arXiv:2305.05444v1 [math.CA] 9 May 2023

包含算术平均数的佩克西德尔方程

TIBOR KISS

摘要。本文确定了佩克西德尔函数方程的解 (φ, f_1, f_2)：

$$\varphi\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\big(f_1(x)-f_2(y)\big)=0, \qquad (x,y)\in I_1\times I_2,$$

其中 I_1 和 I_2 是非空开子区间。上述方程的特殊情形常出现在涉及二元平均数的问题中。我们证明，在相当弱的正则性条件下，该方程典型解的坐标函数在其定义域的若干子区间上为常数。这里所说的正则性条件是 φ 的零点集为闭集。我们还讨论不满足这一条件的特殊解。

1. 引言

以下类型的函数方程

$$\varphi\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\big(f_1(x)-f_2(y)\big)=0, \qquad (x,y)\in I_1\times I_2, \tag{1}$$

与各种涉及二元平均数的问题密切相关。针对 Matkowski–Sutô问题[2], , 在假设 $I_1=I_2, g:=f_1=f_2, \varphi=g+\lambda$（其中某个常数为 $\lambda\in\mathbb{R}$），且g 具有 $d\circ c$ 的形式（其中 d 是导数， c 是连续的）的条件下，研究了方程（1）。

在论文 [3] 中，Z. Daróczy 和 V. Totik 研究了方程（1）的一个共方程，并证明解的连续可微性意味着它们是常数。作者还证明，也存在可微且处处非单调（因而非常数）的解。感兴趣的读者还可以在[1]中找到类似的方程。

在 [4], 中，作为一个辅助函数方程，（1）的一个特殊情形在解决柯西平均数与拟算术平均数的相等问题时发挥了重要作用。在假设$I_1=I_2, f_1=f_2$且 φ 的零点集是闭集的条件下，确定了方程（1）的解。此外，从函数和定义域的角度来看，方程（1）是 [4]的辅助方程的佩克西德化。

请注意，事实上，对于给定的函数 f_1 和 f_2，构造 φ以获得一个解并不困难。事实上，令 $f_1\colon I_1\to\mathbb{R}$ 和 $f_2\colon I_2\to\mathbb{R}$ 为任意函数， $\lambda\in f_1(I_1)$ 为任意但固定的值，并定义 $\Lambda:=f_2^{-1}(\{\lambda\})$。那么，只要当 $u\in\frac{1}{2}\big(I_1+(I_2\setminus\Lambda)\big)$ 时，$\varphi(u)=0$，则 (φ, f_1, f_2) 就是方程（1）的一个解。本文旨在通过一个较弱但合理的条件来求解该方程，该条件能够保证解具有规则性，更确切地说，具有常数部分。我们将描述函数方程（1）的解集，其中 $I_1, I_2\subseteq\mathbb{R}$表示非空开区间，函数 $\varphi\colon D:=\frac{1}{2}(I_1+I_2)\to\mathbb{R}, f_1\colon I_1\to\mathbb{R}$，以及 $f_2\colon I_2\to\mathbb{R}$ 均为未知函数，并假设 φ 的零点集在 D中是闭集。请注意，只要 φ 是连续、严格单调、单射，或者例如只有有限个零点，这一后一条件便显然成立。

根据论文 [4], , 对于 $H\subseteq\mathbb{R}$ 和给定函数 $\ell\colon H\to\mathbb{R}$，集合 $\{u\in H\mid \ell(u)=0\}$ 记作 $\mathcal{Z}_\ell$。其补集 $H\setminus\mathcal{Z}_\ell$ 记作 $\mathcal{Z}_\ell^c$。每当我们写作 (φ, f_1, f_2) 时，意指φ、 f_1和 f_2 分别是定义在 D、 I_1和 I_2上的实值函数。若函数三元组 (φ, f_1, f_2) 满足 $D\subseteq\mathcal{Z}_\varphi$，即 φ恒等于零，或存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得对所有 $x\in I_1$ 和 $y\in I_2$， $f_1(x)=f_2(y)=\lambda$，则称其为极值的。于是我们可以作出以下显然的观察。

日期：2023年5月10日。2020年数学主题分类。主要分类39B22，次要分类26E60。关键词和短语。函数方程、佩克西德尔方程、算术平均数。作者的研究部分得到文化与创新部ÚNKP-22-4新国家卓越计划（经费来源为国家研究、开发与创新基金）的支持，部分得到NKFIH资助项目K-134191的支持，部分得到厄特沃什·罗兰研究网络（ELKH）的支持。

命题 1. 若 (φ, f_1, f_2) 是极值的，则 (φ, f_1, f_2) 是方程（1）的解。

事实上，正是上述表述促成了“极值的”这一名称。正如我们稍后将看到的，方程 (1) 的一般解，粗略地说，是极值解的混合；而这一优美性质是由 $\mathcal{Z}_\varphi$ 为闭集这一条件所赋予的。

非空族 $\{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ 是一个区间 }\}$，若其为可数集，则称其为区间序列。于是，所讨论的族将简单地记作 (U_n)，也就是说，我们不标明指标集。

对于给定的子集 P、Q、$S \subseteq \mathbb{R}$，定义

$$(S|P)_Q := (2P - S) \cap Q.$$

换言之，$(S|P)_Q$ 由 Q 中满足下述条件的元素组成：它们是 S 中某个元素关于 P 中某个元素的反射像。若至少有一个集合为空，则 $(S|P)_Q$ 为空。为简便起见，当关于给定点作反射时，即当 P 具有 $\{p\}$ 的形式时，我们不再写作 $(S|\{p\})_Q$，而简单地记作 $(S|p)_Q$。最后，给定一个区间 $J \subseteq \mathbb{R}$，我们称 $H \subseteq J$ 为真子集，如果 $H \notin \{\emptyset, J\}$。

稍后我们将用到形如 $(S|P)_Q$ 的集合的一些显然性质，因此给出以下引理。

引理 2. 设 P、Q、$S \subseteq \mathbb{R}$ 为任意子集。

(i) 若 $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \mathbb{R}$、$Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \mathbb{R}$ 和 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{R}$，则

$$(S_1|P_1)_{Q_1} \subseteq (S_2|P_2)_{Q_2}.$$

(ii) 集合 $(S|P)_Q$ 和 $(Q|P)_S$ 关于 P 互为镜像，更准确地说，有

$$((S|P)_Q|P)_S = (Q|P)_S.$$

(iii) 若 Q 是开集，且集合 P 和 S 中至少有一个是开集，则 $(S|P)_Q$ 是开集。

(iv) 最后，若 P、Q 和 S 是区间，则 $(S|P)_Q$ 也是区间，且

$$\inf(S|P)_Q = \max(\inf Q, 2\inf P - \sup S) \qquad \textit{and} \qquad \sup(S|P)_Q = \min(\sup Q, 2\sup P - \inf S),$$

前提是 $(S|P)_Q$ 非空。

证明。（i）、（iii）和（iv）是定义的直接推论。

（ii）的证明也很简单。设 $A := ((S|P)_Q|P)_S$ 且 $B := (Q|P)_S$。根据定义，$(S|P)_Q \subseteq Q$，因此由陈述（i）可得 $A \subseteq B$。若 B 为空，则反向包含显然成立，故可假设其非空。任取一点 $x \in B$。于是 $x \in S$，并且存在 $y \in Q$ 和 $p \in P$ 使得 $x = 2p - y$。因此 $2p - x = y \in (S|P)_Q$，结合 $x \in S$，可得 $x \in 2p - (S|P)_Q \subseteq A$。□

我们将在关于方程（1）的解的定理中直接使用下一个引理的结论。简言之，对于某个非空子区间 D，I_1 和 I_2 的镜像至少有一个总是分别位于 I_2 和 I_1 的一端。注意，我们进行反射所取的子区间可以只包含一个点。

引理 3. 设 $H \subseteq D$ 是一个非空子区间，且 i、$j \in \{1, 2\}$ 满足 $i \neq j$。那么 $(I_i|H)_{I_j}$ 是 I_j 的一个非空开子区间；此外

(i) 若 $\inf(I_i|H)_{I_j} \in I_j$，则 $\sup(I_j|H)_{I_i} = \sup I_i$；

(ii) 若 $\sup(I_i|H)_{I_j} \in I_j$，则 $\inf I_i = \inf(I_j|H)_{I_i}$。

证明. $(I_i|H)_{I_j}$ 非空这一事实可由包含关系 $H \subseteq D$ 得出。

为证明 (i)，假设 $\inf(I_i|H)_{I_j} \in I_j$。那么，根据引理 2 的 (iv)，$\inf(I_i|H)_{I_j} = 2\inf H - \sup I_i \in \mathbb{R}$，因此 $\inf H$，$\sup I_i \in \mathbb{R}$。进而，由引理 2 的 (ii) 和 (iv)，可得

$$\begin{aligned}\sup(I_j|H)_{I_i} &= \sup((I_i|H)_{I_j}|H)_{I_i} = \min(\sup I_i, 2\sup H - \inf(I_i|H)_{I_j}) \\ &= \min(\sup I_i, 2\sup H - 2\inf H + \sup I_i) = \min(\sup I_i, \sup I_i + 2\mathrm{diam}(H)) = \sup I_i,\end{aligned}$$

因为 $\sup I_i \in \mathbb{R}$ 和 $0 \leq \mathrm{diam}(H) \leq +\infty$。命题 (ii) 的验证类似。 □

2. $\mathcal{Z}_\varphi$ 的内部为空时的解

本节讨论 $\mathcal{Z}_\varphi$ 的内部为空时，（1）的解集，并对其进行刻画。为此，我们需要了解 φ支撑集的元素所具有的以下性质。

命题 4. 设 (φ, f_1, f_2) 是方程（1）的一个解，且 $\mathcal{Z}_\varphi$ 与 D不同，但在 D中闭。则对任意 $p \in \operatorname{cl} \mathcal{Z}_\varphi^c$，存在一个常数 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$f_1(x) = f_2(y) = \lambda, \qquad x \in (I_2|p)_{I_1} \text{ and } y \in (I_1|p)_{I_2}. \tag{2}$$

证明. 设 $p \in \operatorname{cl} \mathcal{Z}_\varphi^c$。那么，根据引理 3，$A := (I_2|p)_{I_1}$ 和 $B := (I_1|p)_{I_2}$ 分别是 I_1 和 I_2中的非空开区间。

首先假设 $p \in \mathcal{Z}_\varphi^c$。我们将证明，$A$ 的任意元素在 A 中都有一个开邻域，在该邻域上 f_1 是常数。设 $x_0 \in A$ 为任意一点。那么存在 $y_0 \in B$，使得 $p = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$。利用集合 A 和 $\mathcal{Z}_\varphi^c$ 是开集这一事实，可以找到 $r > 0$，使得

$$U(x_0, r) :=]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A \qquad \text{and} \qquad]p - \tfrac{r}{2}, p + \tfrac{r}{2}[\subseteq \mathcal{Z}_\varphi^c.$$

对 $x = x_0 + t$ 应用方程（1），令 $|t| < r$ 且取 y_0，可得

$$\varphi\big(p + \tfrac{t}{2}\big)\big(f_1(x) - f_2(y_0)\big) = 0,$$

其中 $\varphi\big(p + \frac{t}{2}\big) \neq 0$。因此，令 $\lambda := f_2(y_0)$，我们有 $f_1(x) = \lambda$，只要 $x \in U(x_0, r)$。由于 x_0是任意的，这意味着若 $x \in A$，则 $f_1(x) = \lambda$。同理可得，f_2 在 B上也必为某个值 $\mu \in \mathbb{R}$的常数。注意到 $y_0 \in B$，因此可得 $\mu = \lambda$。

现在假设 $p \in \operatorname{cl} \mathcal{Z}_\varphi^c$，其中 $\varphi(p) = 0$，并令 $x_0 \in A$。那么，对于某个 $y_0 \in B$，有 $p = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$。设 $(p_n) \subseteq \mathcal{Z}_\varphi^c$ 是一个趋于 p的序列。我们声称存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $x_0 \in (I_2|p_{n_0})_{I_1}$。

确实，否则，所讨论的区间中总会有无穷多个位于点 x_0 的左侧或右侧。更确切地说，存在一个子序列 (p_{n_k})，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，要么

$$\sup(I_2|p_{n_k})_{I_1} \leq x_0 \qquad \text{or} \qquad x_0 \leq \inf(I_2|p_{n_k})_{I_1}.$$

第一个不等式推出，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$2p_{n_k} - \inf I_2 \leq x_0$。因此，特别地，$\inf I_2 \in \mathbb{R}$ 成立。取$k \to \infty$，得到

$$p \leq \tfrac{1}{2}(x_0 + \inf I_2) < \tfrac{1}{2}(x_0 + y_0) = p.$$

第二个不等式会导致类似的矛盾。因此，对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$，$x_0 \in (I_2|p_{n_0})_{I_1}$。

根据证明的第一部分可知，f_1 在 x_0 的某个开邻域上为常数。但 x_0 是任意的，因此，对于某个常数 $\lambda \in \mathbb{R}$，f_1 在 A 上恒等于 λ。类似的论证表明，f_2 在 B 上必须取某个 $\mu \in \mathbb{R}$。

剩下要证明的只有 λ 和 μ 相等。设 $x_0 \in A$ 和 $y_0 \in B$ 满足 $p = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)$，再取一个趋于 p 的序列 $(p_n) \subseteq \mathcal{Z}_\varphi^c$。那么存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $y_0 \in (A|p_{n_0})_{I_2}$。否则，对某个子序列 (p_{n_m})，我们会有以下情况之一

$$\sup(A|p_{n_m})_{I_2} \leq y_0 \qquad \text{or} \qquad y_0 \leq \inf(A|p_{n_m})_{I_2}.$$

这两个不等式都与 $x_0 \in A$ 矛盾。因此，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$和 $x \in A$ 使得$p_{n_0} = \frac{1}{2}(x + y_0)$。于是，由方程（1）可得 $\lambda = f_1(x) = f_2(y_0) = \mu$，证明至此完成。□

定理 5. 设 $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathcal{Z}_\varphi$ 在 D 中闭且内部为空。那么，(φ, f_1, f_2) 是函数方程（1）的解，当且仅当 (φ, f_1, f_2) 是极值的。

证明. 充分性显然，下面证明必要性。

若 $\mathcal{Z}_\varphi^c$ 为空，则 $D \subseteq \mathcal{Z}_\varphi$，结论成立。因此，假设情况并非如此。

由命题 4 可立即得出，$(I_2|\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_1}$ 的任意元素在 $(I_2|\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_1}$中都有一个开邻域，在该邻域上 f_1为常数。因此，f_1必定在 $(I_2|\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_1}$的任意连通分支上为常数。对于 f_2 和 $(I_1|\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_2}$，也有类似结论。

现在注意，对于任意连通分支 $K \subseteq (I_2|\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_1}$ 和 $L \subseteq (I_1|\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_2}$，常值函数 $f_1|_K$ 和$f_2|_L$ 取相同的值。事实上，若非如此，则利用方程（1）可以推得 φ恒等于零于

$_{1\,2}(K+L)$上，这与 $\mathcal{Z}_\varphi$ 没有空内部相矛盾。我们将函数 $f_1|_{(I_2\,|\,\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_1}}$ 和 $f_2|_{(I_1\,|\,\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_2}}$ 所取的公共值记为 λ。

现在任取一点 $x\in I_1$，并令 $y\in I_2$ 满足 $_{1\,2}(x+y)\in\mathcal{Z}_\varphi^c$。我们注意到，这样的 y 存在：否则 $_{1\,2}(x+I_2)^{-}\subseteq\mathcal{Z}_\varphi$ 就成立，这与假设矛盾。因此，由方程（1）可得 $f_1(x)=f_2(y)$，其中

$$y\in(2\mathcal{Z}_\varphi^c-x)\cap I_2\subseteq(I_1\,|\,\mathcal{Z}_\varphi^c)_{I_2}.$$

因此，$f_1(x)=\lambda$。类似的论证表明，对 f_2 也同样成立，即 $f_2(y)=\lambda$ if$y\in I_2$。□

注释 1. 根据引理 3 和命题 4，对于方程 (1) 的一个解，要么函数 f_1 andf_2 中至少有一个在其定义域上为常数，要么它们在定义域的同一端取相同的常数值。此外，如果 $\mathcal{Z}_\varphi$ 的内部为空，或者等价地，如果 $\mathcal{Z}_\varphi^c$ 在 D 中稠密，那么唯一可能的解就是极值解。为了得到这些结论，我们大量利用了关于 $\mathcal{Z}_\varphi$ 的拓扑条件。下面的例子表明，如果没有这一拓扑假设，情况可能会截然不同。

设 $\psi\colon\ D\to\mathbb{R}$ 是任意函数，

$$f_1(x):=\chi_{\mathbb{Q}}\ x),\ \text{if } x\in I_1,\quad f_2(y):=\chi_{\mathbb{Q}}(y),\ \text{if } y\in I_2,\quad \text{and}\quad \varphi(u):=\chi_{\mathbb{Q}}(u)\psi(u),\ \text{if } u\in D,$$

其中 $\chi_{\mathbb{Q}}\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$表示有理数的示性函数，即 i s,

$$\chi_{\mathbb{Q}}(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{if } t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

那么，(φ,f_1,f_2) 是方程（1）的解，并且 $\mathcal{Z}_\varphi$ 在 D 中闭，当且仅当 (φ,f_1,f_2) 是极值的；等价地，当 ψ 在 D的任意有理数元素处取值为零时。

事实上，设 $x\in I_1$和 $y\in I_2$。若 $x,y\in\mathbb{Q}$或 $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，则 $f_1(x)=f_2(y)$。若其中恰有一个是有理数，则 $p:=\frac{1}{2}(x+y)$ 必为无理数，即 $\varphi(p)=0$。根据包含关系 $D\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subseteq\mathcal{Z}_\varphi$，命题的第二部分显然成立。

3. The solution set in general

对于指标 $k\in\{1,2\}$ 和常数 $\lambda\in\mathbb{R}$，定义

$$a_k(\lambda):=\sup\{u\in I_k\mid f_k(t)=\lambda\text{ if }t\in]\inf I_k,u[\}\ \text{ and }\ b_k(\lambda):=\inf\{u\in I_k\mid f_k(t)=\lambda\text{ if }t\in]u,\sup I_k[\}.$$

换言之，上述定义的扩展实数可以解释如下。集合 $]\inf\ I_k,a_k(\lambda)[$ 是 I_k 左端上最大的开子区间，在该区间上 f_k 恒等于 λ。当且仅当 I_k 不存在左端点为 $\inf I_k$ 且长度为正的子区间，使得 f_k 在其上取值 λ时，$a_k(\lambda)=-\infty$。最后，当且仅当 f_k 在整个区间 I_k上取值 λ 时，$a_k(\lambda)=\sup I_k$。作显然的修改后，对于 $b_k(\lambda)\le+\infty$也有类似结论。

注意，只要 (φ,f_1,f_2) 是方程 (1) 的非极值解，显然就有

(C1) f_1 和 f_2 都不是其定义域上的常数，或者

(C2) 函数 f_1 和 f_2 中恰有一个在其定义域上为常数。

事实上，若 (φ,f_1,f_2) 不是极值解，则 $\mathcal{Z}_\varphi$的内部和补集 $\mathcal{Z}_\varphi^c$ 都非空这一情况不成立。因此，如果 f_1 和 f_2 都是常数，那么它们必定取相同的值，这与该解不是极值解这一事实矛盾。

定理6. 设 $\varphi\colon\ D\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathcal{Z}_\varphi$ 在 D中是闭的。那么（φ，f_1，f_2）满足函数方程（1）的充要条件是以下陈述之一成立。

（i）三元组（φ，f_1，f_2）是极值的。

(ii) 存在常数 λ、$\mu\in\mathbb{R}$ 以及开区间 U_1、$U_2\subseteq I_1$和 V_1、$V_2\subseteq I_2$，使得

$$\inf U_1=\inf\ I_1\quad \textit{and}\quad \inf V_1=\inf\ I_2\qquad \textit{or}\qquad \sup\ U_2=\sup I_1\quad \textit{and}\quad \text{上确界 } V_2=\text{上确界 } I_2$$

使得

$$f_1(x)=f_2(y)=\lambda\quad \textit{if}\quad (x,y)\in U_1\times V_1\qquad \textit{or}\qquad f_1(x)=f_2(y)=\mu\quad \textit{if}\quad (x,y)\in U_2\times V_2$$

and

$$\varphi(u) = 0 \quad \textit{whenever} \quad u \in \tfrac{1}{2}(K_1 + I_2) \cup \tfrac{1}{2}(I_1 + K_2),$$

其中 $K_1 := I_1 \setminus (U_1 \cup U_2)$ 和 $K_2 := I_2 \setminus (V_1 \cup V_2)$ 是闭的真子区间。

(iii) 存在一个常数 $\lambda \in \mathbb{R}$，并且对于某个指标 $i \in \{1,2\}$，存在一个由互不相交的非空开子区间组成的序列 (U_n)，这些区间均属于 I_i，使得

$$f_i(x) = \lambda \quad \textit{if} \quad x \in \bigcup U_n, \qquad f_j(y) = \lambda \quad \textit{if} \quad y \in I_j, \qquad \textit{and} \qquad \varphi(u) = 0 \quad \textit{if} \quad u \in \tfrac{1}{2}(\mathcal{K}_i + I_j), \tag{3}$$

其中 $\mathcal{K}_i := I_i \setminus \bigcup_n U_n^{\,n}$，且 $j \in \{1,2\}$ 满足 $i \neq j$。

证明。首先，我们将证明情形 (i)、(ii) 和 (iii) 的必要性。为此，假设 (φ, f_1, f_2) 是方程（1）的一个解。

若 $\mathcal{Z}_\varphi$ 的内部为空，则根据定理 5，(φ, f_1, f_2) 必为极值的，因此得到解 (i)。若 $\mathcal{Z}_\varphi$ 的内部非空，则要么 $\mathcal{Z}_\varphi = D$，要么 $\mathcal{Z}_\varphi \neq D$。若 $\mathcal{Z}_\varphi = D$，则同样可得 (φ, f_1, f_2) 是极值的。因此，下文假设 $\mathcal{Z}_\varphi \neq D$ 成立。在这一子情形中，可以区分两种主要情况：函数 f_1 和 f_2 在其定义域上都为常数，或者至少其中一个不是常数。由于 $\mathcal{Z}_\varphi$ 不同于 D，在第一种情况下，函数 f_1 和 f_2 必须取相同的值，因此仍可得到情形 (i)。因此，还假设函数 f_1 和 f_2 中至少有一个在其定义域上不是常数。这意味着 (C1) 或 (C2) 成立。

情形 1. 首先假设 f_1 和 f_2 在各自的定义域上都不是常数。由于 $\mathcal{Z}_\varphi^c$ 非空，交集 $f_1(I_1) \cap f_2(I_2)$ 非空。因此，根据注 1，存在 λ、$\mu \in f_1(I_1) \cap f_2(I_2)$，使得下列不等式至少有一个成立

$$-\infty < \min(a_1(\lambda), a_2(\lambda)) \qquad \text{or} \qquad \max(b_1(\mu), b_2(\mu)) < +\infty \tag{4}$$

成立。定义开子区间

$$U_1 :=]\inf I_1, a_1(\lambda)[, \quad U_2 :=]b_1(\mu), \sup I_1[, \quad V_1 :=]\inf I_2, a_2(\lambda)[, \quad \text{and} \quad V_2 :=]b_2(\mu), \sup I_2[. \tag{5}$$

根据 (4) 中的不等式，条件 $\emptyset \notin \{U_1, V_1\}$ 或 $\emptyset \notin \{U_2, V_2\}$ 至少有一个成立。此外，根据条件 (C1)，对于任意 $i \in \{1,2\}$，都有 $a_i(\lambda) < \sup I_i$、$\inf I_i < b_i(\mu)$，且 $a_i(\lambda) \leq b_i(\mu)$。因此，$K_1$ 和 K_2 确实是适当的闭子区间。

为简洁起见，记 $A := \frac{1}{2}(K_1 + I_2) \cup \frac{1}{2}(I_1 + K_2)$。区间 K_1 和 K_2 至少各含有一个点，因此 $\emptyset \neq \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \subseteq A$，这表明 A 是 D 的一个非空开子区间。现在只需证明包含关系 $A \subseteq \mathcal{Z}_\varphi$ 成立。我们用反证法证明。

假设存在一点 $p \in A$，使得 $\varphi(p) \neq 0$。由于 $p \in A$，存在 $x \in I_1$ 和 $y \in I_2$，使得 $p = \frac{1}{2}(x + y)$，并且包含关系 $x \in K_1$ 或 $y \in K_2$ 至少有一个成立。另一方面，根据条件 (C1) 以及 (5) 中区间的极大性，必须同时有 $(I_2|p)_{I_1} \subseteq I_1 \setminus K_1$ 和 $(I_1|p)_{I_2} \subseteq I_2 \setminus K_2$。由这些包含关系可得 $x \in I_1 \setminus K_1$ 和 $y \in I_2 \setminus K_2$。这一矛盾表明 $A \subseteq \mathcal{Z}_\varphi$ 成立。因此，我们得到了解 (ii)。

情形 2。现在假设函数 f_1 和 f_2 中恰有一个在其定义域上为常数。不失一般性，我们可以假设对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$，只要 $y \in I_2$，就有 $f_2(y) = \lambda$。由于集合 $\mathcal{Z}_\varphi^c$ 非空，因此存在 I_1 的一个非空开子区间，在该区间上 f_1 取值为 λ。根据我们的假设，该区间必定不同于 I_1。这迫使 I_2 有下界或有上界。

令 $\mathcal{U}$ 由满足以下条件的 I_1 的开子区间组成：每个子区间在 f_1 恒等于 λ 这一性质下都是极大的。一方面，族 $\mathcal{U}$ 非空。另一方面，由于存在非极值解，I_1 不属于 $\mathcal{U}$。记 $d := \operatorname{diam} I_2$，并考虑子族

$$\mathcal{U}_d := \{U \in \mathcal{U} \mid d \leq \operatorname{diam} U\}.$$

我们先考虑每个 $\mathcal{U}$ 的直径小于 d的情形，也就是说，子族$\mathcal{U}_d$ 为空。于是，对任意 $p \in \operatorname{cl} \mathcal{Z}_\varphi^c$，可知以下两者之一成立：

$$\inf(2p - I_i) = 2p - \sup I_i < \inf I_j \qquad \text{or} \qquad \sup I_j < \sup(2p - I_i) = 2p - \inf I_i \tag{6}$$

成立，因为 $\operatorname{diam}(2p-I_i)=d$。因此，两个不相交区间 $U_1:=]\inf I_j, a_j(\lambda)[$ 和 $U_2:=]b_j(\lambda), \sup I_j[$ 中至少有一个非空。此外，由假设可得 $\max(\operatorname{diam} U_1, \operatorname{diam} U_2) < d \le +\infty$，这意味着 I_j 有下界或有上界。在这个子情形中，定义 $(U_n) := \{U_1, U_2\} \setminus \{\emptyset\}$。

如果族 $\mathcal{U}_d$ 非空，那么它至多可数。于是令 $(U_n) := \mathcal{U}_d$。

现在，在上述任一子情形中，定义 $\mathcal{K}_1 := I_1 \setminus \bigcup_n U_n$。我们证明 φ 在算术平均数$\frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + I_2)$处取值为零。

反设情况并非如此。那么存在 $p \in \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + I_2)$，使得 $\varphi(p) \neq 0$。一方面，f_1 在 $(I_2|p)_{I_1}$上取值 λ。另一方面，$2p - I_2 \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq I_1$，因此 $(I_2|p)_{I_1} = 2p - I_2$，从而 $\operatorname{diam}(I_2|p)_{I_1} = d$。在 $\mathcal{U}_d = \emptyset$ 的情况下，这是不可能的，因此 $\mathcal{U}_d$ 不可能为空。于是，存在序列 (U_n) 的一个元素U_{n_0}，使得 $(I_2|p)_{I_1} \subseteq U_{n_0}$。因此，根据 $\mathcal{K}_1$ 的定义，区间 $(I_2|p)_{I_1}$ 不可能是 $\mathcal{K}_1$的子集，这就产生了矛盾。总之，在第三种情况下，我们得到了解 (iii)。

最后，我们转而讨论 (i)、(ii) 和 (iii) 的充分性。事实上，(i) 的充分性显而易见。

为证明 (ii) 的充分性，设 $x \in I_1$、$y \in I_2$，并令 $u := \frac{1}{2}(x+y)$。如果 $x \in U_1$ 且 $y \in V_1$，或者 $x \in U_2$ 且$y \in V_2$，那么 $f_1(x) = f_2(y)$，因此方程（1）显然成立。于是我们可以假设情况并非如此。接下来分两种情形讨论，即 $x \notin U_1$ 或 $y \notin V_1$。

如果 $x \in I_1 \setminus (U_1 \cup U_2) = K_1$，那么可得 $u \in A$，这意味着 $\varphi(u) = 0$，因此方程（1）成立。如果 $x \notin U_1$ 且 $y \notin V_2$，那么 $\inf K_1 = \sup U_1 \le x$ 以及 $y \le \sup K_2 = \inf V_2$ 成立。注意到

下确界 $A =$ 最小值$\big(K_1$（下确界）$, \inf \frac{1}{2}(I_1 + K_2)\big)$ and $\sup A = \max\big(\sup \frac{1}{2}(K_1 + I_2), \sup \frac{1}{2}(I_1 + K_2)$

利用这些结果，我们得到

$$\inf A \le \tfrac{1}{2}(\inf K_1 + \inf I_2) \le u \le \tfrac{1}{2}(\sup I_1 + \sup K_2) \le \sup A.$$

由于 A 是一个区间，因此可得 $u \in A$，进而有 $\varphi(u) = 0$。情形 $y \notin V_1$ 可用类似的方法处理。

最后，为证明 (iii) 的充分性，为简洁起见，假设 $i = 1$，并令 $x \in I_1$、$y \in I_2$ 和 $u := \frac{1}{2}(x+y)$。若某个指标 n 满足 $x \in U_n$，则 $f_1(x) = \lambda = f_2(y)$，因此方程（1）成立。否则 $x \in \mathcal{K}_1$，由此可得 $\varphi(u) = 0$。□

作为定理6的推论，我们得到论文 [4] 中的定理3。为清晰起见，相关陈述采用本文的术语表述。

推论。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非空开子区间，$\varphi : I \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathcal{Z}_\varphi$ 在 I 中是闭的，且 $f : I \to \mathbb{R}$。那么，数对 (φ, f) 是方程的一个解

$$\varphi\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\big(f(x) - f(y)\big) = 0, \qquad x, y \in I \tag{7}$$

当且仅当以下情况之一成立：f 在 I 上为常数，而 φ 是任意函数；或者存在常数 λ、$\mu \in \mathbb{R}$ 以及开子区间U、$V \subseteq I$，使得

$$\inf U = \inf I \quad \textit{or} \quad \sup V = \sup I$$

使得

$$f(x) = \lambda \quad \textit{if} \quad x \in U, \qquad f(y) = \mu \quad \textit{if} \quad y \in V, \qquad \textit{and} \qquad \varphi(u) = 0 \quad \textit{if} \quad u \in \tfrac{1}{2}(I + I \setminus (U \cup V)). \tag{8}$$

证明。对 $I := I_1 := I_2$ 和 $f := f_1 := f_2$应用定理6。 □

REFERENCES

[1] Z. Daróczy 和 M. Laczkovich. 关于在许多点对上取相同值的函数. Real Anal. Exchange, 33 393, 2008 2 385( ): – .[2] Z. Daróczy 和 Zs. Páles. 平均数的高斯合成与 Matkowski–Sutô问题的解. Publ. Math. Debrecen, 61:157–218, 2002.[3] Z. Daróczy 和 V. Totik. 关于一个函数方程的评注. Acta Sci. Math. (Szeged), 81(3-4):527–534, 2015. [4] T. Kiss 和 Zs. Páles. 关于与二元柯西平均数相关的函数方程. Math. Inequal. Appl., 22(4):1099–1122, 2019.

匈牙利德布勒森大学数学研究所，邮政信箱 400，H-4002 德布勒森，匈牙利 ELKH-DE
方程、函数、曲线及其应用研究组 电子邮箱：kiss.tibor@science.unideb.hu