arXiv:2305.05446v1 [math.RT] 9 May 2023

块的带点融合系统

Laurence Barker

比尔肯特大学数学系，
06800，土耳其安卡拉

2023年5月9日

摘要

块的带点融合系统是一种结构，由与极大布劳尔对相关联的局部带点群之间的融合和相对重数组成。我们证明，华丽 Morita 等价保持带点融合系统不变，而莫里塔型优美稳定等价保持带点融合系统的一部分不变。

2020 数学主题分类。主要：20C20；次要：20D20。

关键词：局部带点群；Puig 范畴；相对重数；华丽 Morita 等价；华丽稳定等价

1 引言

块的带点融合系统（在第 2 节中有精确定义）是不变量，可以将其视为块的融合系统的细化。粗略地说，带点融合系统是一组数据，包括一些局部带点群、局部带点群之间的融合，以及局部带点群之间的相对重数。带点融合系统的结构包括范畴的结构和偏序集的结构，以及通过相对重数对包含关系进行的标记。

我们提到，Puig 在 [7] 中引入了一种与带点融合系统至少有些相似之处的范畴，并在 Th´evenaz [8, 第 47] 节中将其命名为 Puig 范畴。我们不知道带点融合系统作为一个范畴是否与 Puig 范畴相同。我们将在第3节讨论这两个范畴之间的关系。

我们的三个主要结果之一——定理 3.3——指出，在同构意义下，块的带点融合系统可以由该块的源代数构造出来。第二个主要结果——定理 5.6——描述了块之间的华丽 Morita 等价如何导出带点融合系统之间的同构。第三个主要结果——定理 5.7——描述了 Morita 型华丽稳定等价如何导出带点融合系统的稳定部分之间的同构。

鉴于其中前两个定理，将带点融合系统视为局部不变量是合理的。考察 C_3over Q_8 的非平凡半直积的 2-块可知，融合系统不能确定块代数中单模的同构类数量。正如我们将在注2.1中指出的，带点融合系统确实能够确定该数量。

我们假定读者熟悉块理论、Brauer 对理论和带点群理论，这些内容均见 Linckelmann [6]。

在第 2 节定义带点融合系统及其稳定部分的概念后，我们将在第3节证明，块的带点融合系统由源代数决定。

我们将在第4节说明，块的带点融合系统如何在弱 Donovan 猜想与 Puig 猜想的一个弱版本之间建立联系。

在第5节，我们将考察群代数的两个块代数。我们将在定理5.6和5.7中说明，这两个块代数之间的两类等价各自如何导出所考察结构之间相应的同构。

我们将给出一些例子。在第5节，对于具有 Klein四元缺陷群的块，我们将描述其带点融合系统底层多偏序集的三种可能情形。我们将发现，带点融合系统稳定部分的底层多偏序集只有一种可能。

2 带点融合系统及其稳定部分

在第 1 节提到的三个定理中，以及在我们对带点融合系统这一概念给出的那一对等价定义中，我们将使用适当的同构概念。要表述这些同构概念，需要进行一些抽象。

我们将偏序范畴定义为一个范畴 $\mathcal{C}$，并配备：

- 定义在 $\mathcal{C}$-对象集合上的偏序 $\leq$，
- 一族单态射 ${}_P\mathrm{inc}^Q\colon P \leftarrow Q$，称为 $\mathcal{C}$-包含映射，对所有 $\mathcal{C}$-对象P 均有定义，且满足 $P \geq Q$，

使得以下三个条件成立：

包含的严格性：对于所有 $\mathcal{C}$-对象 $P \geq Q$，包含 ${}_P\mathrm{inc}^Q$ 是同构，当且仅当 $P = Q$；此外，${}_P\mathrm{inc}_P = \mathrm{id}_P$。

包含的可组合性：对于所有 $\mathcal{C}$-对象 $P \geq Q \geq R$，有 ${}_P\mathrm{inc}^Q \cdot {}^Q\mathrm{inc}_R = {}_P\mathrm{inc}_R$。态射分解：对于所有 $\mathcal{C}$-态射 $\phi\colon P \leftarrow Q$ 以及 $\mathcal{C}$-对象 $R \leq Q$，存在唯一的 $\mathcal{C}$-对象 $\phi(R)$ 和唯一的 $\mathcal{C}$-同构 $\psi\colon \phi(R) \leftarrow R$，使得$\phi . {}^Q\mathrm{inc}_R = {}_P\mathrm{inc}_{\phi(R)} . \psi$。我们称 ψ 为从 ϕ 限制而来的、定义域为 R 的同构。

我们将多重偏序集定义为配备函数 $m_{\mathcal{M}}\colon \mathbb{N} \leftarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ 的偏序集 $\mathcal{M}$，使得给定 x、$y \in \mathcal{M}$ 时，$x \leq y$ 当且仅当 $m_{\mathcal{M}}(x, y) \neq 0$。因此，多重偏序集是偏序集的一种增丰，其中每个包含都标记有一个正整数。

令 $\mathcal{C}$ 为一个偏序范畴。我们将 $\mathcal{C}$ 的带基点的细化定义为满足以下四个条件的结构，该结构由以下三个组成部分构成。

- 对于每个 $P \in \mathcal{C}$，存在一个集合 $\mathcal{P}_P$，其元素称为 P 的 $\mathcal{P}$-点。给定 $x \in \mathcal{P}_P$，记作 $P_x = (P, x)$，并称 P_x 为一个 $\mathcal{P}$-对象。
- 对于任意以 P 为定义域的 $\mathcal{C}$-态射 ϕ，存在一个双射 $\mathcal{P}_{\phi(P)} \leftarrow \mathcal{P}_P$，记作 ${}^{\phi}x \quad x$，

它只取决于从 ϕ 限制而来且定义域为 P 的同构。对于 $Q \leq P$ 和 $y \in \mathcal{P}_Q$，我们定义 ${}^{\phi}y = {}^{\psi}y$，其中 ψ 是从 ϕ 限制而来且定义域为 Q 的同构。我们还记 ${}^{\phi}(Q_y) = \phi(Q)^{{}^{\phi}y}$。注意，${}^{\phi}(Q_y) = {}^{\psi}(Q_y)$。

• 对于任意 $\mathcal{P}$对象 Q_y和 P_x，都有一个自然数 $m_{\mathcal{P}}(Q_y, P_x)$，称为 Q_y 在 P_x中的 $\mathcal{P}$-重数。

双射复合条件：给定 $\mathcal{C}$-态射 ψ 和 ϕ，且复合$\psi\phi$ 有定义，令 P为 ϕ 和 $x \in \mathcal{P}_P$的定义域，则 ${}^{\psi\phi}x = {}^{\psi}({}^{\phi}x)$。

多重偏序集条件：配备函数 $m_{\mathcal{P}}$的 $\mathcal{P}$对象集合是一个多重偏序集。

细化条件：给定 $\mathcal{P}$对象 Q_y 和 P_x，且满足 $Q_y \leq P_x$，则 $Q \leq P$；此外，若 $Q = P$，则 $y = x$

相容性条件：给定一个定义域为 P的 $\mathcal{C}$-态射 ϕ、一个 $\mathcal{C}$对象 $Q \leq P$ 以及点 $x \in \mathcal{P}_P$和 $y \in \mathcal{P}_Q$，则 $m({}^{\phi}(Q_y)\ {}^{\phi}(P_x)) = m(Q_y, P_x)$。

设 $\mathcal{C}$ 为一个偏序范畴，且 $\mathcal{P}'$ 和 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{C}$的带基点细化。我们将$\mathcal{C}$-恒等同构 $\iota\colon\ \mathcal{P}' \leftarrow \mathcal{P}$ 定义为一族双射 $\iota_P\colon\ \mathcal{P}'_P \leftarrow \mathcal{P}_P$，其中 P遍历所有 $\mathcal{C}$对象，并且满足以下两个条件：

态射的保持性：对于所有以 P 为定义域且具有 $\mathcal{P}$-点 x 的 $\mathcal{C}$-态射 ϕ，我们有

$$ {}^{\phi}(\iota_P(x)) = \iota_{\phi(P)}({}^{\phi}x)\ . $$

重数的保持性：对于所有 $\mathcal{C}$-对象 Q_y 和 P_x，我们有

$$ m(Q_{\iota_Q(y)}, P_{\iota_P(x)}) = m(Q_y, P_x)\ . $$

在本文其余部分，我们令 $\mathcal{O}$ 为一个完备局部诺特环，其剩余域 $\mathbb{F}$ 为特征 p 的代数闭域。令 G 为一个有限群，令 b 为 $\mathcal{O}G$ 的一个块，其缺陷群为 D，并令 B 为该块代数 $\mathcal{B} = \mathcal{O}Gb$ 的一个源 D-代数。令 $\mathcal{F}$ 为与 B 相关联的 D 上的融合系统。回顾 Linckelmann [Lin18, 8.7.1] 告诉我们，$\mathcal{F}$ 由 B 的内 D-代数结构决定；事实上，也由 B 的内 $\mathcal{O}D$-$\mathcal{O}D$-模结构决定。

给定 G 的任意 p-子群 P，我们将相对于 P 的 Brauer 映射记为 $\mathrm{br}_P\colon\ \mathbb{F}C_G(P) \leftarrow (\mathcal{O}G)^P$。令 γ 为 $\mathcal{B}$ 上的 P 的一个局部点，并令 e 为 $\mathrm{br}_P(b)$ 的 $\mathbb{F}C_G(P)$ 的一个块。考虑局部带点群 P_γ 和 Brauer 对 (P, e)。当 $\mathrm{br}_P(\gamma) \subset \mathbb{F}C_G(P)e$ 时，我们记为 $P_\gamma \in (P, e)$。给定 $Q \leq D$，我们将满足 $\mathrm{br}_Q(1_B) \in \mathbb{F}C_G(Q)^{e_Q}$ 的 $\mathbb{F}C_G(Q)$ 的唯一块记为 ^{e_Q}。对于 $\mathbb{F}Gb$ 上的任意局部带点群 P_γ，如果 $P \leq D$ 且 $P_\gamma \in (P, e_P)$，我们称 P_γ 被 B 遮蔽。

给定群 R 和一个定义域为 R 的单射 θ，我们定义

$$ \Delta(\theta) = \{(\theta(z), z) : z \in R\} $$

作为 $\phi(R)\times R$ 的一个子群。我们将与 B 相关联的 $\mathcal{B}$ 的带点融合系统 $\mathcal{LP}(B)$ 定义为由下述条件刻画的 $\mathcal{F}$ 的带基点的细化。给定 $P \leq D$，则 P 的 $\mathcal{LP}(B)$-点是 $\mathcal{B}$ 上 P 的那些局部点 γ，使得 P_γ 被 B 遮蔽。因此，$\mathcal{LP}(B)$-对象是 $\mathcal{B}$ 上被 B 遮蔽的带点群。给定一个 $\mathcal{LP}(B)$-对象 P_γ 以及一个定义域为 P 的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ，我们将 ${}^{\phi}\gamma$ 定义为 $\mathcal{B}$ 上 $\phi(P)$ 的点，其中令 $i \in \gamma$，并令 u 为 $\mathcal{B}^{\Delta(\phi)}$ 中的一个单位元，则有 ${}^{u}i \in {}^{\phi}\gamma$。给定另一个 $\mathcal{LP}(B)$-对象 Q_δ，则 $\mathcal{LP}(B)$-重数 $m(Q_\delta, P_\gamma)$ 在 $Q \leq P$ 不成立时为 0；若 $Q \leq P$ 成立，则 $m(Q_\delta, P_\gamma)$ 是

Q_δ 在 P_γ 中的相对重数；也就是说，当将 γ 的一个元素表示为 A^Q 的相互正交的本原幂等元之和时，其中出现的 δ 的元素个数。

我们约定，代数和模在其系数环上都是有限生成的。对于一个在 $\mathcal{O}$ 上的代数 Λ，我们用 $\ell(\Lambda)$ 表示简单Λ-模的同构类数。

注2.1。数目 $\ell(\mathcal{B})$ 等于偏序集 $\mathcal{LP}(B)$ 中极小对象的数目。

证明。由于 B 和 $\mathcal{B}$ Morita 等价，条件 $\tau' \subseteq \tau$ 刻画了 B 上的点 τ' 与代数 $C_G(1)$ $e_1 = \mathcal{B}$ 上的点 τ 之间的双射对应。因此， $\mathcal{B}$ 上任何形如 1_τ 的带点群都被 B 遮蔽。

□

为了在特定情形下显式构造带点融合系统，使用 $\mathcal{LP}(B)$ 的一个同构副本 $\mathcal{P}(B)$ 会更方便，该副本定义如下。我们使用 $\mathbb{F}G$-模的 Brauer 特征，并约定它们取值于 $\mathbb{K}$；其中， $\mathbb{K}$ 是一个特征为 0 的充分大域，其 p' 次单位根群与 $\mathbb{F}$ 的挠单位元群相识别。下面介绍一些记号。给定一个在 $\mathcal{O}$ 上的代数 Λ，以及 Λ-模 L 和 M，其中 L 不可分解，我们用 $m(L, M)$ 表示 L 作为 M 的直和项的重数。给定一个子代数 $\Gamma \leq \Lambda$，我们用 ${}_\Gamma\mathrm{Res}_\Lambda$ 表示从 Λ-模到 Γ-模的限制函子。

对于 $P \leq D$，我们将 P 的 $\mathcal{P}(B)$-点定义为 $\mathbb{F}C_G(P)e_P$ 的不可约 Brauer 特征。给定 P 的一个 $\mathcal{P}(B)$-点 ξ，以及一个定义域为 P 的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ，我们定义一个 $\phi(P)$-点 ${}^\phi\xi = {}^g\xi$，其中 $g \in G$，而 ϕ 是由 g 诱导的共轭。令 $V(\xi)$ 为具有 Brauer 特征 ξ 的简单 $\mathbb{F}C_G(P)e_P$-模。我们将对角模定义为

$$\mathrm{Dia}(P_\xi) = \mathcal{O}Gi$$

一个 $\mathbb{F}(G\times P)$-模，其中 i 是 $(\mathcal{O}G)^P$ 的本原幂等元，使得 $\mathrm{br}_P(i)$ 不湮灭 $V(\xi)$，且 G 和 P 在 $\mathcal{O}Gi$ 上的作用分别为左平移和右平移。显然，$\mathrm{Dia}(P_\xi)$ 在同构意义下定义良好，且与 i 的选取无关。 i 的本原性确保 $\mathrm{Dia}(P_\xi)$ 不可分解。给定 $Q \leq P$ 和 Q 的一个 $\mathcal{P}(B)$-点 η，我们将 P_ξ 中 Q_η 的 $\mathcal{P}(B)$-重数定义为

$$m(Q_\eta, P_\xi) = m(\mathrm{Dia}(Q_\eta), {}_{G\times Q}\mathrm{Res}_{G\times P}(\mathrm{Dia}(P_\eta))) .$$

因此，我们将 $\mathcal{P}(B)$ 定义为 $\mathcal{F}$ 的带基点的细化。下面的注记显然成立。

注记 2.2. 存在一个 $\mathcal{F}$-恒等同构 $\iota : \mathcal{LP}(B) \leftarrow \mathcal{P}(B)$，使得对于给定的 a$\mathcal{P}(B)$-点 P_ξ，有 $\iota_P(\xi) = \gamma$，其中 γ 是 P 在 $\mathcal{B}$ 上的局部点，并且 $\mathrm{br}_P(\gamma)$ 不湮灭 $V(\xi)$。

尽管 $\mathcal{B}$ 的带点融合系统 $\mathcal{LP}(B) \cong \mathcal{P}(B)$ 确实依赖于 B，但 D 和 B 在 G-共轭意义下的唯一性意味着，作为范畴和偏序集， $\mathcal{LP}(B)$ 作为 $\mathcal{B}$的不变量，在同构意义下是良定义的。为避免冗赘，我们没有写出偏序范畴和多偏序集的显然同构定义。我们也没有写出偏序范畴的带基点细化之间显然的一般同构定义。不过很容易看出，在理解了这些同构概念之后，无论选择 D 还是 B， $\mathcal{LP}(B)$ 作为融合系统的带基点细化，在同构意义下都是良定义的。

附带一提，我们简要评论另一种对 $\mathcal{F}$ 的带基点细化；同样，它可以用两种方式描述，且在 $\mathcal{F}$-同一同构意义下等价。设 $\mathcal{LP}^{|}(B)$ 是按如下方式定义的 $\mathcal{F}$ 的带基点细化。对于 $P \leq D$，我们将 P 的 $\mathcal{LP}^{|}(B)$-点定义为 P 在 $\mathcal{B}$ 上的那些点 α，使得 P_α 的一个极大局部带点子群被 B遮蔽。给定一个定义域为 P的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ，我们如上定义 ${}^{\phi}\alpha$。$\mathcal{LP}^{|}(B)$-重数同样是带点群之间通常的相对重数。类比于 $\mathcal{P}(B)$，我们令 $\mathcal{P}^{|}(B)$ 为 $\mathcal{F}$的如下带基点细化。采用 [1], 中的一些记号和术语，我们将 P 的 $\mathcal{P}^{|}(B)$-点定义为具有形式 $P{\uparrow}Q_\eta$的实质性广义部分，其中 Q_η 是 P的一个 $\mathcal{P}(B)$-点。定义域为 P的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ的作用由 ${}^{\phi}(P{\uparrow}Q_\eta) = ({}^{g}P){\uparrow}{}^{g}(Q_\eta)$ 给出，其中 g与前述相同。每个 $\mathcal{P}^{|}(B)$-点 $P{\uparrow}Q_\eta$都与 [1] 中定义的一个不可分解 $G{\times}P$-双模 $\mathrm{Dia}(P{\uparrow}Q_\eta)$ 相关联；并且给定一个满足 $S \leq P$的 $\mathcal{P}^{|}(B)$-点 $S{\uparrow}T_\tau$， $S{\uparrow}T_\tau$在 $P{\uparrow}Q_\eta$中的 $\mathcal{P}^{|}(B)$-重数定义为

$$m(S{\uparrow}T_\tau, P{\uparrow}Q_\eta) = m(\mathrm{Dia}(S{\uparrow}T_\tau), {}_{G\times S}\mathrm{Res}_{G\times P}(\mathrm{Dia}(P{\uparrow}Q_\eta))) .$$

不难证明，存在一个 $\mathcal{F}$-恒等同构

$$\mathcal{LP}^{|}(B) \cong \mathcal{P}^{|}(B) .$$

与 $\mathcal{LP}(B)$ 相比， $\mathcal{LP}^{|}(B)$ 的一个优点是，在计算特定情形下的重数时很有用：如 [1], 中所解释的， $\mathcal{LP}^{|}(B)$-重数满足一个矩阵关系，因此所有重数都由那些满足 $|P\colon S| = p$ 的重数 $m(S{\uparrow}T_\tau, P{\uparrow}Q_\eta)$ 决定。由于本文将不再进一步讨论 $\mathcal{LP}^{|}(B)$，我们省略更详细的说明。

我们将 $\mathcal{F}$ 的稳定部分记为 $\overline{\mathcal{F}}$，定义为从 $\mathcal{F}$ 的对象集中删去 D 的平凡子群后得到的偏序范畴。当然， $\mathcal{F}$ 和 $\overline{\mathcal{F}}$ 彼此决定。考虑 $\overline{\mathcal{F}}$ 的原因是，它使我们能够作出以下定义。我们将 $\mathcal{LP}(B)$ 的稳定部分记为 $\overline{\mathcal{LP}}(B)$，定义为从 $\mathcal{LP}(B)$ 中删去极小对象后得到的 $\overline{\mathcal{F}}$ 的带基点细化。因此， $\overline{\mathcal{LP}}(B)$-对象是 $\mathcal{B}$ 上满足 $1 < P \leq D$ 且 P_γ 被 B 遮蔽的局部带点群 P_γ。

3 由源代数确定

我们继续研究上一节中引入的块代数 $\mathcal{B} = \mathcal{O}Gb$、源 D-代数 B 和融合系统 $\mathcal{F}$。我们考虑带点融合系统$\mathcal{LP} = \mathcal{LP}(B)$。下文的定理 3.3 指出， $\mathcal{LP}$ 由 B确定。

与 B相关的 $\mathcal{B}$ 的 Puig 范畴，记作 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(B)$，由 Puig [7]引入。另见 Th´evenaz [8, 第 47]节。我们定义 $\mathcal{L}$ 如下。$\mathcal{L}$-对象是 D-代数 B上的局部带点群。给定 $\mathcal{L}$-对象 P_γ 和 Q_δ，则 $\mathcal{L}$-态射$P_\gamma \leftarrow Q_\delta$ 是满足以下条件的群单射 ϕ： $P \leftarrow Q$；选取 $i \in \gamma$ 和 $j \in \delta$后，存在一个单位元 $u \in B^{\Delta(\phi)}$ 满足 ${}^{u}j \leq i$，其中 $\leq$ 表示幂等元的通常偏序。容易验证，存在性条件与 i 和 j的选取无关。

我们将使用 $\mathcal{L}'$ $\mathcal{L}$ 的一个同构副本，定义如下。令 λ 为 D 在 $\mathcal{B}$ 上的点，使得 $1_B \in \lambda$。换言之， λ 是 D 在 B 上满足 $D_\lambda \in (D, e_D)$ 的唯一点。$\mathcal{L}'$-对象是 D_λ 的局部点子群。给定 $\mathcal{L}'$-对象 $P_{\gamma'}$ 和 $Q_{\delta'}$，则 $\mathcal{L}$-态射 $P_{\gamma'} \leftarrow Q_{\delta'}$ 是共轭映射 ${}^{g}y$ y，其中 $g \in G$ 满足 $P_{\gamma'} \geq {}^{g}(Q_{\delta'})$。Puig 的一个定理 [7, 3.6], Th´ 中也有类似论述；evenaz [8, 47.10], 断言：

存在一个范畴同构 $\mathcal{L}' \leftarrow \mathcal{L}$，它在态射上作用为恒等映射，并将每个 $\mathcal{L}$-对象 P_γ 映至满足 $\gamma' \supseteq \gamma$ 的 $\mathcal{L}'$- 对象 $P_{\gamma'}$。

注意， $\mathcal{L}'$ 是 $\mathcal{LP}$的满子范畴。我们不知道 $\mathcal{L}' = \mathcal{LP}$ 是否作为范畴同构。我们提及猜想 [2, 1。5] 蕴含 $\mathcal{L}' = \mathcal{LP}$。我们没有 $\mathcal{L}'$-对象，或等价地， $\mathcal{L}$-对象的显式参数化。下一个结果是 Linckelmann [6, 8.7.3], 的一部分，它蕴含 $\mathcal{L}'$ 在 $\mathcal{LP}$ 中的包含是范畴等价。因此，我们确实可以用不可约 Brauer 特征标显式参数化 $\mathcal{L}$-对象的同构类；事实上，记 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(B)$，那么通过函子链$\mathcal{P} \cong \mathcal{LP} \hookleftarrow \mathcal{L}' \cong \mathcal{L}$， $\mathcal{L}$-对象的同构类与 $\mathcal{P}$-对象之间存在双射对应。

定理 3.1。（Linckelmann。）设 P_γ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个被 B遮蔽的局部带点群。假设 P是完全 $\mathcal{F}$-中心化的。那么 $P_\gamma \leq D_\lambda$，换言之， $B \cap \gamma$ 是 B上的 P的一个局部点。

鉴于 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{LP}$ 的全子范畴 $\mathcal{L}'$ 之间的同构，最新的定理得出以下推论。

推论 3.2. 设 P_γ 是 B 上的一个局部带点群，使得 P 是完全 $\mathcal{F}$-中心化的。设 ϕ是 P的一个 $\mathcal{F}$- 自同构。那么存在 B 上的 P 的一个局部点 $^\phi\gamma$，使得 ϕ 是一个 $\mathcal{L}$- 同构 $P_{\phi_\gamma} \leftarrow P_\gamma$。

定理 3.3。带点融合系统 $\mathcal{LP}$ 由 B 的内部 D-代数结构确定，且确定到 $\mathcal{F}$-恒等同构。

证明。由 B，我们将构造 $\mathcal{F}$ 的一个 $\mathcal{P}$ 以及一个 $\mathcal{F}$-恒等同构 $\sim\iota : \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{LP}$。令 $\mathcal{F}$ 为 D 的全 $\mathcal{F}$-中心化子群集合，使得 $\mathcal{F}$ 是的 $\mathcal{F}$-同构类的一组代表。对于每个 $R \in \mathcal{F}$，令 $\mathcal{L}_R$ 表示 R 在 B上的点集。对于每个 $P \leq D$，令 P为 $\mathcal{F}$ 中满足 $P \cong_{\mathcal{F}} P$的唯一元素。我们选择并固定一个 $\mathcal{F}$-同构 θ_P: $P \leftarrow P$，以及一个集合 $\mathcal{P}_P$，连同一个双射 Θ_P: $\mathcal{P}_P \leftarrow \mathcal{L}_{\widetilde{P}}$。对于每个 $\widehat{\gamma} \in \mathcal{P}_P$，我们定义

$$\widetilde{\gamma} = \Theta_P^{-1}(\widehat{\gamma}) .$$

对于每个以 P 为定义域的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ，我们定义

$$\widetilde{\phi} = \theta_{\phi(P)}^{-1} \phi \theta_P .$$

由于 ϕ 是完全 $\mathcal{F}$-中心化子群 P 的一个 $\mathcal{F}$-自同构，推论 3.2 确保我们可以在 B 上构造 $\widehat{P}$ 的局部点 $^{\widetilde{\phi}}\widetilde{\gamma}$。我们定义

$$^\phi\widehat{\gamma} = \Theta_{\phi(P)}(^{\widetilde{\phi}}\widetilde{\gamma}) .$$

设 $Q \leq D$ 和 $\delta \in \mathcal{P}_Q$。当 $Q \not\leq P$ 时，令 $m_{\widehat{\mathcal{P}}}(Q_{\widehat{\delta}}, P_{\widehat{\gamma}}) = 0$。现在假设 $Q \leq P$。将 $\theta = \theta_P^{-1}\theta_Q$ 作为一个以 $\widetilde{Q}$ 为定义域的同构。我们定义

$$m_{\widehat{\mathcal{P}}}(Q_{\widehat{\delta}}, P_{\widehat{\gamma}}) = m(^\theta(\widetilde{Q}_{\widetilde{\delta}}), \widetilde{P}_{\widetilde{\gamma}})$$

当 θ表示一个以 $Q_{\widetilde{\delta}}$ 为定义域的 $\mathcal{L}$-同构时；否则为 $m_{\widehat{\mathcal{P}}}(Q_{\widehat{\delta}}, P_{\widehat{\gamma}}) = 0$。至此，我们已指定了确定 $\mathcal{P}$ 的全部数据，但尚未证明 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{F}$ 的带基点的细化。

对于任意 $P \leq D$，当 γ 表示 $\mathcal{LP}_P$ 的一个元素时，应理解为

$$\widetilde{\gamma} = B \cap {}^{\theta_P^{-1}}\gamma$$

根据定理 3.1，是 B 上 P 的一个点。对于此类 γ，还应理解为

$$\widehat{\gamma} = \Theta_P(\widetilde{\gamma}) \ .$$

我们令 ι 为双射族 ι_P： $P_P \leftarrow \mathcal{LP}_P$，使得 $\iota_P(\gamma) = \widehat{\gamma}$。

与此同时，我们将证明，$\widehat{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{F}$ 的带结点的细化，并且 ι 是 $\widehat{\mathcal{F}}$-$\widehat{\mathcal{P}}$ 恒等同构 $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{LP}$。我们要证明态射和重数的保持性。也就是说，我们要证明，对于所有以 P为定义域、且 $\gamma \in \mathcal{LP}_P$的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ，我们有 ${}^{\phi}\widehat{\gamma} = {}^{\phi}\gamma$；并且还要证明，对于所有满足 $Q \leq P$的 $\mathcal{LP}$-对象 Q_δ 和 P_γ，有$m_{\widehat{\mathcal{P}}}(Q_{\widehat{\delta}}, P_{\widehat{\gamma}}) = m(Q_\delta, P_\gamma)$。

给定如上所述的 ϕ 和 P_γ，则

$$\widetilde{{}^{\phi}\gamma} = B \cap {}^{\theta_{\phi(P)}^{-1}\phi}\gamma = B \cap {}^{\widetilde{\phi}\theta_P^{-1}}\gamma = {}^{\widetilde{\phi}}\widetilde{\gamma} = {}^{\widetilde{\phi}}\Theta_P^{-1}(\widehat{\gamma}) \ .$$

因此 ${}^{\phi}\gamma = \Theta_{\phi(P)}({}^{\phi}\gamma) = {}^{\phi}\widehat{\gamma}$。我们已经证明态射的保留性。

给定一个带有 $Q \leq P$ 的 $\mathcal{LP}$-对象 Q_δ，则

$$m(Q_\delta, P_\gamma) = m({}^{\theta_P^{-1}}(Q_\delta), {}^{\theta_P^{-1}}(P_\gamma)) \ .$$

设 θ 如上。若 θ 作为一个定义域为 $Q_{\widetilde{\delta}}$ 的 $\mathcal{L}$-同构出现，则

$$m({}^{\theta_P^{-1}}(Q_\delta), {}^{\theta_P^{-1}}(P_\gamma)) = m({}^{\theta}(\widetilde{Q}_{\widetilde{\delta}}), \widetilde{P}_{\widetilde{\gamma}}) = m_{\widehat{\mathcal{P}}}(Q_{\widehat{\delta}}, P_{\widehat{\gamma}}) \ .$$

现在假设 θ 并未作为一个定义域为 $Q_{\widetilde{\delta}}$ 的 $\mathcal{L}$-同构出现。则 $m_{\widehat{\mathcal{P}}}(Q_{\widehat{\delta}}, P_{\widehat{\gamma}}) = 0$。由于 $\widetilde{Q}$ 是完全 $\mathcal{F}$- 中心化的，定理 3.1 推出 ${}^{\theta_Q}(Q_\delta) \leq D_\lambda$。因此，根据关于 θ 的假设，我们有 ${}^{\theta_P^{-1}}(Q_\delta) \not\leq D_\lambda$。必然地，${}^{\theta_P^{-1}}(Q_\delta) \not\leq {}^{\theta_P^{-1}}(P_\gamma)$。所以 $Q_\delta \not\leq P_\gamma$，换言之，$m(Q_\delta, P_\gamma) = 0$。我们已证明重数保持不变。 □

4 关于界的猜想

设 G、D、B、$\mathcal{B}$ 如第 2 节所述。我们继续研究带点融合系统 $\mathcal{LP} = \mathcal{LP}(B)$。我们将讨论三个相关的猜想，它们涉及以缺陷群 D 为参数的界。

Puig 猜想的一个表述可见于 Th´evenaz [8, 38.5]。确认 [8, 38.6] 中一项未经证明的断言，将意味着下面的猜想与 Puig 猜想等价。对于 $\mathcal{O}$ 上的有限生成代数 Λ，我们将 $\mathbb{F}\Lambda = \mathbb{F} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda$ 定义为一个 $\mathbb{F}$ 上的代数。

猜想 4.1。（弱 Puig 猜想。）固定 D，块代数 $\mathbb{F}\mathcal{B}$ 的源 D-代数 $\mathbb{F}B$ 的维数存在一个上界。

下一个猜想由 Eaton–Kessar–K¨ulshammer–Sambale 在 [5, 9.1] 中提出。

猜想 4.2.（弱 Donovan 猜想。）固定 D，则块代数 $\mathbb{F}\mathcal{B}$的 Cartan 不变量存在一个上界。

猜想 4.3。（有界重数猜想。）固定 D 后， $\mathcal{B}$ 的带点融合系统 $\mathcal{LP}$ 的重数存在一个上界。

命题 4.4. 固定 D，则 D 的弱 Puig 猜想成立，当且仅当 D 的弱 Donovan 猜想和有界重数猜想成立。

证明. 固定 $\mathcal{B}$ 和 B。令 c 为 $\mathcal{B}$ 的 Cartan 不变量中的最大值。令 m 为 $\mathcal{LP}$-重数的最大值。我们将证明 $c \leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}B) \geq m$ 和

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}B) \leq cm^2|D|^4 .$$

由于 $\mathbb{F}\mathcal{B}$ 和 $\mathbb{F}B$ Morita 等价，它们有相同的 Cartan 不变量，且 $c \leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}B)$。给定 $\mathcal{LP}$-对象 Q_δ 和 P_γ，满足 $Q \leq P$，那么对于所有 $Q \leq R \leq P$，我们有

$$m(Q_\delta, P_\gamma) \geq \sum_{\epsilon \in \mathcal{LP}_R} m(Q_\delta, R_\epsilon)\, m(R_\epsilon, P_\gamma) .$$

因此，对于某个位于 $\mathcal{B}$ 上的点 τ，有 $m = m(1_\tau, D_\lambda)$。令 W 为一个未被 B 上的点 $B \cap \tau$ 消去的简单 B-模，则 $m = \dim_{\mathbb{F}}(W) \leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}B)$。

根据上述 Morita 等价，简单 B-模的同构类数等于简单 $\mathcal{B}$-模的同构类数。Linckelmann [6, 6.12.1] 中 Brauer 和 Feit 的一个定理断言 $\ell \leq |D|^2/4 + 1$。若 D 是平凡的，则 $\ell = 1$。因此 $\ell \leq |D|^2$。我们有

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}B) = \sum_V \dim_{\mathbb{F}}(V) \dim_{\mathbb{F}}(L_V)$$

其中， V 遍历所有同构意义下的简单 $\mathbb{F}B$-模， L_V 表示 V的射影覆叠。每个 $\dim_{\mathbb{F}}(V) \leq m$ 且 $\dim_{\mathbb{F}}(L_V) \leq cm\ell$。因此， $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}B) \leq cm^2\ell^2$。 □

当 $p = 2$ 和 D 为阿贝尔时，弱 Donovan 猜想已在 [5,9.2]中得到证明。因此，我们得到以下推论。

推论 4.5。固定 D，并假设 $p = 2$ 和 D 为阿贝尔，则弱 Puig 猜想对 D 成立，当且仅当有界重数猜想对 D成立。

5 等价诱导的同构

设 G、 b、 D、 B、 $\mathcal{B}$ 如第 2 节所述。在定理 5.6 中，我们将说明从 $\mathcal{B}$ 出发的华丽 Morita 等价如何导出带点融合系统的同构。在定理 5.7 中，我们将说明从 $\mathcal{B}$ 出发的 Morita 型华丽稳定等价如何导出带点融合系统稳定部分之间的同构。

给定群 R，我们将 $\Delta(R) = \{(z, z) : z \in R\}$ 定义为 $R \times R$的一个子群。回忆一下，给定 G 的一个 p-子群 P 以及一个 $\mathcal{O}G$-模 M， M 在 P 处的 Brauer 构造定义为 $\mathbb{F}N_G(P)/P$-模

$$M(P) = M^P / \sum_{Q \leq P} \mathrm{tr}_Q^P(M^Q)$$

其中 tr_Q^P表示传递映射 $M^P \leftarrow M^Q$。Brou´e [3, 3.2] 的一个定理表明，如果M的顶点为 P，那么 $M(P)$ 是射影且不可分解的。

引理 5.1. 设 E 为有限 p-群，且 M 为置换 $\mathcal{O}E$-$\mathcal{O}E$-双模，其作为左 $\mathcal{O}E$-模和右 $\mathcal{O}E$-模都是自由的。设 $P \leq E$，且令 N 为置换$\mathcal{O}E$-$\mathcal{O}P$-双模，其作为左 $\mathcal{O}E$-模和右 $\mathcal{O}P$-模都是自由的。假设

$$(M \otimes_{\mathcal{O}E} N)(\Delta(P)) \neq 0 .$$

那么存在一个单射 $\phi\colon E \leftarrow P$ 使得 $N(\Delta(\phi)) \neq 0$。

证明。令 S为 M的一个 E-E-稳定基。令 T为 N的一个 E-P-稳定基。该假设意味着存在 $(s,t) \in S\times T$，使得对所有 $x \in P$都有 $xs \otimes tx^{-1} = s \otimes t$。存在一个单射 $\phi\colon E \leftarrow P$，由 $(xs\phi(x)^{-1}, \phi(x)tx^{-1}) = (s,t)$ 给出。 □

再次，令 P 为 G的一个 p-子群。根据等式

$$N_{G\times P}(\Delta(P)) = (C_G(P)\times 1)\Delta(P)$$

我们有一个显然的同构

$$N_{G\times P}(\Delta(P))/\Delta(P) \cong C_G(P) .$$

通过该同构，给定一个 $\mathcal{O}(G\times P)$-模 M，我们可以将 $M(\Delta(P))$ 视为一个 $\mathbb{F}C_G(P)$-模。

借鉴第 2 节中的一个定义，对于 $\mathcal{O}G$上的任意带点群 P_μ，选取 $i \in \mu$，我们定义对角模

$$\mathrm{Dia}(P_\mu) = \mathcal{O}Gi$$

作为一个 $\mathcal{O}(G\times P)$-模。同样显然，$\mathrm{Dia}(P_\mu)$ 的定义不依赖于 i 的选择。同样，i 的本原性意味着 $\mathrm{Dia}(P_\mu)$ 是不可分解的。我们断言，P 的点 μ 是局部的，当且仅当 $\mathrm{Dia}(P_\mu)$ 的顶点为 $\Delta(P)$。由于 $\mathrm{Dia}(P_\mu)$ 是置换 $\mathcal{O}(G\times P)$-模 $\mathcal{O}G \cong \mathcal{O}(G\times P)/\Delta(P)$ 的一个直和项，$\mathrm{Dia}(P_\mu)$ 的某个顶点包含于 $\Delta(P)$ 中。存在一个 $\mathcal{O}$-线性同构

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}(G\times 1)}(\mathcal{O}Gi) \cong \mathcal{O}Gi$$

由 $\sigma \leftrightarrow \sigma(i)$ 给出，它是 $\mathcal{O}Gi$ 的一个 $\mathcal{O}(G\times 1)$-自同态 σ。给定 $Q \leq P$，则 $\mathrm{tr}_\Delta^{\Delta(P)}{}_{(Q)}(\sigma) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}Gi}$ 当且仅当 $\mathrm{tr}_\Delta^{\Delta(P)}{}_{(Q)}(\sigma(i)) = i$。断言得证。我们指出，对角模在 [1]，中有更系统的讨论，但我们在此对它们的使用独立于那里的内容。

设 P_γ 是 $\mathcal{B}$ 上的一个局部带点群。那么 P_γ 是 $\mathcal{O}G$ 上的一个带点群，并且我们可以构造对角模 $M = \mathrm{Dia}(P_\gamma)$，它是不可分解的，顶点为 $\Delta(P)$。由于 $bM = M$，我们可以将 M 视为一个 $\mathcal{B}$-$\mathcal{P}$- 双模。我们有 $\mathrm{br}_P(b)M(\Delta(P)) = M(\Delta(P))$。因此，$M(\Delta(P))$ 是一个射影不可分解的 $\mathbb{F}C_G(P)\mathrm{br}_P(b)$-模。

命题 5.2. 设 $P \leq D$。那么，条件 $\mathrm{Dia}(P_\gamma) \cong M$ 刻画了 $\gamma \leftrightarrow [M]$ 之间的一个双射对应：

(a) P 上 $\mathcal{B}$ 的局部点 γ，其中 P_γ 被 B 遮蔽，
(b) 具有顶点 $\Delta(P)$ 且满足 $M \mid \mathcal{B}$ 和 $e_P M(\Delta(P)) = M(\Delta(P))$ 的不可分解 $\mathcal{B}$-$\mathcal{O}P$-双模 M 的同构类 $[M]$。

证明。根据上面的评论，所指定的条件刻画了 P 在 $\mathcal{B}$ 上的局部点 γ 与具有顶点 $\Delta(P)$ 且满足 $M\,|\,\mathcal{B}$ 的不可分解 $\mathcal{B}$-$\mathcal{O}P$-双模 M 的同构类 $[M]$ 之间的双射对应。对于这样的 γ 和 M，假设 $\gamma \leftrightarrow [M]$，则 P_γ 被 B 遮蔽，当且仅当 $e_P M(\Delta(P)) = M(\Delta(P))$。 □

我们还需要两个引理，用来描述 $\mathcal{LP}(B)$-对象之间的同构如何诱导对角模之间的同构，以及 $\mathcal{LP}(B)$-对象之间的重数如何用对角模表示。

Lem引理 5.3. 给定一个 $\mathcal{LP}(B)$-对象 P_γ 以及一个定义域为 P 的 $\mathcal{F}$-态射 ϕ，则

$$\mathrm{Dia}({}^{\phi}(P_\gamma)) \cong \mathrm{Dia}(P_\gamma) \otimes_{\mathcal{O}P} (P{\times}\phi(P))/\Delta(\phi^{-1})\ .$$

证明。令 $i \in \gamma$，并令 u 为 $\mathcal{B}^{\Delta(\phi)}$ 中的一个单位元。于是 ${}^{u}i \in {}^{\phi}\gamma$。我们有 $\mathcal{O}G.{}^{u}i = \mathcal{O}Giu^{-1}$ 和 $u^{-1} \in \mathcal{B}^{\Delta(\phi^{-1})}$。 □

引理5.4. 给定 $\mathcal{LP}(B)$-对象 P_γ 和 Q_δ，且满足 $Q \leq P$，则

$$m(Q_\delta, P_\gamma) = m(\mathrm{Dia}(Q_\delta), {}_{G\times Q}\mathrm{Res}_{G\times P}(P_\gamma)) = m(\mathrm{Dia}(Q_\delta), \mathrm{Dia}(P_\gamma) \otimes_{\mathcal{O}P} (P{\times}Q)/\Delta(Q))\ .$$

证明。第一个等式显然。函子 $-\otimes_{\mathcal{O}P}(P{\times}Q)/\Delta(Q)$ 是从右 $\mathcal{O}P$-模到右 $\mathcal{O}Q$-模的限制函子。 □

我们还需要 Linckelmann [6, 8.7.1] 中的以下部分。

定理 5.5.（Linckelmann.）给定 $P, Q \leq D$，则 B 的每个不可分解直和项，作为 $\mathcal{O}P$-$\mathcal{O}Q$-双模，都同构于 $\mathcal{O}(P{\times}Q)/\Delta(\psi)$，其中 ψ 是从 Q 的某个子群到 P 的某个子群的 $\mathcal{F}$-同构。

现在我们引入另一个具有相同缺陷群 D 的块。令 F 为一个有限群，令 a 为 $\mathcal{O}F$ 的一个具有缺陷群 D 的块，并令 A 为块代数$\mathcal{A} = \mathcal{O}Fa$的一个源 D-代数。

若一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模 M 诱导了一个相对于 A 和 B、从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{A}$ 的华丽 Morita 等价，则称其满足以下两个条件:

- M 和对偶 M^* 在 $\mathcal{A}$ 与之间诱导出 Morita 等价 $\mathcal{B}$,
- M 是 $\mathcal{O}F1_A \otimes_{\mathcal{O}D} 1_B\mathcal{O}G$的一个不可分解直和项。

[6, 9.7.4] 中 Puig 和 Scott 的一个定理断言，关于 A 和 B，从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{A}$ 存在华丽 Morita 等价，当且仅当存在一个内部 D-代数同构 $A \cong B$。我们提到，[6] 中关于系数环的假设略有不同，但 [6] 中的证明无需改动即可推广到任意 $\mathcal{O}$ 的情形。注意，当这两个等价条件成立时，与 B 相关联的融合系统 $\mathcal{F}$ 也是与 A 相关联的融合系统。

定理 5.6. 假设存在一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模 M，它相对于 A 和 B，使 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 之间存在华丽 Morita 等价。那么，对任意 $\mathcal{LP}(B)$-对象 P_γ，都有一个 $\mathcal{F}$-恒等同构 $\iota\colon \mathcal{LP}(A) \leftarrow \mathcal{LP}(B)$，由 $\mathrm{Dia}(P_{\iota_P(\gamma)}) \cong M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\gamma)$ 给出。

证明。固定一个 $\mathcal{LP}(B)$-对象 P_γ，并令

$$L = M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\gamma)$$

作为一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}P$-双模。我们将证明，存在 P 在 $\mathcal{A}$ 上的一个点 α，使得 P_α 是一个 $\mathcal{LP}(A)$-对象，且 $L \cong \mathrm{Dia}(P_\alpha)$。由于 $\mathrm{Dia}(P_\gamma) \cong M^* \otimes_{\mathcal{A}} L$，由命题 5.2 可知，函数 $P_\alpha \quad P_\gamma$ 是从 $\mathcal{LP}(B)$-对象集合到 $\mathcal{LP}(A)$-对象集合的双射。

函子 $M \otimes_{\mathcal{B}} -$ 是从 $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}P$ 到 $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}P$ 的 Morita 等价，因此 L 不可分解。令 $i \in \gamma$，我们有 $\mathrm{Dia}(P_\gamma) \cong \mathcal{O}Gi$，因此 $L \cong Mi$。所以，对于某个 $\mathcal{O}D$-$\mathcal{O}P$ 双模 $1_B\mathcal{O}Gi$ 的不可分解直和项 W，有 $L \mid \mathcal{O}F1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W$。因此，

$$\mathrm{Dia}(P_\gamma) \cong M^* \otimes_{\mathcal{A}} L \mid M^*1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W \ .$$

由于 $\mathrm{Dia}(P_\gamma)$ 的顶点为 $\Delta(P)$，我们有 $\mathrm{Dia}(P_\gamma)(\Delta(P)) \neq 0$，因此 $(M^*1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W)(\Delta(P)) \neq 0$。根据引理 5.1，$W(\Delta(\psi)) \neq 0$，其中某个单射 $\psi\colon D \leftarrow P$。由于 W 是不可分解的，$W \cong \mathcal{O}(D \times P)/\Delta(\psi)$。根据定理 5.5，$\psi$ 是一个 $\mathcal{F}$-态射。令 $I = \mathcal{O}(\psi(P) \times P)/\Delta(\psi)$ 为一个 $\mathcal{O}\psi(P)$-$\mathcal{O}P$-双模。记 I° 为 I 的对偶双模，我们有

$$W \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ \cong \mathcal{O}(D \times \psi(P))/\Delta(\psi(P)) \ .$$

因此，$- \otimes_{\mathcal{O}D} W \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ$ 是从右 $\mathcal{O}D$-模到右 $\mathcal{O}\psi(P)$-模的限制函子。因此，

$$L \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ \mid \mathcal{O}F1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ \cong \mathcal{O}F1_A$$

作为 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}\psi(P)$-双模。由于 $L \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ$ 不可分解，因此存在 $A^{\psi(P)}$ 的一个本原幂等元 h'，使得

$$L \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ \cong \mathcal{O}Fh'$$

作为 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}\psi(P)$-双模。令 $f \in F$，使得 ψ 是由 f 诱导的共轭。令 h 为 A^P 的本原幂等元，使得 $h' = {}^f h$。令 α 为 P 在 $\mathcal{A}$ 上的点，拥有 h。我们有

$$L \cong L \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ \otimes_{\mathcal{O}\psi(P)} I \cong \mathcal{O}Fh' \otimes_{\mathcal{O}\psi(P)} \mathcal{O}\psi(P)fP \cong \mathcal{O}Fh \cong \mathrm{Dia}(P_\alpha) \ .$$

为了证明 α 是局部的，设 Q 是 α 的一个缺陷群。作为一个 $\mathcal{O}(F \times P)$-模，L 同构于一个由 $F \times Q$ 诱导的模的直和项。根据 Green 不可分解性判别法，

$$L \cong {}_{F \times P}\mathrm{Ind}_{F \times Q}(K) \cong K \otimes_{\mathcal{O}Q} \mathcal{O}P$$

对于某个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}Q$-双模 K。我们有

$$\mathrm{Dia}(P_\gamma) \cong M^* \otimes_{\mathcal{A}} L \cong M^* \otimes_{\mathcal{A}} K \otimes_{\mathcal{O}Q} \mathcal{O}P \cong {}_{G \times P}\mathrm{Ind}_{G \times Q}(M^* \otimes_{\mathcal{A}} K) \ .$$

但是，$\mathrm{Dia}(P_\gamma)$ 的顶点是 $\Delta(P)$，因此 $Q = P$ 和 α 是局部的。

为了证明 P_α 被 A 遮蔽，令 α' 为 $\psi(P)$ 中位于 $\mathcal{A}$ 上且拥有 h' 的点。由于 $h' \in A^{\psi(P)}$，我们有 $\psi(P)_{\alpha'} \in (\psi(P)\, e_{\psi(P)})$。但是 $\psi(P)_{\alpha'} = {}^f(P_\alpha)$，且 $(\psi(P)\, e_{\psi(P)}) = {}^f(P, e_P)$，因此 $P_\alpha \in (P, e_P)$；换言之，P_α 被 A 遮蔽。

我们现在已经证明 P_α 是一个 $\mathcal{LP}(A)$-对象。接下来需要证明 ι_P 保持融合和重数。令 ϕ 为一个定义域为 P 的 $\mathcal{F}$-态射。引理 5.3 告诉我们，应用函子 $- \otimes_{\mathcal{O}P} (P \times \phi(P))/\Delta(\phi^{-1})$ 后，有

$$\mathrm{Dia}({}^\phi(P_\alpha)) \cong M \otimes \mathrm{Dia}({}^\phi(P_\gamma)) \ .$$

因此，${}^\phi\alpha = \iota_{\phi(P)}({}^\phi\gamma)$ 和 ι 保持融合。令 $Q \leq P$，并设 δ 为 Q 的一个 $\mathcal{LP}(B)$-点。令 β 为 Q 的 $\mathcal{LP}(A)$-点，使得 $\mathrm{Dia}(Q_\beta) \cong M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(Q_\delta)$。由于 $M \otimes_{\mathcal{B}} -$ 是一个从 $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}Q$ 到 $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}Q$ 的 Morita 等价，引理5.4给出 $m(Q_\beta, P_\alpha) = m(Q_\delta, P_\gamma)$。因此，$\iota$ 保持重数。

□

若一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模 M 相对于 A 和 B 从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{A}$ 诱导 Morita 型华丽稳定等价，则称其满足以下两个条件:

- M 和对偶 M^* 诱导 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$之间的 Morita 类型稳定等价,
- M 是 $\mathcal{O}F1_A \otimes_{\mathcal{O}D} 1_B\mathcal{O}G$的一个不可分解直和项。根据 [6, 9.8.2], ，当存在这样的 M 时，与 A 相关联的融合系统为 $\mathcal{F}$。

定理 5.7. 假设存在一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-双模 M，它相对于 A 和 B诱导从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{A}$ 的 Morita 型华丽稳定等价。那么存在一个 $\mathcal{F}$-恒等同构$\bar{\iota}$: $\overline{\mathcal{LP}}(A) \leftarrow \overline{\mathcal{LP}}(B)$，使得对于任意$\overline{\mathcal{LP}}(B)$-对象 P_γ, Dia($P_{\bar{\iota}_P(\gamma)}$)是 $M \otimes_{\mathcal{B}}$Dia(P_γ)的非投射部分。

证明. 写作$M^* \otimes_{\mathcal{A}} M \cong \mathcal{B} \oplus Y$，其中 Y是一个射影的 $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-模。固定一个$\overline{\mathcal{LP}}(B)$-对象$P_\gamma$。我们有一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}P$-双模的直和

$$L \oplus L' \cong M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\gamma)$$

其中 L 是不可分解且非投射的，而 L' 是射影的。令 $i \in \gamma$，则 Dia(P_γ) $\cong \mathcal{O}Gi$ 并且

$$M^* \otimes_{\mathcal{A}} L \oplus M^* \otimes_{\mathcal{A}} L' \cong (\mathcal{B} \oplus Y) \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\gamma) \cong \mathrm{Dia}(P_\gamma) \oplus Yi\ .$$

由于 $M^* \otimes_{\mathcal{A}} L'$和 Yi是射影的，Dia(P_γ)是 $M^* \otimes_{\mathcal{A}} L$的非投射部分。我们将证明存在一个 $\overline{\mathcal{LP}}$(A)-对象 P_α，使得 $L \cong$ Dia(P_α)。由此根据命题 5.2 可知，$\overline{\mathcal{LP}}(A)$-对象与$\overline{\mathcal{LP}}(B)$-对象之间存在双射对应 $P_\alpha \leftrightarrow P_\gamma$。

我们有 $L \oplus L' \cong Mi$。因此，对于某个不可分解的 $\mathcal{O}D$-$\mathcal{O}P$-双模W，有 $L \,|\, \mathcal{O}F1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W$，使得 $W \,|\, 1_B\mathcal{O}Gi$。由于 Dia(P_γ)是 $M^* \otimes_{\mathcal{A}} L$的非投射部分，我们有

$$(M^* \otimes_{\mathcal{A}} L)(\Delta(P)) \cong (\mathrm{Dia}(P_\gamma))(\Delta(P)) \neq 0\ .$$

但是 $M^* \otimes_{\mathcal{A}} L \,|\, M^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}F1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W \cong M^*1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W$。所以

$$(M^*1_A \otimes_{\mathcal{O}D} W)(\Delta(P)) \neq 0\ .$$

论证的下一阶段与定理 5.6 的证明大致相同。我们来概述一下。我们再次发现，对于某个 $\mathcal{F}$- 态射 ψ，$W \cong \mathcal{O}(D\times P)/\Delta(\psi)$。令 I 与前面一样，我们发现存在 $A^{\psi(P)}$ 的一个本原幂等元 h'，使得 $L \otimes_{\mathcal{O}P} I^\circ \cong \mathcal{O}Fh'$。像前面一样，通过考察 f、h、α，我们推得 $L \cong$Dia(P_α)。

要证明 α 是局部的，在定理 5.6 的证明中对类似论证进行改编时需要格外谨慎。我们再次使用 Green 不可分解性判别法来证明 $L \cong K \otimes_{\mathcal{O}Q} \mathcal{O}P$，其中 K 是一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}Q$ 双模，且 Q 是 α的一个缺陷群。同样,

$$M^* \otimes_{\mathcal{A}} L \cong {}_{G\times P}\mathrm{Ind}_{G\times Q}(M^* \otimes_{\mathcal{A}} K)\ .$$

但我们在上文看到，$(M^* \otimes_{\mathcal{A}} L)(\Delta(P)) \neq 0$。因此，$Q = P$和 α是局部的。要证明 P_α被 A 遮蔽，论证与我们之前所做的非常相似。

因此，我们已经证明 P_α 是一个 $\overline{\mathcal{LP}}$(A)-对象，现在只需检查对融合和重数的保持性。令 ϕ 如前。记 $J = \mathcal{O}(P\times\phi(P))/\Delta(\phi^{-1})$。

将函子 $- \otimes_{\mathcal{O}P} J$ 应用于同构 $\mathrm{Dia}(P_\alpha) \oplus L' \cong M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\gamma)$，并利用引理 5.3，我们得到

$$\mathrm{Dia}({}^{\phi}(P_\alpha)) \oplus L' \otimes_{\mathcal{O}P} J \cong M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}({}^{\phi}(P_\gamma)) .$$

由于 $L' \otimes_{\mathcal{O}P} J$是一个射影的 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}\phi(P)$-双模，因此 ${}^{\phi}\alpha = \overline{\tau}_{\phi(P)}({}^{\phi}\gamma)$和 $\overline{\tau}$保持融合。

为证明 $\overline{\tau}$ 保持重数，令 Q 为 P的一个非平凡子群，令 δ 为 Q 的一个$\overline{\mathcal{LP}}(B)$-点，并令 β 为 Q 的 $\overline{\mathcal{LP}}(A)$-点，使得

$$\mathrm{Dia}(Q_\beta) \oplus N \cong M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(Q_\delta)$$

其中 N是一个射影的 $\mathcal{B}$-$\mathcal{O}Q$-双模。由于 $L' \otimes_{\mathcal{O}P} \mathcal{O}(P\times Q)/\Delta(Q)$是一个射影的 $\mathcal{A}$-$\mathcal{O}Q$-双模，由引理5.4可得

$$m(Q_\beta, P_\alpha) = m(\mathrm{Dia}(Q_\beta), M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}P} \mathcal{O}(P\times Q)/\Delta(Q)) .$$

$M^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{Dia}(Q_\beta)$的非投射部分是$\mathrm{Dia}(Q_\delta)$，而 $M^* \otimes_{\mathcal{A}} M \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{Dia}(P_\gamma) \otimes_{\mathcal{O}P} \mathcal{O}(P\times Q)/\Delta(Q)$的非投射部分与$\mathrm{Dia}(P_\gamma) \otimes_{\mathcal{O}P} (P\times Q)/\Delta(Q)$的非投射部分同构，因此

$$m(Q_\beta, P_\alpha) = m(\mathrm{Dia}(Q_\delta), \mathrm{Dia}(P_\gamma) \otimes_{\mathcal{O}P} \mathcal{O}(P\times Q)/\Delta(Q)) .$$

再次由引理5.4，$m(Q_\beta, P_\alpha) = m(Q_\delta, P_\gamma)$。因此，$\overline{\tau}$保持重数。 □

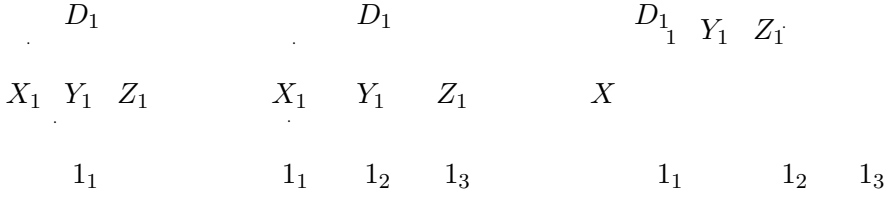
6 克莱因四元缺陷群

再次设 G、 b、 D、 B、 $\mathcal{B}$ 如第 2 节所述。当 $p = 2$ 和$D \cong V_4$时，我们将描述带点融合系统$\mathcal{LP} = \mathcal{LP}(B)$的底层多重偏序集的所有可能情形。这将应用 Craven–Eaton–Kessar–Linckelmann [4, 1.1]的以下定理。他们对该定理的证明依赖于有限单群分类。

定理6.1。（Craven–Eaton–Kessar–Linckelmann。）假设 $p = 2$ 和 $D \cong V_4$，那么作为一个内部 D-代数， B 同构于 $\mathcal{O}D$ 或 $\mathcal{O}A_4$，或 $\mathcal{O}A_5$的主块代数。在后两种情况下， D 被认作 A_4 或 A_5的 Sylow 2-子群。

设 $p = 2$ 且 $D \cong V_4$。根据定理6.1以及定理 5.6，当我们在 $G \in \{D, A_4, A_5\}$ 且 b 是 $\mathcal{O}G$的主块的三种情形中完成这一工作后，就能描述 $\mathcal{LP}$ 的所有可能的多偏序集结构。

令 X, Y, Z 为 D 的真子群。对于任意 $R \in \{X, Y, Z, D\}$，我们有 $C_G(R) = D$。因此，在 $\mathcal{B}$ 上存在唯一的 R 的局部点 γ^R。记作 $R_1 = R_{\gamma^R}$。令 V_1, ... 为简单 $\mathcal{B}$-模的同构类代表，并按 V_1 为平凡模的方式编号。令 γ_i 为 $\mathcal{B}$ 上不湮灭 V_i 的点。记作 $1_i = 1_{\gamma_i}$。因此，每个 $\mathcal{LP}$-对象都具有 R_1 或 1_i 的形式。我们将证明，在 G 分别为 D、 A_4、A_5 的三种情形中， $\mathcal{LP}$ 的多偏序集结构如下所示，其中双线表示重数 2，所有其他重数均为 1。



在本文余下部分中，我们将 $\mathcal{LP}$ 视为一个多重偏序集。显然，若 $G = D$，则 $\mathcal{LP}$ 如左侧图所示。其余两种情形有一些共同特征。此后，设 $G = A_4$ 或 $G = A_5$，并令 b 为 $\mathcal{O}G$ 的主块。由定理6.1（或一个我们略去的简单直接论证），$B = \mathcal{B}$。$\mathcal{B}$ 上的点是满足 $i \in \{1,2,3\}$ 的γ_i。令 E_i 为 $\mathcal{B}$-模的不可分解射影模，在同构意义下唯一，使得 $V_i \cong E_i/J(E_i)$。通过同构 $G\times 1 \cong G$传递，我们有

$$\mathrm{Dia}(1_i) \cong {}_{G\times 1}\mathrm{Iso}_G(E_i)\ .$$

为了进一步讨论，我们分别考察这两种情形。

假设 $G = A_4$。那么 $\mathcal{O}G \cong E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ 作为 $\mathcal{O}G$-模。因此

$$\mathcal{O}G \cong \mathrm{Dia}(1_1) \oplus \mathrm{Dia}(1_2) \oplus \mathrm{Dia}(1_3)$$

作为 $\mathcal{O}(G\times 1)$-模。我们还有 $\mathcal{O}G \cong \mathrm{Dia}(X_1) \oplus E$ 作为 $\mathcal{O}(G\times X)$-模，其中 E 是射影的。通过嵌入 $G \cong G\times 1 \hookrightarrow G\times X$进行限制，我们得到 ${}_G\mathrm{Res}_{G\times X}(E) \mid E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$。但每个射影 $\mathcal{O}(G\times X)$-模限制后都是两个同构的射影 $\mathcal{O}G$-模的直和。因此，$E = 0$，也就是说，$\mathrm{Dia}(X_1) \cong \mathcal{O}G$ 作为 $\mathcal{O}(G\times X)$-模，并且

$${}_{G\times 1}\mathrm{Res}_{G\times X}(\mathrm{Dia}(X_1)) \cong \mathrm{Dia}(1_1) \oplus \mathrm{Dia}(1_2) \oplus \mathrm{Dia}(1_3)\ .$$

由此可得，$\mathrm{Dia}(D_1) \cong \mathcal{O}G$ 作为 $\mathcal{O}(G\times D)$-模，并且

$${}_{G\times X}\mathrm{Res}_{G\times D}(\mathrm{Dia}(D_1)) \cong \mathrm{Dia}(X_1)\ .$$

考虑到子群 X、Y、Z 在 G下共轭，我们利用引理5.4推得，$\mathcal{LP}$ 如上方中间图所示。

现在假设 $G = A_5$。令 $X < H < G$，其中 $H \cong D_{10}$，即 10 阶二面体群。我们有 $\mathcal{O}H \cong L \oplus L_0$ 作为 $\mathcal{O}(H\times X)$- 模，其中 L_0 是射影的，而 L 是不可分解的，其顶点为 $\Delta(X)$，且 $\mathcal{O}$- 秩 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(L) = 2$。由于 $\mathrm{Dia}(X_1)$ 的顶点为 $\Delta(X)$，并且

$$\mathrm{Dia}(X_1) \mid \mathcal{O}G \cong {}_{G\times X}\mathrm{Ind}_{H\times X}(\mathcal{O}H)$$

我们有 $\mathrm{Dia}(X_1) \mid {}_{G\times X}\mathrm{Ind}_{H\times X}(L)$。因此，$\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Dia}(X_1)) \leq 12$。对于 $i \in \{1,2,3\}$，通过嵌入 $G\times X \hookleftarrow G\times 1 \cong G$ 诱导，令 $E_i^X = {}_{G\times X}\mathrm{Ind}_G(E_i)$。那么 E_1^X、E_2^X、E_3^X 构成了 $\mathcal{O}(G\times X)$-模的不可分解射影模同构类的一组代表。由于 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E_1) = 12$ 且 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E_2) = \mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E_3) = 8$，我们有 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E_1^X) = 24$ 且 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E_2^X) = \mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E_3^X) = 16$。现在

$$\mathcal{B} \cong \mathrm{Dia}(X_1) \oplus E$$

作为 $\mathcal{O}(G\times X)$-模，其中 E 是射影的。我们有 $\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}) = 44$，因此 $32 \leq \mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(E) < 44$。通过考虑 G 的一个外自同构，我们看到 E_2^X 和 E_3^X 作为 E 的直和项具有相同的重数。我们对 $\mathcal{O}$-秩得到的约束意味着 $E \cong E_2^X \oplus E_3^X$。因此，$\mathrm{rk}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Dia}(X_1)) = 12$。

作为 $\mathcal{O}G$-模，我们有 $\mathcal{B} \cong E_1 \oplus 2E_2 \oplus 2E_3$，因此

$$\mathcal{B} \cong \mathrm{Dia}(1_1) \oplus 2\mathrm{Dia}(1_2) \oplus 2\mathrm{Dia}(1_3)$$

作为 $\mathcal{O}(G\times 1)$-模。根据上述关于 E 的同构，我们有

$${}_{G\times 1}\mathrm{Res}_{G\times X}(\mathrm{Dia}(X_1)) \cong \mathrm{Dia}(1_1)\ , \qquad {}_{G\times 1}\mathrm{Res}_{G\times X}(E) \cong 2\mathrm{Dia}(1_2) \oplus 2\mathrm{Dia}(1_3)\ .$$

我们有 Dia(D_1) $\cong \mathcal{O}G1_B$ 作为 $\mathcal{O}(G\times D)$-模。但 $B = \mathcal{B}$，因此 Dia(D_1)$\cong \mathcal{B}$ 作为 $\mathcal{O}(G\times D)$-模，并且

$$_{G\times X}\mathrm{Res}_{G\times D}(\mathrm{Dia}(D_1)) \cong \mathrm{Dia}(X_1) \oplus E\ .$$

再次注意到 X、 Y、 Z 在 G 下共轭，应用引理5.4可得结论： $\mathcal{LP}$ 如上方右侧图所示。

现在，我们对这三种情形的分析已告完成。特别地，由此可知，每当一个 2-块的缺陷群为 V_4 时，带点融合系统的稳定部分 $\overline{\mathcal{LP}}$ 的底层多重偏序集具有这样的性质：所有 $\overline{\mathcal{LP}}$ 重数均为 1；并且作为偏序集， $\overline{\mathcal{LP}}$ 的哈斯图如下所示。



参考文献

[1] L. Barker, 《块代数上的带点群》, （预印本）。[2] L. Barker、M. Gelvin, 《近源代数融合系统的猜想性不变性》, 《群论杂志》25，973-995（2022）。[3] M. Brou´é, 《关于Scott模和 p-置换模：一种通过Brauer态射的研究方法》, 《美国数学会会刊》93，401-408（1985）。[4] D. A. Craven、C. W. Eaton、R. Kessar、M. Linckelmann, 《具有克莱因四元缺陷群的块的结构》, 《数学杂志》208，441-476（2011）。[5] C. W. Eaton、R. Kessar、B. K¨ulshammer、B. Sambale, 《具有阿贝尔缺陷群的2-块》, 《数学进展》254，706-735（2014）。[6] M. Linckelmann, 《有限群代数的块理论》, 第1、2卷（剑桥大学出版社，剑桥，2018）。[7] L. Puig, 《块源代数中的局部融合》, 《代数杂志》104，358-369（1986）。[8] J. Th´evenaz, 《G-代数与模表示论》（克拉伦登出版社，牛津，1995）。