趣的内在解释。

(v) 作为第 4 节中特殊随机方程的解而出现的参数化概率密度函数，在文献中不同的研究框架下均有涉及（例如，参见 [15]）。此外，这类参数空间的几何化促使人们研究信息几何中的统计流形和类费舍尔黎曼度量（参见 [28, 29, 30] 及其中的参考文献）。

(vi) 常微分方程组 (14) 可用于确定位于超曲面 $\mathfrak{S}$ 上的测地线。正如注 4 (iii) 所指出的，任意测地线都局部极小化

两点之间的弧长，这两点可解释为热力学状态空间 x^1、 x^2、 x^3 和 S 中的两个事件。这里我们得到了一种可能的控制工具，可用于将热力学引擎从初始状态“驱动”至附近的最终状态。

更确切地说，考虑 $\mathfrak{S}$ 在 t_0 时刻的“状态”，其特征由下式给出： $\tilde{p}(t_0)$, $\tilde{G}(t_0)$、$V(t_0)$ 和 $S(t_0)$。我们希望通过“最短”路径到达“状态” $(A,\ B,\ C,\ S(A,\ B,\ C)) \in \mathfrak{S}$。注 4 (iii) 确保存在一条唯一的“最小”测地线

$$\gamma = \gamma(t) : [t_0, t_0 + b] \to \mathfrak{S}\ ,\ \gamma(t_0) = (\tilde{p}(t_0), \tilde{G}(t_0), V(t_0), S(t_0))\quad , \tag{24}$$

使得 $\gamma(t_0 + b) = (A,\ B,\ C,\ S(A,\ B,\ C))$。此处，“最小”指的是相对于第一基本形式的黎曼距离，而不是欧几里得距离（因为这些坐标并非位置坐标）。实际上，必须根据式 (14) 以数值方式确定测地线 γ。

当然，这种方法取决于并受限于我们所作的选择，即取决于在 $\mathfrak{S}$ 上发现的特定黎曼几何。还存在其他具有类似主张的替代黎曼度量（[10, 53, 71]），它们与 GH 方程相关；对其实际效率和相关性的比较则值得另行开展详细研究。

(vii) 最大熵（MaxEnt）问题是统计力学和信息论中的一个基础研究领域。与之对应的经典热力学问题则较少受到研究，而且无论如何，所采用的方法都截然不同（[27], 第5章）；带有非完整约束的数学优化是一套困难的理论，直到最近才发展起来（参见 [38, 64, 70] 及其中的参考文献）。

我们的完整几何化使得我们能够直接研究（热力学）熵涨落，并通过几何可视化分析其极值点；研究范围包括超曲面 $\mathfrak{S}$ 的子集。

(viii) 第3节中的几何模型未考虑熵可能具有的正值性。如果确有必要加入这一附加条件，研究框架便会受到限制，只适用于 $\mathfrak{U}$ 的一个开集。

(ix) 与物理学中的其他基本方程一样，GH 方程在“正常条件”之外不再成立，例如存在长程相互作用时。第3节中的完整模型可以进一步完善，以涵盖尺度涨落。由于我们使用的坐标并非“空间”坐标，欧几里得距离 r （即球坐标下位置向量场的长度）不再适用。我们用 V-尺度取代 r-尺度，因为两者之间存在直接的（非线性）比例关系。

设 $\nu: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是一个光滑且严格递增的函数，具有以下性质：

$$\lim_{t\to\infty} \nu(t) = \infty\ ,\ \lim_{t\to 0} \nu(t) = 0\quad .$$

显然，存在唯一的 t_0 使得 $\nu(t_0) = 1$。相关示例如下：$\nu(t) = t^\alpha$，其中正数 α固定；$\nu(t) = a^{t^b} - 1$，其中正数 b 和 $a > 1$固定。

考虑 ν-*GH* 方程

$$dG + S^{(\nu)} \cdot dT - \nu(V) \cdot dp = 0\quad .$$

我们推导出 ν-熵的公式

$$S^{(\nu)} = \nu(V) \cdot \tilde{p} - \tilde{G}\quad .$$

特别地，对于 $\nu = id$，我们得到 $S = S^{(id)}$ 并重新得到公式 (6)。

类比第 3 节中的计算，我们得到超曲面 $\mathfrak{S}^{(\nu)}$，并导出第一基本形式 $g^{(\nu)}$、第二基本形式 $h^{(\nu)}$、平均曲率函数、主曲率函数和标量曲率函数，还可以写出测地线方程。

这个由 ν “参数化”的无限模型族中的每个成员，都值得像第 4 节和第 5 节那样进行研究。所用技术会相似，但结果各有特色。在“无穷远处”，长程相互作用及其特定的（局部）熵将占主导；在“零”附近，对于极小作用范围的相互作用，我们将得到不同的特定熵。

6 讨论

本文的第一部分简要探讨了 GH 方程的非完整几何化。我们无意沿这条路径深入研究，因为比较各种可能的方法并开展进一步研究会占用太多篇幅。这或许是未来一个有趣的课题。对于一项可能开展的、比较非完整模型化与完整模型化优缺点的批判性研究，同样如此。

第 4 节中的结果源于我们的信念：熵必须以统一的方式加以描述，无论是在经典热力学中，还是在统计力学或信息论中。我们避免贸然对此作出明确假设，因为我们意识到，从理论科学家和应用科学家的角度来看，这一假设可能显得过于推测性。我们的数学结果采用中性的处理方式，为未来无限的结论敞开大门。

除了第 4 节和第 5 节的内容之外，还需要更多物理解释，以确认或否定我们的主张。我们必须研究这些推测性的想法是否不仅对应于（可能的）“思想实验”，也对应于现实生活中具有重要应用的热力学系统。

未来的发展可能包括：针对其他重要的熵族（Rényi、Sharma-Taneja-Mittal、Naudts 等），求解方程（15）、（18）和（20）的类似形式。

方程（7）、（8）和（9）可用于构造 GH 方程的类似完整几何化。在这些情况下，需要采用完全不同的方法，以刻画 GH 熵与统计力学中的熵（BGS、Tsallis、Kaniadakis 等）之间的等价性。人们或许将得到更为复杂的随机函数等价方程和随机积分等价方程，而不再是“简单的”随机积分等价方程（17）、（20）、（22）。

我们的研究仅限于物理学领域，但必须强调，另一个活跃的研究领域也正在开展相关工作：它通过特定的词典，将热力学概念和结果转换为经济学概念和结果 [18, 23, 63, 61, 62]。本文的所有内容在这一经济理论中都有直接对应，而这一理论仍有待在未来的论文中进一步明确和发展。

在本文的多个地方，我们强调了与 GH 方程的完整模型或非完整模型以各种方式相关联的多种黎曼几何。至少存在两种工具可用于比较任意两种此类几何。第一种是通过相应黎曼度量的列维-奇维塔联络所关联的变形代数来比较（参见 [46] 及相关参考文献

）。第二种是测地对应，它最终出现在两个黎曼流形之间，并能将一个空间中的测地线动力学转换到另一个空间中（例如，参见 [47]）。

致谢。 作者谨以本文纪念他们的老师和同事 Liviu Constantin Nicolescu（1940—2023）。他曾任布加勒斯特大学荣休教授。

参考文献

[1] Abdulagatov, I.M.; Magee, J.W; Polikhronidi, N.G.; Batyrova, R.G. 饱和相与压缩相的内压和内能，载于《焓与内能：液体、溶液和蒸气》，Wilhelm, E.; Letcher, T.（编），英国皇家化学会，英国剑桥，2017年，411-446.[2] Ahlers, G. 超流转变时 ^4He 的压力温度导数。《低温物理学杂志》1972年，7，第3/4期，361-364.[3] Akih-Kumgeh, B. 进一步理解经典热力学中熵的物理意义。《熵》2016年，18，270.[4] Ansermet, J.-P.; Brechet, S.D.《热力学原理》，剑桥大学出版社，英国剑桥，2019年.[5] Atkins, P.《热力学定律：极简介绍》，牛津大学出版社，英国牛津，2010年.[6] Badescu, V.《热力学距离、曲率与涨落建模：几何方法》，施普林格，瑞士沙姆，2016年.[7] Bawden, D.; Robinson, L. “几句引人深思的话”：重新审视信息与熵。《信息科学与技术协会杂志》2015年，66(10)，1965-1987.[8] Blankschtein, D.《经典热力学讲义：统计力学导论》，施普林格，瑞士沙姆，2020年.[9] Bravetti, A. 接触哈密顿动力学：概念及其应用。《熵》2017年，19，535.[10] Cafaro, C.; Luongo, O.; Mancini, S.; Quevedo, H. 热力学长度、几何效率与勒让德不变性。《物理学A：统计力学及其应用》2022年，590，126740.[11] Flores Camacho, F.; Ulloa Lugo, N.; Covarrubias Martınez, H. 熵的概念：从起源到教师。《墨西哥物理学杂志E》2015年，61，69–80.[12] Carnap, R.《熵论两篇论文》，加利福尼亚大学出版社，美国伯克利和洛杉矶，1977年.[13] Chen, Y.; Li, K.; Xie, Z.Y.; Yu, J.F. 吉布斯自由能的交叉导数：经典自旋模型相变的一种通用高效方法。《物理评论B》. 220, 101, 165123.[14] Dieks, D. 是否存在唯一的物理熵？微观与宏观。载于：Andersen, H.; Dieks, D.; Gonzalez, W.; Uebel, T.; Wheeler, G.（编）《科学哲学的新挑战》。欧洲视角下的科学哲学，第4卷。施普林格，德国多德雷赫特，2013年。

[15] Elnaggar, M.S.; Kempf, A. 配分函数的等价性导出熵与均值的分类。《熵》2012年，14，1317-1342.[16] Entov, M.; Polterovich, L. 接触拓扑与非平衡热力学。arXiv:2101.03770v2 [math-ph] 6 2021年2月.[17] Feistel, R. 区分冻结非平衡态的克劳修斯熵、玻尔兹曼熵和鲍林熵。《熵》2019年，21，799.[18]Ferrara, M.; Udriste, C. 与热力学和经济系统相关的面积条件，第二届工程数学与数值物理国际讨论会论文集，布加勒斯特理工大学，2002年4月22-27日，BSG会议论文集8，巴尔干几何出版社，罗马尼亚布加勒斯特，2003年，60-68.[19] Gao, X.; Gallicchio, E.; Roitberg, A. E. 广义玻尔兹曼分布是唯一使吉布斯-香农熵等于热力学熵的分布。《化学物理学杂志》2019年，151，034113.[20] Gao, X. 系综理论的数学。《物理学进展》2022年，34，105230.[21] Gaudenzi, R. 熵？风格练习。《熵》2019年，21，742.[22] Geiges, H. 接触几何与拓扑简史。《数学博览》2001年，19，25-53.[23] Georgescu-Roegen, N.《熵定律与经济过程》，哈佛大学出版社，美国剑桥，1999年.[24] Ghosh, A.; Bhamidipati, C. AdS时空中黑洞的接触几何与热力学。《物理评论D》2019年，100，126020.[25] Grmela, M. 中观热力学与动力学的接触几何。《熵》2014年，16，1652-1686.[26] Gujrati, P.A. 关于非平衡热力学熵与统计熵的等价性。《熵》2015年，17，710-754.[27] Harte, J.《最大熵与生态学：丰度、分布和能量学理论》，牛津大学出版社，英国牛津，2011年.[28] Hirica, I.E.; Pripoae, C.L.; Pripoae, G.T.; Preda, V. 统计流形的仿射微分控制工具。《数学》2021年，9，1654.[29] Hirica, I.-E.; Pripoae, C.-L.; Pripoae, G.-T.; Preda, V. 统计流形与g-流形的共形控制工具。《数学》2022年，10，1061.[30] Hirica I.-E.; Pripoae C.-L.; Pripoae, G.-T.; Preda, V. 加权相对群熵及其相关的费舍尔度量。《熵》2022年，24，120.[31] Jauch, J.M.; Baron, J.G. 熵、信息与西拉德悖论。《瑞士物理学学报》1972年，45，220-232.[32] Jaynes, E.T. 吉布斯熵与玻尔兹曼熵之争，《美国物理学杂志》1965年，33，5，391-398.[33] Katsurada, Y. 关于芬斯勒空间中非完整系统的理论。《东北数学杂志》1951年，(2)，3(2)，140-148.[34] Kholodenko, A.L.《接触几何与拓扑在物理学中的应用》，世界科学出版社，新加坡，2013年.[35] Kostic, M.M. 熵难以捉摸的本质及其物理意义。《熵》2014年，16，953-967。

[36] Kycia, R.A.; Ulan, M.; Schneider, E.《非线性偏微分方程、其几何及应用》, Springer Nature Switzerland AG，沙姆，瑞士，2019年。[37] Liu, Y.; Liu, Y.; Drew, M.G.B.通过不同但相互关联的方法推导出的热容之间的关系。《美国物理学杂志》2020年，88 (1)，51-59。[38] Lucia, U; Grisolia, G.非完整约束：从热力学视角考察最小作用量原理。arXiv:2302.02823v1[physics.class-ph] 2 2023年2月。[39] Lynskey, M.J.熵的物理概念概述。《全球媒体研究杂志》2019年，25，1-16。[40] Majernik, V.熵——科学中的普适概念。《自然科学》2014年，6，552-564。[41] Mander, P. https://carnotcycle.wordpress.com/[42]Maroney, O.J.E.吉布斯-冯·诺依曼熵的物理基础。arXiv:quant-ph/0701127v2 2008年1月23日。[43] Marques, M. S.; Santana, W. S.什么是熵？——科学教学的思考。《研究、社会与发展》2020年，9，7，e502974344。[44] Mrugala, R.论热力学空间上的接触结构和度量结构。《RIMS讲义录》2000年，1142，167-181。[45]Nicolescu, L.; Pripoae, G.T. Gheorghe Vr˘anceanu——布加勒斯特大学几何学讲席上Gheorghe Titeica的继任者。《巴尔干几何与应用杂志》2005年，10，1，11–20。[46] Nicolescu, L.; Martin, M.关于变形代数的若干注记，《汉堡大学数学研讨班论丛》1979年，49，244-253。[47] Nicolescu, L.关于黎曼空间的测地表示和次测地表示。《布加勒斯特大学年刊：数学》1983年，XXXII，57-63。[48] Plastino, A; Curado, E.M.F.最大熵原理与施加 $dU = TdS$之间的等价性。《物理评论E》2005年，72，047103。[49] Popovic, M.E.熵的奇境中的研究：熵概念综述。《热科学》2018年，22，第2期，1163-1178。[50] Prunkl, C.E.A.; Timpson, C.G.黑洞熵是热力学熵。arXiv:1903.06276v1 [physics.hist-ph] 14 2019年3月。[51] Prunkl, C.论冯·诺依曼熵与热力学熵的等价性。《科学哲学》2020年，87(2)，262-280。[52] Saggion, A.; Faraldo, R.; Pierno, M.《热力学》，Springer Nature Switzerland AG，沙姆，瑞士，2019年。[53] Scandi, M.; Perarnau-Llobet, M.开放量子系统中的热力学长度。《量子》2019年，3，197。[54] Schneider, E.测量的微分不变量及其与中心矩的关系。《熵》2020年，22，1118。[55] Serdyukov, S.I.非平衡系统的宏观熵与扩展热力学公设：在纳米颗粒中的输运现象和化学反应中的应用。《熵》2018年，20，802。[56] Simoes, A.A.; de Leon, M.; Valcazar, M.L.; de Diego, D.M.含摩擦的简单热力学系统的接触几何。《英国皇家学会会刊A辑》2020年，476，20200244。

[57] Stamin, C.; Udriste, C. 吉布斯接触结构的非完整几何. 布加勒斯特理工大学科学通报 A辑 2010, 72, 153-170.[58] Stamin, C.; Udriste, C. 非完整吉布斯超曲面. BSG会议论文集 2009, 17, 218-228.[59] Swendsen, R.H. 热力学、统计力学与熵. 熵 2017, 19, 603.[60] Udriste, C. 几何动力学, 克鲁维尔学术出版社, 多德雷赫特, 德国, 2000.[61] Udriste, C.; Tevy, I.; Ferrara, M. 非完整经济系统, 载于 C. Udriste, O. Dogaru, I.Tevy, 非完整约束下的极值, 巴尔干几何出版社, 布加勒斯特, 罗马尼亚, 2002, 139-150.[62] Udriste, C.; Ferrara, M.; Opris, D. 经济几何动力学, 巴尔干几何出版社, 布加勒斯特, 罗马尼亚, 2004.[63] Udriste, C.; Ciancio, A. 非完整经济系统的相互作用, 载于第三届国际研讨会“工程数学与数值物理”会议论文集, 2004年10月7日至9日, 布加勒斯特, 罗马尼亚, 巴尔干几何学家协会, 巴尔干几何出版社, 布加勒斯特, 罗马尼亚, 2005, 299-303.[64] Udriste, C.; Dogaru, O.; Ferrara, M.; T.evy, I. 非完整优化. 载于：Seeger, A. (编) 优化领域的最新进展. 经济学与数学系统讲义, 第563卷, 施普林格, 柏林, 海德堡, 德国, 2006, 119-132.[65] Umarov, S.; Tsallis, C. 非广延统计力学的数学基础, 世界科学出版社, 新加坡, 2022.[66]Vranceanu, Gh. 非完整空间. M ´emorial des sciences math ´ematiques 1936, 76, 70页.[67] Vranceanu, Gh. Lec.ons de g ´eom ´etrie diff ´erentielle, ´Editions de l’ Acad ´emie de la R ´epublique Populaire Roumaine, 布加勒斯特, 罗马尼亚, 1936.[68] Wallace, D. 引力、熵与宇宙学：寻求清晰的理解. 英国科学哲学杂志 2010, 61, 3, 513-540.[69] Werndl, C.; Frigg, R. 熵：困惑者指南. 载于：Beisbart, C.; Hartmann, S. (编)《物理学中的概率》, 牛津大学出版社, 牛津, 英国, 2011, 115-142.[70]Yoshimura, H.; Gay-Balmaz, F. 简单封闭系统非平衡热力学的哈密顿变分公式. IFAC在线论文集 2022, 55, 18, 81-85.[71] Zulkowski, P.R.; Sivak, D.A.; Crooks, G.E.; DeWeese, M.R. 热力学控制的几何. Phys. Rev. E 2012, 86, 4, 041148.

Pripoae Cristina-Liliana - 应用数学系，布加勒斯特经济研究大学，Piata Romana 6，RO-010374 布加勒斯特，罗马尼亚；cristinapripoae@csie.ase.ro

Hirica Iulia-Elena 和 Pripoae Gabriel-Teodor - 布加勒斯特大学数学与计算机科学学院, Academiei 14，RO-010014 布加勒斯特，罗马尼亚；ihirica@fmi.unibuc.ro；gpripoae@fmi.unibuc.ro

Preda Vasile - 罗马尼亚科学院“Gheorghe Mihoc-Caius Iacob”数学统计与应用数学研究所，Calea 13 Septembrie 2号，nr.13，sect. 5，RO-050711 布加勒斯特，罗马尼亚；以及罗马尼亚科学院“Costin C. Kiritescu”国家经济研究所，Calea 13 Septembrie 3号，nr.13，sect. 5，RO-050711 布加勒斯特，罗马尼亚，preda@fmi.unibuc.ro