arXiv:2305.05449v1 [math.FA] 9 May 2023

具有喇叭型奇点空间的霍奇-德拉姆理论与解析挠率

M. SPREAFICO

Abstract. 我们研究具有喇叭型奇点的空间 X 的全局解析性质。特别地，我们引入某种平方可积形式的德拉姆复形，并描述其同调以及相关霍奇-拉普拉斯算子的谱性质。所有这些研究均用于适当地描述 X 的解析挠率，并证明切格尔-穆勒定理的一种推广。

Contents

1. 引言 1 2. 具有角状奇点的空间 5 3. 德拉姆理论 8 4. 霍奇-拉普拉斯算子与 Hodge 理论 19 5. 有限喇叭上的分析 25 6. 调和场、德拉姆映射与 RS 扭率 36 7. 解析挠率 39 附录 A. 非正则奇异 Sturm–Liouville 算子 50 附录 B. ζ 正则化技术的基本要素 60 参考文献 63

1. Introduction

如果 X 是一个紧致连通度量空间，且对于某个点 x_0 属于 X， $X - \{x_0\}$ 是一个稠密的不完备光滑黎曼流形，我们称 X 为具有一个孤立奇点的空间。从拓扑观点来看，这种空间不过是将一个锥粘接到一个带边流形上；但从几何观点来看，奇点由奇异点附近的度量刻画。第一种自然的奇点类型是锥形奇点，其度量局部写作 $dx \otimes dx + x^2 H^2(x)\tilde{g}$，其中 x 是到奇异点的距离， $\tilde{g}$ 是锥的截面上的度量，而 H 是一个光滑正函数。J. Cheeger 最初研究了这些空间的整体几何和解析性质 [6] [7] [9] （另见 [4] [5]）。此后，许多作者发表了大量相关成果。特别是，研究者投入了大量精力，为这些空间寻找 Cheeger–Müller CM 定理的恰当推广 [17, 19, 20, 32, 27, 21]。下一种自然的奇点类型是喇叭形奇点，

Date: 2023年5月10日。

2000 *Mathematics Subject Classification: 58J52 and 57Q10.*1

其中度量局部表示为 $dx \otimes dx + x^{2\kappa} H^2(x)\tilde{g}$，其中 $\kappa > 1$。同样，这些空间最初由 J. Cheeger [8, 截面 2]所研究。然而，对它们的研究要少得多。在 [25], 中，对外微分算子的闭扩张进行了分类，并讨论了指标问题（另见 [23]）。

本讲义旨在研究具有喇叭奇点的空间的整体解析性质，尤其着眼于 CM 定理的一种恰当推广。遵循开流形整体分析的经典方法 [10, 13, 12], 我们将空间 X 分解为一个模型有限喇叭 Z 和一个带边光滑流形Y。然后，我们可以通过将问题分解为有限区间 (0,1) 上的一个斯图姆-刘维尔问题与截面上的一个经典问题来处理有限喇叭上的分析，其中截面是一个光滑流形。这里的一个关键点是，对于喇叭情形，相关的斯图姆-刘维尔问题是不规则奇异问题。正则和正则奇异斯图姆-刘维尔问题虽已得到深入研究，但关于不规则奇异问题的研究却寥寥无几。我们在附录A 中致力于推导本研究所需的全部结果。目前我们正与 G. Metafune 和 D. Pallara 合作研究不规则奇异斯图姆-刘维尔问题。

回到本文，以上所述的分解使我们能够引入外微分算子的适当闭扩张，并对其作出显式刻画，见第 3.2 节。随后，我们定义若干由希尔伯特空间和闭算子构成的德拉姆复形，见第 3.6 节，并计算它们的同调，见第 3.7 节。我们发现，其中一些德拉姆复形的同调与 Goresky 和 MacPhearson 的交叉同调一致 [15, 16], ，相关内容将在第 6 节回顾。接着，我们转向霍奇-拉普拉斯算子，见第 4 节。一方面，我们研究与上述德拉姆复形相关的霍奇-拉普拉斯算子；另一方面，我们定义形式霍奇拉普拉斯算子的若干适当自伴扩张。我们证明这两种方法等价，并描述该算子的主要谱性质。特别地，我们给出了有限喇叭上的显式谱分解，并根据 X 的调和场确定了 Y的调和场，见命题 6.0.3。这使我们能够构造显式的德拉姆映射，从而在同调上诱导出同构，见第 6 节。

有必要对这一结果作一说明。从拓扑观点来看，空间 X 带有一个孤立奇点，要成为流形，其障碍在于奇异点的链接的同调：如果它是一个球面，那么 X 就是一个同调球面，因而是一个流形；否则就不是。其结果是， X的经典同调不满足对偶性。Goresky 和 MacPherson 的最初想法是引入一种适当的同调理论，使对偶性成立。关键的技术点在于选取与 X的某种组合分解中的奇异点相交的胞腔。很明显，如果消除所有这类胞腔，就会移除奇异点 x上方的锥C(lk(x))，即奇异点的链接上的锥；另一方面，如果允许所有与 x相交的胞腔，就会得到偶对 $(X - C(\text{lk(x)}), \text{lk(x)})$ 的同调，参见第 6 节和 [43]。然而，由于 q 同调并不是由次数 q上的链模导出的，如果我们固定某个次数 q_0，并定义一个胞腔复形，对 $q \leq q_0$ 移除一些胞腔、对 $q > q_0$允许所有胞腔，那么对于 $q < q_0$，我们得到流形$X - C$(lk(x))的同调；而对于 $q > q_0$，我们得到偶对 $(X - C(\text{lk(x)}), \text{lk(x)})$ 的同调，但次数 q_0 上的同调将取决于这两者之间的相互作用，

相关的同调恰当序列，参见命题 6.0.1 和 6.0.2。这意味着，利用带边流形 $X - C$ (lk(x)) 的对偶性，当 X的维数为 X 偶数 $m = 2k$时，我们可以恢复 C 与C'之间的对偶性；但当维数为奇数时则不能。在这种情况下，为保证对偶性，我们需要构造两个不同的胞腔复形，即 $q_0' = q_0 + 1$ 和 $\mathfrak{m}$ （它们分别对应于两个中间贯穿度： $\mathfrak{m}^c$），此时对偶性表示为 $H_q(C) \cong H_{2k+1-q}(C')$，参见第 6节末尾。那么，这一结果的解析对应物是什么？这确实是一个重大问题，文献中引入了一个特设条件——Witt 条件——这一事实便证明了这一点；在这里，它意味着奇点的链接在中间次数上的同调消失。我们对这一问题的解决方案，是在奇异点处为相关的霍奇-拉普拉斯算子引入一些边界条件。注意，相关的斯图姆-刘维尔问题表示为

$$-h^{2\alpha-1}\left(h^{1-2\alpha}f'\right)' + \frac{\tilde{\lambda}}{h^2}f = \lambda f,$$

其中 $h(x) = x^{2\kappa}H(x)$，且 α 是一个维数参数。这通常是一个非正则˜奇异问题，但对于调和形式， $\lambda = \lambda = 0$，因此当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，它就成为一个正则问题。这种情况只可能出现在奇数维以及次数q_0和 q_0+1。因此，在这些情况下，我们有不同的自伴扩˜张可供选择，尤其是两种经典扩˜张（相对边界条件和绝对边界条件，或狄利克雷条件和纽曼条件）。选择这两种扩˜张后，我们得到两个不同的德拉姆复形，其对应的霍奇-拉普拉斯算子具有不同的调和场，尤其是在临界次数上。这样，我们便能确保在所有次数下都与上述交叉同调同构，而无需任何进一步假设。

我们的最后一组结果涉及解析挠率和 Cheeger–M¨uller 定理 [37, 6, 31]。利用有限喇叭上的霍奇-拉普拉斯算子的谱，我们将扭率ζ函数表示为若干双重狄利克雷级数和若干简单狄利克雷级数之和，见第7.2节。我们利用 [41]中的谱分解引理处理双重级数。这里，明确掌握若干谱函数的解析性质，以及相关非正则奇异斯图姆-刘维尔问题的解的渐近展开，至关重要。所有这些信息均见附录A。利用这一结果，我们证明了有限喇叭解析挠率的公式，见定理7.2.6。随后，我们推广 Ray 和 Singer 关于度量变化时解析挠率变化的结果[37] ，并利用 Vishick Lesh 的粘合公式 [44, 24], ，得到 X 7.3.1的解析挠率。最后，我们将解析挠率与组合交叉 RS 扭率进行比较（定义见第6 节）。相关结果见定理7.2.7 和7.3.2，由此可知，若 X 的维数为偶数，则两种挠率相同；而在奇数维时，则会出现两个异常项。

我们对定理 7.3.2 中的 CM 公式补充几点说明。第一项异常项$A_{\mathrm{comb},\ \mathfrak{p}}$ 纯粹是组合性的，可以解释如下。欧拉同构将同调的行列式线映射到链复形的行列式线（比较 [42]）。挠率的组合部分，即 Reidemeister 扭率，是同调行列式线的一组基在链行列式线的胞腔基下的像的系数。对于交链复形，胞腔并不能确定链线的一组优选基。可以通过

使用自然的标准整基来选定一组优选基。异常项 $A_{\mathrm{comb},\,\mathfrak{p}}$ 恰好度量了这一基变换。

第二个异常项 A_{analy} 更为复杂。该项显然源自解析方面，即它是解析挠率显式计算中的一项，在组合挠率中却没有对应项。尽管它的自然含义仍相当晦涩，但现在我们至少可以在三种不同情形下对其进行比较，这有助于进一步了解它的特性。这三种情形是：正则边界（直接而简单的计算）、锥形奇点和喇叭奇点。它们的差异体现在相关斯图姆-刘维尔问题中函数 h 的不同形式上。在正则情形下，h 在 $x=0$附近为常数。这对应于正则斯图姆-刘维尔问题，此时异常项简化为 $A_{\mathrm{analy}}(W)=\frac{1}{4}\chi(W)\log 2$。这是 L¨uck [26]最初发现的经典异常项。接下来考察锥形奇点情形，我们有 [21, 7。12。2]

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{analy}}(W) =& \frac{1}{4}\chi(W)\log 2+\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}r_q\log(2p-2q-1)!! \\ &+\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^q\sum_{n=1}^{\infty}m_{\mathrm{cex},q,n}\log\frac{\mu_{q,n}+\alpha_q}{\mu_{q,n}-\alpha_q}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $r_k=\mathrm{rk}H_q(W)$, $\alpha_q=q-\frac{1}{2}(1-2p)$, $2p=\dim W$, $\mu_{q,n}=\sqrt{\tilde{\lambda}_{q,n}+\alpha_q^2}$, 和 $\tilde{\lambda}_{q,n}$是截面 W 上霍奇-拉普拉斯算子的特征值。第一项与上文相同，但我们注意到，第二项也确实具有组合/同调意义：事实上，与欧拉示性数一样，它是按同调秩加权的若干整数的对数的分次和（若改用常数 2，则得到欧拉示性数）。最后一项的含义并不明确，但下文的分析至少会让我们对它为何出现有所了解。

最后一种情形是喇叭。结果见定理 7.2.7。这告诉我们两点。首先，解析异常项现在变成了纯粹的组合项，且恰好是锥形情形中第二项的推广，因为我们有：

$$A_{\mathrm{analy}}(W)(\kappa)=\frac{1}{4}\chi(W)\log 2+\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}r_q\log\frac{2^{\kappa(1-2\alpha_q)}}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\kappa\left(\alpha_q-\frac{1}{2}\right)\right),$$

以及 $A_{\mathrm{analy}}(W)(1)=\frac{1}{4}\chi(W)\log 2+\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}r_q\log(2p-2q-1)!!$。关于这一点，还要注意，只要参数 κ 本身是整数，这个项就会化简为一个整数的对数。这些考虑使我们能够以一种更引人入胜（但等价）的方式表述 CM 定理。由于这两个异常项都是组合性的（因为表示是平凡的）且分次，因此我们可以用它们来规范化同调基。若不考虑 $I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z_l^{\kappa}(W))$，而考虑在这个重整化后的分次同调基下的挠率，记作 $I^{\mathfrak{p}}\tau_{\widehat{\mathrm{RS}}}(Z_l^{\kappa}(W))$，则有

$$\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^{\kappa}(W))=\log I^{\mathfrak{p}}\tau_{\widehat{\mathrm{RS}}}(Z_l^{\kappa}(W))+A_{\mathrm{BM,abs}}(W),$$

在所有维数下。我们了解到的第二件事涉及方程（1.1）中出现的第三个异常项。该项并非同调性的，因为它涉及截面的正特征值

，而且在喇叭的情形下会消失。我们提出一种可能的解释：该项之所以出现，是因为在锥的情形下，奇点的次数与算子的次数相同。事实上，在这种情况下，相关斯图姆-刘维尔问题的解在奇异点附近的行为由指标方程的解决定，而该方程取决于截面上的谱参数 $\lambda_{q,\ n}$以及维数参数 α_q。反之，也就是说，当奇点的次数与算子的次数不同时，解的行为则仅取决于谱参数。我们正在对此问题进行进一步研究。

2. Spaces with horns type singularities

2.1. 底层几何。设 W 是一个有限维 m 的可定向紧致连通黎曼流形，无边界，其黎曼结构为 $\tilde{g}$。令$Z_l(W) = (0, l] \times W$为乘积流形，其中$(0, l]$是实数轴上的一个正区间，$l > 0$。这是一个可定向、连通的开光滑流形，维数为$n = m + 1$，边界为 $\partial Z_l(W) = \{l\} \times W$。令 x为$(0, l]$上的自然全局坐标，并令 $h(x) = x^\kappa H(x)$，其中 H是 $[0, l]$上的光滑非零函数，且$H(0) = 1$，κ 为实数，满足 $\kappa > 1$。那么

$$g = dx \otimes dx + h^2(x)\tilde{g} = dx \otimes dx + x^{2\kappa}H^2(x)\tilde{g}, \tag{2.1}$$

是 $Z_l^\kappa(W)$ 上的黎曼度量。我们将带有方程 (2.1) 中度量的流形 $Z_l(W)$ 记为 $Z_l^\kappa(W)$，并称其为位于 W 上的开有限角。我们将空间 $Z_l^\kappa(W) \cup \{0\}$ 记为 $Z_l^\kappa(W)$，并称其为位于 W 上的完备有限度量角。注意，$Z_l^\kappa(W)$ 与锥 $C(W)$ 同胚。显然，$Z_l^\kappa(W)$ 的边界与 W 微分同胚，并且与 $(W, h(l)^2 g)$ 等距。若 y 是 W 上的局部坐标系，那么 (x, y) 就是 $Z_l^\kappa(W)$ 上的局部坐标系。沿用常见记法，我们称 W 为 $Z_l^\kappa(W)$ 的截面。也沿用通常记法，波浪号表示作用于截面上的运算，而非边界上的运算。

接下来，设 (Y, W) 是一个维数为 n、边界为 ∂Y 的紧致连通可定向光滑黎曼流形。假设 ∂Y 有两个互不相交的分支 $(\partial Y)_1$ 和 $(\partial Y)_2$，，其中 $(\partial Y)_1$ 与 $(W, h^2(l)\tilde{g})$ 等距，某个 $l > 0$ 如此。考虑空间 $X = Z_l^\kappa(W) \cup_W Y$，其中粘合是光滑的：$X$ 是一个带边的开定向连通光滑流形，其边界为 $\partial X = (\partial Y)_2$。于是，度量 g_Y 也与 $Z_l^\kappa(W)$ 的度量 g 光滑地粘合；注意，我们对函数 H 在 $Z_l^\kappa(W)$ 边界附近没有要求（显然它不为零这一点除外）。我们将 X 上的全局度量记为 g_X，并分别将其在 Y 和 $Z_l^\kappa(W)$ 上的限制记为 g_Y 和 g_Z。X 是一个开连通可定向黎曼流形，我们称之为具有孤立度量角奇点的空间。我们称紧致连通空间 $X \cup \{0\}$ 为 X 的完备化，并将其记为 $\overline{X}$。从拓扑观点来看，有趣的对象是 $\overline{X}$，因为 X 与 $Y - \partial Y$ 同胚，并且与 Y 具有相同的简单同伦型。

令 $\iota = \iota(Y)$ 为 Y [14, 2.7] 的单射半径。那么，我们有 W 内部的领圈 $\mathfrak{C} = (0, l + \iota) \times W$，并且在其上可以使用上述局部坐标系 (x, y)

如上所述。因此，在 $\mathfrak{C}$ 上，以及显然在 $Z_l^\kappa(W) \subseteq \mathfrak{C}$ 上， $Z_l^\kappa(W)$ 上给出的分解和所有结果均成立。

令 $\pi_1(\overline{X})$ 表示 $\overline{X}$ 的基本群。令 $\rho : \pi_1(\overline{X}) \to O(E)$ 表示某个 k 维实向量空间 E 上的正交表示。令 X 表示 $\overline{X}$ 的万有覆盖空间，$E_\rho = E \otimes_\rho X$ 表示相应的向量丛。注意，由于 $\overline{X}$ 和 $Y/\partial Y$ 具有相同的同伦型，该构造是有意义的。因此，任意表示 $\rho : \pi_1(\overline{X}) \to O(V)$ 都限制为平凡表示 $\rho_0 : \pi_1(C_{0,l}(W)) \to O(E)$。于是， $\overline{X}$ 的万有覆盖空间就是 Y 的万有覆盖流形，并在每一张覆盖片的边界上附加一个锥（比较 [21, 6.9 、 6.10 、 7.16]）。我们将在 X 上处理以 E_ρ 为系数的微分形式：$\Omega^q(X, E_\rho) = \Gamma(X, \Lambda^q T^* E_\rho) = \Gamma(X, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* X)$。下文中，如有可能，我们将在记号中省略对该表示的明确引用。

2.2. 平方可积形式。我们假设向量空间 E 带有一个内积，在记号中将省略该内积。令 $\gamma(X, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* X)$ 为外代数丛中取值于 E_ρ 的截面所构成的向量空间。在 $\gamma(X, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* X)$ 上，我们可以考虑内积

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \int_X \omega \wedge \star\varphi, \tag{2.2}$$

对于 $\omega, \varphi \in \gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* \mathring{X})$，以及由此诱导的范数 $\|\omega\|^2 = \langle \omega, \omega \rangle$。我们用 $L^2(X, E_\rho) = L^2\gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* \mathring{X})$ 表示 $\gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* \mathring{X})$ 中有限范数截面所构成的希尔伯特空间。我们用 $\Omega_0^q(X, E_\rho)$ 表示 $\Omega^q(X, E_\rho)$ 中在 X 内具有紧支撑的截面所构成的向量子空间。显然，$\Omega_0^q(X, E_\rho) \leq \Omega^q(X, E_\rho)$ 是 $L^2(X, E_\rho)$ 的向量子空间。注意，

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \int_X \omega \wedge \star\varphi = \int_{Z_l^\kappa(W)} \omega \wedge \star\varphi + \int_Y \omega \wedge \star\varphi.$$

我们可以将分布的通常定义扩展到定义在 q 微分形式上的分布：给定 $\omega \in L^1_{loc}\gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* \mathring{X})$（特别是 $\omega \in L^2(\mathring{X}, E_\rho)$），我们定义作用于 $\Omega_0^{n-q}(\mathring{X}, E_\rho)$ 上的分布 T_ω，如下：

$$T_\omega(\varphi) = \int_{\mathring{X}} \omega \wedge \star\varphi = \langle \omega, \varphi \rangle,$$

对每个 $\varphi \in \Omega_0^{n-q}(\mathring{X}, E_\rho)$。注意分布 T_ω 在领圈 $\mathfrak{C}$ 上的如下显式形式：

$$T_{\omega|_{\mathfrak{C}}}(\varphi|_{\mathfrak{C}}) = \langle \omega, \varphi \rangle_{\mathfrak{C}} = \int_0^{l+\epsilon} (\rho h^{1-2\alpha_q} f_1 g_1)(x) dx \langle \tilde{\omega}_1, \tilde{\varphi}_1 \rangle_W + \int_0^{l+\epsilon} (\rho h^{1-2\alpha_{q-1}} f_2 g_2)(x) dx \langle \tilde{\omega}_2, \tilde{\varphi}_2 \rangle_W.$$

根据此公式以及外微分算子 d 和 δ 的形式对偶性，可以将这些算子扩展到平方可积微分形式空间 [43, 3。4] [38, 第 405] 页。我们采用以下记号

$$D : L^1_{loc}\gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^* \mathring{X}) \to L^1_{loc}(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^{q+1} T^* \mathring{X}),$$

表示局部平方可积微分形式的（弱）外微分，而 $\mathcal{D}^q=(-1)^{(m(q+1)+q}\star D^{n-q}\star$, 表示其伴随算子。对于所有 $\omega\in\Omega_0^q(M,E_\rho)$ 和 $\varphi\in L^1_{loc}\gamma(\mathring{X},E_\rho\otimes\Lambda^{n-q}T^*\mathring{X})$，我们有格林公式 $\langle d\omega,\varphi\rangle=\langle\omega,\mathcal{D}\varphi\rangle$。对于所有$\omega\in L^1_{loc}\gamma(\mathring{X},E_\rho\otimes\Lambda^qT^*\mathring{X})$ 和 $\varphi\in\Omega_0^{n-q}(\mathring{X},E_\rho)$，我们还有 $\langle D\omega,\varphi\rangle=\langle\omega,\delta\varphi\rangle$。

2.3. 相关几何算子的显式表达式。本节将说明领圈上较为相关的形式算子的显式表达式。回顾一下，我们有一个等距映射 $\sigma_{\mathfrak{C}}:(0,l+\epsilon)\times W\to X$，将带有 X_W 在 X 内的领圈邻域的乘积空间映到其上；我们将 $\sigma_{\mathfrak{C}}$ 的像记为 $\mathfrak{C}$。限制在 $\mathfrak{C}$ 上的度量为

$$g|_{\mathfrak{C}}=dx\otimes dx+x^\kappa H^2(x)\tilde{g},$$

°　　°其中 H 是某个光滑正函数，且 $H(0)=1$。取 $\omega\in\gamma(X,\Lambda^qT^*X)$ 属于 D 或 $\mathcal{D}$ 的定义域，并使用变量分离，

$$\omega|_{\mathfrak{C}}=f_1\tilde{\omega}_1+f_2dx\wedge\tilde{\omega}_2,$$

其中函数 $f_1,f_2:(0,l+\epsilon)\to\mathrm{R}$，以及平方可积形式 $\tilde{\omega}_1\in\gamma(W,\Lambda^qT^*W)$ 和 $\tilde{\omega}_2\in\gamma(W,\Lambda^{q-1}T^*W)$，而（$f^I$ 表示弱导数）

$$\begin{aligned}\star\omega|_{\mathfrak{C}}=&h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2\tilde{\star}\tilde{\omega}_2+(-1)^qh^{1-2\alpha_q}f_1dx\wedge\tilde{\star}\tilde{\omega}_1,\\ D\omega|_{\mathfrak{C}}=&f_1\tilde{d}\tilde{\omega}_1+dx\wedge\left(f_1^I\tilde{\omega}_1-f_2\tilde{D}\tilde{\omega}_2\right),\\ \mathcal{D}\omega|_{\mathfrak{C}}=&(-1)^{(m+1)q+(m+1)+1}\star D\star\omega\\ =&-h^{2\alpha_{q-1}-1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)^I\tilde{\omega}_2+\frac{1}{h^2}f_1\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_1-\frac{1}{h^2}f_2dx\wedge\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_2.\end{aligned}$$

$$\Delta^{(q)}\omega|_{\mathfrak{C}}=(\mathcal{D}D+D\mathcal{D})\omega|_{\mathfrak{C}}=\mathcal{F}_1^q(f_1\tilde{\omega}_1)-2\frac{h'}{h}f_2\tilde{D}\tilde{\omega}_2+dx\wedge\mathcal{F}_2^q(f_2\tilde{\omega}_2)-2\frac{h'}{h^3}f_1dx\wedge\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_1.$$

其中（与方程（A.0.2）比较

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^q(f\tilde{\omega})&=-h^{2\alpha_q-1}\left(h^{1-2\alpha_q}f^I\right)^I\tilde{\omega}+\frac{f}{h^2}\tilde{\Delta}^{(q)}\tilde{\omega},\\ \mathcal{F}_2^q&=\mathcal{F}_1^{q-1}-(1-2\alpha_{q-1})\left(\frac{h'}{h}\right)',\end{aligned}\tag{2.3}$$

˜和 Δ 表示截面W上的平方可积形式的霍奇-拉普拉斯算子。注意，对于平方可积形式，有如下同一性

$$L^2(\mathfrak{C})=L^2((0,l+\epsilon),h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}})\otimes\left(L^2\gamma^q(W)\times L^2\gamma^{q-1}(W)\right).\tag{2.4}$$

如果 ω 和 φ 局部可积，那么利用上文给出的霍奇星算子公式直接计算可得，

$$\langle\omega,\varphi\rangle|_{\mathfrak{C}}=\int_0^{l+\epsilon}h^{1-2\alpha_q}f_1g_1\langle\tilde{\omega}_1,\tilde{\varphi}_1\rangle_W+\int_0^{l+\epsilon}h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2g_2\langle\tilde{\omega}_2,\tilde{\varphi}_2\rangle_W.\tag{2.5}$$

此外，我们有如下格林公式。

引理 2.3.1. 对于所有的偶对： $\omega \in L^1_{loc}\gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^*\mathring{X})$，在 D 的定义域内，以及 $\varphi \in \Omega_0^{n-q-1}(\mathring{X}, E_\rho)$，并且对于所有的偶对： $\varphi \in L^1_{loc}\gamma(\mathring{X}, E_\rho \otimes \Lambda^q T^*\mathring{X})$，在 $\mathcal{D}$ 的定义域内，以及 $\omega \in \Omega_0^{n-q}(\mathring{X}, E_\rho)$，我们有 $\langle D\omega, \varphi\rangle = \langle \omega, \mathcal{D}\varphi\rangle$。

3. De Rham theory

本节研究具有喇叭奇点的空间 X 上经典德拉姆理论的一些可能延拓。更确切地说，我们明确描述外微分的极大闭延拓的定义域，并据此给出刻画最小闭延拓的一些边界条件。利用这一延拓，我们引入若干由闭算子构成的德拉姆复形，并计算它们的同调。本节的结果应与 [43] 中关于锥形奇点的相应结果进行比较。

3.1. 外微分算子及其伴随算子。我们在希尔伯特空间 $L^2(X, E_\rho)$ 中定义与形式算子 D^q 和 $\mathcal{D}^q$相对应的具体算子。预极小算子定义为

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}_0^q) = \Omega_0^q(\mathring{X}, E_\rho), \qquad \mathrm{d}_0^q\omega = d^q\omega,$$
$$\mathsf{D}(\delta_0^q) = \Omega_0^q(\mathring{X}, E_\rho), \qquad \delta_0^q\omega = \delta^q\omega,$$

极大算子定义为

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^q) = \{\omega \in L^2(X, E_\rho) \mid D^q\omega \in L^2(X, E_\rho)\} \qquad \mathrm{d}_{\max}^q\omega = D^q\omega,$$
$$\mathsf{D}(\delta_{\max}^q) = \{\omega \in L^2(X, E_\rho) \mid \mathcal{D}^q\omega \in L^2(X, E_\rho)\}, \qquad \delta_{\max}^q\omega = \mathcal{D}^q\omega.$$

算子 d_0^q 和 δ_0^q 均为稠密定义且可闭。它们的闭包 $\mathrm{d}^{q\ \text{极小}} = \mathrm{d}_0^q$ 和 $\delta^{q\ \text{极小}} = \overline{\delta_0^q}$ 分别是算子 [45]:

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\min}^q) = \{\omega \in L^2(X, E_\rho) \mid \exists\{\omega_n\} \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_0^q), \omega_n \to_n \omega, \mathrm{d}_0^q\omega_n \to \varphi \in L^2(X, E_\rho)\},$$
$$\mathrm{d}_{\min}^q\omega = \varphi,$$
$$\mathsf{D}(\delta_{\min}^q) = \{\omega \in L^2(X, E_\rho) \mid \exists\{\omega_n\} \in \mathsf{D}(\delta_0^q), \omega_n \to_n \omega, \delta_0^q\omega_n \to \varphi \in L^2(X, E_\rho)\},$$
$$\delta_{\min}^q\omega = \varphi.$$

这些算子在以下意义下互为伴随算子（因此是闭算子）：

$$(\mathrm{d}_{\min}^q)^\dagger = (\mathrm{d}_0^q)^\dagger = \delta_{\max}^{q+1}, \qquad (\delta_{\min}^q)^\dagger = (\delta_0^q)^\dagger = \mathrm{d}_{\max}^{q-1},$$
$$(\delta_{\max}^q)^\dagger = \mathrm{d}_{\min}^{q-1}, \qquad (\mathrm{d}_{\max}^q)^\dagger = \delta_{\min}^{q+1}.$$

3.2. 极大算子的显式刻画。我们需要一些技术性结果，其证明相当初等。

注记 3.2.1. 注意，如果 $c \le c'$，则 $L^2((0,1)\ h^c) \subseteq L^2((0,1)\ h^{c'})$。还要注意，当且仅当 $f \in L^2((0,1)\ h^{2(a+c)})$ 时， $h^a f \in L^2((0,1)\ h^{2c})$。

引理 3.2.2. 设 $f \in L^2((0,l], h^{2a})$，且 $f^I \in L^2((0,l], h^{2b})$，则 $f \in AC_{\mathrm{loc}}((0,l])$，并且 f 在 $x = 0$ 附近的表现如下：

(1) *if* $b < \frac{1}{2\kappa}$, $a \le -\frac{1}{2\kappa}$, *then* $f(x) = O(x^{\frac{1}{2}-\kappa b})$;

(2) *if* $b<\frac{1}{2\kappa}$, $a>-\frac{1}{2\kappa}$, *then* $f(x)=C+O(x^{\frac{1}{2}-\kappa b})$, *where* $C\neq 0$ *is a constant that depends on* f;
(3) *if* $b=\frac{1}{2\kappa}$, *then* $f(x)=O(\sqrt{|\log x|})$;
(4) *if* $b>\frac{1}{2\kappa}$, *then* $f(x)=O(x^{\frac{1}{2}-\kappa b})$.

证明。观察可知，结论由此得出

$$\left|\int_x^l f^I\right|\leq\left|\int_x^l h^{-b}h^b f^I\right|\leq\sqrt{\int_x^l h^{-2b}}\sqrt{\int_0^l h^{2b}{f^I}^2}\leq\sqrt{\int_x^l h^{-2b}}\|f^I\|.$$

□

引理 3.2.3。若 $\omega\in\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(q)})$、$\omega|_{\mathfrak{C}}=f_1\tilde{\omega}_1+dx\wedge f_2\tilde{\omega}_2$ 和 f_1 不是常数，则 f_1 和 f_2 的特征如下。若 $\tilde{D}\tilde{\omega}_2=0$，则 $f_2\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_{q-1}})$。否则，$f_1\in AC_{\mathrm{loc}}((0,l+\epsilon))$，并且有以下几种情况（假设 $\tilde{}$ 满足 $D\tilde{\omega}_2\neq 0$；但请注意，这与 f_1 的行为无关）。

(1) 若 $\tilde{D}\tilde{\omega}_1\neq 0$，则 $f_2\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$、$f_1\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_{q+1}})$、$f_1^I\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$，并且（当 x 足够小时）$f_1(x)=O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_q)\kappa})$。(2) 若 $\tilde{D}\tilde{\omega}_1=0$，且 $\tilde{\omega}_1\neq\tilde{D}\tilde{\omega}_2$ 或 $f_2\neq f_1^I$，则 $f_2\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$、$f_1\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$、$f_1'\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$，并且（当 x 足够小时）（a）若 $\alpha_q\neq\frac{1}{2}$，则 $f_1(x)=O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_q)\kappa})$；（b）若 $\alpha_q=\frac{1}{2}$，则 $f_1(x)=C+O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_q)\kappa})=C+O(\sqrt{x})$，其中 C 是一个依赖于 f 的常数；(3) 若 $\tilde{D}\tilde{\omega}_1=0$、$\omega_1=\tilde{D}\tilde{\omega}_2$ 和 $f_2=f_1^I$，则 $f_2\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})$、$f_1\in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$、$f_1^I\in L^2((0,l+\epsilon)\,h^{1-2\alpha_{q-1}})$，并且（当 x 足够小时）$f_1(x)=O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_{q-1})\kappa})$。

证明。 证明可由引理 3.2.2 得出。具体而言，考虑有限喇叭上的限制，若 $\omega=f_1\tilde{\omega}_1+dx\wedge f_2\tilde{\omega}_2\in\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(q)})$，那么显然 $f_1\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，并且 $f_2\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})$，因为 ω是平方可积的。显然，这是˜在 f_2 的情况下唯一的条件，其中 $D\tilde{\omega}_2=0$。为了使 $D\omega$ 平方可积，由于

$$D^{(q)}\omega=f_1\tilde{D}\tilde{\omega}_1+dx\wedge(f_1^I\tilde{\omega}_1-f_2\tilde{D}\tilde{\omega}_2),$$

有以下几种可能性。

(1) 如果 $\tilde{D}\tilde{\omega}_1\neq 0$，那么必然有 $f_1\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q+1}})$，$f_2\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，且 $f_1^I\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，因为 $\tilde{\omega}_1$不可能是 $\tilde{D}\tilde{\omega}_2$的倍数。因此，将引理 3.2.2 应用于 $f=f_1$，其中 $a=\frac{1}{2}-\alpha_{q+1}$ 且 $b=\frac{1}{2}-\alpha_q$。我们计算得 $b=\frac{1}{2}-\alpha_q<\frac{1}{2\kappa}$，得到

$$\alpha_q>\frac{1}{2}-\frac{1}{2\kappa}.\tag{3.1}$$

由于 $\kappa>1$，我们有 $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{2\kappa}<\frac{1}{2}$. 由于 α_q 是一个半整数，条件（3.1）等价于 $\alpha_q\geq\frac{1}{2}$。采用类似的方法，条件$b=\frac{1}{2}-\alpha_q\geq\frac{1}{2\kappa}$，给出 $\alpha_q\leq 0$。关于 a 的条件也可以用同样的方法推导出来，由此完成了第一种情况下的证明。

(2) 如果 $\tilde{D}\tilde{\omega}_1 = 0$，且 $\omega_1 \neq \tilde{D}\tilde{\omega}_2$ 或 $f_2 \neq f_1^I$，那么 $f_1 \in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，$f_2 \in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，且 $f_1^I \in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$（特别是当 $\tilde{\omega}_1$ 是一个调和形式时）。因此，将引理 3.2.2 应用于 $f = f_1$，取 $a = b = \frac{1}{2} - \alpha_q$，并按照前一点中的方法进行处理，即可得到所需结果。(3) 如果 $\tilde{D}\tilde{\omega}_1 = 0$，$\omega_1 = \tilde{D}\tilde{\omega}_2$，且 $f_2 = f_1^I$，那么 $f_1 \in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，且 $f_2 = f_1^I \in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})$。因此，将引理 3.2.2 应用于 $f = f_1$，取 $a = \frac{1}{2} - \alpha_q$ 和 $b = \frac{1}{2} - \alpha_{q-1}$，并按照前一点中的方法进行处理，即可得到所需结果。

□

引理 3.2.4。如果 $\omega \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{(q)})$、$\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2$ 和 $f_2 \neq h^{2\alpha_{q-1}-1}$，则 f_1 和 f_2 可如下刻画。如果 $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_1 = 0$，则 $f_1 \in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$。否则，$_{\sim}f_2 \in AC_{\mathrm{loc}}((0,l+\epsilon))$，并且有以下几种情况（其中假设 $\mathcal{D}\tilde{\omega}_1 \neq 0$，但请注意，这与 f_2 的行为无关）。

(1) 如果 $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_2 \neq 0$，则 $f_1 \in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_{q+1}})$、$f_2 \in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_q})$、$(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)^I \in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{2\alpha_{q-1}-1})$，并且（对于足够小的 x）$f_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_{q-1})\kappa})$.
(2) 如果 $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_2 = 0$，且满足 $\tilde{\omega}_2 \neq \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_1$ 或 $h^{2\alpha_{q-1}-1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)^I \neq \frac{f_1}{h^2}$，那么 $f_1 \in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_{q+1}})$、$f_2 \in L^2((0,l+\epsilon)\ h^{1-2\alpha_{q-1}})$、$h^{2\alpha_{q-1}-1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)^I \in L^2((0,l+\epsilon)\,h^{1-2\alpha_{q-1}})$，并且（当 x 较小时）：(a) 如果 $\alpha_{q-1} \neq \frac{1}{2}$，那么 $f_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_{q-1})\kappa})$；(b) 如果 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$，那么 $f_2(x) = Ch^{2\alpha_{q-1}-1} + O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_{q-1})\kappa})$，其中 C 是依赖于 f 的常数；(3) 如果 $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_2 = 0$、$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_1$，且 $h^{2\alpha_{q-1}-1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)^I = \frac{f_1}{h^2}$，即 $\omega = f_1\tilde{\omega}_1 + f_2 dx \wedge \tilde{\omega}_2 = -\delta^{(q+1)}(h^2 f_2 dx \wedge \tilde{\omega}_1)$，那么 $f_1 \in L^2((0,l+\epsilon)\,h^{1-2\alpha_q})$、$f_2 \in L^2((0,l+\epsilon)\,h^{1-2\alpha_{q-1}})$ 和 $h^{2\alpha_{q-1}-1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)^I = \frac{f_1}{h^2} \in L^2((0,l+\epsilon)\,h^{1-2\alpha_{q-2}})$，并且（当 x 较小时）：$f_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha_{q-2})\kappa})$。

引理 3.2.5. 形式 $\omega = \tilde{\omega}_1$ 属于 $\mathsf{d}_{\max}^{(q)}$ 的定义域，当且仅当 $\tilde{\omega}_1$ 是余恰当的且 $\alpha_q < 0$，或 $\tilde{\omega}_1 \in$ 核 $\tilde{D}$ 且 $\alpha_q < 1$。形式 $\varphi = dx \wedge h^{2\alpha_{q-1}-1}\tilde{\varphi}_2$ 属于 $\delta_{\max}^{(q)}$ 的定义域，当且仅当 $\tilde{\varphi}_2$ 是恰当的且 $\alpha_{q-1} > 1$，或 $\tilde{\varphi}_2 \in$ 核 $\tilde{\mathcal{D}}$ 且 $\alpha_{q-1} > 0$。

引理 3.2.6. 若 $\omega \in \mathsf{D}(\mathsf{d}_{\max}^{(q)})$，$\varphi =\in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{(q+1)})$，$\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + f_2 dx \wedge \tilde{\omega}_2$、$\varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_2$，则：

$$\lim_{x\to 0^+}(h^{1-2\alpha_q}f_1 g_2)(x)\langle\tilde{\omega}_1,\tilde{\varphi}_2\rangle_W = 0,$$

除非 $\tilde{\omega}_1$ 和 $\tilde{\varphi}_2$ 都分别为恰当形式、余恰当形式或调和形式。

3.3. 边界条件。我们引入一些边界条件。边界 ∂X 处的边界条件是经典的，参见例如 [14] 或 [37]。我们还在喇叭的尖端引入一些边界条件。设 $\alpha \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^q), \alpha|_{\mathfrak{C}}(x,y) = a_1(x)\tilde{\alpha}_1(y) + a_2(x)dx \wedge \tilde{\alpha}_2(y)$。我们知道，$a_2$ 在 $(0,l+\epsilon)$ 上绝对连续。我们将喇叭尖端处的绝对边界值称为该值

$$bv_{\mathrm{abs}}^{(q)}(x_0)(\alpha) = \lim_{x\to 0^+}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_1 a_2)(x)(\tilde{\omega}_1,\tilde{\alpha}_2)_W,$$

对于任意 $\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(q-1)})$，其中 $\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2$。设 $\alpha \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{q})$，$\alpha|_{\mathfrak{C}}(x,y) = a_1(x)\tilde{\alpha}_1(y) + a_2(x)dx \wedge \tilde{\alpha}_2(y)$。我们知道，$a_1$ 在 $(0, l+\epsilon)$ 上绝对连续。我们将喇叭尖端处的相对边界值称为该值

$$bv_{\mathrm{rel}}^{(q)}(x_0)(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} (h^{1-2\alpha_q} a_1 g_2)(x)(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\varphi}_2)_W,$$

对任意 $\varphi \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{(q+1)})$，$\varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_2$。

3.4. 格林公式与极小算子。直接计算得出以下结果。

命题 3.4.1. 设 $\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{q})$ 且 $\varphi \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{q+1})$，满足 $\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2$，且 $\varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_2$，则有以下格林公式

$$\langle \mathrm{d}_{\max}^{q}\omega, \varphi\rangle = \langle \omega, \delta_{\max}^{q+1}\varphi\rangle + \lim_{x\to 0^+} (h^{1-2\alpha_q} f_1 g_2)(x)\langle \tilde{\omega}_1, \tilde{\varphi}_2\rangle_W + \int_{\partial X} t\omega \wedge \star_W n\varphi.$$

命题 3.4.2. 算子 d_0^q 的闭包是算子 d^{q} 极小，其定义域如下：

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\min}^{q}) = \Big\{\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{q}) \mid \omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2, \forall \varphi \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{q+1}),\ \varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_2,$$
$$\lim_{x\to 0^+} (h^{1-2\alpha_q} f_1 g_2)(x)\langle \tilde{\omega}_1, \tilde{\varphi}_2\rangle_W = (\omega_{\tan})|_{\partial X} = 0\Big\}.$$

命题 3.4.3。算子 δ_0^q 的闭包是算子 $\delta^{q}{}_{\min}$，其定义域如下（其中 $p \geq 1$ 是一个整数）：

$$\mathsf{D}(\delta_{\min}^{(q)}) = \Big\{\varphi \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{q}) \mid \varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_2,\ \forall \omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{q-1}),\ \omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2,$$
$$\lim_{x\to 0^+} (h^{1-2\alpha_{q-1}} f_1 g_2)(x)\langle \tilde{\omega}_1, \tilde{\varphi}_2\rangle_W = (\varphi_{\mathrm{norm}})|_{\partial X} = 0\Big\}.$$

命题 3.4.4。设 A 是算子 $\mathrm{d}_{\min}$、$\mathrm{d}_{\max}$、$\delta_{\min}$ 或 $\delta_{\max}$ 中的任意一个。那么，$A^2 = 0$ 且 $\mathrm{Im}(A^q) \subseteq \mathsf{D}(A^{q\pm 1})$。

为了证明下一个结果，我们可以按照 [43] 中命题 4.6.9 的证明进行。只需调整积分在 $x = 0$ 附近的行为，正如引理 3.2.2 的证明中所做的那样。此外，请注意，根据下面对上同调的显式计算，也可以得到这一结果。

命题 3.4.5。设 B 表示算子 $\mathrm{d}_{\min}$、$\mathrm{d}_{\max}$、$\delta_{\min}$ 或 $\delta_{\max}$ 在有限喇叭 $Z_l^{\kappa}(W)$ 上的限制。那么，B 具有闭像。

3.5. 交外微分算子及其对偶。

定义 3.5.1. 算子 $\mathrm{d}_{\mathfrak{m}}^{(\bullet)}{}_{,\mathrm{rel}}$ 和 $\mathrm{d}_{\mathfrak{m}^c}^{(\bullet)}{}_{,\mathrm{rel}}$ 定义如下：

(1) *if* $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p)$, *then:*

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}^{(q)}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}^{(q)}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\min}^{(q)}), \qquad 0 \leq q \leq p,$$
$$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}^{(q)}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}^{(q)}) = \Big\{\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(q)}) \mid bv_{\mathrm{rel}}(\partial X)(\omega) = 0\Big\}, \quad p+1 \leq q \leq m+1;$$

(2) 如果 $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}, 2p)$, 则:

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\min}), \qquad 0 \le q \le p-1,$$
$$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}) = \left\{\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{rel}}(\partial X)(\omega) = 0\right\}, \qquad p \le q \le 2p+1.$$

我们称这些算子为在 X 上带相对边界条件的下、上中间 perversity 交叉外微分算子。

定义 3.5.2。算子 $\mathrm{d}^{(\bullet)}_{\mathfrak{m}}$,绝对边界条件 和 $\mathrm{d}^{(\bullet)}_{\mathfrak{m}^c}$,绝对边界条件 定义如下:

(1) 若 $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p)$, 则:

$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m}}$,绝对边界条件$) = \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m}^c}$,绝对边界条件$) = \left\{\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{rel}}(x_0)(\omega) = 0\right\}$, $\qquad 0 \le q \le p,$

$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\max}), \qquad p+1 \le q \le m+1;$

(2) 若 $m = 2p$, 则:

$$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}) = \left\{\omega \in \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{rel}}(x_0)(\omega) = 0\right\}, \qquad 0 \le q \le p-1,$$
$$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\mathrm{d}^{(q)}_{\max}), \qquad p \le q \le 2p+1.$$

我们将这些算子称为 X 上带绝对边界条件的下、上中间 perversity 交叉外微分算子。

定义 3.5.3。算子 $\delta^{(\bullet)}_{\mathfrak{m}}$,绝对边界条件 和 $\delta^{(\bullet)}_{\mathfrak{m}^c}$,绝对边界条件 定义如下:

(1) *if* $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p)$, *then:*

$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}) = \left\{\varphi \in \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{abs}}(\partial X)(\varphi) = 0\right\}, \qquad 0 \le q \le p+1,$$
$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\delta^{(p)}_{\min}), \qquad p+2 \le q \le m+1;$$

(2) 若 $m = 2p$, 则:

$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}) = \left\{\varphi \in \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{abs}}(\partial X)(\varphi) = 0\right\}, \qquad 0 \le q \le p+1,$$
$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}) = \mathsf{D}(\delta^{(p)}_{\min}), \qquad p+2 \le q \le 2p+1.$$

定义 3.5.4。算子 $\delta^{(\bullet)}_{\mathfrak{m}}$,相对边界条件 和 $\delta^{(\bullet)}_{\mathfrak{m}^c}$,相对边界条件 定义如下:

(1) *if* $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p-1), (\mathfrak{m}^c, 2p)$, *then:*

$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}) = \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}) = \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\max}), \qquad 0 \le q \le p+1,$$
$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}) = \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}) = \left\{\varphi \in \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{abs}}(x_0)(\varphi) = 0\right\}, \quad p+2 \le q \le m+1;$$

(2) 若 $m = 2p$, 则:

$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}) = \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\max}), \qquad 0 \le q \le p,$$
$$\mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}) = \left\{\varphi \in \mathsf{D}(\delta^{(q)}_{\max}) \mid bv_{\mathrm{abs}}(x_0)(\varphi) = 0\right\}, \qquad p+1 \le q \le 2p+1.$$

我们将 $\mathfrak{p}$ 记作 $\mathfrak{m}$ 或 $\mathfrak{m}^c$，将 bc 记作 rel 或 abs。这些算子是极小算子的闭扩张。它们互为伴随算子，更准确地说：$(\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(q)}, \mathrm{bc})^\dagger = \delta_{\mathfrak{p}}^{(q+1)}, \mathrm{bc}$。此外，$\mathrm{Im}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(q)}, \mathrm{bc}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(q+1)}, \mathrm{bc})$，且 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(q+1)}, \mathrm{bc}\, \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(q)}, \mathrm{bc} = 0$；并且 $\mathrm{Im}\,(\delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}, \mathrm{bc}) \subseteq \mathrm{D}(\delta_{\mathfrak{p}}^{(q-1)}, \mathrm{bc})$，且 $\delta_{\mathfrak{p}}^{(q-1)}, \mathrm{bc}\ \delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}, \mathrm{bc} = 0$。

3.6. 一些德拉姆复形。根据上一节的结果，我们看到，每一对 $(\mathrm{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}, \text{边界条件}), \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}, \text{边界条件})$、$(\mathrm{D}(\mathrm{d}^{(\bullet)}\text{最小}), \mathrm{d}^{(\bullet)}\text{最小})$ 和 $(\mathrm{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(\bullet)}) \delta_{\max}^{(\bullet)})$ 都定义了一个由希尔伯特空间和闭算子组成的复形。我们将这些复形称为空间 X（取值于 E_ρ的系数）的交德拉姆复形、相对德拉姆复形和绝对德拉姆复形。我们使用如下记号

$$I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(X, \partial X, E_\rho) = H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}), \mathrm{d}^\bullet_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}), \quad I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) = H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^{(\bullet)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}), \mathrm{d}^{(\bullet)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}),$$
$$H^q_{\mathrm{DR}}(X, \partial X, E_\rho) = H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{\min}), \mathrm{d}^\bullet_{\min}), \quad H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) = H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{\max}), \mathrm{d}^\bullet_{\max}).$$

现在我们计算这些复形的同调。为此，一方面我们引入该对的适当上同调长正合序列，另一方面我们显式计算有限度量喇叭 $Z_l^\kappa(W)$ 的上同调。我们假设 X 具有空边界。

子流形的包含映射 $i_Z\colon Z = Z_l^\kappa(W) \to X$ 和 $i_Y\colon Y \to X$ 通过对微分形式空间施加限制而诱导映射；由于它们与外微分算子可交换，因此得到以下满射链映射（注意，在光滑边界上，min/max=rel/abs）。

$$\mathrm{i}_Z^\bullet : \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{X,\mathfrak{p}}) \to \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Z,\mathfrak{p},\mathrm{abs}}), \qquad \mathrm{i}_Y^\bullet : \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{X,\mathfrak{p}}) \to \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Y,\mathrm{abs}}),$$
$$\mathrm{i}_Z^\bullet : \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{X,\max}) \to \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Z,\max}), \qquad \mathrm{i}_Y^\bullet : \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{X,\max}) \to \mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Y,\max}).$$

引理 3.6.1。我们有如下同一视：$\ker \mathrm{i}_Y^q = \mathrm{D}(\mathrm{d}_{Z,\ \mathfrak{p},\ \mathrm{rel}}^q)(\mathrm{D}(\mathrm{d}_{Z,\ \min}^q)), \ker \mathrm{i}_Z^q = \mathrm{D}(\mathrm{d}_{Y,\ \mathrm{rel}}^q)(\mathrm{D}(\mathrm{d}_{Y,\ \min}^q))$.

命题 3.6.2。对于上述每个德拉姆复形，包含映射 $i_Y\colon Y \to X$和 $i_Z\colon Z_l^\kappa(W) \to X$ 自然诱导出一个上同调长恰当序列。例如

$$\ldots \longrightarrow H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Z,\min}), \mathrm{d}^\bullet_{Z,\min}) \longrightarrow H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{X,\min}), \mathrm{d}^\bullet_{X,\min}) \xrightarrow{\mathrm{i}_Y^{*,q}}$$
$$\longrightarrow H_q(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Y,\mathrm{mx}}), \mathrm{d}^\bullet_{Y,\max}) \longrightarrow H_{q+1}(\mathrm{D}(\mathrm{d}^\bullet_{Z,\min}), \mathrm{d}^\bullet_{Z,\min}) \longrightarrow \ldots$$

3.7. 德拉姆上同调。 本节计算上一节 3.6 中所述德拉姆复形的德拉姆上同调。我们将详细讨论一个具体情形。

Le引理 3.7.1. 方程 $D\omega = 0$ 在 $Z_l^\kappa(W)$ 上的 q 次形式解为：

$\tilde{}$E. $\theta_E = \theta_1, \tilde{}$O.
$\theta_O = dx \wedge f_2\theta_2, \tilde{}\ \tilde{}$I.
$\theta_I = D\beta_1, \tilde{}\ \tilde{}$IV.
$\theta_{IV} = dx \wedge f_2 D\beta_2,$

X. $\theta_X = f_1\tilde{D}\tilde{\omega}_2 + dx\wedge f_1'\tilde{\omega}_2,\ f_1\neq 1$,
其中 θ_1 和 θ_2是调和形式， β_2, β_1 和 $\tilde{\omega}_2$ 是该截面的余恰当形式。

证明。 证明可通过直接验证得出，参见 [43, 4.6。1]。 □

命题 3.7.2。$\mathrm{d}^{(q)}_{\max}$ 在 $Z^\kappa_l(W)$ 上的核是以下空间

$$\ker \mathrm{d}^{(q)}_{\max} = \begin{cases} (K_E\oplus K_I)+(K_O\oplus K_{IV})+K_X, & q<\frac{m+1}{2},\\ (K_O\oplus K_{IV})+K_X, & q\geq\frac{m+1}{2}.\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} K_E =&\{\tilde{\theta}\in\mathcal{H}^q(W)\},\\ K_O =&\{dx\wedge f\tilde{\theta}\mid\tilde{\theta}\in\mathcal{H}^{q-1}(W), f\in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]), f\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})\},\\ K_I =&\{\tilde{\omega}\in\operatorname{Im}\tilde{D}^{q-1}\},\\ K_{IV} =&\{dx\wedge f\tilde{\omega}\mid\tilde{\omega}\in\operatorname{Im}\tilde{D}^{q-2}, f\in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]), f\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})\},\\ K_X =&\{f\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\omega}+dx\wedge f^I\tilde{\omega}\mid\tilde{\omega}\in\operatorname{Im}\tilde{\mathcal{D}}^q, f\in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]), f\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q}),\\ &f^I\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})\}.\end{aligned}$$

证明。令 $\omega = f_1\tilde{\omega}_1 + dx\wedge f_2\tilde{\omega}_2\in\mathcal{L}_1(C_{(0,l]}(W))$。由于

$$D\omega = f_1\tilde{d}\tilde{\omega}_1 + dx\wedge\left(f_1'\tilde{\omega}_1 - f_2\tilde{D}\tilde{\omega}_2\right),$$

我们有， $\omega\in$D($\mathrm{d}^{(q)}_{\max}$) 当且仅当其满足以下条件：

(I) $f_1\tilde{\omega}_1\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})\otimes L^2\gamma(W,\Lambda^qT^*W)$， 且 $f_1\tilde{D}\tilde{\omega}_1\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q+1}})\otimes L^2\gamma(W,\Lambda^{q+1}T^*W)$；(II) $f_2\tilde{\omega}_2\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})\otimes L^2\gamma(W,\Lambda^{q-1}T^*W)$， 且 $f_1'\tilde{\omega}_1-f_2\tilde{D}\tilde{\omega}_2\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})\otimes L^2\gamma(W,\Lambda^qT^*W)$。

我们研究引理3.7.1 中给出的调和形式中，哪些满足这些关系。
(1) E 型和 I 型微分形式只要求条件 (I)，当且仅当 $1\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$ 时满足该条件；而这又当且仅当 $\kappa(1-2\alpha_q)>-1$，即当且仅当 $\alpha_q<1$，也即当且仅当 $q<\frac{m+1}{2}$。由此得到空间$K_E\oplus K_I$，其中 $q<\frac{m+1}{2}$。(2) O 型和 IV 型微分形式满足条件 (I)，且当且仅当 $f_2\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})$ 时满足条件 (II)。由此得到空间 $K_O\oplus K_{IV}$。(3) X 型微分形式总是满足条件 (II)，并且当且仅当 $f\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q})$，且 $f'\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}})$ 时满足条件 (I)。由此得到 K_X。

□

引理 3.7.3。方程 $\mathcal{D}\omega=0$ 在次数 q 下的形式解为：

E. $\theta_E=f_1\theta_1$、O. $\theta_O=h^{2\alpha_{q-1}-1}dx\wedge\tilde{\theta}_2$、I. $\theta_I=f_1\mathcal{D}\beta_1$、IV. $\theta_{IV}=h^{2\alpha_{q-1}-1}dx\wedge\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\beta}_2$、Y. $\theta_Y=h^{2\alpha_{q-1}+1}\ (h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)'\tilde{\omega}_1+dx\wedge f_2\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\omega}_1$、 $f_2\neq h^{2\alpha_{q-1}-1}$、

其中 θ_1 和 θ_2 是调和形式， β_1、 β_2 和 $\tilde{\omega}_1$ 是该截面的恰当形式。

命题 3.7.4。 $\delta^{(q)}_{\max}$ 的核是以下空间

$$\ker \delta^{(q)}_{\max} = \begin{cases} (H_E \oplus H_I) + H_Y, & q \le \frac{m+1}{2}, \\ (H_O \oplus H_{IV}) + (H_E \oplus H_I) + H_Y, & q > \frac{m+1}{2}. \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} H_E =& \{f\tilde{\theta} \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{H}^q(W), f \in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]), f \in L^2((0,l], h^{1-2\alpha_q})\}, \\ H_O =& \{h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\theta} \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{H}^{q-1}(W)\}, \\ H_I =& \{f\tilde{\omega} \mid \tilde{\omega} \in \operatorname{Im} \mathcal{D}^{q+1}, f \in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]), f \in L^2((0,l], h^{1-2\alpha_q})\}, \\ H_{IV} =& \{h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\omega} \mid \tilde{\omega} \in \operatorname{Im} \mathcal{D}^q\}, \\ H_Y =& \Big\{ h^{2\alpha_{q-1}+1}(h^{1-2\alpha_{q-1}} f)^I \tilde{\omega} + dx \wedge f\tilde{\delta}\tilde{\omega} \mid \tilde{\omega} \in \operatorname{Im} D^{q-1}, \\ & \quad f \in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]), f \in L^2((0,l], h^{1-2\alpha_{q-1}}), (h^{1-2\alpha_{q-1}} f)^I \in L^2((0,l], h^{2\alpha_q - 1})\Big\}. \end{aligned}$$

定理 3.7.5。若 $(m, \mathfrak{p}) = (2p-1, \mathfrak{p}), (2p, \mathfrak{m}^c)$，则：

$$I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), E_\rho) = \begin{cases} H^q(W), & 0 \le q \le p-1, \\ \{0\}, & p \le q \le m+1, \end{cases}$$

$$I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), W, E_\rho) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p, \\ H^{q-1}(W), & p+1 \le q \le m+1. \end{cases}$$

若 $(m, \mathfrak{p}) = (2p, \mathfrak{m})$，则：

$$I^{\mathfrak{m}} H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), E_\rho) = \begin{cases} H^q(W), & 0 \le q \le p, \\ \{0\}, & p+1 \le q \le 2p+1, \end{cases}$$

$$I^{\mathfrak{m}} H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), W, E_\rho) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p+1, \\ H^{q-1}(W), & p+2 \le q \le 2p+1. \end{cases}$$

若 $m = 2p-1$，则：

$$H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), E_\rho) = \begin{cases} H^{q-1}(W), & 0 \le q \le p-1, \\ \{0\}, & p \le q \le 2p, \end{cases}$$

$$H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), W, E_\rho) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p, \\ H^{q-1}(W), & p+1 \le q \le 2p. \end{cases}$$

如果 $m = 2p$，那么：

$$H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), E_\rho) = \begin{cases} H^{q-1}(W), & 0 \le q \le p, \\ \{0\}, & p+1 \le q \le 2p+1. \end{cases}$$

$$H^q_{\mathrm{DR}}(Z^\kappa_l(W), W, E_\rho) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p, \\ H^{q-1}(W), & p+1 \le q \le 2p+1. \end{cases}$$

在所有情况下，这些同构都由包含映射 $i: W \to C_{(0,l]}(W)$: 自然诱导，并且作用如下：在绝对情形 $\tilde{\theta} \mapsto [\tilde{\theta}]$ 下，以及在相对情形 $\tilde{\theta} \mapsto [x^{(2\alpha_{q-1}-1)^\kappa} dx \wedge \theta]$。

证明。 我们详细说明 $H_q(\mathsf{D}(\mathrm{d}^\bullet_{\max}), \mathrm{d}^\bullet_{\max})$，以及 $H_q(\mathsf{D}(\mathrm{d}^\bullet_{\min}), \mathrm{d}^\bullet_{\min})$ 。引理 3.7.2已确定了 $\mathrm{d}_{\max}$的核，现在我们讨论 $\ker \mathrm{d}^q_{\max}$ 中的微分形式哪些属于 $\mathrm{d}^{q+1}_{\max}$的像。

I 型形式显然属于 $\mathsf{d}^q_{\max}$ 的像，其中 $\theta_I = \tilde{D}\tilde{\beta} = D\beta$，且 $\beta = \tilde{\beta}$，由于 $1 \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_q})$，根据注记 3.2.1 可得 $1 \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_{q-1}})$。~ ~ ~同样，显然 $\theta_{IV} = dx \wedge fD\beta = -D(dx \wedge f\beta) = D\beta$，且由于 $f \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_{q-1}})$，并且 $1-2\alpha_{q-2} \geq 1-2\alpha_{q-1}$，根据注记 3.2.1，$f \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_{q-2}})$，因此 $\beta \in \mathsf{D}(\mathsf{d}_{\mathsf{p}}^{(q-1)}, \mathsf{rel})$，因为边界条件不会影响此类微分形式（注意 $\mathcal{D}\theta_{IV} \neq 0$）。因此，IV 型形式是边界。考虑~（注意，回忆一下 $\tilde{\omega}$ 是余恰当的） $\theta_X = f\mathsf{D}\tilde{\omega} + dx \wedge f'\tilde{\omega} = D(f\tilde{\omega}) = D\beta$.同样，由于 $f \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_q})$，且 $1-2\alpha_{q-1} > 1-2\alpha_q$，我们有 $f \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_{q-1}})$。这证明了如果 θ_X 属于极大定义域，则 β 也属于极大定义域，而 X 型形式是边界。

考虑 O 型形式。设 $\theta_O \in$ 核 $\mathsf{d}^{(q)}_{\max}$，则 $\theta_O = fdx \wedge \tilde{\theta}$，其中 $\tilde{\theta}$ 为该截面的调和形式。我们寻找方程 $\theta_O = \mathsf{d}_{\max}\omega$ 的解，其中 $\omega \in \mathsf{D}(\mathsf{d}^{(q-1)}_{\max})$。写作 $\omega = F_1\tilde{\omega}_1 + F_2 dx \wedge \tilde{\omega}_2$，则有方程

$$F_1\tilde{D}\tilde{\omega}_1 + dx \wedge (F_1'\tilde{\omega}_1 - F_2\tilde{D}\tilde{\omega}_2) = f dx \wedge \tilde{\theta}.$$

~ ~解 $F_1 = 0$ 不可接受，因为这要求 $D\tilde{\omega}_2 = \theta$，也就是说~ ~这是不可能的，因为 θ 是一个调和形式。这还要求 $F_2 = 0$ 或 $D\tilde{\omega}_2 = 0$；不失一般性，我们可以选择第二种情况 $F_2 = 0$。因此，ω 只有在~ ~时才是解，其中 $\tilde{\omega}_1 = \theta$、$F_2 = 0$，并且 $F_1 = F$ 且 $F' = f$，即当 $\omega = F\theta$ 且 $F' = f$ 时。我们需要讨论初值问题，其中包含一些 F_0，

$$F' = f, \quad F(l) = F_0. \tag{3.2}$$

众所周知（例如参见[47, 1.2。1]），该问题存在唯一的解，因此令 F 表示此解。由于 $\theta_O \in \mathsf{D}(\mathsf{d}^{(q)}_{\max})$，且 $\tilde{D}\tilde{\theta} = 0$，$f \in L^2((0,\ l],\ h^{1-2\alpha_{q-1}})$，由引理3.2.3。因此，

$$F(x) = -\int_x^l f dx,$$

with

$$\left|\int_x^l f dx\right| \leq \left|\int_x^l h^{\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}-\alpha_{q-1}} f\right| \leq \sqrt{\int_x^l h^{2\alpha_{q-1}-1} dx}\sqrt{\int_0^l h^{1-2\alpha_{q-1}} f^2 dx}$$
$$\leq \sqrt{\frac{l^{\kappa(2\alpha_{q-1}-1)+1} - x^{\kappa(2\alpha_{q-1}-1)+1}}{\kappa(2\alpha_{q-1}-1)+1}}\|f\|.$$

由此可知，方程（3.2）中初值问题的唯一（绝对连续且局部可积）解在 $x = 0$附近具有如下行为：

(1) 若 $\alpha_{q-1} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\kappa}$（注意，由于 $\kappa > 1$，等号不可能成立），则 $F(x) = O(x($ $\alpha_{q-1}-\frac{1}{2})^{\kappa+\frac{1}{2}})$；(2) 若 $\alpha_{q-1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\kappa}$，则 $F(x) = C + O(x(\alpha_{q-1}-\frac{1}{2})^{\kappa+\frac{1}{2}})$，

其中，$C \neq 0$ 是一个依赖于 f 的常数。然而，通过重新调整这些常数，我们可以找到另一个原函数，使其满足 $C' = 0$，因此，对于所有 α_{q-1}，$F(x) =$。

$O(x^{(\alpha_{q-1}-\frac{1}{2})^{\kappa+\frac{1}{2}}})$。由此可得

$$\int_0^l h^{1-2\alpha_{q-1}} F^2 dx \leq \int_0^l x^{\kappa} dx,$$

因此 $F \in L^2((0,l], h^{1-2\alpha_{q-1}})$，以及 $\omega \in \mathrm{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(q-1)})$。所以，所有类型为$O$ 的闭形式都是恰当形式。

最后考虑类型为 I_0 和 II_0 的微分形式。这些微分形式可能不是边界。另一方面，当 $1 \in L^2((0,l)\ h^{1-2\alpha_q})$ 时它们是平方可积的，即当 $\alpha_q < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}$. 时

当且仅当 $\alpha_q \leq \frac{1}{2}$ 时，此条件成立；若 $m = 2p-1$，则得到 $q \leq p-1$；若 $m = 2p$，则得到 $q \leq p$。因此，在这些次数上，$[\theta_{E_0}]$ 是一个非平凡的上同调类。显然，任何其他此类型的微分形式都是 θ_{E_0} 的常数倍，因此属于同一个类。

现在考虑 $\mathrm{d}^{(q)}$ 最小。显然，E 型和 I 型微分形式不属于它的核，因为它们不满足 $x = l$ 处的边界条件。此外，对于 IV 型形式，边界条件自动满足，因为切向分量为零；对于这些形式的边界（即外微分）也是如此。因此，分析与 $\mathrm{d}_{\max}$ 的情形相同，所有恰当的 IV 型形式都是边界。类似的论证也适用于 X 型形式：这些形式具有切向分量，但我们注意到，如果$\theta_X = D\beta$，那么 θ_X 和 β 具有相同的切向分量，因此它们要么都满足、要么都不满足 $x = 0$ 和 $x = l$ 处的相对边界条件。因此，所有闭的 X 型形式都是边界。

接下来考虑 O 型形式。这些形式的边界条件是真空。对于 $\mathrm{d}_{\max}$，我们可以沿用上面相同的方法，但此时初值问题的初值固定为：$F_0 = 0$。这意味着我们不能重新调整常数来消去 C，因此，当 $\alpha_{q-1} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\kappa}$ 时，O 型闭形式是边界，即 $\alpha_{q-1} \leq 0$，从而得到 $q \leq p$（对所有 m）。否则，也就是说，当 $\alpha_{q-1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\kappa}$，即 $\alpha_{q-1} \geq \frac{1}{2}$ 时，F平方可积，当且仅当

$$\int_0^l h^{1-2\alpha_{q-1}} dx < \infty,$$

也就是说，若 $\alpha_{q-1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}$。这意味着唯一的可能性是 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$；否则，即对于 $\alpha_{q-1} > \frac{1}{2}$，O 型闭形式不是边界。因此，对于 $m = 2p-1$ 和 $q \geq p+1$，以及 $m = 2p$ 和 $q \geq p+2$，同调非平凡。在考虑特殊情形 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$ 之前，我们先证明所有次数下都只有一个同调类。假设有两个不同的闭形式 $\theta_{O,\ 1}$ 和 $\theta_{O,\ 2}$ 如上所述。接着，将相应函数 F_1 和 F_2 按其在 $x = 0$ 处的常数值归一化，并取二者之差，便得到差值 $\theta_{O,\ 1} - \theta_{O,\ 2} = D(\omega_1 - \omega_2)$ 的一个边界，因此它们同调等价。

还需考虑 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$ 的情形，即 $m = 2p$和 $q = p+1$。对于这些取值，闭形式 ω 定义良好且平方可积，我们需要验证边界条件。在 $x = l$ 处的边界条件由构造满足（初值问题）。还需验证 $x = 0$处的边界条件，

$$bv_{\mathrm{rel}}^{(q-1)}(x_0)(\omega) = \lim_{x \to 0^+} (h^{1-2\alpha_q} F g_2)(x)(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}_2)_W,$$

对所有 $\varphi \in \mathsf{D}(\delta_{\max}^{(q)})$, $\varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_{2\circ}$ 由 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$，并利用命题 3.2.4(2),

$$bv_{\mathrm{rel}}^{(p)}(x_0)(\omega) = \lim_{x\to 0^+} g_2(x)(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}_2)_W = C \neq 0,$$

不满足边界条件。因此， ω 不属于 $\mathsf{d}_{\min}$ 的定义域，而 θ_O 不是边界，但代表次数为 $p+1$的一个非平凡同调类。

□

定理 3.7.6. 若 $(m, \mathfrak{p}) = (2p-1, \mathfrak{p}), (2p, \mathfrak{m}^c)$, 则:

$$I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) = \begin{cases} H^q_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho), & 0 \le q \le p-1, \\ \ker(j^{*,p} : H^p_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho) \to H^p(W, E_\rho)), & q = p \\ H^q_{\mathrm{DR}}(Y, \partial Y, E_\rho), & p+1 \le q \le m+1. \end{cases}$$

若 $(m, \mathfrak{p}) = (2p, \mathfrak{m})$, 则:

$$I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) = \begin{cases} H^q_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho), & 0 \le q \le p, \\ \ker(j^{*,p+1} : H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho) \to H^{p+1}(W, E_\rho)), & q = p+1 \\ H^q_{\mathrm{DR}}(Y, \partial Y, E_\rho), & p+2 \le q \le 2p+1. \end{cases}$$

若 $m = 2p-1$, 则:

$$H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) = \begin{cases} H^q_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho), & 0 \le q \le p-1, \\ \ker(j^{*,p} : H^p_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho) \to H^p(W, E_\rho)), & q = p \\ H^q_{\mathrm{DR}}(Y, \partial Y, E_\rho), & p+1 \le q \le 2p. \end{cases}$$

若 $m = 2p$, 则（在次数为 $q = p, p+1$ 时，结果取决于具体情形）:

$$H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) = \begin{cases} H^q_{\mathrm{DR}}(Y, E_\rho), & 0 \le q \le p-1, \\ H^q_{\mathrm{DR}}(Y, \partial Y, E_\rho), & p+2 \le q \le 2p+1. \end{cases}$$

证明。证明基于命题 3.6.2 中偶对 $(Z_l^\kappa(W)\ X)$ 和 (Y, X) 的长同调正合列。我们给出 $m = 2p$ 情形的一些细节。由 $(Z_l^\kappa(W)\ X)$ 的上同调序列，利用定理 3.7.5 中给出的 $Z_l^\kappa(W)$ 的相对上同调计算，我们得到次数 $0 \le q \le p$ 上的同构。由 (Y, X) 的上同调序列，利用定理 3.7.5 中给出的 $Z_l^\kappa(W)$ 的上同调计算，我们得到次数 $p+2 \le q \le 2p$ 上的同构。剩下的是次数 $q = p+1$，这需要多做一些工作。交换方块。

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{j} & Y \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} \\ Z_l^\kappa(W) & \xrightarrow[i_C]{} & X \end{array}$$

诱导出一个上同调梯（我们详细说明 $m=2p$、 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ 的情形）

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & I^{\mathfrak{m}}H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(Z_l^{\kappa}(W),W,E_\rho) & & & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle e_C^{*,p+1}} & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(Y,\partial Y,E_\rho) & \xrightarrow{e_Y^{*,p+1}} & I^{\mathfrak{m}}H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(X,E_\rho) & \xrightarrow{i_C^{*,p+1}} & I^{\mathfrak{m}}H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(Z_l^{\kappa}(W),E_\rho) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{i}_Y^{*,p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle i^{*,p+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(Y,\partial Y,E_\rho) & \xrightarrow[\xi_Y^{p+1}]{} & H^{p+1}_{\mathrm{DR}}(Y,E_\rho) & \xrightarrow[j^{*,p+1}]{} & H^{p+1}(W) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

其中底行是偶对 (Y,W) 的长正合上同调序列。根据定理 3.7.5， $I^{\mathfrak{m}}H^{p+1}$ 绝对边界条件 $(Z_l^{\kappa}(W))=0$，因此 $e^{*}{}_{Y}{}^{p+1}$ 是满射；根据同一定理，$I^{\mathfrak{m}}H^{p+1}$ 德拉姆 $(Z_l^{\kappa}(W)\ W)=0$，因此 $\mathrm{i}_Y^{*\,p+1}$ 是单射。所以，我们只需证明 $\operatorname{Im}\mathrm{i}_Y^{*\,p+1}=,\operatorname{Im}\ \xi_Y^{p+1}$。为此，取 $x\in I^{\mathfrak{m}}H^{p+1}$ 德拉姆 (X,E_ρ)。那么， $j^{*},{}^{p+1}\mathrm{i}_Y^{*\,p+1},(x)=0$，因此 $i^{*},{}_{Y}{}^{p+1}(x)\in$ 核 $j^{*},{}^{p+1}=\operatorname{Im}\xi_Y^{p+1}$，即 $\operatorname{Im}\ i^{*},{}_{Y}{}^{p+1}\subseteq\operatorname{Im}\ \xi_Y^{p+1}$。反过来，取$y\in\operatorname{Im}\xi_Y^{p+1}$。那么， $y=\xi_Y^{p+1}(u)$。由于 $i^{*},{}_{Y}{}^{p+1}e^{*},{}_{Y}{}^{p+1}(u)=\xi_Y^{p+1}(u)=y$，可知 $y\in\operatorname{Im}\mathrm{i}_Y^{*\,p+1},,$ 即 $\operatorname{Im}\xi_Y^{p+1}\subseteq\operatorname{Im}\mathrm{i}_Y^{*\,p+1},$。□

4. Hodge Laplace operator and Hodge theory

我们有两种研究 Hodge理论的方法：一方面，可以考虑与第 3 节所引入的德拉姆复形相关联的霍奇-拉普拉斯算子。另一方面，也可以直接将形式算子的某个适当自伴扩张定义为霍奇-拉普拉斯算子。关键在于，这两种方法是一致的，见定理 5.6.3。

4.1. 与德拉姆复形相关联的霍奇-拉普拉斯算子： Δ_{d}， Δ_{δ}，以及 $\Delta_{\mathfrak{p},\ \mathrm{d}}$， $\Delta_{\mathfrak{p},\ \delta}$。先来讨论与德拉姆复形相关联的霍奇-拉普拉斯算子（见第 3.1 节末尾以及第 3.4 节末尾）：（$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{\bullet}_{\min}),\mathrm{d}^{\bullet}_{\min}$）和（$\mathsf{D}(\mathrm{d}^{\bullet}_{\max}),\mathrm{d}^{\bullet}_{\max}$）：

$$\Delta_{\mathrm{d}}^{(q)}=\mathrm{d}_{\min}^{(q-1)}(\mathrm{d}_{\min}^{(q-1)})^{\dagger}+(\mathrm{d}_{\min}^{(q)})^{\dagger}\mathrm{d}_{\min}^{(q)}=\mathrm{d}_{\min}^{(q-1)}\delta_{\max}^{(q)}+\delta_{\max}^{(q+1)}\mathrm{d}_{\min}^{(q)},$$
$$\Delta_{\delta}^{(q)}=\delta_{\min}^{(q-1)}(\delta_{\min}^{(q-1)})^{\dagger}+(\delta_{\min}^{(q)})^{\dagger}\delta_{\min}^{(q)}=\delta_{\min}^{(q+1)}\mathrm{d}_{\max}^{(q)}+\mathrm{d}_{\max}^{(q-1)}\delta_{\min}^{(q)};$$

以及与交叉复形相关联的霍奇-拉普拉斯算子，见第 3.5 节：其中一个与德拉姆复形（$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$，相对）$,\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$，相对）相关联

$$\Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)}=\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q-1)}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q-1)})^{\dagger}+(\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)})^{\dagger}\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)}=\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q-1)}\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)}+\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q+1)}\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)},$$

以及与德拉姆复形（$\mathsf{D}(\delta_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$，绝对边界条件）$\delta_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$，绝对边界条件）相关的那个。

$$\Delta_{\delta,\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)}=\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q-1)}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q-1)})^{\dagger}+(\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)})^{\dagger}\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)}=\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q-1)}\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)}+\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q+1)}\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)}.$$

这些算子稠密定义且可闭（根据定义），并且是自伴的。

注 4.1.1. 算子 Δ_{d} Δ_{δ} $\Delta^{(q)}$ $_{\mathrm{d}\,\mathfrak{p},\text{边界条件}}$以及 $\Delta_{\delta}^{(q)}$ $_{,\mathfrak{p},\text{边界条件}}$ 的定义域可直接由这些算子的定义得出。

注 4.1.2. 若 X 的边界为空，则交截复形的霍奇-拉普拉斯算子相同，即 $\Delta^{(q)}$ $_{\mathrm{d}\,\mathfrak{p}} = \Delta_{\delta\,\mathfrak{p}}^{(q)}$ ，。

4.2. 奇点附近的形式霍奇-拉普拉斯算子。在 W 上，我们有经典的霍奇分解（例如参见 [14, 第 1.5 节2]）$\Omega^q(W,V_\rho) = \mathcal{H}^q(W,V_\rho) \oplus \tilde{d}^{(q-1)}\Omega^q(W,V_\rho) \oplus \tilde{\delta}^{(q+1)}\Omega^q(W,V_\rho)$，其中 $\mathcal{H}^q(W,V_\rho) =$核 $\tilde{\Delta}^{(q)}$。算子 $\tilde{\Delta}$ 是自伴的，并具有谱分解，即谱 $\mathrm{Sp}(\Delta)$ 为实的、纯点且离散的（唯一聚点在无穷远处），并且非负，也就是说，它与 Δ 的特征值集合相同；每个特征子空间的维数有限；由椭圆正则性可知，所有特征函数都是光滑的；特征函数集合构成 $L^2(W,V_\rho)$ 的完备正交基。

现在我们来对喇叭上的形式霍奇-拉普拉斯算子 $\Delta^{(q)}$ 进行“对角化”。设 $\tilde{\lambda}$ 是截面上霍奇-拉普拉斯算子的一个特征值： $\tilde{\Delta}^{(q)}\tilde{\psi} = \tilde{\lambda}\tilde{\psi}$。那么，按照约定， $\tilde{\mathcal{E}}_0^{(q)} = \mathcal{H}^q(W)$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}>0}^{(q)} = \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}}^{(q)}$ ，$_{\mathrm{cex}} \oplus \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}}^{(q)}$ ，$_{\mathrm{ex}}$，并且

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda},\mathrm{ex}}^{(q)} = \left\{\tilde{\psi}\in\Omega^q(W) \mid \tilde{\Delta}^{(q)}\tilde{\psi} = \tilde{\lambda}\tilde{\psi},\, \tilde{\omega} = \tilde{d}\tilde{\alpha}\right\},$$
$$\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda},\mathrm{cex}}^{(q)} = \left\{\tilde{\psi}\in\Omega^q(W) \mid \tilde{\Delta}^{(q)}\tilde{\psi} = \tilde{\lambda}\tilde{\psi},\, \tilde{\psi} = \tilde{\delta}\tilde{\alpha}\right\},$$

霍奇分解为 $\Omega^q(W) = \bigoplus_{\tilde{\lambda}=0}\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}}^{(q)}$. 将此代入方程（2.4）中的识别式，我们得到直和分解

$$L^2(\mathfrak{C}) = L^2((0,l+\epsilon), h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}}) \otimes \left(\bigoplus_{\tilde{\lambda}_1=0}\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)} \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_2=0}\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}_2}^{(q-1)}\right),$$

以及 $\Delta^{(q)} = \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2=0}^{\infty}\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$ ，$_{\tilde{\lambda}_2}$，其中各项为投影

$$\Delta_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2}^{(q)} = \Delta^{(q)}\big|_{L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}})\otimes\left(\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}\oplus\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{\lambda}_2}^{(q-1)}\right)}. \tag{4.1}$$

此外 $\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$ ，$_{\tilde{\lambda}_2} = \bigoplus_{j_1,\ j_2}\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$ ，$_{j_1,\ \tilde{\lambda}_2,\ j_2}$，其中

$$\begin{aligned}\Delta_{\tilde{\lambda}_1,j_1,\tilde{\lambda}_2,j_2}^{(q)} &= \Delta^{(q)}\big|_{L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}})\otimes\left(\langle\tilde{\psi}_{\tilde{\lambda}_1,j_1}^{(q)}\rangle\oplus\langle\tilde{\psi}_{\tilde{\lambda}_2,j_2}\rangle\right)}\\ &= \begin{pmatrix}\tilde{\psi}_{\tilde{\lambda}_1,j_1}^{(q)}\mathcal{F}_{1,\tilde{\lambda}_1}^{q} & -2\frac{h'}{h}\tilde{d}\tilde{\psi}_{\tilde{\lambda}_2,j_2}^{(q-1)}\\ -2\frac{h'}{h^3}\tilde{\delta}\tilde{\psi}_{\tilde{\lambda}_1,j_1}^{(q)} & \tilde{\psi}_{\tilde{\lambda}_2,j_2}^{(q-1)}\mathcal{F}_{2,\tilde{\lambda}_2}^{q}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

作用于空间 $L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}})$，以及 $\mathcal{F}_{1,\tilde{\lambda}}^{q} = \mathcal{F}_{1,\alpha_q,\tilde{\lambda}}$, $\mathcal{F}_{2,\tilde{\lambda}}^{q} = \mathcal{F}_{2,\alpha_q,\tilde{\lambda}}$，其中最后几个定义见方程（A.0.2）（另见第 2.3 节末尾）。

4.3. 形式霍奇-拉普拉斯算子的扩张：　$\Delta_{\max}$ 和 $\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}$。我们接下来介绍形式霍奇-拉普拉斯算子的自伴扩张。我们将预极小算子定义为

$$\mathsf{D}(\Delta_0^q) = \Omega_0^q(\mathring{X}, E_\rho), \qquad \Delta_0^q\omega = (\delta^{q+1}d^q + d^{q-1}\delta^q)\omega,$$

并将极大算子定义为

$$\mathsf{D}(\Delta_{\max}^q) = \{\omega \in L^2(X, E_\rho) \mid (\mathcal{D}^{q+1}D^q + D^{q-1}\mathcal{D}^q)\omega \in L^2(X, E_\rho)\},$$
$$\Delta_{\max}^q\omega = (\mathcal{D}^{q+1}D^q + D^{q-1}\mathcal{D}^q)\omega.$$

注意，该定义是适定的，因为平方可积形式的弱导数局部平方可积。与算子 d_0^q 类似，算子 Δ_0^q 是稠密定义的。注意，根据定义，$\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(q)}) \cap \mathsf{D}(\delta_{\max}^{(q)}) \subseteq \mathsf{D}(\Delta_{\max}^q)$。

命题 4.3.1. 设 $\omega, \varphi \in \mathsf{D}(\Delta_{\max}^q)$，且 $\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2$，$\varphi|_{\mathfrak{C}} = g_1\tilde{\varphi}_1 + dx \wedge g_2\tilde{\varphi}_2$，则有如下格林公式

$$\langle \Delta_{\max}^{(q)}\omega, \varphi\rangle = \langle D^{(q)}\omega, D^{(q)}\varphi\rangle + \langle \mathcal{D}^{(q)}\omega, \mathcal{D}^{(q)}\varphi\rangle + B_{x_0}(\omega, \varphi) + B_{\partial X}(\omega, \varphi),$$

其中

$$\begin{aligned} B_{x_0}(\omega, \varphi) = \lim_{x\to 0^+} \Big(&- \left(h^{1-2\alpha_q} f_1^I g_1\right)(x)\|\tilde{\omega}_1\|^2 - \left(\left(h^{1-2\alpha_{q-1}} f_2\right)^I g_2\right)(x)\|\tilde{\omega}_2\|^2 \\ &+ \left(h^{1-2\alpha_q} f_2 g_1\right)(x)\langle \tilde{D}\tilde{\omega}_2, \tilde{\varphi}_1\rangle + \left(h^{1-2\alpha_q} f_1 g_2\right)(x)\langle \tilde{\omega}_1, \tilde{D}\tilde{\varphi}_2\rangle \Big), \\ B_{\partial X}(\omega, \varphi) = \int_{\partial X} t\omega \wedge \star n D^{(q)}\varphi - \int_{\partial X} t\mathcal{D}^{(q)}\omega \wedge \star n\varphi. \end{aligned}$$

这里，$t\omega = (\omega_{\tan})|_{\partial X}$ 和 $n\omega = (\omega_{\mathrm{norm}})|_{\partial X}$ 分别表示形式 ω 在边界∂X 的领圈邻域 $\mathfrak{D}$ 中的切向分量和法向分量的限制（见 [37, 第 3] 节和 [39, 命题 1.2.6]）。注意，在 $\mathfrak{D}$ 上使用局部坐标（例如喇叭的尖端附近的坐标），我们可以写成 $\omega|_{\mathfrak{D}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx f_2\tilde{\omega}_2$（此处的截面不一定是 W！），于是 $t\omega = f_1\tilde{\omega}_1$，且 $n\omega = f_2\tilde{\omega}_2$。由此可得$\Delta_0^{(q)} \leq (\Delta_0^{(q)})^* = \Delta_{\max}^{(q)}$，因此$\Delta_0^q$ 有稠密定义的伴随算子，故它是可闭的[38], ，而 $\Delta_{\max}^{(q)}$ 是稠密定义的，并且作为伴随算子，它是闭的。根据格林公式，取 $\varphi \in \mathsf{D}(\Delta_0)$，可得

$$\langle \Delta_{\max}\omega, \varphi\rangle = \langle D^{(q)}\omega, D^{(q)}\varphi\rangle + \langle \mathcal{D}^{(q)}\omega, \mathcal{D}^{(q)}\varphi\rangle = \langle \omega, \delta_0^{(q)}\mathrm{d}_0^{(q)}\varphi\rangle + \langle \omega, \mathrm{d}_0^{(q)}\delta_0^{(q)}\varphi\rangle = \langle \omega, \Delta_0\varphi\rangle.$$

因此，$(\Delta^*)_{\max} \leq \Delta_0^\dagger$（其中 $*$ 表示形式伴随算子）。由于显然有 $\Delta^* = \Delta$，$\Delta_{\max} \leq \Delta_0^\dagger$。由于第一个是极大的，反向包含关系也成立，因此 $\Delta_{\max} \leq \Delta_0^\dagger$，且 $(\Delta_{\max})^\dagger \leq \overline{\Delta_0}$。此外，根据格林公式，我们可以看到，通过在 $x = 0$ 处以及 ∂X 上施加适当的边界条件，可以描述 Δ_0 的所有自伴扩张的定义域。关于正则边界 ∂X 上的分析是经典的（参见 [39, 14, 37]）。

horn尖端处的分析需要一些工作。可以通过应用方程（4.1）中的分解来进行。然后，我们可以在和式的每一项上使用由此诱导的斯图姆-刘维尔算子偶对的扩张，从而实现所有这些扩张。更确切地说，在horn尖端附近的局部区域内，算子 $\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$，$j_1$，$\tilde{\lambda}_2$，$j_2$ 是

本质上是一对斯图姆-刘维尔算子（$\mathcal{F}^q_{1,\tilde{\lambda}}$, $\mathcal{F}^q_{2,\tilde{\lambda}}$），作用于空间 $L^2((0,\ l+\epsilon)$ $h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}}$。这两个算子属于附录 A中所述的类型（另见第 2.3 节），其自伴扩张已在定理 A.1.2 中分类。对 Δ 的自伴扩张也可进行类似的分类。

然而，这里我们关注的是一些特定的延拓，因此将详细描述这些情形下的构造。一方面，在边界 ∂X处，我们考虑以下两类边界值：

$$BV_{\mathrm{abs}}(\partial X)(\omega)=\begin{cases} n\omega=g_2(0)\tilde{\omega}_2,\\ n(d\omega)=g_1'(0)\tilde{\omega}_1,\end{cases}\qquad BV_{\mathrm{rel}}(\partial X)(\omega)=\begin{cases} t\omega=f_1(0)\tilde{\omega}_1,\\ t(\delta\omega)=(h^{1-2\alpha_{q-1}}f_2)'.\end{cases}$$

其中 $\omega\in\mathsf{D}(\Delta^q_{\max})$, $\omega|_{\mathfrak{D}}=f_1\tilde{\omega}_1+dx\wedge f_2\tilde{\omega}_2$。

另一方面，在喇叭的尖端处，局部写成 $\omega\in\mathsf{D}(\Delta^{(q)}_{\max})$的形式，其中 $\omega|_{\mathfrak{C}}=f_1\tilde{\omega}_1+dx\wedge f_2\tilde{\omega}_2$，并按照方程（4.1）将截面上的微分形式分解为 $\tilde{\omega}_k=\sum_{\tilde{\lambda}_k,j_k}\langle\tilde{\omega}_k,\ \psi_{\tilde{\lambda},j_k}\rangle\psi_{\tilde{\lambda}_k,j_k}$，我们在每个特征空间上引入边界值，并与定义A.1.1进行比较

$$BV^q_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\pm}(x_0)(\omega)=\begin{cases} h^{1-2\alpha_q}\left(f_1(\mathfrak{f}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1,\pm})'-f_1'\mathfrak{f}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1,\pm}\right),\\ h^{1-2\alpha_{q-1}}\left(f_2(\mathfrak{f}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_2,\pm})'-f_2'\mathfrak{f}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_2,\pm}\right),\end{cases}$$

其中 $\mathfrak{f}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1,\pm}$ 是方程 $\mathcal{F}_{1,\alpha_q,\tilde{\lambda}_1}f=0$的基本解系，而 $\mathfrak{f}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_2,\pm}$ 是方程 $\mathcal{F}^q_{2,\alpha_q,\tilde{\lambda}_2}f=0$的基本解系。

我们可以通过以下方式定义算子 $\Delta^{(q)}_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\pm,\text{边界条件}}$

$$\begin{aligned}&\mathsf{D}(\Delta^{(q)}_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\pm,\mathrm{bc}})\\ &=\left\{\omega\in\mathsf{D}(\Delta^{(q)}_{\max})\mid\omega|_{\mathfrak{C}}=f_1\tilde{\omega}_1+dx\wedge f_2\tilde{\omega}_2, BV^q_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\pm}(x_0)(\omega)=BV_{\mathrm{bc}}(\partial X)(\omega)=0\right\},\end{aligned}$$

并将这些算子相加

$$\Delta^{(q)}_{\pm,\mathrm{bc}}=\bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2}\Delta^{(q)}_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\pm,\mathrm{bc}}.$$

利用这些算子，我们定义将要使用的 Δ_0 的自伴扩张。在维数为 $m=2p-1$ 时，我们定义算子

$$\Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{bc}}=\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{bc}}=\bigoplus_{q=0}^{2p-1}\Delta^{(q)}_{+,\mathrm{bc}}.$$

在维数为 $m=2p$ 时，我们定义算子

$$\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{bc}}=\bigoplus_{q=0}^{p}\Delta^{(q)}_{+,\mathrm{bc}}\oplus\left(\Delta^{(p+1)}_{0,0,-,\mathrm{bc}}\oplus\bigoplus\Delta^{(p+1)}_{\tilde{\lambda}_1>0,\tilde{\lambda}_2>0,+,\mathrm{bc}}\right)\oplus\bigoplus_{q=p+2}^{2p}\Delta^{(q)}_{+,\mathrm{bc}},$$

$$\Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{bc}}=\bigoplus_{q=0}^{p-1}\Delta^{(q)}_{+,\mathrm{bc}}\oplus\left(\Delta^{(p)}_{0,0,-,\mathrm{bc}}\oplus\bigoplus\Delta^{(p)}_{\tilde{\lambda}_1>0,\tilde{\lambda}_2>0,+,\mathrm{bc}}\right)\oplus\bigoplus_{q=p+1}^{2p}\Delta^{(q)}_{+,\mathrm{bc}}.$$

注意，只有当喇叭尖端处诱导出的、定义在 $(0,l+\epsilon)$ 上的 Sturm-Liouville 问题的端点 $x=0$ 是正则端点时，才需要施加边界条件

或正则奇异极限圆端点；根据推论A.0.9，对于某些（较小的）α_q 和λ值，这种情况只会在有限几种情形下发生，如下表所示：

(1)（正则） $3 \leq \kappa$，（a） $\tilde{\lambda}_1 = 0$ 和$\alpha_q = \frac{1}{2}$，即 $q = \frac{m}{2}$，即 $m = 2p$ 和 $q = p$，（b） $\tilde{\lambda}_2 = 0$ 和 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$，即 $q = \frac{m}{2} + 1$，即 $m = 2p$ 和 $q = p + 1$，（2）（正则奇异）$\frac{3}{2} \leq \kappa < 3$，（a） $\tilde{\lambda}_1 = 0$ 和1） $\alpha_q = 0$，即 $m = 2p - 1$ 和 $q = p - 1$，2） $\alpha_q = \frac{1}{2}$，即 $m = 2p$和 $q = p$，（b） $\tilde{\lambda}_2 = 0$ 和1） $\alpha_{q-1} = 0$，$m = 2p - 1$ 和 $q = p$，2） $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$，即 $m = 2p$和 $q = p + 1$，（3）（正则奇异） $1 < \kappa < \frac{3}{2}$，（a） $\tilde{\lambda}_1 = 0$和1） $\alpha_q = -\frac{1}{2}$，即 $m = 2p$和 $q = p-1$，2） $\alpha_q = 0$，即 $m = 2p-1$ 和 $q = p - 1$，3）$\alpha_q = \frac{1}{2}$，即 $m = 2p$ 和 $q = p$，（b） $\tilde{\lambda}_2 = 0$和1） $\alpha_{q-1} = -\frac{1}{2}$，即 $m = 2p$和 $q = p$，2） $\alpha_{q-1} = 0$，即$m = 2p - 1$ 和 $q = p$，3） $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$，即 $m = 2p$ 和 $q = p + 1$。

因此，在其他情况下，horn的尖端处的边界条件为空。
下一个结果依赖于下一节中证明的一些事实2。

引理 4.3.2。 设 ω 是特征值方程 $\Delta^{(q)}\omega = \lambda\omega$的一个解。将$\omega_\pm$ 按照引理 *5.4.3* 和 *5.1.1*中所描述的局部类型写成相应形式。假设 ω是平方可积的。那么， ω 满足horn的尖端处的所有边界条件，即： $BV_\pm(0)(\omega_\pm) = 0$，以及 $bv_\pm(0)(\omega) = 0$。

证明。显然， $BV_\pm$(0)($\omega_\pm$) = 0。考虑另一个边界条件。局部地写成 $\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2$。于是，根据引理 5.1.5， ω是平方可积的。因此，除少数情况外，$\omega|_{\mathfrak{C}}$ 属于类型 $+$。 ω 在horn的尖端附近的行为由相应斯图姆-刘维尔问题的解 f 在 $x = 0$ 附近的行为决定；当$b > 0$时，此类解的行为由定理 A.0.4 描述，而当 $b = 0$时，则由定理 A.0.5 描述。在第一种情况下，由于指数项的存在，显然有 $bv_\pm$(0)(ω) = 0。第二种情况需要利用解的行为以及引理 3.2.3 和 3.2.4 中给出的定义域为极大延拓时微分形式的刻画进行明确验证。□

4.4. 谱性质

命题 4.4.1。算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}$,边界条件 是非负自伴算子。

证明。 Δ 是形式自伴的， $\Delta_{\min}$ 是稠密定义的，因此是对称的，其伴随算子为 $\Delta_{\max}$，因此$\Delta_{\mathfrak{p},\ \mathrm{bc}}$ 它是 $\Delta_{\max}$ 的限制，故是自伴的。由格林公式可知其非负性，见命题4.3.1。 □

命题 4.4.2. 算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}$,边界条件 具有紧预解式。

证明。设 $r(z_1, z_2)$ 为紧流形 Y 上 Hodge-Laplace 算子预解式的标准核（例如参见 [14]）。在领圈上，我们可以使用局部坐标并分离变量；此外，还可以利用截面上的

完整特征形式系5.5.1中所述的分解， k 因此恰好化为定理证明中描述的有限喇叭情形，并具有该定理所述的显式形式。因此，极小算子（作用于紧支撑微分形式）彼此相同。由于两个极大延拓都是连续的（且定义在稠密集上），它们也彼此相同。有限喇叭上的预解式由领圈上预解式的延拓定义，因此这就定义了 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$ 的预解式，边界条件，并表明它具有连续的平方可积核，因为按构造，该核在 Y 上平方可积，并且根据定理5.5.1，它在喇叭上也平方可积。□

推论 4.4.3。算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$ ，边界条件 具有离散的非负谱，且特征值均为单重。特征函数构成 $L^2(X)$ 的完备正交基。

推论4.4.4。与 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}$ ，边界条件 相关联的热算子 $\mathrm{e}^{-t\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}}$ ，边界条件 是迹类的。其迹在 t较小时具有如下形式的渐近展开式

$$\operatorname{Tr}^{-t\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}^{(q)}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}^{(q)}) t^{\frac{m+1-k}{2}}.$$

证明。 根据该定理，预解式具有一个连续的平方可积核，其在 Y 上的限制是 Y上霍奇-拉普拉斯算子的核，因此属于迹类，并且具有所述的局部渐近展开；其在喇叭上的限制是定理 5.5.1中讨论的喇叭上霍奇-拉普拉斯算子的预解式。该核属于迹类，因为其迹由相应对数伽马函数 [41, 2的拉普拉斯变换给出。3], 而后者正是第 7.2.3节研究的对象。此外，该渐近展开存在，且由截面上的展开与直线上的展开的显式扭曲乘积给出。因此，X 上的展开系数由两部分局部系数的积分之和给出。 □

4.5. 算子 Δ_{d}、 bc 和 Δ_{δ}、 bc 的霍奇分解。考虑第 3.6 截面中引入的交叉德拉姆复形 (D(d$^{(\bullet)}$ min) ,d$^{(\bullet)}$ min)、(D(d$_{\max}^{(\bullet)}$)， d$_{\max}^{(\bullet)}$)、(D(d$_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$,rel) ,d$_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$,rel) 和 (D($\delta_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$,abs) $\delta_{\mathfrak{p}}^{(\bullet)}$,abs)。这些是由希尔伯特空间和闭算子组成的复形（参见 [1] 及其中的参考文献）。根据定理 3.7.5，这些复形的同调模是有限的，因此我们得到以下结果。

定理 4.5.1。我们有闭向量空间的如下识别

$$\begin{aligned}
H^q_{\mathrm{DR}}(X, \partial X, E_\rho) &= H_q(\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\min}^{(\bullet)}), \mathrm{d}_{\min}^{(\bullet)}) = \ker \mathrm{d}_{\min}^{(q)} \cap \ker \delta_{\max}^{(q)} = \ker \Delta_{\mathrm{d}}^{(q)}, \\
H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) &= H_q(\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\max}^{(\bullet)}), \mathrm{d}_{\max}^{(\bullet)}) = \ker \mathrm{d}_{\max}^{(q)} \cap \ker \delta_{\min}^{(q)} = \ker \Delta_{\delta}^{(q)}, \\
I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(X, \partial X, E_\rho) &= H_q(\mathsf{D}(\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(\bullet)}), \mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(\bullet)}) = \ker \mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)} \cap \ker \delta_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)} = \ker \Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)}, \\
I^{\mathfrak{p}} H^q_{\mathrm{DR}}(X, E_\rho) &= H_q(\mathsf{D}(\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(\bullet)}), \delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(\bullet)}) = \ker \delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)} \cap \ker \mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)} = \ker \Delta_{\delta,\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)}.
\end{aligned}$$

以及正交向量空间的直和分解

$$
\begin{aligned}
L^2(X,E_\rho) &= \ker \mathrm{d}^{(q)}_{\min} \cap \ker \delta^{(q)}_{\max} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{d}^{(q-1)}_{\min} \oplus \operatorname{Im} \delta^{(q+1)}_{\max},\\
L^2(X,E_\rho) &= \ker \mathrm{d}^{(q)}_{\max} \cap \ker \delta^{(q)}_{\min} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{d}^{(q-1)}_{\max} \oplus \operatorname{Im} \delta^{(q+1)}_{\min},\\
L^2(X,E_\rho) &= \ker \mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} \cap \ker \delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{d}^{(q-1)}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} \oplus \operatorname{Im} \delta^{(q+1)}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}},\\
L^2(X,E_\rho) &= \ker \delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}} \cap \ker \mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{d}^{(q-1)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}} \oplus \operatorname{Im} \delta^{(q+1)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}.
\end{aligned}
$$

5. Analysis on the finite horn

本节研究有限喇叭 $Z_l^\kappa(W)$ 上 Hodge拉普拉斯算子 Δ_{bc} 和 $\Delta_{\mathfrak{m},\ \mathrm{bc}}$ 的谱性质。

5.1. 调和形式与特征值方程的形式解。

引理 5.1.1. 设 $\left\{\tilde\psi^{(q)}{}_{\text{调和形式 }l},\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda}{}_{\text{,余恰当 }j},\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}{}_{\text{,恰当 }k}\right\}$ 是 $\Omega^q(W)$ 的正交归一基，由调和形式、余恰当特征形式和恰当特征形式组成，其中 $\tilde\lambda\neq 0$ 是 $\tilde\Delta^{(q)}$ 的特征值。那么，方程 $\Delta^{(q)}\omega=0$ 的解为以下六种类型（解的和）：

(1) $\psi^{(q)}_E(x,0)=f\tilde\psi^{(q)}$ 调和，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{1,0}f=0$ 的解；(2) $\psi^{(q)}_{I\,\tilde\lambda},(x,0)=f\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda}$,cex，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{1,\tilde\lambda}f=0,\ \tilde\lambda\neq 0$ 的解；(3) $\psi^{(q)}_O(x,0)=fdx\wedge\tilde\psi^{(q-1)}$ 调和，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{2,0}f=0$ 的解；(4) $\psi^{(q)}_{IV,\tilde\lambda}(x,0)=fdx\wedge\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}$,ex，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{2,\tilde\lambda}f=0,\ \tilde\lambda\neq 0$ 的解；(5) $\psi^{(q)}_{II,\tilde\lambda}(x,0)=f\tilde d\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}$,cex $+f'dx\wedge\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}$,cex，其中 f 是 $\mathcal{F}^{q-1}_{1,\tilde\lambda}f=0,\ \tilde\lambda\neq 0$ 的解；(6) $\psi^{(q)}_{III,\tilde\lambda}(x,0)=-h^{2\alpha_q-1}\left(h^{1-2\alpha_q}f\right)'\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda}$,ex $-\frac{f}{h^2}dx\wedge\tilde\delta\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda}$,ex，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^{q+1}_{2,\tilde\lambda}f=0$ 的解，且 $\tilde\lambda\neq 0$。

算子 $\mathcal{F}^q_{j,\flat}$ 由附录A中的方程（2.3）和方程（A.0.2）给出。注意，II 型和 III 型微分形式实际上相同，见下文的备注*5.1.4* 。

引理 5.1.2。采用引理*5.1.1*的记号，方程的解 $\Delta^{(q)}\omega=\lambda\omega$ 是以下六种类型的（解的和）：

(1) $\psi^{(q)}_E(x,\lambda)=f\tilde\psi^{(q)}$ 调和，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{1,0}f=\lambda f$ 的一个解；(2) $\psi^{(q)}_{I\,\tilde\lambda},(x,\lambda)=f\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda}$,cex，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{1,\tilde\lambda}f=\lambda f,\ \tilde\lambda\neq 0$ 的一个解；(3) $\psi^{(q)}_O(x,\lambda)=fdx\wedge\tilde\psi^{(q-1)}$ 调和，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{2,0}f=\lambda f$ 的一个解；(4) $\psi^{(q)}_{IV,\tilde\lambda}(x,\lambda)=fdx\wedge\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}$,ex，其中 f 是方程 $\mathcal{F}^q_{2,\tilde\lambda}f=\lambda f,\ \lambda\neq 0$ 的一个解；(5) $\psi^{(q)}_{II,\tilde\lambda}(x,\lambda)=f\tilde d\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}$,cex $+f'dx\wedge\tilde\psi^{(q-1)}_{\tilde\lambda}$,cex，其中 f 是 $\mathcal{F}^{q-1}_{1,\tilde\lambda}f=\lambda f,\ \lambda\neq 0$ 的一个解；

(6) $\psi^{(q)}_{III,\ \tilde\lambda}(x,\lambda) = -h^{2\alpha_q-1}\left(h^{1-\alpha_q}f\right)'\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda,\ \mathrm{ex}} - \frac{f}{h^2}dx\wedge\tilde\delta\tilde\psi^{(q)}_{\tilde\lambda,\ \mathrm{ex}}$，其中 f是方程 $\mathcal{F}^{q+1}_{2\ ,\ \tilde\lambda}f=\lambda f$的一个解，且 $\tilde\lambda\neq 0$。

注记 5.1.3. 注意，特征值方程和调和方程的所有解都是光滑的。截面上的解因椭圆算子的正则性而光滑，函数则由斯图姆-刘维尔理论可知光滑。

注 5.1.4. 考虑次数为 q 的方程（其中 $\tilde\omega$ 为余恰当）

$$\omega = h^{2\alpha_{q-1}+1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}g)'\tilde\varphi + dx\wedge g\tilde{\mathcal{D}}\tilde\varphi = A(f\tilde D\tilde\omega + dx\wedge f'\tilde\omega),$$

对某个常数 A。直接计算可知，该方程有˜唯一解（即与 A 无关）： $g=f'$，$\tilde\omega=\mathcal{D}\tilde\varphi$，其中 f是该方程的一个解（与方程（*A.0.2*）和（*A.0.2*）比较）

$$\mathcal{F}^{q-1}_{1,\tilde\lambda}f = -h^{2\alpha_{q-1}-1}\left(h^{1-2\alpha_{q-1}}f'\right)' + \frac{\tilde\lambda}{h^2}f = 0$$

对于 $h^{2\alpha_{q-1}+1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f')' = \tilde\lambda f$，以及 $\tilde\lambda\tilde\varphi = \tilde\Delta\tilde\varphi = \tilde D\tilde\omega$。另请注意，取 $\beta = -\frac{h^2}{\tilde\lambda}gdx\wedge\tilde D\tilde\omega$ 时，在次数 $q+1$ 下，我们有 $\mathcal{D}\beta=\omega$。

引理 5.1.5。 设 $\psi_\pm$ 是根据引理 *5.1.2* 和 *5.1.1*，满足特征值方程或调和方程的解。那么，ψ_+，$d\psi_+$ 和 $\delta\psi_+$ 对所有 q都是平方可积的。另一方面，ψ_-，$d\psi_-$ 和 $\delta\psi_-$ 仅在下表所述的情形下才是平方可积的。如果 $m=$维数$W=2p-1$:

微分形式类型	$\psi^{(q)}\in L^2$	$d\psi^{(q)}\in L^2$	$\delta\psi^{(q)}\in L^2$
E_-	$q=p-1$	$q=p$	$\forall q$
O_-	$q=p+1$	$\forall q$	$q=p$
I_-	$q=p-1$, $\tilde\lambda_{p-1,k}<1$	$\nexists q$	$\forall q$
IV_-	$q=p+1$, $\tilde\lambda_{p-1,k}<1$	$\forall q$	$\nexists q$

若 $m=$维$W=2p$:

微分形式类型	$\psi^{(q)}\in L^2$	$d\psi^{(q)}\in L^2$	$\delta\psi^{(q)}\in L^2$
E_-	$q=p-1$ 或 $q=p$	$q=p$ 或 $q=p+1$	$\forall q$
O_-	$q=p+1$ 或 $q=p+2$	$\forall q$	$q=p$ 或 $q=p+1$
I_-	$q=p-1$, $\tilde\lambda_{p-1,\ k}<\frac{3}{4}$ $q=p$, $\tilde\lambda_{p,\ k}<\frac{3}{4}$	$\nexists q$	$\forall q$
IV_-	$q=p+1$, $\tilde\lambda_{p-1,\ k}<\frac{3}{4}$ $q=p+2$, $\tilde\lambda_{p,\ k}<\frac{3}{4}$	$\forall q$	$\nexists q$

5.2. 算子 $\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}$的谱分解。限制在长度为 l 的有限喇叭上，算子 $\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}$ 的分析归结为一对斯图姆-刘维尔算子的分析。更确切地说，在 $Z^\kappa_l(W)$ 上，每个形式都可全局分解为 $\omega=f_1\tilde\omega_1+dx\wedge f_2\tilde\omega_2$，而算子 $\Delta^{(q)}_{\tilde\lambda_1,j_1,\tilde\lambda_2,j_2}$则由一对斯图姆-刘维尔算子 $(\mathcal{F}_{1,\alpha_q,\tilde\lambda_1},\mathcal{F}_{2,\alpha_q,\tilde\lambda_2})$ $\equiv(\mathcal{F}_{1,\alpha_q,\tilde\lambda_1},\mathcal{F}_{1,\alpha_{m+1-q},\tilde\lambda_2})$ 的某个自伴扩张构成，其作用于空间 $L^2((0,l+\epsilon)$ $h^{1-2\alpha_q}\oplus h^{1-2\alpha_{q-1}})$ 上，参见注 A.0.3。这两个算子在附录 A 中进行了描述。具体对应关系将在下面的注中说明。

注 5.2.1. 我们对第*4.3*节中定义的算子有如下描述。

(1) $3 \leq \kappa$:
(a) $m = 2p-1$:

$$\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}} = \Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}} \equiv \bigoplus_{q=0}^{2p} \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p-q},\tilde{\lambda}_2;0} \right);$$

(b) $m = 2p$:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}} \equiv & \bigoplus_{q=0,q\neq p,p+1}^{2p+1} \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p+1-q},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;0,0} \right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_2;0} \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}} \equiv & \bigoplus_{q=0,q\neq p,p+1}^{2p+1} \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p+1-q},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},0} \right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_2;0} \right);\end{aligned}$$

(2) $\frac{3}{2} \leq \kappa < 3$: (a)
$m = 2p-1$:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}} = \Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}} \equiv & \bigoplus_{q=0,q\neq p-1,p}^{2p} \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p-q},\tilde{\lambda}_2;0} \right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_{p-1}=0,0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=1,\tilde{\lambda}_2;0} \right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_{p-1}=0,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=1,\tilde{\lambda}_2;0} \right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1} \left(F_{\alpha_p=1,0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=0,0;0,0} \right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_p=1,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=0,\tilde{\lambda}_2;0} \right);\end{aligned}$$

(b) $m = 2p$:

$$\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}} \equiv \bigoplus_{q=0,q\neq p,p+1}^{2p+1} \bigoplus_{\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p+1-q},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;0,0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde\lambda_2;0}\right);$$

$$\Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}} \equiv \bigoplus_{q=0,q\neq p,p+1}^{2p+1} \bigoplus_{\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p+1-q},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde\lambda_2;0}\right);$$

(3) $1 < \kappa < \frac{3}{2}$:

(a) $m = 2p - 1$:

$$\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}} = \Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}} \equiv \bigoplus_{q=0,q\neq p-1,p}^{2p} \bigoplus_{\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p-q},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_{p-1}=0,0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=1,\tilde\lambda_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_{p-1}=0,\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=1,\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1} \left(F_{\alpha_p=1,0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=0,0;0,0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_p=1,\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=0,\tilde\lambda_2;0}\right);$$

(b) $m = 2p$:

$$\Delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}} \equiv \bigoplus_{q=0,q\neq p-1,p,p+1,p+2}^{2p+1} \bigoplus_{\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p+1-q},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},\tilde\lambda_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_2} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;0,0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde\lambda_2;0}\right)$$
$$\oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1} \left(F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},0;0,0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde\lambda_1\tilde\lambda_2>0} \left(F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},\tilde\lambda_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},\tilde\lambda_2;0}\right).$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}} \equiv & \bigoplus_{q=0,q\neq p-1,p,p+1,p+2}^{2p+1} \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{2p+1-q},\tilde{\lambda}_2;0}\right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},\tilde{\lambda}_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},\tilde{\lambda}_2;0}\right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_2} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_2;0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_2;0}\right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_{p+1}=\frac{3}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_p=\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_2;0}\right) \\ & \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1} \left(F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},0;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},0;0,0}\right) \oplus \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2>0} \left(F_{\alpha_{p+2}=\frac{5}{2},\tilde{\lambda}_1;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha_{p-1}=-\frac{1}{2},\tilde{\lambda}_2;0}\right).\end{aligned}$$

为了在 ∂X 处采用相对边界条件，我们只需更改最后一个指标，例如用 $(F_{\cdot,\ \cdot;0}, F_{\cdot,\ \cdot;\frac{\pi}{2}})$ 替换 $(F_{\cdot,\ \cdot;\frac{\pi}{2}}, F_{\cdot,\ \cdot;0})$。

5.3. 算子$\Delta_{\mathfrak{p},\ \mathrm{bc}}$的调和形式与调和场。

引理 5.3.1. 我们有 核 $\Delta_{\max}^{(q)} = \{\psi_{A,\pm} \in L^2(Z_l^\kappa(W))\}$，$A = E,\ O,\ I,\ II,\ III,\ IV$，以及微分形式 $\psi_{A,\ +}$ 是命题中所述类型为 *5.1.1*的微分形式，而类型为 - 的微分形式则如引理 *5.1.5*所述。

证明。 极大延拓的核由引理 5.1.1 中描述的调和方程的形式解，通过施加平方可积性条件确定。□

定理 5.3.2. 令 $\mathcal{H}^q(W) = \langle \tilde{\varphi}^{(q)}{}_{\text{调和 }j} \rangle$ 为截面上霍奇-拉普拉斯算子的调和场空间。那么，有限喇叭 $Z_l^\kappa(W)$ 上算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}{}_{,\ \text{边界条件}}$ 的调和形式空间如下。若 $(m,\mathfrak{p}) = (2p-1,\mathfrak{p})$, $(2p,\mathfrak{m}^c)$，则：

$$\ker \Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)} = \begin{cases} \langle \tilde{\varphi}_{\mathrm{har},j}^{(q)} \rangle, & 0 \le q \le p-1, \\ \{0\}, & p \le q \le m+1, \end{cases}$$

$$\ker \Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{(q)} = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p, \\ \langle h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\varphi}_{\mathrm{har},j}^{(q-1)} \rangle, & p+1 \le q \le m+1. \end{cases}$$

若 $(m,\mathfrak{p}) = (2p,\mathfrak{m})$，则：

$$\ker \Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}^{(q)} = \begin{cases} \langle \tilde{\varphi}_{\mathrm{har},j}^{(q)} \rangle, & 0 \le q \le p, \\ \{0\}, & p+1 \le q \le 2p+1, \end{cases}$$

$$\ker \Delta_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}^{(q)} = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p+1, \\ \langle h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\varphi}_{\mathrm{har},j}^{(q-1)} \rangle, & p+2 \le q \le 2p+1. \end{cases}$$

其中，包含映射是通过常函数进行的延拓。

证明。根据引理 5.1.1 中的描述，形式调和方程的解对应于一对斯图姆-刘维尔算子的调和方程的一对解 $(\mathcal{F}_{1,\alpha_q,\tilde{\lambda}_1}, \mathcal{F}_{1,\alpha_{m+1-q},\tilde{\lambda}_2})$。因此，调和形式由相应的一对自伴扩张的调和形式给出 $(F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_1;\beta_1,\gamma_1}, F_{\alpha_{m+1-q},\tilde{\lambda}_2;\beta_1,\gamma_2})$，如注 5.2.1 所述。所有这些扩张的调和形式在定理 A.4.2 中均有描述。根据该命题，唯一的可能情形是直线上的解 f 为常数，且特征值 $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2 = 0$。因此，可能的调和形式必然沿 x 坐标为常数，并且对应于截面上的零特征值。根据引理 5.1.1，这意味着调和形式只能是 E 型和 O 型。

O 型 令 $\psi_O^{(q)} = f dx \wedge \tilde{\varphi}^{(q-1)}$ 调和形式 是一个 O 型解。那么，$\mathcal{F}_{2,\ 0}^{q}f \equiv \mathcal{F}_{\alpha_{m+1-q},\ 0}f = 0$。根据注 5.2.1 具体算子属于以下类型之一：$F_{\alpha,\ 0;0}$ 或 $F_{\alpha,\ 0;0,\ 0}$，其中有某个 $\alpha \neq \frac{1}{2}$，此外还有一些特殊情形，此时 $\alpha = \frac{1}{2}$，这就归结为正则情形 $F_{\frac{1}{2},\ 0;\ \delta,\ 0}$，$\delta = 0,\ \frac{\pi}{2}$。根据定理 A.4.2，这些算子的核均为平凡核，因此不存在 O 型调和形式。

E 型 令 $\psi_E^q = f\beta$ 调和形式 是一个 E 型解。那么，$\mathcal{F}_{1,0}^{q}f = \mathcal{F}_{\alpha_q,0}f = 0$。根据注 5.2.1，具体算子属于以下类型之一：$F_{\alpha,0;\frac{\pi}{2}}$ 或 $F_{\alpha,0;0,\frac{\pi}{2}}$，其中有某个 $\alpha \neq \frac{1}{2}$，此外还有一些特殊情形，此时 $\alpha = \frac{1}{2}$，这就归结为正则情形 $F_{\frac{1}{2},0;\delta,\frac{\pi}{2},\delta = 0,\frac{\pi}{2}}$。我们根据注 5.2.1 中的分类逐一讨论，并利用定理 A.4.2 中给出的相关算子的核的结果。E 型解仅在以下情形出现：1) $3 \leq \kappa$，2) $\frac{3}{2} \leq \kappa < 3$，以及 3) $1 < \kappa < \frac{3}{2}$。由于论证过程总是相同的，我们仅详细讨论最困难的情形 3)。因此，令 $1 < \kappa < \frac{3}{2}$。那么：

(1) $m = 2p-1$: （a） $q \neq p-1$，算子为 $F_{\alpha_q,0;\frac{\pi}{2}}$，其核由常函数生成，当 $\alpha_q < \frac{1}{2}$ 时成立，即 $q \leq p-1$；否则核为零。（b） $q = p-1$，算子为 $F_{0,0;0,\frac{\pi}{2}}$，其核由常函数生成。（2） $m = 2p$: （a） $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^c$: （i） $q \neq p$，算子为 $F_{\alpha_q,0;\frac{\pi}{2}}$，其核由常函数生成，当 $\alpha_q < \frac{1}{2}$ 时成立，即 $q \leq p-1$；否则核为零。（ii） $q = p$，算子为 $F_{\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}$，其核为零。（b） $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$: （i） $q \neq p$，算子为 $F_{\alpha_q,0;\frac{\pi}{2}}$，其核由常函数生成，当 $\alpha_q < \frac{1}{2}$ 时成立，即 $q \leq p-1$；否则核为零。（ii） $q = p$，算子为 $F_{\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$，其核由常函数生成，

综上可见，核不依赖于 κ，且总是由边界上限制的常值延拓生成。证明至此结束。

□

5.4. 算子$\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}$的特征函数与谱。

命题 5.4.1. 将$\mathfrak{f}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_q,n,\pm}(x,\lambda)$记为微分方程$\mathcal{F}^q_{1,\tilde{\lambda}_q,n}f=\lambda f$的两个线性无关解，如命题 A.0.4 和 A.0.5 中所述并经过归一化。将$m_{\mathrm{cex},q,n}$记为$\tilde{\mathcal{E}}^{(q)}_{\tilde{\lambda}_q\,n}$,,cex 的秩。当$\alpha\neq\frac{1}{2}$时，将函数$\mathfrak{f}_{\alpha,\tilde{\lambda},+}(l,\lambda)$的非零零点记为$\ell_{\alpha,\tilde{\lambda},k}$，并将函数$\mathfrak{f}'_{\alpha,\tilde{\lambda},+}(l,\lambda)$的非零零点记为$\ell_{\alpha,\tilde{\lambda},k}$。当$\alpha=\frac{1}{2}$,$\ell_{\frac{1}{2},0,+,k}=\left(\frac{\pi}{l}k\right)^2$,$\ell_{\frac{1}{2},-,k}=\left(\frac{\pi}{2l}\left(2k-1\right)\right)^2$时，交叉霍奇–拉普拉斯算子$\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$,abs 在$C_{0,l}(W)$上、在$\partial C_{0,l}(W)$上满足绝对边界条件时，其谱的正部分如下。若$m=2p-1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_+\Delta^{(q)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}=&\mathrm{Sp}_+\Delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}\\&=\left\{m_{\mathrm{cex},q,n}:\hat{\ell}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{cex},q-1,n}:\hat{\ell}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_{q-1,n}k}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\\&\cup\left\{m_{\mathrm{cex},q-1,n}:\ell_{-\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_{q-1,n},k}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{cex},q-2,n}:\ell_{-\alpha_{q-2},\tilde{\lambda}_{q-2,n},k}\right\}_{n,k=1}^{\infty}\\&\cup\left\{m_{\mathrm{har},q}:\ell_{-\alpha_{q-1},0,k}\right\}_{k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{har},q-1}:\ell_{-\alpha_{q-2},0,k}\right\}_{k=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

如果$m=2p$，则$\mathrm{Sp}_+\Delta^{(q)}_{\mathfrak{m}}$,绝对边界条件$=\mathrm{Sp}_+\Delta^{(q)}_{\mathfrak{m}^c}$,绝对边界条件对于所有满足$(\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n})\neq(\frac{1}{2},0)$的特征值，其形式与奇数情形相同，即对于$(m,q)\neq(2p,p)$，$(2p,p+1)$。当$(\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,0})=(\frac{1}{2},0)$（即$m=2p$，且$q=p$和$q=p+1$）时，最后一行中特征值的集合，即与截面的调和形式相关联的那些特征值，给出如下:

- $in\ \mathrm{Sp}_+\Delta^{(p)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}$: $\left\{m_{\mathrm{har},p}:\ell_{\frac{1}{2},0,+,k}\right\}_{k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{har},p-1}:\ell_{-\alpha_{p-2},0,k}\right\}_{k=1}^{\infty}$;
- $in\ \mathrm{Sp}_+\Delta^{(p+1)}_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}$: $\left\{m_{\mathrm{har},p+1}:\ell_{-\alpha_p,0,k}\right\}_{k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{har},p}:\ell_{\frac{1}{2},0,+,k}\right\}_{k=1}^{\infty}$;
- $in\ \mathrm{Sp}_+\Delta^{(p)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}$: $\left\{m_{\mathrm{har},p}:\ell_{\frac{1}{2},0,-,k}\right\}_{k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{har},p-1}:\ell_{-\alpha_{p-2},0,k}\right\}_{k=1}^{\infty}$;
- $in\ \mathrm{Sp}_+\Delta^{(p+1)}_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}$: $\left\{m_{\mathrm{har},p+1}:\ell_{-\alpha_p,0,k}\right\}_{k=1}^{\infty}\cup\left\{m_{\mathrm{har},p}:\ell_{\frac{1}{2},0,-,k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

证明。该结果可通过考察引理 5.1.2 中所描述的、属于相关算子定义域的所有那些特征值方程的形式解得到：因为它们及其外微分和对偶外微分都需要平方可积，并且要根据第 4.3 节满足适当的边界条件。我们在第 5.1.5 小节讨论了平方可积性。我们注意到，所有 + 解都是平方可积的，而平方可积的 - 解仅属于 E 型和 O 型，并且在偶数维$m=2p$中只出现在某些次数中。因此考虑边界条件。根据$\mathfrak{f}_{\alpha,\tilde{\lambda},+}$的行为（命题 A.0.4 和 A.0.5），所有 + 解都满足喇叭尖端处的边界条件。接下来考虑喇叭边界处的边界条件。首先，假设$m=2p-1$。将$x=l$处的边界条件应用于 I+ 型解，我们得到方程$\hat{\mathfrak{f}}'_{\alpha,\tilde{\lambda},+}(x,\lambda)|_{x=l}=0$，从而得到第一组特征值$\ell_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}$,$n,k=1$，2，.....。ˆ 类似地，II+ 型解给出特征值$\ell_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}$,$n,k=1$，2，.....，III+ 型解给出特征值$\ell_{-\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_{q-1,n},k}$,$n,k=1$，2，.....，而 IV+ 型解给出特征值$\ell_{-\alpha_{q-2},\tilde{\lambda}_{q-2,n},k}$。E 型+ 解给出特征值$\ell_{-\alpha_{q-1},0,k,n}$,$k=1$，2，.....，而 O 型+ 解给出特征值$\ell_{-\alpha_{q-2},0,k}$,$n,k=1$，2，.....。接下来，

假设 $m=2p$。在次数 p 中，E 型形式为 $\psi_{E,+}(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和，和$\psi_{E,-}(x,\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和，二者均平方可积。E+ 满足 $x=0$ 处的边界条件（对于 $\Delta_{\mathfrak{m}^c}^{(p)}$，绝对边界条件），应用 $x=l$ 处的边界条件后，我们得到集合 $\ell_{\frac{1}{2}},0,-,k$, $k=1,2,\ldots$；E- 形式不满足 $x=0$ 处的边界条件（对于 $\Delta_{\mathfrak{m}^c}^{(p)}$，绝对边界条件）。类似地，E- 形式满足 $x=0$ 处的边界条件（对于 $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(p)}$，绝对边界条件），应用 $x=l$ 处的边界条件后，我们得到集合 $\ell_{\frac{1}{2}},0,+,k, k=1,2,\ldots$。在次数 $p+1$ 中，O 型形式为 $\psi_{O,+}(x,\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)dx\wedge\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和，$\psi_{O,-}(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)dx\wedge\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和，二者均平方可积。O+ 满足 $x=0$ 处的边界条件（对于 $\Delta_{\mathfrak{m}^c}^{(p+1)}$，绝对边界条件），应用 $x=l$ 处的边界条件后，我们得到集合 $\ell_{\frac{1}{2}},0,+,k$, $k=1,2,\ldots$；O- 形式不满足 $x=0$ 处的边界条件（对于 $\Delta_{\mathfrak{m}^c}^{(p+1)}$，绝对边界条件）。类似地，O- 形式满足 $x=0$ 处的边界条件（对于 $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(p+1)}$，绝对边界条件），应用 $x=l$ 处的边界条件后，我们得到集合 $\ell_{\frac{1}{2}},0,-,k$, $k=1,2,\ldots$。□

注 5.4.2. 利用截面上的庞加莱对偶性：$\lambda_{q,n} = \lambda_{(m+1-q)-2,n}$ 以及 $\alpha_q = -\alpha_{(m+1-q)-2}$，我们得到 $\mathrm{Sp}_+\Delta_{\mathfrak{p}}^{q}{}_{,\text{绝对边界条件}} = \mathrm{Sp}_+\Delta_{\mathfrak{p}^c}^{m+1-q}{}_{,\text{相对边界条件}}$。

命题 5.4.3. 按照命题 *5.4.1*中的记号，算子 $\Delta_{\mathfrak{p},\delta}^{(q)}$,的特征形式如下所示。在维数 $m=2p-1$ 中，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}ig_+(\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{(q)}) = \Big\{&\psi_{E,+}^{(q)}(x,\ell_{-\alpha_{q-1},0,k}), \psi_{O,+}^{(q)}(x,\ell_{-\alpha_{q-2},0,k}),\\ &\psi_{I,\tilde{\lambda}_{q,n},+}^{(q)}(x,\hat{\ell}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}), \psi_{II,\tilde{\lambda}_{q-1,n},+}^{(q)}(x,\hat{\ell}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_{q-1,n},k}),\\ &\psi_{III,\tilde{\lambda}_{q-1,n},+}^{(q)}(x,\ell_{-\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}_{q-1,n},k}), \psi_{IV,\tilde{\lambda}_{q-2,n},+}^{(q)}(x,\ell_{-\alpha_{q-2},\tilde{\lambda}_{q-2,n},k}).\Big\},\end{aligned}$$

在维数 $m=2p$ 中，所有次数 $q\neq p,p+1$ 的特征形式均与奇数情形（$m=2p-1$）相同。在其余情形，即 $m=2p$ 且 $q=p$ 或$q=p+1$时，I、II、III 和 IV 型的特征形式与取适当 q 值的奇数情形相同，而 E 型和 O 型特征形式如下：

(1) $\mathcal{E}ig_+(\Delta_{\mathfrak{m},}^{(p)}{}_{\text{绝对边界条件}})$中的 E 型和 O 型形式：$\psi_{E,-}^{(p)}(x) = \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和，以及$\psi_{O,+}^{(p)}(x,\ell_{-\alpha_{p-2},0,k})$; (2) $\mathcal{E}ig_+(\Delta_{\mathfrak{m}}^{(p+1)}{}_{,\text{绝对边界条件}})$中的 E 型和 O 型形式：$\psi_{E+}^{(p+1)}(x,\ell_{-\alpha_{p+1},0,k})$，以及 $\psi_{O-}^{(p+1)}(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx\wedge\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和；(3) $\mathcal{E}ig_+(\Delta_{\mathfrak{m}^c}^{(p)}{}_{,\text{绝对边界条件}})$中的 E 型和 O 型形式：$\psi_{E,+}^{(p)}(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}x\right)\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和，以及$\psi_{O,+}^{(p)}(x,\ell_{-\alpha_{p-2},0,k})$; (4) $\mathcal{E}ig_+(\Delta_{\mathfrak{m}^c}^{(p+1)}{}_{,\text{绝对边界条件}})$中的 E 型和 O 型形式：$\psi_{E+}^{(p+1)}(x,\ell_{-\alpha_{p+1},0,k})$，以及 $\psi_{O+}^{(p+1)}(x) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}x\right)dx\wedge\tilde{\varphi}^{(p)}$ 调和。

5.5. 算子$\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}$的谱性质。
命题 5.5.1。算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{q}$,边界条件 具有紧预解式。

证明。 考虑上述分解中的单项 $\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$,$j_1,\tilde{\lambda}_2,j_2$ ，方程（4.1）中对其进行了描述。它由一对斯图姆-刘维尔算子组成，其核见命题A.3.2。直接根据特征值方程的解的性质计算积分（参见推论A.3.3），可知这些核是平方可积的。因此，算子 $\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$,$j_1,\tilde{\lambda}_2,j_2$ 具有紧预解式。现在，注意到算子序列

$$\Delta_n^{(q)} = \bigoplus_{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2=0}^{\tilde{\lambda}_n} \bigoplus_{j_1,j_2} \Delta_{\tilde{\lambda}_1,j_1,\tilde{\lambda}_2,j_2}^{(q)},$$

收敛到算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}$,边界条件 （在 L^2 范数下），即 $\left\|\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}} - \Delta_n^{(q)}\right\| \to 0$。但是，每个算子 Δ_n 的预解式都是有界有限秩算子。因此， $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}$,边界条件 的紧性可由定理 6.例如得出。5]

命题 5.5.2。命题 *5.4.1* 中描述的特征值族及命题 *5.4.3*中描述的相应特征形式，连同命题 *5.3.2* 中描述的调和形式，确定了算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}^{(q)}$,边界条件的谱分解。

证明。 例如，由 [39,], 可知这一点，因为根据命题5.5.1，预解式是紧的。或者，注意到 Hodge-拉普拉斯算子在与截面的特征值偶对 $\Delta_{\tilde{\lambda}_1}^{(q)}$,$\tilde{\lambda}_2$ (见方程 (4.1))相关的有限维空间上的投影˜ ˜(λ_1,λ_2)根据推论 A.3.3具有谱分解。然后，将该谱分解中截面上的 Hodge-拉普拉斯算子的特征形式与之作张量积，便得到锥上平方可积微分形式空间的一组完备正交基，其元素均为 Hodge-拉普拉斯算子的特征形式，符合所需结论。注意，所有这些微分形式都是光滑的。 □

5.6. 算子 Δ_{d}、 Δ_{δ}、以及$\Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{p},\mathrm{rel}}$、$\Delta_{\delta,\mathfrak{p},\mathrm{abs}}$的调和形式与调和场。注意，对于算子 Δ_{d}、Δ_{δ}以及$\Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{p},\mathrm{rel}}$、$\Delta_{\delta,\mathfrak{p},\mathrm{abs}}$，调和形式与调和场相同，参见推论5.6.2。

命题 5.6.1. 我们有如下对应关系：若 $m = 2p-1$，则

$$\ker \mathrm{d}_{\max}^{q} \cap \ker \delta_{\max}^{q} = L_{XY}^{q} \oplus \begin{cases} \{\tilde{\theta} \in \mathcal{H}^q(W)\}, & 0 \le q \le p-1, \\ \{0\}, & q = p, \\ \{h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\theta} \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{H}^{q-1}(W)\}, & p+1 \le q \le 2p; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ker \Delta_{\mathrm{d}} &= \ker \mathrm{d}_{\min}^{q} \cap \ker \delta_{\max}^{q} = \ker \mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}^{q} \cap \ker \delta_{\max}^{q} \\ &= \begin{cases} \{0\}, & 0 \le q \le p, \\ \{h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\theta} \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{H}^{q-1}(W)\}, & p+1 \le q \le 2p; \end{cases} \\ \ker \Delta_{\delta} &= \ker \delta_{\min}^{q} \cap \ker \mathrm{d}_{\max}^{q} = \ker \mathrm{d}_{\max}^{q} \cap \ker \delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}^{q} \\ &= \begin{cases} \{\tilde{\theta} \in \mathcal{H}^q(W)\}, & 0 \le q \le p-1, \\ \{0\}, & p \le q \le 2p; \end{cases} \end{aligned}$$

若 $m=2p$，则

$$\ker \mathrm{d}^q_{\max}\cap\ker\delta^q_{\max}=L^q_{XY}\oplus\begin{cases}\{\tilde\theta\in\mathcal{H}^q(W)\}, & 0\le q\le p,\\ \{h^{2\alpha_{q-1}-1}dx\wedge\tilde\theta\mid\tilde\theta\in\mathcal{H}^{q-1}(W)\}, & p+1\le q\le 2p+1;\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\ker\Delta_{\mathrm{d}}&=\ker\mathrm{d}^q_{\min}\cap\ker\delta^q_{\max}=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}\cap\ker\delta^q_{\max}\\&=\begin{cases}\{0\}, & 0\le q\le p,\\ \{h^{2\alpha_{q-1}-1}dx\wedge\tilde\theta\mid\tilde\theta\in\mathcal{H}^{q-1}(W)\}, & p+1\le q\le 2p+1;\end{cases}\\ \ker\Delta_{\delta}&=\ker\delta^q_{\min}\cap\ker\mathrm{d}^q_{\max}=\ker\mathrm{d}^q_{\max}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}\\&=\begin{cases}\{\tilde\theta\in\mathcal{H}^q(W)\}, & 0\le q\le p,\\ \{0\}, & p+1\le q\le 2p+1;\end{cases}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}L^q_{XY}=\Big\{&f\tilde D\tilde\omega+dx\wedge f^I\tilde\omega\mid\tilde\omega\in\operatorname{Im}\tilde{\mathcal{D}}^q, f\in AC_{\mathrm{loc}}((0,l]),\\&f\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_q}), f^I\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha_{q-1}}), \mathcal{F}_{\alpha_{q-1},\tilde\lambda}f=0\Big\}.\end{aligned}$$

此外，若 $m=2p-1$，则

$$\begin{aligned}\ker\Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{p},\mathrm{rel}}&=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}\cap\ker\delta^q_{\max},\\ \ker\Delta_{\delta,\mathfrak{p},\mathrm{abs}}&=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}=\ker\mathrm{d}^q_{\max}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}};\end{aligned}$$

而若 $m=2p$，则

$$\ker\Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{m},\mathrm{rel}}=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}=\begin{cases}\{0\}, & 0\le q\le p+1,\\ \{h^{2\alpha_{q-1}-1}dx\wedge\tilde\theta\mid\tilde\theta\in\mathcal{H}^{q-1}(W)\}, & p+2\le q\le 2p+1;\end{cases}$$

$$\ker\Delta_{\delta,\mathfrak{m},\mathrm{abs}}=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}}=\ker\mathrm{d}^q_{\max}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{m},\mathrm{abs}},$$

and

$$\begin{aligned}\ker\Delta_{\mathrm{d},\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}&=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}}\cap\ker\delta^q_{\max},\\ \ker\Delta_{\delta,\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}&=\ker\mathrm{d}^q_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}\cap\ker\delta^q_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{abs}}=\begin{cases}\{\tilde\theta\in\mathcal{H}^q(W)\}, & 0\le q\le p-1,\\ \{0\}, & p\le q\le 2p+1.\end{cases}\end{aligned}$$

证明。 通过比较命题 3.7.2 和3.7.4中给出的核的描述，我们立即得到 $\ker\mathrm{d}^q_{\max}\cap$ 核 $\delta^q_{\max}=K_E\oplus H_O\oplus L_{XY}$， 其中

$$\begin{aligned}K^q_E=&\{\tilde\theta\in\mathcal{H}^q(W)\mid 1\in L^2(h^{1-2\alpha_q})\},\\ H^q_O=&\{h^{2\alpha_{q-1}-1}dx\wedge\tilde\theta\mid\tilde\theta\in\mathcal{H}^{q-1}(W)\mid h^{2\alpha_{q-1}-1}\in L^2(h^{1-2\alpha_{q-1}})\},\\ L^q_{XY}=&K^q_X\cap H^q_Y.\end{aligned}$$

考虑到 E 型和 O 型微分形式的平方可积性，我们根据维数 m的奇偶性得到两个不同的公式。根据注 5.1.4，该空间 L_{XY} 由以下微分形式组成

$$\omega=h^{2\alpha_{q-1}+1}(h^{1-2\alpha_{q-1}}f^I)^I\tilde\varphi+dx\wedge f^I\tilde{\mathcal{D}}\tilde\varphi=f\tilde D\tilde{\mathcal{D}}\tilde\varphi+dx\wedge f^I\tilde{\mathcal{D}}\varphi,$$

其中 f 是方程 $\mathcal{F}_{\alpha_{q-1},\tilde\lambda}f=0$的解，因此它是光滑的。这就完成了极大算子公式的证明。

接下来，我们证明，如果 $\omega \in L_{XY}$ 属于 $\mathrm{d}_{\min}$, $\delta_{\min}$ 的定义域、$\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}$ 或$\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}$ 的定义域，那么 $\omega = 0$。注意到

$$0 = \int_0^l h^{1-2\alpha_{q-1}}(\mathcal{F}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda}} f) f = [h^{1-2\alpha_{q-1}} f f']_0^l + \int_0^l h^{1-2\alpha_{q-1}} f'^2 + \tilde{\lambda}^2 \int_0^l h^{-1-2\alpha_{q-1}} f^2.$$

由于 $\lambda \neq 0$， f 在 $x = 0$ 附近的行为可由定理 + （取A.0.4给出的解），因此

$$\lim_{x\to 0^+} (h^{1-2\alpha_{q-1}} \mathfrak{f}_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda},+} \mathfrak{f}'_{\alpha_{q-1},\tilde{\lambda},+})(x) = 0.$$

因此，边界项在 $x = 0$ 处消失。在 $x = l$ 处消失则由 $x = l$ 处的边界条件推出（相对边界条件意味着 $f(l) = 0$，绝对边界条件意味着 $f'(l) = 0$）。这表明 $f' = 0$，因此 $\lambda = 0$，进而 $\omega = 0$。

最后一点是关于其他微分形式的边界条件。一方面，根据给定公式，$\mathrm{d}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}$ 以及 $\mathrm{d}_{\min}$或 $\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}$ 和 $\delta_{\min}$ 在 $x = l$ 处的边界条件分别排除了 E 解和 O 解。另一方面，这些微分形式显然满足它们在 $x = 0$ 处的边界条件，因此公式的证明至此完成。

最后，考虑 $\ker \mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} \cap \ker \delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}$。取 $\alpha \in \ker \mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} \cap \ker \delta^q_{\max}$，那么 α 必须验证 $\delta_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}}$ 定义中的边界条件。这意味着

$$bv^{(q)}_{\mathrm{abs}}(x_0)(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} (h^{1-2\alpha_{q-1}} f_1 a_2)(x)(\tilde{\omega}_1, \tilde{\alpha}_2)_W,$$

对所有 $\omega = f_1\tilde{\omega}_1 + dx \wedge f_2\tilde{\omega}_2 \in \mathrm{D}(\mathrm{d}^{(q-1)}_{\max})$，其中 $\alpha = a_1(x)\tilde{\alpha}_1(y) + a_2(x)dx \wedge \tilde{\alpha}_2(y)$，且次数适当。在这些次数下，$\alpha = h^{2\alpha_{q-1}-1} dx \wedge \tilde{\theta}$，所以我们有

$$bv^{(q)}_{\mathrm{abs}}(x_0)(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} f_1(x)(\tilde{\omega}_1, \tilde{\theta})_W.$$

f_1 在 $x = 0$ 附近的行为由引理 3.2.3(2) 给出。因此，对所有 $\alpha_{q-1} \neq \frac{1}{2}$，极限均为零。因此，极限可能非零的唯一情形是$m = 2p$，且 $q = p + 1$。然而，如果 $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}^c, 2p)$，那么仅当$q \geq p + 2$时才要求满足边界条件，因此对于 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha \in D(\delta_{\mathfrak{m}^c,\mathrm{rel}})$，不要求满足边界条件。最后一种情形是 $(\mathfrak{p}, m) = (\mathfrak{m}, 2p)$：此时当 $q \geq p + 1$ 时要求满足边界条件，由此得到 $\alpha_{q-1} \geq \frac{1}{2}$。因此，如果 $\alpha_{q-1} = \frac{1}{2}$，即 $q = p + 1$，那么 $f_1(x)$ 是一个非零常数，所以极限不为零，且不满足边界条件，并且 α 不属于 $\ker \mathrm{d}^q_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}} \cap \ker \delta^q_{\mathfrak{m},\mathrm{rel}}$。这就完成了对此同一性的证明。另一个同一性的证明类似。□

在下面的推论中，我们为调和场空间引入统一的记号。

推论 5.6.2。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^q_{\mathfrak{p}}(Z^\kappa_l(W)) &= \ker \Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}} = \ker \Delta^{(q)}_{\delta,\mathfrak{p},\mathrm{abs}} = \ker \mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}} \cap \ker \delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}},\\
\mathcal{H}^q_{\mathfrak{p}}(Z^\kappa_l(W), W) &= \ker \Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} = \ker \Delta^{(q)}_{\mathrm{d},\mathfrak{p},\mathrm{rel}} = \ker \mathrm{d}^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}} \cap \ker \delta^q_{\mathfrak{p},\mathrm{rel}},\\
\mathcal{H}^q(Z^\kappa_l(W)) &= \ker \Delta^{(q)}_{\mathrm{d}} = \ker \mathrm{d}^q_{\min} \cap \ker \delta^q_{\max},\\
\mathcal{H}^q(Z^\kappa_l(W), W) &= \ker \Delta^{(q)}_{\delta} = \ker \mathrm{d}^q_{\max} \cap \ker \delta^q_{\min}.
\end{aligned}$$

下一个结果是本节分析的一个推论。

定理 5.6.3. 算子偶对 $(\Delta^{(q)}$ d $\mathfrak{p}$,相对, $\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$,相对) 和 $(\Delta^{(q)}_{\delta}$,$\mathfrak{p}$,绝对边界条件, $\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$,绝对边界条件) 具有相同的谱分解，因此二者相同。

证明。 该结果由对算子 $\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$ 、bc 上述描述的、命题 5.5.2中给出的谱分解，并验证特征形式属于算子 $\Delta^{(q)}$ d $\mathfrak{p}$、rel 和 $\Delta^{(q)}_{\delta}$ 、$\mathfrak{p}$、abs的定义域4.1.1而得。核的等价性见推论 5.6.2。 □

6. Harmonic fields, de Rham maps and RS torsion

显然，底层拓扑空间 X 的组合分解不依赖于其度量结构的类型。因此，同一分解可适用于任意类型的孤立奇点。具有孤立奇点和适当边界的 n 维伪流形，是一个带边界的 n 维伪流形 K，满足其内部存在一个（有限的）0-胞腔子集 $\Sigma = \{x_0, \dots, x_k\}$，使得 $K - \Sigma$ 是一个带边界的 n 维同调流形。具有孤立奇点和适当边界的 n 维空间，是一个拓扑空间 X，它具有 CW 分解 K，其中 K 是具有孤立奇点和适当边界的 n 维伪流形 [33] [29] [40] [43]。具有孤立奇点的 n 维伪流形 K，是通过对每个 k，将锥 $C(N_k)$ 黏附到 N_k 上而得到的正则 CW 复形 M 的推出；该复形是一个带边界的同调 n-流形 $\partial M = N_1 \sqcup \cdots \sqcup N_k$。我们将 $K = M \sqcup_{N_0} C(N_0)$ 的分解称为 X 的典范分解，其中 $N_0 = \mathrm{Link}(x_0)$，$M = K - C(N_0)$；注意，如果 K 具有边界 L，则 $N_0 = \partial M - (\partial M \cap L)$。如果奇异点的链接不是球面，则由任意组合分解诱导的经典链复形将不满足由流形三角剖分所诱导的链复形所满足的经典对偶性质。然而，可以定义一个适当的链复形，使其同调满足对偶性。这就是 Goresky 和 MacPherson 的交叉同调 [15] [16] [22]。这种链复形通过选取与奇异点相交的胞腔来定义（有关细节，请参阅 [43] 中的构造，或参阅原始著作 [15], ，其中给出了一个等价但略有不同的构造）。该链复形及其同调群取决于一个分次整数，称为反常度。我们主要关注两种反常度：较低的中间反常度 $\mathfrak{m} = \{\mathfrak{m}_j = [j/2] - 1\}_{j=2}^{n}$ 及其互补反常度 $\mathfrak{m}^c_j = j - \mathfrak{m}_j - 2$。于是，存在一个链复形，其同调称为交叉同调，如下所示（$m + 1 = n$）。

命题 6.0.1. 设 N 是一个正则定向 CW 复形，也是一个同调 m-流形； $C(N)$ 是覆盖 N 的锥。若 $(m, \mathfrak{p}) = (2p - 1, \mathfrak{p})$，且 $(2p, \mathfrak{m}^c)$，则

$$I^{\mathfrak{p}} H_q(C(N)) = \begin{cases} H_q(N), & 0 \le q \le p-1, \\ 0, & p \le q \le m+1, \end{cases}$$

$$I^{\mathfrak{p}} H_q(C(N), N) = \begin{cases} 0, & 0 \le q \le p, \\ H_q(C(N), N) = H_{q-1}(N), & p+1 \le q \le m+1, \end{cases}$$

若 $(m,\mathfrak{p})=(2p,\mathfrak{m})$，则

$$I^{\mathfrak{p}}H_q(C(N))=\begin{cases}H_q(N), & 0\le q\le p,\\ 0, & p+1\le q\le 2p+1,\end{cases}$$

$$I^{\mathfrak{m}^c}H_q(C(N),N)=\begin{cases}0, & 0\le q\le p+1,\\ H_q(C(N),N)=H_{q-1}(N), & p+2\le q\le 2p+1;\end{cases}$$

命题 6.0.2. 设 K 是一个具有孤立奇点且无边界的 n-伪流形。设 $K=M\sqcup C(N)$ 是 K 的标准分解。若 $(m,\mathfrak{p})=(2p-1,\mathfrak{p}),\ (2p,\mathfrak{m}^c)$，则

$$I^{\mathfrak{p}}H_q(K)=\begin{cases}H_q(M) & 0\le q\le p-1,\\ \mathrm{Im}\,(p_*:H_p(M)\to H_p(M,\partial M)), & \\ H_q(K) & p+1\le q\ge m+1,\end{cases}$$

若 $(m,\mathfrak{p})=(2p,\mathfrak{m}^c)$，则

$$I^{\mathfrak{m}^c}H_q(K)=\begin{cases}H_q(M) & 0\le q\le p,\\ \mathrm{Im}\,(p_*:H_{p+1}(M)\to H_{p+1}(M,\partial M)), & \\ H_q(K) & p+2\le q\ge m+1,\end{cases}$$

其中 $p\colon\ M\to M/\partial M$ 是商空间上的典范投影，而该等价关系由包含映射 $M\to K$ 诱导。

对于此同调，我们有以下对偶同构（详见 [21]，或参见原始著作 [15]）：

$$I^{\mathfrak{p}}\mathcal{Q}'_{*,q}:H_q(I^{\mathfrak{p}}\mathsf{C}_\bullet(C(N)))\to H^\dagger_{m+1-q}(I^{\mathfrak{p}^c}\mathsf{C}_\bullet(C(N),N)),$$
$$I^{\mathfrak{p}}\mathcal{Q}_{*,q}:H_q(I^{\mathfrak{p}}\mathsf{C}_\bullet(K))\to H^\dagger_{m+1-q}(I^{\mathfrak{p}^c}\mathsf{C}_\bullet(K^*)).$$

回顾一下，$C(N)$ 是 $Z^\kappa_l(W$的一个三角剖分，因此 K 是 X的一个三角剖分。因此，前面的结果给出了有限喇叭以及具有喇叭奇点的空间 X 的交叉同调。比较命题 6.0.1 和 6.0.2 与定理 3.7.5 和 3.7.6，可知具有喇叭奇点的空间的交叉同调（取实系数时）与德拉姆上同调一致。我们希望在 X 上定义德拉姆映射，使其扩展 Y上的经典德拉姆映射。对于有限喇叭，这可通过使用调和场得到，见推论 5.6.2。以下命题将此结果推广到 X （假设其无边界）。

命题 6.0.3. 若 $(m,\mathfrak{p})=(2p-1,\mathfrak{m}),(2p-1,\mathfrak{m}^c),(2p,\mathfrak{m}^c)$，则存在一个同构（这里 $i\colon\partial Y\to Y$ 表示边界的自然包含映射）

$$\ker \mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{p}}\cap\ker\delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}=\begin{cases}\ker \mathrm{d}^{(q)}_{Y,\max}\cap\ker\delta^{(q)}_{Y,\min}, & 0\le q\le p-1,\\ \{\theta\in\ker \mathrm{d}^{(q)}_{Y,\max}\cap\ker\delta^{(q)}_{Y,\min}\mid[i^*\theta]=0\in H^p(\partial Y)\}, & q=p,\\ \ker \mathrm{d}^{(q)}_{Y,\min}\cap\ker\delta^{(q)}_{Y,\max}, & p+1\le q\le m+1,\end{cases}$$

若 $(m,\mathfrak{p})=(2p,\mathfrak{m})$，则

$$\ker \mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{p}}\cap\ker\delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}=\begin{cases}\ker \mathrm{d}^{(q)}_{Y,\max}\cap\ker\delta^{(q)}_{Y,\min}, & 0\le q\le p,\\ \{\theta\in\ker \mathrm{d}^{(q)}_{Y,\max}\cap\ker\delta^{(q)}_{Y,\min}\mid[i^*\theta]=0\in H^p(\partial Y)\}, & q=p+1,\\ \ker \mathrm{d}^{(q)}_{Y,\min}\cap\ker\delta^{(q)}_{Y,\max}, & p+2\le q\le m+1,\end{cases}$$

证明。由定理 4.5.1，$\ker \Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}} = \ker \mathrm{d}^{(q)}_{\mathfrak{p}} \cap \ker \delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$。此外，很明显，推论 5.6.2 可推广到 X，因此我们可以定义 $\mathcal{H}^{(q)}_{\mathfrak{p}}(X) = \ker \Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}} = \ker \Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$。取 $\omega \in \ker \Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}}$，则 ω 在 $\mathfrak{C}$ 上的限制 $\omega|_{\mathfrak{C}} = f_1\tilde{\omega}_1 + f_2 dx \wedge \tilde{\omega}_2$ 是 $\mathfrak{C}$ 的调和形式。因此，$\omega|_{\mathfrak{C}}$ 属于命题 5.1.1 中描述的类型。此外，由于 $\omega|_{\mathfrak{C}}$ 是闭且余闭的，它必定属于以下类型之一：E_0（常数 f）、O_0（$f = h^{1-2\alpha_{q-1}}$）或 XY=II=III。并且，直接验证可知，只要这些形式是平方可积的，它们在 $x = x_0$ 处总是满足边界条件。

考虑局部上属于 E_0 或 O_0类型的微分形式。当 $\alpha_q < 1$时，E_0型微分形式平方可积，且其法向分量为零，因此它们在 Y 上的限制表示 Y的一个非平凡绝对上同调类。O_0 型微分形式在 $\alpha_q > 1$时平方可积，且其切向分量为零，因此它们在 Y 上的限制表示一个非平凡相对上同调类。反之亦然，这一点也显而易见，因此这就证明了所有非临界次数下的结论。

˜接下来，考虑局部属于 XY 型的微分形式，$\omega|_{\mathfrak{C}} = fD\tilde{\omega} + dx \wedge f'\tilde{\omega}$。取 +解 f，这些微分形式平方可积，并满足 $x = 0$ 处的边界条件（使用定理 A.0.4）。考虑限制 $\psi_Y = \omega|_Y$。首先假设 $f_\pm(l) = 0$，或者$f'_\pm(l) = 0$，则（$\mathcal{F}^{q-1}_1$，$\tilde{\lambda}$ f，f）$= 0$，对 $(0, l]$积分可得 $f' = \tilde{\lambda} = 0$，因此 $\omega|_C$恒等于零。但此时，$f(l) = f'(l) = 0$，且由 [39, 2, ω恒等于零。4.1]。剩下的情形是 $f(l)$ $f'(l) \neq 0$。于是，根据 Y上的 Friedrichs 分解，ψ_Y 是一个调和ψ_Y与一个恰当形式之和，其中调和ψ_Y在∂Y 上满足绝对边界条件；而 rel 是一个调和ψ_Y与一个余恰当形式之和，其中调和ψ_Y在∂Y 上满足相对边界条件。这意味着 ψ_Y 和 ψ_Y、abs，以及 ψ_Y 和 ψ_Y、rel 分别属于相同的上同调类。因此，这些微分形式所属的绝对上同调类，是相对上同调类的像。□

特别地，我们可以构造从平方可积微分形式空间到链空间的映射，它们将光滑情形下定义的经典德拉姆映射扩展到此处。以下面的情形为例：$m = 2p$、$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ 和 $0 \leq q \leq p-1$。于是我们可以构造如下同构交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{H}^q_{\mathfrak{m}}(X) & \xrightarrow{\star} & \mathcal{H}^{m-q+1}_{\mathfrak{m}^c}(X) & \overset{I^{\mathfrak{m}^c}\mathcal{A}^{m-q+1}}{\dashrightarrow} & I^{\mathfrak{m}^c}H^{m-q+1}(X) & \xleftarrow{I^{\mathfrak{m}}\mathcal{Q}_{*,q}} & I^{\mathfrak{m}}H_q(X) \\
\uparrow{\scriptstyle k^*} & & \uparrow{\scriptstyle k^*} & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{F}^q_{\mathrm{abs}}(Y) & \xrightarrow{\star_Y} & \mathcal{H}^{m-q}_{\mathrm{rel}}(Y) & \xrightarrow{\mathcal{A}^{m-q}_{\mathrm{rel}}} & H^{m-q}(Y,W) & \xleftarrow{\hat{\mathcal{Q}}_{*,q}} & H_q(Y)
\end{array}$$

ˆ映射 k^* 是上同调中包含映射的逆映射，映射 $\mathcal{Q}_{*,\,q}$ 是标准的庞加莱映射，映射 $I^{\mathfrak{m}}\mathcal{Q}_{*,\,q}$ 是上文定义的对应的奇异情形扩展，而映射 $\mathcal{A}^{m-q}$ 相对 则是光滑情形 [37] 下的经典德拉姆映射。交换性定义了这个同构，也称为德拉姆映射

$$I^{\mathfrak{p}}\mathcal{A}_q : \mathcal{H}^q_{\mathfrak{p}}(X) \to I^{\mathfrak{p}}H_q(X).$$

我们可以定义并计算交链复形的 RS 扭率，记作 $I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z^\kappa_l(W))$。

定理6.0.4. 设 W 是一个无边界、维数为 m的紧致连通可定向黎曼流形。设 $\tilde{\alpha}_\bullet$ 是 $\mathcal{H}^q(W)$ 的一组分次正交归一基，且 $\mathfrak{n}_\bullet$ 是 $H_\bullet(W)$的标准分次基。那么，($r_q = \mathrm{rk} H_q(W;\mathbb{Z})$)

$$I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z_l^\kappa(W)) = \prod_{q=0}^{\mathfrak{a}-2} \gamma_q^{\frac{(-1)^q}{2} r_q} \left|\det\left(\tilde{\mathcal{A}}_q(\tilde{\alpha}_q)/\mathfrak{n}_q\right)\right|^{(-1)^q} (\#TH_q(W;\mathbb{Z}))^{(-1)^q},$$

$$I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z_l^\kappa(W), W) = \prod_{q=\mathfrak{a}-1}^{m} \gamma_q^{\frac{(-1)^q}{2} r_q} \left|\det\left(\tilde{\mathcal{A}}_q(\tilde{\alpha}_q)/\mathfrak{n}_q\right)\right|^{(-1)^q} (\#TH_q(W;\mathbb{Z}))^{(-1)^{q+1}}.$$

定理6.0.5. 设 $X = Z_l^\kappa(W) \sqcup_W Y$是一个具有维数$n = m+1$的喇叭奇点的空间，其中$(Y, W)$是一个维数为 n、边界为 W的紧致连通可定向光滑黎曼流形，则

$$\begin{aligned} I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(X) =& I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z_l^\kappa(W))\tau_{\mathrm{RS}}(Y, W) \\ & \tau_{\mathrm{W}}(I^{\mathfrak{p}}\ddot{\mathcal{H}}; I^{\mathfrak{p}}\mathcal{A}_{\mathrm{abs},\bullet}(I^{\mathfrak{p}}\alpha_{C,\bullet}), I^{\mathfrak{p}}\mathcal{A}_\bullet(I^{\mathfrak{p}}\alpha_{X,\bullet}), \mathcal{A}_{Y,\mathrm{rel},\bullet}(\alpha_{Y,\mathrm{rel},\bullet})), \end{aligned}$$

其中$I^{\mathfrak{p}}\alpha_{Z,q}$、 $\alpha_{Y,\mathrm{rel},q}$和$I^{\mathfrak{p}}\alpha_X$分别是 $\mathcal{H}^q_{\mathfrak{p}}(Z_l^\kappa(W))$、 $\mathcal{H}^q$ 相对(Y)和$\mathcal{H}^q_{\mathfrak{p}}(X)$的正交归一基；$I^{\mathfrak{p}}\mathcal{A}_{\mathrm{abs},q}$ 是 $Z_l^\kappa(W)$上的绝对德拉姆映射，$\mathcal{A}_{Y,\mathrm{rel},q}$ 是 Y上的经典相对德拉姆映射， $I^{\mathfrak{p}}\mathcal{A}_q$ 是 X上的德拉姆映射，而 τ_W 表示同调序列的Whitehead挠率（参见[30]）

$$I^{\mathfrak{p}}\ddot{\mathcal{H}}: \quad \ldots \longrightarrow I^{\mathfrak{p}}H_q(C_{0,l}(W)) \longrightarrow I^{\mathfrak{p}}H_q(X) \longrightarrow H_q(Y, W) \longrightarrow \ldots.$$

7. The analytic torsion

7.1. 扭率ζ函数和解析挠率。设 X 是具有喇叭奇点的空间，$\Delta_{\mathfrak{p},\,\mathrm{bc}}$ 是第 4.3 节中定义的算子之一。根据第 4.4 节的结果，$\mathrm{Sp}_0(\Delta_{\mathfrak{p},\,\mathrm{bc}}^{(q)})$ 是一列正数，其唯一聚点在无穷远处；又由于预解式的某个幂属于迹类，对数伽马函数 $\log\Gamma(\lambda, \mathrm{Sp}_0(\Delta_{\mathfrak{p},\,\mathrm{bc}}^{(q)}))$ 有定义 [41]。由于热算子在 t 趋于零时具有渐近展开式，因此对数伽马函数在 Gamma 趋于无穷大时具有渐近展开式。特别地，相应的ζ函数有定义 [41],

$$\zeta(s, \Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}^{(q)}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_0(\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}^{(q)})} \lambda^{-s},$$

and 有一个在 $s = 0$ 处正则的解析延拓。我们定义挠率 ζ 函数。 n

$$t_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(X)(s) = \sum_{q=0}^{m+1} (-1)^q q\zeta(s, \Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}^{(q)}),$$

并将解析挠率记为 $\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(X) = \frac{d}{ds} t_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(s)\big|_{s=0}$。回顾一下，这些算子定义在取值于某个向量丛 E_ρ 的函数空间上，其中 $\rho: \pi(\overline{X}) \to O(V)$ 是某个正交表示。不过，为简化记号，我们将省略对该表示的明确提及。此外，从现在起，我们假设 X 没有边界，因此 ∂X 处的边界条件为空，并将予以省略。

我们首先证明，关于度量 [37] 的解析挠率的经典变分结果可以推广到空间 X 的情形。设 g_μ 是 X 上的一族光滑度量，使得在 Y 上的限制是一族光滑度量，而在 Z_l^κ（W）上的限制为 $g_\mu|_Z = g_{h_\mu} = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + h_\mu^2\ (x)\ \tilde{g}_\mu$，其中 h_μ 是 $[0,l]$ 上的一族光滑函数，它们在 $[0,l-\epsilon]$ 上重合，且对于某个正数 $\epsilon < \iota$，在 $[0,l]$ 上满足第2.1节中引入的所有假设。分别将相应诱导的霍奇-拉普拉斯算子的解析挠率记为 $T_\mathfrak{p}(X,\ g_\mu)$。接下来的两个结果本质上分别来自 [37] 和 [24], 。

定理7.1.1. 使用上述记号,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\log T_\mathfrak{p}(X,g_\mu) = -\frac{1}{2}\log \|\mathrm{Det}\, I^\mathfrak{p}\alpha_{g_\mu,\bullet}\|^2_{\mathrm{Det}\,\mathcal{H}^\bullet_\mathfrak{p}(X,g_\mu)}$$

其中 $I^\mathfrak{p}\alpha_{g_\mu,\ q}$ 是 $\mathcal{H}^{(q)}_\mathfrak{p}(X,g_\mu)$ =核 $\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\ \mu}$的一组正交归一基。

证明。 根据推论 4.4.4，可得

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}) = -t\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}\right)\mathrm{e}^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}\right),$$

并按照 [37, 第152-153] 页中的方法继续（此处 $\beta^{(q)}_\mu = (\star^{(q)}_\mu)^{-1}\frac{\partial}{\partial_\mu}\star^{(q)}_\mu$）,

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{m+1}(-1)^{q+1}q\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}\right)\mathrm{e}^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}\right) &= \sum_{q=0}^{m+1}(-1)^{q+1}\mathrm{Tr}(\beta^{(q)}_\mu\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}\mathrm{e}^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}})\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_{q=0}^{m+1}(-1)^q\mathrm{Tr}(\beta^{(q)}_\mu\mathrm{e}^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}).\end{aligned}$$

根据定义 [41, 2.3], 算子族 $\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\ \mu}$ 的扭率ζ函数为

$$t_{X,\mathfrak{p}}(s,\mu) = \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^q q\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}} - P_{\ker\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}\right)dt.$$

Then

$$\frac{\partial}{\partial\mu}t_{X,\mathfrak{p}}(s,\mu) = \frac{1}{2}\frac{s}{\Gamma(s)}\sum_{q=0}^{m+1}(-1)^q\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{Tr}\left(\beta^{(q)}_\mu\left(e^{-t\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}} - P_{\ker\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}\right)\right)dt.$$

根据解析挠率的定义，利用热核的渐近展开式

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log T_\mathfrak{p}(X,\mathrm{g}_{X,\mu}) = \frac{\partial}{\partial\mu}t'_{X,\mathfrak{p}}(0,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{m+1}(-1)^{q+1}\left(a_{\frac{m+1}{2}}(\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}) - \mathrm{Tr}\beta^{(q)}_\mu P_{\ker\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}\right).$$

,

由于半整数指标对应的系数为零，利用对偶性 $a_k(\Delta^{(m+1-q)}_{\mathfrak{p}\ \mu},\ ) = a_k(\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p}^c\ \mu},\ )$ [14], , 第一项的和为零，因此我们有

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log T_\mathfrak{p}(X,\mathrm{g}_{X,\mu}) = \frac{\partial}{\partial\mu}t'_{X,\mathfrak{p}}(0,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{m+1}(-1)^q\mathrm{Tr}\beta^{(q)}_\mu P_{\ker\Delta^{(q)}_{\mathfrak{p},\mu}}.$$

□

定理 7.1.2. 设 $X = Z_l^\kappa(W) \sqcup_W Y$是一个维数为$m+1$的喇叭奇点空间，其中$(Y, W)$是一个维数为 $m+1$、边界为 W 的紧致连通可定向光滑黎曼流形。假设度量 g_0在 X上于 W的领圈邻域内是乘积度量。那么，

$$\log T_{\mathfrak{p}}(X, g_0) = \log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W), g_0|_Z) + \log T_{\mathrm{rel}}(Y, g_0|_Y) - \frac{1}{2}\chi(W)\log 2 + \log \tau(\mathcal{H}_0),$$

其中， $\mathcal{H}_0$ 是由包含映射 $Z_l^\kappa(W) \to X$诱导的长同调正合列，配有某个相容的正交分次基。

证明。 根据定理 5.6.3，算子 $\Delta_{\mathfrak{p}}$ 与霍奇-拉普拉斯算子 $\Delta_{\delta,\ \mathfrak{p}}$ （与德·拉姆交叉复形 (D(dᵖ), dᵖ) 相关联）具有相同的谱。这是一个具有有限维谱的希尔伯特复形，根据 [1] 和 [24, 第239页，3-25]。应用 [24]中的定理6.1所需的所有假设均已得到验证。 □

推论 7.1.3. 设 $X = Z_l^\kappa(W) \sqcup_W Y$ 是一个维数为 $m+1$ 的带有喇叭奇点的空间，其中 (Y, W) 是一个维数为 $m+1$、边界为 W 的紧致连通可定向光滑黎曼流形。那么，

$$\log T_{\mathfrak{p}}(X) = \log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W)) + \log T_{\mathrm{rel}}(Y) - \frac{1}{2}\chi(W)\log 2 + \log \tau(\mathcal{H}_0),$$

其中 $\mathcal{H}_0$ 是由包含映射 $Z_l^\kappa(W) \to X$诱导的长同调正合列，并配有某个相容的正交分次基。

7.2. 有限喇叭的解析挠率。本节计算有限喇叭的解析挠率。该计算基于下述引理所描述的分解；引理的证明利用对偶性重新排列扭率ζ函数定义中的各项。

引理 7.2.1. 有限喇叭 $Z_l^\kappa(W)$ 的扭率ζ函数在边界处满足绝对边界条件时，可分解如下：

$$t_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W))(s) = t_0^{(m)}(s) + t_1^{(m)}(s) + t_2^{(m)}(s) + t_{3,\mathfrak{p}}^{(m)}(s),$$

其中

$$\begin{aligned}
t_0^{(m)}(s) =& \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{[\frac{m}{2}]-1}(-1)^q\left((\mathcal{Z}_{q,-}(s) - \hat{\mathcal{Z}}_{q,+}(s)) + (-1)^{m-1}(\mathcal{Z}_{q,+}(s) - \hat{\mathcal{Z}}_{q,-}(s))\right),\\
t_1^{(2p-1)}(s) =& (-1)^{p-1}\frac{1}{2}\left(\mathcal{Z}_{p-1,-}(s) - \hat{\mathcal{Z}}_{p-1,+}(s)\right), \qquad t_1^{(2p)}(s) = 0;\\
t_2^{(m)}(s) =& \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{[\frac{m-1}{2}]}(-1)^{q+1}\left(z_{q-1,-}(s) + (-1)^m z_{q,+}(s)\right),\\
t_3^{(2p-1)}(s) =& 0, \qquad t_{3,\mathfrak{m}^c}^{(2p)}(s) = \frac{(-1)^{p+1}}{2}\zeta_-(s), \quad t_{3,\mathfrak{m}}^{(2p)}(s) = \frac{(-1)^{p+1}}{2}\zeta_+(s),
\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{Z}_{q,\pm}(s)=\sum_{n,k=1}^{\infty} m_{\mathrm{cex},q,n}\ell^{-s}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k},\qquad \hat{\mathcal{Z}}_{q,\pm}(s)=\sum_{n,k=1}^{\infty} m_{\mathrm{cex},q,n}\hat{\ell}^{-s}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k},$$

$$z_{q,\pm}(s)=\sum_{k=1}^{\infty} m_{\mathrm{har},q}\ell^{-s}_{\pm\alpha_q,0,k},\qquad \zeta_{\pm}(s)=\sum_{k=1}^{\infty} m_{\mathrm{har},p}\ell^{-s}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm,k}.$$

接下来，我们分三个主要步骤进行。

7.2.2. 来自简单级数的贡献。$\zeta_{\pm}$ 的分析是经典的。回顾 $\alpha_p=\frac{1}{2}$，以及$\ell_{\frac{1}{2},\,12,\,+,\,k}=\left(\frac{\pi}{l}k\right)^2$和$\ell_{\frac{1}{2},\,12,\,-,\,k}=\left(\frac{\pi}{2l}(2k-1)\right)^2$，可得

$$\zeta_{-}(s)=\left(\frac{\pi}{2l}\right)^{-2s}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{-2s}=\left(\frac{\pi}{2l}\right)^{-2s}\left(\zeta_{\mathrm{R}}(2s)-2^{-2s}\zeta_{\mathrm{R}}(2s)\right),$$

$$\zeta_{+}(s)=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{-2s}\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-2s}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{-2s}\zeta_{\mathrm{R}}(2s).$$

因此 $\zeta'_{+}(0)=-\log 2l$，$\zeta'_{-}(0)=-\log 2$，从而得到

$$(t^{(2p)}_{3,\mathfrak{m}^c})'(0)=\frac{(-1)^p}{2}m_{\mathrm{har},p}\log 2,\qquad (t^{(2p)}_{3,\mathfrak{m}})'(0)=\frac{(-1)^p}{2}m_{\mathrm{har},p}\log 2l.$$

剩下需要处理$z_{q,\,\pm}$。这里，函数$z_{q,\,\pm}(s)$是与简单序列$Y_{q,\,\pm}=\left\{m_{\mathrm{har},q}:\ell_{\pm\alpha_q,0,k}\right\}$相关联的ζ函数；根据引理 5.4.1，数$\ell_{\alpha,0,k}$是函数$\mathfrak{f}_{\alpha,0,+}(l,\lambda)$的零点，也是$F_{\alpha_q,0;0,0}$的特征值，见第 A.1 节。在所有情况下，相关斯图姆–刘维尔方程只出现 + 解，因此无需区分指标方程的根是否重合。注意，在所有情况下核都是平凡的，这由引理 A.4.2 得出。根据引理 A.4.3 及其推论，序列$Y_{q,\pm}(a,b)$的属为零。下面证明它是谱型序列。为此，考虑相应的对数谱伽马函数：

$$\log\Gamma(-\lambda,Y_{q,\pm})=-\log\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{-\lambda}{\ell_{\pm\alpha_q,0,k}}\right).$$

根据 A.6 节中的结果，当 λ 较大时，$\log\Gamma(-\lambda,Y_{q,\pm})=\log\mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,0,+}(l,0)-\log\mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,0,+}(l,\lambda)$ 以及 $\mathfrak{f}_{\alpha,0,+}(x,\lambda)$ 具有渐近展开式，因此序列 $\hat{}Y_{q,\pm}$ 属于谱型。此外，简单计算表明，它确实是一个正则谱型序列。我们计算 λ 较大时 $\log\Gamma(-\lambda,Y_{q,\pm})$ 的常数项，因为根据定理 B.1.1，

$$\begin{aligned}z'_{q,\pm}(0)&=-\log\det F_{\alpha_q,0;0,0}=-\operatorname*{Res}_{\lambda=+\infty}\log\Gamma(-\lambda,Y_{q,\pm})\\&=-\ln\mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,0,+}(l,0)+\operatorname*{Res}_{\lambda=+\infty}\log\mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,0,+}(l,\lambda)\\&=-\ln\mathfrak{u}_{\pm\alpha_q,0,+}(l,0)+\operatorname*{Res}_{\lambda=+\infty}\log\mathfrak{u}_{\pm\alpha_q,0,+}(l,\lambda).\end{aligned}$$

根据截面 A.6，我们有渐近展开

$$\log \mathfrak{u}_{\pm\alpha_q,0,+}(x,\lambda)=\log\frac{2^{|c_{\alpha_q}|-\frac{1}{2}}\Gamma(1+|c_{\alpha_q}|)}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\left(|c_{\alpha_q}|+\frac{1}{2}\right)\log(-\lambda)+l\sqrt{-\lambda}+O\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right),$$

对于较大的 λ，其中 $c_\alpha=\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$，因此

$$\operatorname*{Res}_{\lambda\to\infty}\log\mathfrak{u}_{\alpha_q,0,+}(l,\lambda)=\log\frac{2^{|c_{\alpha_q}|-\frac{1}{2}}\Gamma(1+|c_{\alpha_q}|)}{\sqrt{\pi}}. \tag{7.1}$$

接下来，我们计算 $\mathfrak{u}_{\alpha,0,+}(l,0)$ 的值。根据注记 A.0.7，我们有

$$\mathfrak{u}_{\alpha_q,0,+}(l,0)=((2\alpha_q-1)\kappa+1)h^{\frac{1}{2}-\alpha_q}(l)\int_0^l h(x)^{2\alpha_q-1}dx,\qquad \alpha_q>0, \tag{7.2}$$

$$\mathfrak{u}_{\alpha_q,0,+}(l,0)=h^{\frac{1}{2}-\alpha_q}(l),\qquad \alpha_q\le 0. \tag{7.3}$$

观察到在 t_2 的定义中有 $0\le q\le p-1$，我们发现。

$$z'_{q-1,-}(0)=\log\frac{2^{|c_{-\alpha_{q-1}}|-\frac{1}{2}}\Gamma(1+|c_{-\alpha_{q-1}}|)}{2c_{-\alpha_{q-1}}\sqrt{\pi}}h^{-\alpha_{q-1}-\frac{1}{2}}(l)-\log\int_0^l h(x)^{1-2\alpha_{q-1}}dx,$$

并且

$$z'_{q,+}(0)=\log\frac{2^{|c_{\alpha_q}|-\frac{1}{2}}\Gamma(1+|c_{\alpha_q}|)}{\sqrt{\pi}}h^{\alpha_q-\frac{1}{2}}(l).$$

将这些量代入 $t'_2(0)$ 的公式，如果 $m=2p-1$，则

$$\begin{aligned}(t_2^{(2p-1)})'(0)=&\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}m_{\mathrm{har},q}\log\frac{2^{c_{-\alpha_{q-1}}+c_{\alpha_q}}}{(2c_{-\alpha_{q-1}})}\frac{\Gamma(1+c_{-\alpha_{q-1}})}{\Gamma(1-c_{\alpha_q})}\\&-\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}m_{\mathrm{har},q}\log\gamma_q h(l)^{2\alpha_q-1}\\=&\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q}m_{\mathrm{har},q}\log\gamma_q h(l)^{2q-2p+1},\end{aligned}$$

由于 $c_{\alpha_{q-1}}+c_{\alpha_q}-1=0$，且其中

$$\gamma_q=\int_0^l h(x)^{-2\alpha_{q-1}-1}dx, \tag{7.4}$$

而如果 $m=2p$，则

$$\begin{aligned}(t_2^{(2p)})'(0)=&\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}m_{\mathrm{har},q}\log\frac{2^{c_{-\alpha_{q-1}}-c_{\alpha_q}-1}}{2c_{-\alpha_{q-1}}}\frac{\Gamma(1+c_{-\alpha_{q-1}})\Gamma(1-c_{\alpha_q})}{\pi}\\=&\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}m_{\mathrm{har},q}\log\frac{2^{\kappa(1-2\alpha_q)-2}}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\kappa\left(\alpha_q-\frac{1}{2}\right)\right)\gamma_q.\end{aligned}$$

7.2.3. 双重级数的贡献：正则部分。考虑 ζ函数 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{Z}$。它们是与双重序列 $S_{q,\pm} = \left\{ m_{\mathrm{cex},q,n} : \ell_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k} \right\}$，以及 $\hat{S}_{q,\pm} = \left\{ m_{\mathrm{cex},q,n} : \hat{\ell}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k} \right\}$ $(\tilde{\lambda}_{q,n} \neq 0)$相关联的 ζ 函数，将按照附录 B 中所述的方法进行处理。我们引入简单序列$\tilde{S}_q = \left\{ m_{q,n} : \sqrt{\tilde{\lambda}_q}, \right.$ $\left._n \right\}$：这是一个谱型为$\tilde{}$ $\tilde{}$、无穷阶、收敛指数和亏格 $\mathsf{e}(S_q) = \mathsf{g}(S_q) = m =$ $\dim W$的完全正则简单序列，根据[41, 命题 3.1]。相应的 ζ函数 $\zeta(s, \tilde{S}_q) = \zeta_{\mathrm{cex}}\left(\frac{s}{2}, \tilde{\Delta}^{(q)}\right)$ 可能在 $s = m - h$, $h = 0$、2、4、.....、$m - 1$, [41, 处有简单极点，见命题 3.2]。因此，根据引理 ˆ A.4.3 及其推论，序列 S_q 和 $S_{q,\pm}$ 都是相对阶为 $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$、相对亏格为 $\left(\left[\frac{m+1}{2}\right], \left[\frac{m}{2}\right], 0\right)$ 的双重序列，见 [41, 第 3]节。我们证明，序列 S 关于序列 S_q是谱可分解的（幂为 2）。为此，考虑相应的对数谱伽马函数：

$$\log \Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n}, S_{q,\pm}) = -\log \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n}}{\ell_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}}\right),$$

and

$$\log \Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n}, \hat{S}_{q,\pm}) = -\log \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n}}{\hat{\ell}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}}\right).$$

回顾一下，根据引理 5.4.1以及第 A.1 节和第 A.5节，数值$\ell_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},k}$ 是算子 $F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n};0}$的正特征值，也是˜函数的零点（回顾一下 $\lambda \neq 0$，我们处于非正规奇异情形，且 $x = 0$ 是极限点）

$$B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},\frac{\pi}{2}}(l, \lambda) = \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l, \lambda),$$

ˆ 数值 $\ell_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},\,k}$是算子 $F_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n};\frac{1}{2}}$，的正特征值，也是该函数的零点

$$B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},0}(l, \lambda) = \mathfrak{f}'_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l, \lambda),$$

˜我们需要这些函数在大 λ时关于 λ_q的统一渐近展开n。注意，根据命题 A.4.2，这些算子的核是平凡的。仿照第 A.5节末尾的做法，我们得到

$$\log \Gamma(-\lambda\mu_{q,n}^2, S_{q,\pm}) = \log B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},\frac{\pi}{2}}(l, 0) - \log B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},\frac{\pi}{2}}(l, \lambda\mu_{q,n}^2),$$
$$\log \Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n}, \hat{S}_{q,\pm}) = \log B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},0}(l, 0) - \log B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},0}(l, \lambda\tilde{\lambda}_{q,n}).$$

˜利用解在较大 $\nu = \lambda_{q,\ n}$ 且固定 $x = l$时的展开式，参见第A.6节，我们得到所需的对数伽马函数展开式，并

完成证明。我们给出序列 $S_{q,\pm}$ 的详细推导：

$$\begin{aligned}\log\Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n},S_{q,\pm})=&\log B_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},\frac{\pi}{2}}(l,0)-\log\frac{2^{\tilde{\lambda}_{q,n}}\Gamma(\tilde{\lambda}_{q,n}+1)}{\sqrt{2\pi\tilde{\lambda}_{q,n}}(-\lambda)^{\frac{\tilde{\lambda}_{q,n}}{2}}}\\&-\log\frac{\sqrt{h(l)}}{(1-\lambda h^2(l))^{\frac{1}{4}}}-\mu_{q,n}\int\frac{\sqrt{1-\lambda h^2(x)}}{h(x)}dx\Big|_{x=l}\\&-\log\left(1+\sum_{j=1}^{J}U_{q,j,\pm}(l,i\sqrt{-\lambda})\tilde{\lambda}_{q,n}^{-j}+O\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{q,n}^{J+1}}\right)\right),\end{aligned}$$

根据备注 B.2.3，我们意识到不存在相关的对数项，因此 L在~(B.1)中可以取任意值，而$\lambda_{q,n}$的幂中的相关项全部为负数，$\sigma_h=m-h$、 $h=0$、1、2、 $\dots m-1$，函数 ϕ_{σ_h}由方程给出

$$\sum_{h=0}^{m-1}\phi_{q,m-h,\pm}(l,\lambda)\tilde{\lambda}_{q,n}^{-h}=-\log\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}U_{q,j,\pm}(l,z)\tilde{\lambda}_{q,n}^{-j}\right)+O\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{q,n}^{m}}\right).$$

~这表明，根据定义 B.2.1，序列S_{q}、$\pm$ 在序列 S_q上是谱可分解的。这里给出定义中出现的参数值：$(s_0$、 s_1、 $s_2)$ $=$ $\left(\frac{m+1}{2}\right.$、 $\frac{m}{2}$、 $\left.\frac{1}{2}\right)$，$(p_0$、 p_1、 $p_2)$ $=$ $\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]\right.$、 $\left.\left[\frac{m}{2}\right]\right.$、 $0)$、 $r_0=m$、 $q=m$、$\kappa=2$、 $\ell=m$。

现在我们希望根据定理 B.2.2 中的公式计算正则部分，因此需要确定量 A_0,0(0) 和 A'_0,1(0)。开始计算之前，请注意所有系数 b_{σ_h}、 $_j$、 $_{0/1}$ 都为零。因为根据函数 $U_j(x,$ $i\sqrt{-\lambda})$ 和 $V_j(x,i\sqrt{-\lambda})$ 的渐近刻画，A.6 节可知，函数 ϕ_q、$_{m-h}$、$_{\pm}(l,\lambda)$ 以及 ϕ_q、$_{m-h}$、$_{\pm}(l,\lambda)$ 在 λ 较大时的展开式仅含 $-\lambda$ 的负幂，以及 $-\lambda$ 的负幂乘以 $\log(-\lambda)$ 的项。因此：

$$\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,\pm}(0)=-A_{0,0,q,\pm}(0)-A'_{0,1,q,\pm}(0),\quad \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,+}(0)=-\hat{A}_{0,0,q,\pm}(0)-\hat{A}'_{0,1,q,\pm}(0),$$

其中

$$\begin{aligned}A_{0,0,q,\pm}(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}m_{\mathrm{cex},q,n}a_{0,0,q,\pm}\tilde{\lambda}_{q,n}^{-s},&a_{0,0,q,\pm}&=\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}0\log\Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n},S_{q,\pm}),\\A_{0,1,q,\pm}(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}m_{\mathrm{cex},q,n}a_{0,1,q,\pm}\tilde{\lambda}_{q,n}^{-s},&a_{0,1,q,\pm}&=\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\frac{\log\Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n},S_{q,\pm})}{\log(-\lambda)},\\\hat{A}_{0,0,q,\pm}(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}m_{\mathrm{cex},q,n}a_{0,0,q,\pm}\tilde{\lambda}_{q,n}^{-s},&\hat{a}_{0,0,q,\pm}&=\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}0\log\Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n},\hat{S}_{q,\pm}),\\\hat{A}_{0,1,q,\pm}(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}m_{\mathrm{cex},q,n}a_{0,1,q,\pm}\tilde{\lambda}_{q,n}^{-s},&\hat{a}_{0,1,q,\pm}&=\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\frac{\log\Gamma(-\lambda\tilde{\lambda}_{q,n},\hat{S}_{q,\pm})}{\log(-\lambda)}.\end{aligned}$$

例如，考虑

$$a_{0,0,q,\pm} = \log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0) - \operatorname*{Res}_{\lambda=\infty} \log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,\lambda\tilde{\lambda}_{q,n}),$$
$$a_{0,1,q,\pm} = -\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty} \frac{\log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,\lambda\tilde{\lambda}_{q,n})}{\log(-\lambda)}.$$

我们需要求出当 λ 趋于无穷大时的渐近展开式。借助经典渐近分析工具（例如参见 [36]），我们可以确定相关斯图姆-刘维尔问题基本解的渐近展开式， $\mathfrak{f}_\pm$ 以及它们在λ趋于无穷大时的导数，见第 A.6节。此外，我们发现常数项与x无关，因此它在函数及其导数中相同。假设

$$\log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,\lambda) = \cdots + a_{1,\pm}\log(-\lambda) + a_{0,\pm} + \dots,$$
$$\log \mathfrak{f}'_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,\lambda) = \cdots + \hat{a}_{1,\pm}\log(-\lambda) + a_{0,\pm} + \dots.$$

于是，

$$a_{0,0,q,\pm} = \log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0) + a_{0,\pm} + a_{1,\pm}\log\tilde{\lambda}_{q,n}, \qquad a_{0,1,q,\pm} = a_{1,\pm},$$
$$\hat{a}_{0,0,q,\pm} = \log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0) + a_{0,\pm} + \hat{a}_{1,\pm}\log\tilde{\lambda}_{q,n}, \qquad \hat{a}_{0,1,q,\pm} = \hat{a}_{1,\pm}.$$

因此，

$$\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,\pm}(0) = -A_{0,0,q,\pm}(0) - A'_{0,1,q,\pm}(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathrm{cex},q,n}\left(\log \mathfrak{f}_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0) + a_{0,\pm}\right),$$
$$\hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,\pm}(0) = -\hat{A}_{0,0,q,\pm}(0) - \hat{A}'_{0,1,q,\pm}(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathrm{cex},q,n}\left(\log \mathfrak{f}'_{\pm\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0) + a_{0,\pm}\right),$$

and

$$\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,-}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,+}(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathrm{cex},q,n}\log\frac{\mathfrak{f}_{-\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0)}{\mathfrak{f}'_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(l,0)}.$$

由引理A.0.8，$\mathfrak{f}'_{-\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(x,\lambda) = C\mathfrak{f}_{\alpha_q,\tilde{\lambda}_{q,n},+}(x,\lambda)h^{2\alpha_q-1}(x)$，其中某个常数为$C$。为确定 C 的值，我们可以利用定理A.0.4，计算 $x\to 0$ 时的极限。由此得到 $C=\sqrt{\tilde{\lambda}_{q,n}}$。因此，

$$\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,-}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,+}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{\mathrm{cex},q,n}\left(\frac{1}{2}\log\tilde{\lambda}_{q,n} - \log h(l)\right).$$

现在我们可以完成对正则贡献的确定。首先，假设 $m=2p-1$。那么，我们有

$$\begin{aligned}(t^{(2p-1)}_{0,\mathrm{reg}})'(0) &= \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-2}(-1)^q\left(\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,-}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,+}(0) + \mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,+}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,-}(0)\right)\\ &= \sum_{q=0}^{p-2}(-1)^q\left(-\frac{1}{2}\zeta'(0,\tilde{\Delta}^{(q)}_{\mathrm{cex}}) - \zeta(0,\tilde{\Delta}^{(q)}_{\mathrm{cex}})\ \log h(l)\right).\end{aligned}$$

其次，假设 $m = 2p$。那么，我们有

$$(t_{0,\mathrm{reg}}^{(2p)})'(0) = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^q \left((\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,-}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,+}(0)) - (\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},q,+}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},q,-}(0))\right) = 0.$$

由双重序列产生的正则部分的计算，最后一步是求 t_1 的正则部分。这是前一个情形的特例，其中 $m = 2p-1$ 和 $q = p$。由于 $\alpha_{p-1} = 0$，我们有：

$$\begin{aligned}(t_{1,\mathrm{reg}}^{(2p-1)})'(0) &= (-1)^{p-1}\frac{1}{2}\left((\mathcal{Z}'_{\mathrm{reg},p-1,-}(0) - \hat{\mathcal{Z}}'_{\mathrm{reg},p-1,+}(0)\right)\\ &= (-1)^{p-1}\left(-\frac{1}{4}\zeta'(0,\tilde{\Delta}_{\mathrm{cex}}^{(p-1)}) - \frac{1}{2}\zeta(0,\tilde{\Delta}_{\mathrm{cex}}^{(p-1)})\ \log h(l)\right)\end{aligned}$$

7.2.4. 来自双重级数的贡献：奇异部分。 最后一点涉及根据 SDL B.2.2确定挠率的奇异部分。这个过程很长，需要解决一些复杂的技术问题，但思路相当直接。因此，我们这里只概述一下，省略细节。我们用一个截短的喇叭代替有限度量喇叭，即一个喇叭形截头锥$F(W) = [l_0, l] \times W$，其度量限制为（2.1）。这意味着要重写有限喇叭所采用的整个过程，但改用紧区间 $[l_0, l]$上的斯图姆-刘维尔问题。在这种情形下，所有斯图姆-刘维尔算子都是正则的，因此我们可以用经典的解析工具处理它们。我们引入适当的霍奇-拉普拉斯算子，它们将“分解”为区间上的正则斯图姆-刘维尔算子与截面上的霍奇-拉普拉斯算子的乘积。与喇叭相比，主要区别在于，现在斯图姆-刘维尔问题在两个端点处都具有经典边界条件。我们像处理有限喇叭时那样描述谱，并得到扭率ζ函数的分解，如引理7.2.1：

$$t_{\mathrm{rel,abs}}(F(W))(s) = w_0(s) + w_1(s) + w_2(s) + w_3(s),$$

我们可以像处理有限喇叭时那样计算 $s = 0$ 处的导数。特别是， w_0 和 w_1 是与双重级数相关的 ζ 函数，我们按照 SDL B.2.2 中的方法处理它们。因此，我们得到解析挠率，其中 reg 和 sing 分别对应于 SDL 中的划分：

$$\log T_{\mathrm{rel,abs}}(F(W)) = w'_{0,\mathrm{reg}}(0) + w'_{1,\mathrm{reg}}(0) + w'_2(0) + w'_3(0) + w'_{0,\mathrm{sing}}(0) + w'_{1,\mathrm{sing}}(0). \quad (7.5)$$

但截头锥是一个带边光滑流形，因此其解析挠率有定义，并具有光滑流形解析挠率的通常性质。特别地，我们知道（例如参见 [26] [2]）它可分解为全局部分和边界部分（我们在 $x = l_0$ 处取相对边界条件，在 $x = l$ 处取绝对边界条件（比较 [37]）：

$$\log T_{\mathrm{rel,abs}}(F(W)) = \log T_{\mathrm{global,rel,abs}}(F(W)) + \log T_{\mathrm{boundary,rel,abs}}(F(W)), \quad (7.6)$$

其中

$$\log T_{\mathrm{global,rel,abs}}(F(W)) = \log \tau_{RS}(F(W), \partial_l F(W)),$$
$$\log T_{\mathrm{boundary,rel,abs}}(F(W)) = \frac{1}{4}\chi(\partial_l F(W))\log 2 + A_{\mathrm{BM,rel,abs}}(\partial_l F(W)).$$

其中 $\partial_l F(W)$ 表示 $x = l$ 处 $F(W)$ 的边界，$\tau_{RS}(M, \partial M)$ 表示偶对 $(M, \partial M)$ 关于 Ray–Singer 同调基的 Reidemeister 扭率，$\chi(M)$ 表示 M的欧拉示性数，而 $A_{\mathrm{BM,\ bc}}(\partial M)$ 表示 [2]的异常边界项。

现在，我们可以显式计算方程 (7.5) 和 (7.6) 中的一些项，尤其是出现在以下等式中的项，从而证明该等式本身：

$$\log T_{\mathrm{global,rel,abs}}(F(W)) + \frac{1}{4}\chi(\partial_l F(W))\log 2 = w'_{0,\mathrm{reg}}(0) + w'_{1,\mathrm{reg}}(0) + w'_2(0) + w'_3(0),$$

因此，我们得到等式：

$$\log T_{\mathrm{boundary,rel,abs}}(F(W)) - \frac{1}{4}\chi(\partial_l F(W))\log 2 = A_{\mathrm{BM,rel,abs}}(\partial_l F(W)) = w'_{0,\mathrm{sing}}(0) + w'_{1,\mathrm{reg}}(0).$$

最后一点是比较截头锥解析挠率中的奇异项 $w'_{0,\ \mathrm{sing}}(0) + w'_{1,\ \mathrm{reg}}(0)$ 与有限喇叭解析挠率中相应的奇异项 $t'_{0,\ \mathrm{sing}}(0) + t'_{1,\ \mathrm{reg}}(0)$。不难看出，这两项是由同一组函数的渐近展开式中的系数（自变量 n 较大时）组合而成的，即斯图姆-刘维尔问题的解 $\mathfrak{f}$，见 A.6 节。通过重新整理这两个奇异项中的这些系数，我们可以证明

$$w_{j,\mathrm{sing}}(s) = t_{j,\mathrm{sing}}(s)(l_0) + t_{j,\mathrm{sing}}(s)(l),$$

因此

$$t'_{0,\mathrm{sing}}(0) + t'_{1,\mathrm{sing}}(0) = \frac{1}{2}A_{\mathrm{BM,rel,abs}}(\partial_l F(W)) = A_{\mathrm{BM,abs}}(\partial Z_l^\kappa(W)).$$

7.2.5. 解析挠率与 CM 定理。汇总前几节计算出的各项，我们得到以下结果。

定理 7.2.6. 设 W 是一个无边界的 m 维紧致连通定向黎曼流形，$Z_l^\kappa(W)$ 是其上的有限喇叭。那么，$Z_l^\kappa(W)$ 上（在平凡表示下）的霍奇-拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}$ 的解析挠率为

$$\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(Z_l^\kappa(W)) = \log T_{\mathrm{global},\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(Z_l^\kappa(W)) + \log T_{\mathrm{bound},\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(Z_l^\kappa(W)),$$

其中

$$\log T_{\mathrm{bound},\mathfrak{p},\mathrm{bc}}(Z_l^\kappa(W)) = \frac{1}{4}\chi(W)\log 2 + A_{\mathrm{BM,bc}}(\partial Z_l^\kappa(W)),$$

是边界异常项，它仅取决于边界，与 [2, 3] 中所述的光滑流形的异常边界项一致；若边界是全测地的，则该项为零。全局项取决于 W的维数奇偶性 m。若 $m = 2p-1$、$p \geq 1$，则

$$\log T_{\mathrm{global},\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W)) = \frac{1}{2}\log T(W) + \frac{1}{2}\log \|\mathrm{Det}\, k_\bullet^*(\tilde{\alpha}_\bullet)\|_{\mathrm{Det}\, I^{\mathfrak{p}} H_\bullet(Z_l^\kappa(W))}.$$

若 $m=2p$、 $p\geq 1$，则

$$\log T_{\mathrm{global},\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W)) = \frac{1}{4}\chi(W)\log 2+\frac{1}{2}\log\|\mathrm{Det}\,k_\bullet^*(\tilde{\alpha}_\bullet)\|_{\mathrm{Det}\,I^{\mathfrak{p}}H_\bullet(Z_l^\kappa(W))} + \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}r_q\log\frac{2^{\kappa(1-2\alpha_q)}}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\kappa\left(\alpha_q-\frac{1}{2}\right)\right).$$

其中， $\tilde{\alpha}_q$ 是 $\mathcal{H}^q(W)$的正交归一基，且 $k^*:\ \mathcal{H}^q(W)\ \to \mathcal{H}^q(Z_l^\kappa(W))$ 是由包含映射诱导的映射，$r_q=\mathrm{rk}H_q(W;\mathrm{Z})$。

注意， $\|\det k_q^*(\tilde{\alpha}_q)\|_{\det I^{\mathfrak{m}}H_q(Z_l^\kappa(W))}=\gamma_q^{r_q}$.

定理 7.2.7。 采用定理 *7.2.6* 中的记号，若 $m=2p-1$， $p\geq 1$则

$$\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W))=\log I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z_l^\kappa(W))+A_{\mathrm{BM,abs}}(W).$$

若 $m=2p$， $p\geq 1$，则

$$\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W))=\log I^{\mathfrak{p}}\tau_{\mathrm{RS}}(Z_l^\kappa(W))+\frac{1}{4}\chi(W)\log 2+A_{\mathrm{BM,abs}}(W) + A_{\mathrm{comb},\mathfrak{p}}(W)+A_{\mathrm{analy}}(W),$$

其中组合异常项为:

$$A_{\mathrm{comb},\mathfrak{m}}(W)=-\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\log\left(\#TH_q(W;\mathbb{Z})\left|\det\left(\tilde{\mathcal{A}}_q(\tilde{\alpha}_q)/\mathsf{n}_q\right)\right|\right),$$

$$A_{\mathrm{comb},\mathfrak{m}^c}(W)=-\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^q\log\left(\#TH_q(W;\mathbb{Z})\left|\det\left(\tilde{\mathcal{A}}_q(\tilde{\alpha}_q)/\mathsf{n}_q\right)\right|\right),$$

解析异常项为:

$$A_{\mathrm{analy}}(W)=\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{q+1}r_q\log\frac{2^{\kappa(1-2\alpha_q)}}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-\kappa\left(\alpha_q-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\chi(W)\log 2.$$

定理 7.2.8（对偶性）。设 (W,g) 是一个维数为 m 的定向闭黎曼流形，则

$$\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W))=(-1)^m\log T_{\mathfrak{p}^c,\mathrm{rel}}(Z_l^\kappa(W)).$$

7.3. X 上的解析挠率与 CM 定理。汇总上一节的结果，我们可以证明以下定理。

定理 7.3.1。设 $X=Z_l^\kappa(W)\sqcup_W Y$ 是一个维数为 $n=m+1$ 的具有喇叭奇点的空间，且 $\mathfrak{p}$ 是中间偏斜度，则

$$\log T_{\mathfrak{p}}(X)=\log T_{\mathfrak{p},\mathrm{abs}}(Z_l^\kappa(W))+\log T_{\mathrm{rel}}(Y)-\frac{1}{2}\chi(W)\log 2+\log\tau(\mathcal{H}),$$

其中， $\mathcal{H}$ 是由包含映射 Z_l^κ（W） $\to X$诱导的长同调正合列，并配有一些标准正交分次基。

定理 7.3.2。设 $X = Z_l^\kappa(W) \sqcup_W Y$是一个维数为$n = m + 1$且具有喇叭奇点的空间， $\mathfrak{p}$ 为中间偏斜度。那么，若 $m = 2p - 1$:

$$\log T_{\mathfrak{p}}(X) = \log I^{\mathfrak{p}} \tau_{\mathrm{RS}}(X),$$

若 $m = 2p$:

$$\log T_{\mathfrak{p}}(X) = \log I^{\mathfrak{p}} \tau_{\mathrm{RS}}(X) + A_{\mathrm{comb},\mathfrak{p}}(W) + A_{\mathrm{analy}}(W),$$

其中异常项见定理 *7.2.7*。

Appendix A. Irregular singular Sturm Liouville operators

我们介绍一些关于非正则奇异 Sturm–Liouville 算子的结果；关于一般理论，请参阅 [47]。考虑区间 $(0, l]$，其中 l 为某个正数，以及 Sturm–Liouville 形式算子

$$\mathcal{F}_{\alpha,b} f = -h^{2\alpha-1} \left(h^{1-2\alpha} f'\right)' + \frac{b}{h^2} f = -f'' - (1 - 2\alpha)\frac{h'}{h} f' + \frac{b}{h^2} f,$$

其中 α、b 为实数， α 为半整数， $b \geq 0$，且 $h(x) = x^\kappa H(x)$，其中 H 是定义在 $[0, l]$ 上的光滑正函数，满足 $H(0) = 1$，而 κ 为实数，且$\kappa > 1$、 $f \in \mathrm{R}^I$。当 $b > 0$ 时，这是一个非正则奇异 Sturm–Liouville 问题。当 $b = 0$ 时，它可化为一个正则奇异问题（见命题 A.0.5 和注记 A.0.7）。我们在希尔伯特空间 $L^2((0, l], h^{1-2\alpha})$ 中研究 $\mathcal{F}_{\alpha,\ b}$ 的具体实现。相应的 Sturm–Liouville 问题（特征值方程）为

$$\mathcal{F}_{\alpha,b} f = \lambda f. \tag{A.1}$$

考虑可逆酉算子 $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}-\alpha}$: $L^2((0, l], w) \to L^2((0, l])$, $\mathcal{T}_{\frac{1}{2}-\alpha}$: $f \mapsto h^{\frac{1}{2}-\alpha} f$。令 $u = h^{\frac{1}{2}-\alpha} f$，则有算子 $\mathcal{U}_{\alpha,b} u = \mathcal{T}^{-1}_{\frac{1}{2}-\alpha} \mathcal{F}_{\alpha,b} \mathcal{T}_{\frac{1}{2}-\alpha} u = -u'' + r_{\alpha,b} u$。注意，变量 f 属于空间 $L^2((0, l], h^{1-2\alpha})$，变量 u 属于空间$L^2((0, l])$。相应的特征值方程为

$$u'' = (r_{\alpha,b} - \lambda) u,$$

with

$$\begin{aligned} r_{\alpha,b}(x) =& \frac{b}{h^2} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{h''}{h} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{h'^2}{h^2} \\ =& \frac{b}{x^{2\kappa}} + b\frac{1 - H^2}{x^{2\kappa} H^2} + \kappa\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\kappa\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + 1\right)\frac{1}{x^2} + 2\kappa\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{x}\frac{H'}{H} \\ & - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{H''}{H} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{H'^2}{H^2}. \end{aligned}$$

注 A.0.1. 对于 $x \to 0^+$， $r_{\alpha,\ b}(x) = \frac{b}{x^{2\kappa}} + g(x)$，其中展开式中的下一项取决于 κ 的值。特别地，若 $b = 0$ ，则 SL 方程化为一个正则奇异方程，即奇点属于 $1/x^2$ 型，见下文注 *A.0.7* 。

注 A.0.2. 在本文中，我们考虑一对作用于希尔伯特空间 $L^2((0,l],h^{1-2\alpha})\times L^2((0,l],h^{1-2(\alpha-1)})$ 上的形式算子 $(\mathcal{F}_{1,\alpha,b},\mathcal{F}_{2,\alpha,b})$，其定义如下。

$$\mathcal{F}_{1,\alpha,b}f=\mathcal{F}_{\alpha,b}=-h^{2\alpha-1}\left(h^{1-2\alpha}f'\right)'+\frac{b}{h^2}f=-f''-(1-2\alpha)\frac{h'}{h}f'+\frac{b}{h^2}f,$$

$$\mathcal{F}_{2,\alpha,b}f=\mathcal{F}_{1,\alpha-1,b}f-(1-2(\alpha-1))\left(\frac{h'}{h}\right)'f=-\left(h^{2(\alpha-1)-1}\left(h^{1-2(\alpha-1)}f\right)'\right)'+\frac{b}{h^2}f,$$

注 A.0.3。注意

$$\mathcal{T}_{2(\alpha-1)-1}\mathcal{F}_{1,1-(\alpha-1)}\mathcal{T}_{1-2(\alpha-1)}f=\left(h^{2(\alpha-1)-1}\left(h^{1-2(\alpha-1)}f\right)'\right)'+\frac{b}{h^2}f=\mathcal{F}_{2,\alpha,b}f$$

~　　~因此$\mathcal{F}_{2,\ \alpha_q,\ \tilde{\lambda}}=\mathcal{T}_{2\alpha_{q-1}-1}\mathcal{F}_{1,\ 1-\alpha_{q-1},\ \tilde{\lambda}}\mathcal{T}_{1-2\alpha_{q-1}}$· 由于根据霍奇对偶 $\lambda_{m-1+q}=\lambda_q$和$\alpha_{m-1-q}=-\alpha_q$，且根据定义 $\alpha_{q-1}=\alpha_q-1$，可得 $1-\alpha_q=-\alpha_{q-1}=\alpha_{m-q}$ 以及 $1-\alpha_{q-1}=\alpha_{m+1-q}$。因此$\mathcal{F}_{1,\ \alpha_{m+1-q},\ \tilde{\lambda}}=\mathcal{F}_{1,\ 1-\alpha_{q-1},\ \tilde{\lambda}}$，以及$\mathcal{F}_{2,\ \alpha_q\tilde{\lambda}}=\mathcal{T}_{2\alpha_{q-1}-1}\mathcal{F}_{1,\ \alpha_{m+1-q},\ \tilde{\lambda}}\mathcal{T}_{1-2\alpha_{q-1}}$· 回顾 $\mathcal{T}_\alpha$ 是一个酉算子，可知$\mathcal{F}_2$的自伴扩张的谱性质与α_q，$\tilde{\lambda}$ 和$\mathcal{F}_{1,\ \alpha_{m+1-q},\ \tilde{\lambda}}$ 的谱性质一致。

定理 A.0.4. 若 $b>0$，方程

$$u''=(r_{\alpha,b}-\lambda)u,$$

有两个线性无关解

$$\mathfrak{u}_{\alpha,b,\pm}(x,\lambda)=x^{\frac{\kappa}{2}}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{b}}{1-\kappa}x^{1-\kappa}}(1+\varphi_{\alpha,b,\pm}(x,\lambda)),$$

满足 $\lim_{x\to0^+}\varphi_{\alpha,\ b,\ \pm}(x)=0$，且 $\lim_{x\to0^+}x^\kappa\varphi'_{\alpha,\ b,\ \pm}(x)=0$. 。在等距映射 $\mathcal{T}_{\alpha-\frac{1}{2}}$ 下对应的解为

$$\mathfrak{f}_{\alpha,b,\pm}(x,\lambda)=\mathcal{T}_{\alpha-\frac{1}{2}}\mathfrak{u}_{\alpha,b,\pm}(x,\lambda)=x^{\frac{\kappa}{2}}h^{\alpha-\frac{1}{2}}(x)\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{b}}{1-\kappa}x^{1-\kappa}}(1+\varphi_{\alpha,b,\pm}(x,\lambda)).$$

证明. 令 $f(x)=\frac{b}{x^{2\kappa}}$，$g(x)=r(x)-f(x)-\lambda$，并设 $A=2\kappa$ 和 $B=3$，则

$$\lim_{x\to0^+}x^{2A+2}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^{4\kappa+2}\frac{1}{x^{2\kappa}}=0,\quad\lim_{x\to0^+}x^{A-B+2}g(x)=\lim_{x\to0^+}x^{2\kappa-3+2}\frac{1}{x^{2\kappa-1}}=1.$$

定理 6.2 的所有假设[36] 均得到满足，因此结论成立。　□

P命题 A.0.5. (与注*A.0.7*比较) 若 $b=0$，且 $\alpha\neq\frac{1}{2}$，方程　　*on*

$$u''=(r_{\alpha,0}-\lambda)u,$$

有两个线性无关解

$\mathfrak{u}_{\alpha,0,\pm}(x,\lambda)=x^{\frac{1}{2}\pm\left|\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|}\varphi_{\alpha,0,\pm}(x,\lambda)$，$\mathfrak{u}'_{\alpha,0,\pm}(x,\lambda)=x^{\frac{1}{2}\pm\left|\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|-1}\Phi_{\alpha,0,\pm}(x,\lambda)$，其中，$\varphi$ 和 Φ 在 $[0,l]$、$\varphi_{\alpha,\ 0,\ \pm}(0)=1$、$\Phi_{\alpha,\ 0,\ \pm}(0)=\pm\left|k\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|$上光滑。在等距映射 $\mathcal{T}_{\alpha-\frac{1}{2}}$ 下相应的解为

$$\mathfrak{f}_{\alpha,0,\pm}(x,\lambda)=\mathcal{T}_{\alpha-\frac{1}{2}}\mathfrak{u}_{\alpha,0,\pm}(x,\lambda)=x^{\frac{1}{2}\pm\left|\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|}h^{\alpha-\frac{1}{2}}(x)\varphi_{\alpha,0,\pm}(x).$$

证明。如果 $b=0$ 该方程是正则奇异方程。指标方程是

$$\mu(\mu-1)-\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+1\right)=0,$$

其解 $\mu_{\pm}=\frac{1}{2}\pm\left|\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|$. 注意 $\mu_{+}-\mu_{-}=0$ 当且仅当 $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\kappa}$，而这在所假设的条件下没有解。于是，根据斯图姆-刘维尔方程的经典理论，结论得证，参见例如 [21, B.2]。 □

请注意，在这两个定理中，解都由初始条件唯一确定。还要注意，变量 f 中的解分别为 $\mathfrak{f}_{\alpha,0,1}(x,\lambda)=x^{\kappa(2\alpha-1)+1}\varphi_{\alpha,0,1}(x)$，以及 $\mathfrak{f}_{\alpha,0,2}(x,\lambda)=\varphi_{\alpha,0,2}(x)$，其中 φ_j 在 $[0,l]$，$\varphi_{\alpha,0,j}(0)=1$ 和 $\varphi'_{\alpha,0,2}(0)=0$ 中是光滑的。

注 A.0.6. 在特例 $b=0$ 和 $\alpha=\frac{1}{2}$ 中，所有算子都重合为 $\mathcal{F}_{1,1\,2,0}=\mathcal{F}_{2,1\,2,0}=\mathcal{U}_{1,1\,2,0}=\mathcal{U}_{2,1\,2,0}$，且特征值方程都是正则方程：$f''=\lambda f$，以及 $u''=\lambda u$，其解为 $\mathfrak{f}_{\frac{1}{2},0,+}(x,\lambda)=\mathfrak{u}_{\frac{1}{2},0,+}(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}x$，以及 $\mathfrak{f}_{\frac{1}{2},0,-}(x,\lambda)=\mathfrak{u}_{\frac{1}{2},0,-}(x,\lambda)=\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}x$。

注 A.0.7. 在 $b=0$ 这一特例下，斯图姆-刘维尔问题化为一个正则奇异斯图姆-刘维尔问题

$$\mathcal{F}_{\alpha,0}f=-h^{2\alpha-1}\left(h^{1-2\alpha}f'\right)'=-f''-(1-2\alpha)\left(\frac{\kappa}{x}+\frac{H'}{H}\right)f'=0.$$

这个问题有两个显式解（归一化为 $\mathfrak{f}_{\pm}$）：

$$\mathfrak{f}_{1,I}=1,\qquad \mathfrak{f}_{1,II}(x)=-((2\alpha-1)\kappa+1)\int_x^l h^{2\alpha-1}(t)dt+\mathfrak{f}_{1,II}(l).$$

该方程

$$\mathcal{F}_{2,\alpha,0}f=-\left(h^{2(\alpha-1)-1}\left(h^{1-2(\alpha-1)}f\right)'\right)'=0,$$

有如下解

$$\mathfrak{f}_{2,I}(x)=-h^{2(\alpha-1)-1}(x)\int_x^l h^{1-2(\alpha-1)}(t)dt,\qquad \mathfrak{f}_{2,II}=h^{2(\alpha-1)-1}.$$

这些解与定理 ± 中所描述的解*A.0.5*并不对应。

我们称解 $\mathfrak{f}_{\alpha,\,b,\,\pm}$, $\mathfrak{u}_{\alpha,\,b,\,\pm}$ 为该斯图姆-刘维尔问题 $\mathcal{F}_{\alpha,\,b}$ 的一个基本解系。

引理 A.0.8. 若 $\mathcal{F}_{\alpha,\,b}f=0$，则 $\mathcal{F}_{-\alpha,\,b}(h^{1-2\alpha}f')=0$。

证明. 假设 $\mathcal{F}_{\alpha,\,b}f=0$，并令 $g=h^{1-2\alpha}f$，则

$$g'=(1-2\alpha)h^{-2\alpha}h'f+h^{1-2\alpha}f''=(1-2\alpha)h^{-2\alpha}h'f+h^{1-2\alpha}\left(\frac{b}{h^2}f-(1-2\alpha)\frac{h'}{h}f'\right),$$

这就得到 $h^{1+2\alpha}g'=bf$。但接下来

$$(1+2\alpha)h^{1+2\alpha}\frac{h'}{h}g'+h^{1+2\alpha}g''=bf',$$

这就得到

$$g'' + (1+2\alpha)h^{1+2\alpha}\frac{h'}{h}g' - \frac{b}{h^2}g = \mathcal{F}_{-\alpha,b}g = 0.$$

□

推论 A.0.9. 考虑斯图姆-刘维尔问题 $\mathcal{F}_{\alpha,\ b}$。两个端点都是非振荡的。端点 $x = l$ 是正则端点。若 $b > 0$，则端点 $x = 0$ 是不规则奇异端点；在这种情况下，斯图姆-刘维尔问题 $\mathcal{F}_{\alpha,\ b}$ 处于极限点情形。若 $b = 0$且 $\alpha = \frac{1}{2}$，则端点 $x = 0$ 是正则端点。若 $b = 0$且$\alpha \neq \frac{1}{2}$，则端点 $x = 0$ 是正则奇异端点。在这种情况下，$x = 0$在以下情形中属于极限圆：

(1) 若 $\frac{3}{2} \leq \kappa < 3$ 且 $\alpha = 0$；(

2) 若 $1 < \kappa < \frac{3}{2}$且 $\alpha = -\frac{1}{2}$，0,

当 $x = 0$ 时为极限圆，否则为极限点。

证明。显然，如果 $b > 0$ 在 $x = 0$附近只有一个平方可积解，则$x = 0$ 为极限圆。对于 $b = 0$，$\alpha = \frac{1}{2}$ 由注 A.0.6 可得。设 $\alpha \neq \frac{1}{2}$，则当 $b = 0$ 时，在定理 A.0.5 给出的解中，$\mathfrak{u}_+$ 是平方可积的，而$\mathfrak{u}_-$ 仅当

$$\int_0^l |\mathfrak{u}_-|^2 \sim \int_0^l x^{1-2\left|\kappa\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right|} < \infty,$$

而这仅当 $1 - 2\left|\kappa\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right| > -1$ 时发生，即当 $\frac{1}{2} - \frac{3}{2\kappa} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa}$. 由于$\kappa > 1$，这给出

$$-1 < \frac{1}{2} - \frac{3}{2\kappa} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa} < 1,$$

因此，对于所有 κ，我们有 $-1 < \alpha < 1$，即 $\alpha = 0, \pm\frac{1}{2}$。但是，如果 $0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2\kappa} < \frac{1}{2}$，即如果$\kappa \geq 3$，则左侧为 $\frac{1}{2} \leq \alpha$；如果 $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2\kappa} < 0$，即如果 $\frac{3}{2} \leq \kappa < 3$，则有 $0 \leq \alpha$；如果 $-1 < \frac{1}{2} - \frac{3}{2\kappa} < -\frac{1}{2}$，即如果 $1 < \kappa < \frac{3}{2}$，则有 $-\frac{1}{2} \leq \alpha$。 □

注 A.0.10. 根据前一个推论的证明，我们可以推得基本解系中解的平方可积性：$\mathfrak{u}_+$ ($\mathfrak{f}_+$) 总是平方可积的，而 $\mathfrak{u}_-$ ($\mathfrak{f}_-$) 仅在以下情形下平方可积：

(1) 如果 $b = 0$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$，(2) 如果 $b = 0$、$\frac{3}{2} \leq \kappa < 3$ 和 $\alpha = 0$，(3) 如果 $b = 0$、$1 < \kappa < \frac{3}{2}$和 $\alpha = -\frac{1}{2}$，0,

即正则情形和正则奇异极限圆情形。

注 A.0.11. 形式算子 $\mathcal{F}_{\alpha,b}$ 的格林公式为

$$(\mathcal{F}_{\alpha,b}f, f) = \int_0^l (\mathcal{F}_{\alpha,b}f)fw = [h^{1-2\alpha}ff']_0^l + \int_0^l h^{1-2\alpha}f'^2 + b\int_0^l h^{-1-2\alpha}f^2.$$

A.1. 自伴扩张。考虑希尔伯特空间 $L^2((0,l],h^{1-2\alpha})$，其内积为

$$(u,v)=\int_0^l h^{1-2\alpha}(x)u(x)v(x)dx.$$

设 $\mathcal{F}$ 为一个形式斯图姆-刘维尔算子。定义全局定义域:

$$\mathsf{D}(F_{\mathrm{glob}})=\left\{y\in AC_0((0,l])\mid h^{1-2\alpha}y'\in AC_0((0,l])\right\},$$

若 $y\in D(F_{\mathrm{glob}})$，则 $\mathcal{F}y$ 有定义且属于 $L_{\mathrm{loc}}((0,l],h^{1-2\alpha})$。这定义了算子 F_{glob}。按如下定义域定义极大算子 $F_{\max}$

$$\mathsf{D}(F_{\max})=\left\{y\in D(F_{\mathrm{glob}})\mid y,\mathcal{F}y\in L^2((0,l],h^{1-2\alpha})\right\},$$

以及预极小算子

$$\mathsf{D}(F_0)=\mathsf{D}(F_{\max})\cap(\mathbb{R}^I)_0,$$

其中$(\mathbb{R}^I)_0$ 表示具有紧支撑的函数子空间。算子F_0 是可闭的，其闭包记为 $F_{\min}$，是 $F_{\max}$ 的伴随算子。这些算子是稠密定义的：$\mathsf{D}(F_0)=\mathsf{D}(F_{\max})=L^2((0,l],h^{1-2\alpha})$。

定义A.1.1. 若 x_0 是形式斯图姆-刘维尔算子 $\mathcal{F}$的正则端点，则我们在 $x=x_0$处引入以下边界值,

$$bv_{\mathcal{F}}(x_0)(y)=y(x_0),\qquad bv'_{\mathcal{F}}(x_0)(u)=(h^{1-2\alpha}y')(x_0),$$

and

$$bv_{\mathcal{F};\beta}(x_0)(y)=\cos\beta\ bv_{\mathcal{F}}(x_0)(y)+\sin\beta\ bv'_{\mathcal{F}}(x_0)(y)=\cos\beta\ y(x_0)+\sin\beta\ (h^{1-2\alpha}y')(x_0),$$

其中 $0\le\beta<\pi$。如果 x_0 是 SL 形式算子 $\mathcal{F}$ 的非振荡正则奇异极限圆端点，则我们在 $x=x_0$ 处引入以下边界值,

$$bv_{\mathcal{F};+}(x_0)(y)=[y,\mathfrak{f}_+]_{\mathcal{F}}(x_0),\qquad bv_{\mathcal{F};-}(x_0)(u)=[y,\mathfrak{f}_-]_{\mathcal{F}}(x_0),$$

其中 $[y,f]_{\mathcal{F}}=h^{1-2\alpha}(yf'-y'f)$，且

$$\widehat{bv}_{\mathcal{F};\delta}(x_0)(y)=\cos\delta\ bv_+(x_0)(y)+\sin\delta\ bv_-(x_0)(y),$$

其中 $0\le\delta<\pi$。

注意，如果端点恰好是正则端点，则边界值 $bv_\pm$ 可化为 bv 和 bv' 的（线性组合）。因此，我们对相应的边界条件采用了统一记法。我们将默认：若端点是奇异端点，则使用边界值 $bv_\pm$。

定理 A.1.2。 [47, 10.4.2, 10.4.4] [35, 5。1] 设$\mathcal{F}_{\alpha,\ b}$ 为方程（*A.1*）中的斯图姆-刘维尔问题。那么，由分离边界条件定义的算子 F_0 的自伴扩张为算子 $F_{\alpha,\ b,\ \beta}$ 其定义域如下（与推论 *A.0.9*）比较

(1) 如果 $b\neq 0$ （非正规奇异情形），则

$$\mathsf{D}(F_{\alpha,b;\beta})=\{y\in\mathsf{D}(F_{\alpha,b,\max})\mid bv_{\mathcal{F};\beta}(l)(y)=0\},$$

(2) 如果 $b=0$，并且满足以下任一条件：($\kappa\geq 3$ 和 $\alpha\neq\frac{1}{2}$)、($\frac{3}{2}\leq\kappa<3$ 和 $\alpha\neq 0$, 12)，或 ($1<\kappa<\frac{3}{2}$ 和 $\alpha\neq-\frac{1}{2}$，0，12)（正则奇异极限点情形），那么

$$\mathsf{D}(F_{\alpha,0;\delta,\beta})=\{y\in\mathsf{D}(F_{\alpha,0,\max})\mid bv_{\mathcal{F};\beta}(l)(y)=0\},$$

(3) 如果 $b=0$ 且 $\frac{3}{2}\leq\kappa<3$ 和 $\alpha=0$ 中任一条件成立，或者如果 $1<\kappa<\frac{3}{2}$ 且 $\alpha=-\frac{1}{2}$，0（正则奇异极限圆情形），则

$$\mathsf{D}(F_{\alpha,0;\delta,\beta})=\left\{y\in\mathsf{D}(F_{\alpha,0,\max})\mid \widehat{bv}_{\mathcal{F};\delta}(0)(y)=bv_{\mathcal{F};\beta}(l)(y)=0\right\},$$

(4) 如果 $b=0$、$\alpha=\frac{1}{2}$（正则情形），则

$$\mathsf{D}(F_{\frac{1}{2},0;\delta,\beta})=\left\{y\in\mathsf{D}(F_{\frac{1}{2},0,\max})\mid bv_{\mathcal{F};\delta}(0)(y)=bv_{\mathcal{F};\beta}(l)(y)=0\right\}.$$

A.2. 谱性质与谱函数。

定理 A.2.1。 设 $\mathcal{F}_{\alpha、b}$ 是方程（*A.1*）中的斯图姆-刘维尔问题。则端点$x=0$ 是非振荡的，并且 $F=F_{\alpha、b;\beta}$、$F_{\alpha、0;\delta、\beta}$中的任一 $\mathcal{F}$ 在定理 *A.1.2*中所描述的$\mathrm{Sp}(F)=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$自伴扩张均有下界，并具有离散纯点谱；该谱由一组实特征值组成，唯一聚点为无穷大，且每个特征值都是单的。

证明。显然，谱是实的。首先我们证明，定理 A.1.2 中描述的所有自伴扩张 F of F_0 所对应的形式算子$\mathcal{F}$ 的本质谱为空，并且由 [11, XIII.10.C25] 可知其有下界，因为

$$\lim_{x\to0^+}x^2r_{\alpha,b}(x)=\lim_{x\to0^+}\left(bx^{2(1-\kappa)}+k\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(k\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+1\right)\right)>-\frac{1}{4}.$$

事实上，如果 $b>0$，则极限为 $+\infty$；如果 $b=0$，则极限为 $=\frac{1}{2}\left(k\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2$，这是正的，因为只有当 α 为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\kappa}$时它才会为零，而这永远不会发生（另见[45, 6.32]）。于是，根据 [11, XIII.7.24]，，$\mathcal{F}$ 的任意自伴扩张都有下界；根据 [11, XIII.6.4]，其本质谱为空（参见 [47, 命题 10.4.4 (4)]）。根据 [46, XI.8.2]，剩余谱为空。因此，谱是实的、纯点的，并且有下界。我们使用 [47, 定理 10.12.1 (8)] 来完成证明。□

A.3. 谱函数。

命题 A.3.1。 设 F 是形式算子$\mathcal{F}_{\nu}$的任一自伴扩张，α 其描述见定理 *A.1.2*。则，预解式 $(\lambda I-F)^{-1}$ 是 F 以该核为核函数的积分算子

$$k(x,y;\lambda)=\frac{1}{h(x)^{1-2\alpha}W(\mathfrak{f}_+,\mathfrak{f}_-)}h^{\frac{1}{2}-\alpha}(x)h^{\frac{1}{2}-\alpha}(y)\begin{cases}\mathfrak{f}_l(x)\mathfrak{f}_0(y), & x\geq y,\\ \mathfrak{f}_0(x)\mathfrak{f}_l(y), & x<y,\end{cases}$$

其中，$\mathfrak{f}_l$ 要么是满足边界条件的方程 $\mathcal{F}_{\alpha,b}f=\lambda f$ 的（唯一）解，该边界条件针对 F 在 $x=l$ 处；若 $x=l$处为 LCC 情形，则是如此；要么是方程 $\mathcal{F}_{\alpha,b}f=\lambda f$ 的（唯一）平方可积解；若 $x=l$处为极限点情形，则是如此；而 $\mathfrak{f}_0$ 要么是满足边界条件的方程 $\mathcal{F}_{\alpha,b}f=\lambda f$ 的（唯一）解，该边界条件针对 F 在$x=0$ 处；若 $x=0$处为 LCC 情形，则是如此；要么是方程 $\mathcal{F}_{\alpha,b}f=\lambda f$ 的（唯一）平方可积解；若 $x=0$处为极限点情形，则是如此。

证明。 核的构造可见于 [11, XIII.3]。或者，利用[45, 8.29], 以及 $p = r = h^{1-2\alpha}$, $q(x) = \frac{b}{h^2}(x)$，则 $\mathcal{F}_{\alpha,b} f = -\frac{1}{r}(pf')' + qf$。 □

推论 A.3.2。 设 F 为形式算子$\mathcal{F}_\nu$的任意一个自伴扩张α，如定理 *A.1.2*中所述。那么， F 具有紧预解式。

证明。根据该定理，预解式是一个积分算子。因此，要使其紧，只需验证它在 $(0,l)\times(0,l)$ 上平方可积（例如参见 [11, 第1331]页）。注意， $h(x)^{1-2\alpha}W(\mathfrak{f}_+,\mathfrak{f}_-)$ 是常数。于是我们计算

$$\int_0^l\int_0^l |k(x,y;\lambda)|^2 dxdy = \int_0^l |\mathfrak{u}_l(x)|^2 \int_0^x |\mathfrak{u}_0(y)|^2 dydx + \int_0^l |\mathfrak{u}_0(x)|^2 \int_x^l |\mathfrak{u}_l(y)|^2 dy.$$

这些函数是光滑的，因此问题只会出现在 $x = 0$ 附近；而在那里，解 $\mathfrak{u}_l$ 有界，而 $\mathfrak{u}_0$ 的行为由命题 A.0.4 和A.0.5给出。在所有情况下，在零附近

$$\int_0^\epsilon\int_0^\epsilon |k(x,y)|^2 dxdy = \text{const}\int_0^\epsilon x^2 dx < \infty.$$

□

推论 A.3.3。 设 F 为形式算子$\mathcal{F}_\nu$的任意一个自伴扩张α，如定理 *A.1.2*中所述。那么， F存在谱分解，即谱 $\mathrm{Sp}(F)$ 属于 F 实数且为纯点谱，即与特征值集合相同，并且是离散的，也就是说，其唯一的聚点是无穷远处，且所有特征子空间的维数均有限。所有特征值均为单重。所有特征函数均光滑，且特征函数集合构成 $L^2(0,l)$的完备正交基。

证明。参见 [11, XIII.4.2、XIII.4.3]。另见 [38, 命题 5.12]。关于特征值的简单性，参见 [45, 8.29] 。对于其中一点为 LCC 的情形，另见 [47, 10.6.1] 。□

A.4. 一些特殊的自伴扩张。下文中，我们将讨论定理 A.1.2 中描述的斯图姆-刘维尔问题 $\mathcal{F}_{\alpha,b}$ 的自伴扩张，但 $F_{\alpha,0;\frac{\pi}{2},\beta}$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ 除外。我们用 F 表示这些自伴扩张，有时不包括算子 $F_{\frac{1}{2},0,\delta,\beta}$；它是正则的，可像下一个注 A.4.1 中那样显式处理。偶尔，我们会根据注 A.0.2，考虑与 $\mathcal{F}$ 对应的形式算子 $\mathcal{U}$ 的自伴扩张。我们用字母 U 表示这些算子。我们将 $\beta = 0$ 的情形称为相对 bv，将 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 的情形称为绝对 bv。另请注意， $\delta = 0$ 对应于 bv_+，而 $\delta = \frac{\pi}{2}$ 对应于 bv_-。

注 A.4.1。算子 $F_{\frac{1}{2},0,\delta,\beta}$ 的特征值方程的形式解见注 *A.0.6*。通解为 $y(x,\lambda) = c_+ \sin\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + c_- \cos\sqrt{\lambda}x$。$F_{\frac{1}{2},0,0,0}$ 的边界条件为 $y(0) = 0$，且 $y(l) = 0$，由此得到 $c_- = 0$，以及方程 $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$。因此，特征值为 $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$，$n \in N_0$，特征函数为 $y(x,\lambda_n) = \sin\frac{\pi n}{l}x$.

对于 $F_{\frac{1}{2},0,0,\frac{\pi}{2}}$，边界条件为 $y(0) = 0$，且 $y'(l) = 0$，由此得到 $c_- = 0$，方程为 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$。因此，特征值为 $\lambda_n = \frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2$，$n \in N$，特征函数为 $y(x,\ \lambda_n) = \sin\frac{\pi}{(2n+1)\,2l}\ x$.

对于 $F_{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ 0}$，边界条件为 $y'(0)=0$，且 $y(l)=0$，由此得到 $c_+=0$，方程为 $\cos\sqrt{\lambda}l=0$。因此，特征值为 $\lambda_n=\frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2$, $n\in N$，特征函数为 $y(x,\lambda_n)=\cos\ ^{\pi}_{(2n+1)\ 2l}\quad x$。

对于 $F_{\frac{1}{2},0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$，边界条件为 $y'(0)=0$, $y'(l)=0$，由此得到 $c_+=0$，以及方程 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$。因此，特征值为 $\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2}$，$n\in N$，特征函数为 $y(x,\lambda_n)=\cos\frac{\pi n}{l}x$。

定理 A.4.2. 算子 F 的核如下（其中 $\alpha\neq\frac{1}{2}$）：

(1)（非正规奇异情形。）设 $b>0$。则算子 $F_{\alpha,b;\frac{\pi}{2}}$ 和 $F_{\alpha,b;0}$ 均为正。(2)（正则奇异极限点情形。）算子 $F_{\alpha,0;\beta}$ 非负，其核如下：

$$\text{核}F_{\alpha,0;0}=\langle 0\rangle,\qquad \ker F_{\alpha,0;\frac{\pi}{2}}=\begin{cases}\langle 1\rangle, & \alpha<\frac{1}{2},\\ \langle 0\rangle, & \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

(3)（正则奇异极限圆情形。）算子 $F_{\alpha,0;0,\beta}$ 为非负算子，其核如下：

$$\ker F_{\alpha,0;0,0}=\langle 0\rangle,\qquad \ker F_{\alpha,0;0,\frac{\pi}{2}}=\begin{cases}\langle 1\rangle, & \alpha<\frac{1}{2},\\ \langle 0\rangle, & \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

（4）（正则情形。）算子 $F_{\frac{1}{2},\ 0;\delta,\ \beta}$, $\delta,\beta\in\{0,\frac{\pi}{2}\}$ 非负，且其核如下：

$$\ker F_{\frac{1}{2},0;0,\frac{\pi}{2}}=\langle 0\rangle,\quad \ker F_{\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}=\langle 1\rangle,\quad \ker F_{\frac{1}{2},0;0,0}=\langle 0\rangle,\quad \ker F_{\frac{1}{2},0;\frac{\pi}{2},0}=\langle 0\rangle.$$

证明。(1) 令 β_0 为 $\frac{\pi}{2}$ 或 0。令 $f_n(x)=f(x,\lambda_n)$ 为与特征值 λ_n 对应的 F_{α} 的特征函数, $_{b;\beta_0}$。根据格林公式，注 A.0.11，

$$\lambda_n\|f_n\|^2=(F_{\alpha,b;\beta_0}f_n,f_n)=\left[h^{1-2\alpha}f_nf_n'\right]_0^l+\int_0^l h^{1-2\alpha}{f_n'}^2+b\int_0^l h^{-1-2\alpha}f_n^2.$$

由于 f_n 是一个特征函数，因此它是满足边界条件的特征值方程的平方可积解。因此，根据定理 A.0.4，f_n 在 $x=0$处呈指数衰减。这意味着所有积分均有限，且第一项在 $x=0$处为零。但根据边界条件，它在 $x=l$ 处也为零。因此，

$$\lambda_n\|f_n\|^2=(F_{\alpha,b;\beta_0}f_n,f_n)=\int_0^l h^{1-2\alpha}{f_n'}^2,$$

且仅当 $\lambda_n=0$ $f_n'=0$，也就是说，当 f_n 是常函数的倍数时。但常函数不属于这些算子的定义域，因为它在 $x=0$附近不具备必要的行为。

(2) 设 $f_n(x)=f(x,\lambda_n)$ 是与 $F_{\alpha,0;\beta}$ 的特征值 λ_n 相关联的特征函数，格林公式给出

$$\lambda_n\|f_n\|^2=(F_{\alpha,0;\beta}f_n,f_n)=\left[h^{1-2\alpha}f_nf_n'\right]_0^l+\int_0^l h^{1-2\alpha}{f_n'}^2.$$

在所有情况下，$(h^{1-2\alpha}f_nf_n')(l) = 0$，因为 f_n 满足 $x = l$处的边界条件，且 $\|f_n\|$ 是有限的，因为 f_n 是平方可积的。我们还将证明 $(h^{1-2\alpha}f_nf_n')(0) = 0$，并证明该积分有限。由于 f_n 是特征值方程的解，因此它是两个基本解的线性组合。根据定理 A.0.5，我们知道 f_n 在$x = 0$附近的行为。对于 f_n 沿 $\mathfrak{f}_\pm$ 方向的分量，有：

$$h^{1-2\alpha}(x)f_n(x)f_n'(x) \sim \int h^{1-2\alpha}(x)f_n(x)f_n'(x) \sim x^{\pm|\kappa(2\alpha-1)+1|}.$$

因此，对于沿 $\mathfrak{f}_+$ 的分量，积分是有限的，且 $(h^{1-2\alpha}f_nf_n')(0) = 0$。因此，$(h^{1-2\alpha}f_nf_n')(0) = 0$ 对于 $F_{\alpha,\ 0;\beta}$，因为 $\mathfrak{f}_-$ 不属于该算子的定义域，并且

$$\lambda_n\|f_n\|^2 = (Ff_n, f_n) = \int_0^l h^{1-2\alpha}f_n'^2,$$

所以 $\lambda_n \geq 0$，并且，$\lambda_n = 0$ 当且仅当 $f_n' = 0$。由于常函数在 $\beta = 0$ 时不满足 $x = l$ 处的边界条件，因此得出 $F_{\alpha,\ 0;0}$ 的结果。对于$F_{\alpha,\ 0;\frac{\pi}{2}}$，我们知道常函数是 $\mathfrak{f}_+$，因此根据注释 A.0.7，当 $\alpha \leq 0$ 时，它满足 $x = 0$ 处的边界条件。这得出 $F_{\alpha,\ 0;\frac{\pi}{2}}$ 的结果。

(3) 考虑算子 $F_{\alpha,\ 0;0,\ \beta}$。注意，$x = 0$^ ^处的边界条件为：$bv_{\mathcal{F};\delta}(f) = 0$。如果 $\delta = 0$, $bv_{\mathcal{F};\delta=0}(f) = bv_+(f) = 0$，则该条件由 $\mathfrak{f}_+$ 满足，但不由 $\mathfrak{f}_-$ 满足。因此，沿用第 (2) 点中的相同论证即可得出结论。

（4）这直接由注释 A.4.1 得出。 □

引理 A.4.3. 设 $\{\lambda_n\}$ 属于上述任一算子 F 的谱，并令 λ_n^0 表示由 F 在 $b = 0$ 取值时诱导的相关算子 F^0 所对应的特征值。那么，对于所有 n，都有 $|\lambda_n - \lambda_n^0| \leq M$，其中 M 是某个正常数。

证明。令 λ_n 表示算子 F_α 的一个特征值，$_{b;\beta}$ 和 λ_n^0 表示相应的特征值，分别对应于算子 $F_{\alpha,0;0,\beta}$（若 $x = 0$ 是极限圆）或 $F_{\alpha,0;\beta}$（若 $x = 0$ 是极限点）（这取决于 α）。处理算子 U^0 更容易，它们是形式算子 $\mathcal{U}$ 的自伴扩张，对应于 $\mathcal{F}$，如注 A.0.2 所述。记 u_n 和 u_n^0 为 λ_n 和 λ_n^0 的某些特征函数。那么，

$$\lambda_n\langle u_n^0, u_n\rangle = \langle u_n^0, Su_n\rangle = \langle S^0u_n^0, u_n\rangle + \langle u_n^0, ru_n\rangle,$$

其中（见注释 A.0.1）$r_{\alpha,\ b}(x) = \frac{b}{x^{2\kappa}} + g(x)$。由于 u_n 在 x 足够小时呈指数收敛，因此积分

$$\langle ru_n^0, u_n\rangle = \int_0^l r(x)u_n^0(x)u_n(x)dx,$$

是有限的，结论随即得出。 □

推论 A.4.4。序列 $\mathrm{Sp}(F)$ 的阶为 $1\ 2$，亏格为 0（参见附录 B）。

A.5. 其他一些谱函数。设 Σ 为包含在 $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}_+(L)$ 中的任意扇形区域（其中 L 为上述任一算子），且 Λ 为 Σ 的边界。我们假设变量 λ 始终限制在 Σ 内。我们用 $-\lambda$ 表示 Σ 中满足 $\arg(-\lambda) = 0$ 的复变量，其位于 Σ 所包含的实轴负半轴上。采用此约定，若 $z = \sqrt{\lambda}$，则 $iz = -\sqrt{-\lambda}$。

F的特征值可以如下刻画：若 $Ff = \lambda f$，则 f是方程$\mathcal{F}_{\alpha,\ b}f = \lambda f$ 的一个解，且属于 $\mathrm{D}(F)$。若在 $x = 0$处没有边界条件，则

恰有一个平方可积解，即 $\mathfrak{f}_+$。若在 $x=0$处有边界条件，则平方可积解中也只有一个满足该边界条件。因此，在 $x=l$处满足绝对边界条件的$F=F_{\alpha,\ b;\frac{\pi}{2}}, F_{\alpha,\ b;0,\ \frac{\pi}{2}}, F_{\alpha,\ b;\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}}$的特征值，是函数的零点

$$B_{\alpha,b;\frac{\pi}{2}}(l,\lambda)=\mathfrak{f}'_{\alpha,b,+}(l,\lambda),\quad B_{\alpha,b;0,\frac{\pi}{2}}(l,\lambda)=\mathfrak{f}'_{\alpha,b,+}(l,\lambda),\quad B_{\alpha,b;\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}(l,\lambda)=\mathfrak{f}'_{\alpha,b,-}(l,\lambda)$$

作为 λ 的函数，而在 $F=F_{\alpha,\ b;0}, F_{\alpha,\ b;0,\ 0}, F_{\alpha,\ b;\frac{\pi}{2},\ 0}$处满足相对边界条件的特征值，是函数的零点

$$B_{\alpha,b;0}(l,\lambda)=\mathfrak{f}_{\alpha,b,+}(l,\lambda),\quad B_{\alpha,b;0,0}(l,\lambda)=\mathfrak{f}_{\alpha,b,+}(l,\lambda),\quad B_{\alpha,b;\frac{\pi}{2},0}(l,\lambda)=\mathfrak{f}_{\alpha,b,-}(l,\lambda)$$

作为 λ 的函数。由于解在 λ, B 上是解析的，因此是整函数。根据引理 A.4.4, B 的阶为1 2，因此我们有如下因子分解

$$B(l,\lambda)=B(l,0)\lambda^{\dim\ker F}\prod_{\lambda_n\in\mathrm{Sp}_0(F)}\left(1+\frac{-\lambda}{\lambda_n}\right),$$

其中 $B(l,0)=\lim_{\lambda\to0}{}^{B_{(l,\ \lambda)}}\overline{\lambda^{\dim\ker F}}$·由此可得:

$$\begin{aligned}\log\Gamma(-\lambda,F)&=\log\Gamma(-\lambda,\mathrm{Sp}_0(F))=-\log\prod_{\lambda_n\in\mathrm{Sp}_0(F)}\left(1+\frac{-\lambda}{\lambda_n}\right)\\&=\log B(l,0)+\dim\ker F\ln\lambda-\log B(l,\lambda).\end{aligned}\tag{A.2}$$

A.6. 解的渐近展开。我们在确定解析挠率时所需的主要技术工具之一，是了解某些谱函数的渐近展开的存在性及其类型：一方面，当 λ 取大值时；另一方面，当 n 取大值时。这些信息取决于基本解系的解的渐近展开。证明采用渐近分析的经典方法，并采用一种新方法，即引入平坦情形的扰动；主要参考文献为 Olver [36] （另见 [34, 28]）。

引理 A.6.1. 方程

$$v''(x)+\left(z^2-\frac{\nu^2-\frac14}{h^2(x)}-p(x)\right)v(x)=0,$$

有两个线性无关解 $v_\pm(x,z)$；当 z 足够大时（在适当的扇形区域内），其渐近展开如下

$$v_\mp(x,z,\nu)=\mathrm{e}^{\pm ixz}\left(1+\left(\mp\frac{i}{2}\left(\frac14-\nu^2\right)\int\frac{1}{h^2(x)}\pm\frac{i}{2}\int p(x)dx\right)\frac{1}{z}+\dots\right).$$

u对 x 一致，其中 x 取遍 $(0,l]$ 的任意紧子集。系数是 ν 的函数 [2].

证明. 我们设 $v(x,z,\nu)=\mathrm{e}^{zw_0(x,\ \nu)+w_1(x,\ \nu)+z^{-1}w_2(x,\ \nu)+\dots}=\mathrm{e}^{F(x,z,\nu)}$，并代入微分方程。然后比较各次幂的系数，即得结论 [36,第 6] 章。□

引理 A.6.2. 方程

$$w''(x)+\left(z^2\nu^2-\frac{\nu^2-\frac14}{h(x)^2}-p(x)\right)w(x)=0,$$

有两个线性无关解 $w_{\pm}(x,z,\nu)$，当 ν 很大时，它们具有以下渐近展开

$$w_{\pm}(x,z,\nu)=\frac{\mathrm{e}^{\pm\nu\int\sqrt{\frac{1}{h^2(x)}-z^2}dx}}{\left(\frac{1}{h^2(x)}-z^2\right)^{\frac{1}{4}}}\left(\sum_{j=0}^{m}U_j(x,z)(\pm\nu)^{-j}+O\left(\frac{1}{\nu^m}\right)\right).$$

关于 x ，在 $(0,l]$ 的任意紧子集上，对 x 一致；关于 z，对 $z\in\Sigma_{\theta,\ c}=\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ |\arg(z-c)|>\frac{\theta}{2}\}$, $c,\theta>0$，解析且一致。

证明。 我们按照 [36], 第 10 章中的方法进行，其中 $f(x,z)=\frac{1}{h\ x()_2}-z^2$, $g(x)=p(x)-\frac{1}{4h\ x()^2}$，并作变量代换 $t=t(x)=\int\sqrt{\frac{1}{h\ x()_2}-z^2}dx$。于是得到方程$W''+(\nu^2+\psi)W=0$，考虑级数解 $W(t,z,\pm\nu)=\mathrm{e}^{\pm\nu t}\sum_{j=0}^{\infty}U_j(t,z)(\pm\nu)^{-j}$，即可得到所要证明的结论。 □

利用这些引理，我们可以计算相关斯图姆-刘维尔问题基本解的渐近展开。例如，对于较大的 ν，我们有以下展开式：

$$\mathfrak{u}_{+}(x,\lambda\nu^2,\nu)=\frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi\nu}(-\lambda)^{\frac{\nu}{2}}}\frac{\sqrt{h(x)}}{(1-\lambda h^2(x))^{\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{\nu\int\frac{\sqrt{1-\lambda h^2(x)}}{h(x)}dx}\left(\sum_{j=0}^{J}\frac{U_j(x,i\sqrt{-\lambda})}{\nu^j}+O\left(\frac{1}{\nu^{J+1}}\right)\right),$$

对于任意紧子集中的 x ，关于 x 一致，其中 $l]$、解析且关于 λ 一致，对于$\lambda\in\Sigma_{\theta,\ c}=\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ |\arg(z-c)|>\frac{\theta}{2}\}$、 c、 $\theta>0$，其中 $U_0=1$，且 $U_j(x,i\sqrt{-\lambda})=O\left(\frac{1}{-\lambda()^{\frac{k}{2}}}\right)$，对所有 $j>1$ 均成立，其中某个 $k>1$。

Appendix B. Elements of zeta regularisation technique

B.1. 简单序列与ζ行列式。设 $S=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个非负实数序列，其唯一聚点为无穷远点。我们将S_0 记为 S 的正部分，即 $S_0=S-\{0\}$。假设 S 的收敛指数 $\mathrm{e}(S)$ 有限，因此相应的魏尔斯特拉斯典范乘积在任意有界闭区域内一致且绝对收敛，并且是一个阶为该序列 S 的亏格 $\mathrm{g}(S)$ 的整函数。在此情形下，我们定义函数

$$\frac{1}{\Gamma(-\lambda,S)}=\prod_{a_n\in S_0}\left(1+\frac{-\lambda}{a_n}\right)\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{\mathrm{g}(S)}\frac{(-1)^j}{j}\frac{(-\lambda)^j}{a_n^j}},$$

对于 $\lambda\in\rho(S)=\mathbb{C}-S$，我们将其称为与 S 相关联的伽马函数。这里， $-\lambda$ 表示定义在 $\mathbb{C}-[0,+\infty)$ 上的复变量，其辐角 $\arg-\lambda=0$ 位于 $(-\infty,0]$。我们还引入 ζ 函数，它由下面的局部一致收敛级数定义

$$\zeta(s,S)=\sum_{a_n\in S_0}a_n^{-s},$$

当 $\mathrm{Re}(s) > \mathsf{e}(S)$ 时成立，并通过解析延拓定义于其他位置。我们假设序列S 是一个非正阶的正则谱型序列，定义见 [41, 2.1, 2.6]。在这种情况下，与 S 相关联的 ζ函数的解析延拓在 $s = 0$ 处正则，因此我们可以定义 S 的 ζ正则化行列式为 $\det_\zeta S = \mathrm{e}^{-\zeta'(0,S)}$。注意，若 $S_0 \neq S$，则该行列式定义为 S 的正部分的行列式，因为此时 S 的行列式显然为零。此外，我们还有以下结果[41, 2.11]。

定理 B.1.1. 若 S 是非正阶的正则谱型序列，则对较大的 λ，在 $\mathbb{C} - \Sigma_{c,\theta}$中，对数伽马函数有一个渐近展开式，其中$\Sigma_{c,\theta}$是某个扇形区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z-c)| \leq \frac{\theta}{2}\}$，满足 $c > 0$和 $0 < \theta < \pi$，且包含S，并且我们有

$$\log \det{}_\zeta S = -\zeta'(0,S) = \operatorname*{Res}_{\lambda=+\infty} \log \Gamma(-\lambda, S).$$

B.2. 双重序列与谱分解引理。我们给出一些公式，用于处理双重序列的 ζ 不变量。这些公式是 [41] 中一般结果的特例（另见 [18]）。

给定一个非零复数的双重序列 $S = \{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$，其在无穷远处有唯一聚点，有限指数 $s_0 = \mathsf{e}(S)$，亏格为 $p = \mathsf{g}(S)$，我们用记号 S_n (S_k)表示固定 n (k)的简单序列；我们称 S_n 和 S_k 的指数为 S的相对指数，并使用记号 $(s_0 = \mathsf{e}(S)\ s_1 = \mathsf{e}(S_k)\ s_2 = \mathsf{e}(S_n))$；相应地定义相对亏格。

定义 B.2.1. 设 $S = \{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ 是一个具有有限指数 (s_0, s_1, s_2)、亏格 (p_0, p_1, p_2) 和正谱扇区 Σ_{θ_0,c_0} 的双序列。设 $U = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个指数为 r_0、亏格为 q、定义域为 $D_{\phi,d}$ 的无穷阶全正则谱型序列。若存在正实数 κ、ℓ（整数）、c' 和 θ'，满足 $0 < \theta' < \pi$，使得：我们称 S 在 U 上关于幂 κ、长度 ℓ 和渐近域 $D_{\theta,c}$ 是谱可分解的，其中 $c = \min(c_0, d, c')$，$\theta = \max(\theta_0, \phi, \theta')$，

(1) 序列 $u_n^{-\kappa} S_n = \left\{ \frac{\lambda_{n,k}}{u_n^{\kappa}} \right\}_{k=1}^{\infty}$具有谱扇区 $\Sigma_{\theta',c'}$，并且对于每个 n，它都是无穷阶的正则谱型全正则序列；(2) 与 S_n/u_n^{κ} 相关的对数 Γ 函数，当 n 较大时，在 λ 中关于 λ 在 $D_{\theta,c}$ 内一致地具有如下形式的渐近展开

$$\log \Gamma(-\lambda, u_n^{-\kappa} S_n) = \sum_{h=0}^{\ell} \phi_{\sigma_h}(\lambda) u_n^{-\sigma_h} + \sum_{l=0}^{L} P_{\rho_l}(\lambda) u_n^{-\rho_l} \log u_n + o(u_n^{-r_0}), \tag{B.1}$$

其中 σ_h 和 ρ_l 是实数，满足 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_\ell$、$\rho_0 < \cdots < \rho_L$；$P_{\rho_l}(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式，满足条件 $P_{\rho_l}(0) = 0$；ℓ 和 L 是较大的整数，使得 $\sigma_\ell \leq r_0$ 和 $\rho_L \leq r_0$。

定义以下函数（$(\Lambda_{\theta,\ c} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z-c)| = \frac{\theta}{2}\}$，方向为逆时针）：

$$\Phi_{\sigma_h}(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{\theta,c}} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda} \phi_{\sigma_h}(\lambda) d\lambda dt. \tag{B.2}$$

根据 [41], 对所有 n的引理 3.3，我们有如下展开式:

$$\log\Gamma(-\lambda, S_n/u_n^\kappa) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{\alpha_j,0,n}(-\lambda)^{\alpha_j} + \sum_{k=0}^{p_2} a_{k,1,n}(-\lambda)^k \log(-\lambda), \tag{B.3}$$

当 λ 趋于无穷大时，在 $D_{\theta,\ c}$ 中。我们设（见 [41] 的引理 3.5）

$$\begin{aligned} A_{0,0}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,0,n} - \sum_{h=0}^{\ell} b_{\sigma_h,0,0}u_n^{-\sigma_h}\right)u_n^{-\kappa s}, \\ A_{0,1}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,1,n} - \sum_{h=0}^{\ell} b_{\sigma_h,j,1}u_n^{-\sigma_h}\right)u_n^{-\kappa s}, \quad 0 \le j \le p_2. \end{aligned} \tag{B.4}$$

定理 B.2.2。 设 S 在 U 上谱可分解，如定义 *B.2.1*所述。假设函数 $\Phi_{\sigma_h}(s)$ 至多在 $s = 0$处有简单极点。则， $\zeta(s,\ S)$ 在 $s = 0$处正则，且

$$\zeta(0,S) = \zeta_{\mathrm{reg}}(0,S) + \zeta_{\mathrm{sing}}(0,S), \qquad \zeta'(0,S) = \zeta'_{\mathrm{reg}}(0,S) + \zeta'_{\mathrm{sing}}(0,S),$$

其中正则部分和奇异部分为

$$\zeta_{\mathrm{reg}}(0,S) = -A_{0,1}(0), \qquad \zeta_{\mathrm{sing}}(0,S) = \frac{1}{\kappa}\sum_{h=0}^{\ell}\operatorname*{Res}_{s=0}\Phi_{\sigma_h}(s)\operatorname*{Res}_{s=\sigma_h}\zeta(s,U),$$

$$\zeta'_{\mathrm{reg}}(0,S) = -A_{0,0}(0) - A'_{0,1}(0),$$

$$\begin{aligned} \zeta'_{\mathrm{sing}}(0,S) =& \frac{\gamma}{\kappa}\sum_{h=0}^{\ell}\operatorname*{Res}_{s=0}\Phi_{\sigma_h}(s)\operatorname*{Res}_{s=\sigma_h}\zeta(s,U) \\ &+ \frac{1}{\kappa}\sum_{h=0}^{\ell}\operatorname*{Res}_{s=0}\Phi_{\sigma_h}(s)\operatorname*{Res}_{s=\sigma_h}\zeta(s,U) + {\sum_{h=0}^{\ell}}'\operatorname*{Res}_{s=0}\Phi_{\sigma_h}(s)\operatorname*{Res}_{s=\sigma_h}\zeta(s,U), \end{aligned}$$

记号 $\sum'$ 表示，求和中仅出现满足 $\zeta(s,U)$ 在 $s = \sigma_h$ 处有极点的项。

注 B.2.3。 注意，在定义 *B.2.1*的第 (2) 点展开式中，函数 $\phi_{\sigma_h}(\lambda)$ 和多项式 $P_{\rho_l}(\lambda)$ 在 λ 中为常数的项不会在后续结果中出现。因此，在枚举这些项（即指标 σ_h 和 ρ_l）时，只需考虑其他项即可。

推论 B.2.4. 设 $S_{(j)} = \{\lambda_{(j),n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $j = 1, ..., J$ 是一个有限的双序列集合，它们满足定义 B.2.1 中关于在共同序列 U 上谱可分解的所有要求，且参数 κ, ℓ 等相同；但条件 (2) 中出现的多项式 $P_{(j),\rho}(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处不为零。假设这些多项式的某个线性组合 $\sum_{j=1}^{J} c_j P_{(j),\rho}(\lambda)$（其系数为复数）满足该条件，即 $\sum_{j=1}^{J} c_j P_{(j),\rho}(\lambda) = 0$。那么，ζ函数 $\sum_{j=1}^{J} c_j\zeta(s, S_{(j)})$ 的这一线性组合在 $s = 0$ 处正则，并满足定理 B.2.2 中所给公式的线性组合。

声明

数据可用性声明：本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

不存在利益冲突，也没有获得资助。

References

[1] J. Br¨uning 和 M. Lesch。希尔伯特复形。 *J. Funct. Anal.*，108(1)：88–132，1992。[2] J. Br¨uning 和 X. Ma。带边流形上 Ray–Singer度量的异常公式。*Geom. Funct. Anal.*，16(4)：767–837，2006。[3] J. Br¨uning 和 X. Ma。关于解析挠率的拼接公式。 *Math. Z.*，(-)：– 。[4] J. Br¨uning 和 R. Seeley。正则奇异渐近。 *Adv. in Math.*，58(2)：133–148，1985。[5] J. Br¨uning 和 R. Seeley。二阶正则奇异算子的预解式展开。，( )：– 。[6] J. Cheeger。解析挠率与热方程。 *Ann. of Math. (2)*，109(2)：259–322，1979。[7] J. Cheeger。关于具有锥状奇点的空间的谱几何。 *Proc. Nat. Acad. Sci.*，( )：– 。[8] J. Cheeger。关于黎曼伪流形的 Hodge理论。载于 *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*，《纯数学研讨会论文集》，XXXVI，91–146 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1980。[9] J. Cheeger。奇异黎曼空间的谱几何。 *J. Differential Geom.*，18(4)：575–657（1984），1983。[10] J. Cheeger 和 S. T. Yau。热核的下界。 *Comm. Pure Appl. Math.*，34(4)：465–480，1981。[11] N. Dunford 和 J. T. Schwartz。 *Linear operators. Part II*。Wiley Classics Library。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1988。谱理论。希尔伯特空间中的自伴算子，由 William G. Bade 和 Robert G. Bartle 协助编写，重印自 1963 年原版，Wiley-Interscience 出版物。[12] M. P. Gaffney。Milgram 和 Rosenbloom 关于开黎曼流形的热方程方法。 *Ann. of Math. (2)*，60：458–466，1954。[13] M. P. Gaffney。完备黎曼流形的一个特殊斯托克斯定理。 *Ann. of Math. (2)*，60 140 145，1954：– 。[14] P. B. Gilkey。 *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*。高级数学研究。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，第二版，1995。[15] M. Goresky 和 R. MacPherson。交叉同调理论。 *Topology*，19(2)：135–162，1980。[16] M. Goresky 和 R. MacPherson。交叉同调。II。 *Invent. Math.*，72(1)：77–129，1983。[17] L. Hartmann 和 M. S preafico。球面上的锥的解析挠率。 *J. Math. Pures Appl.*，( )：– 。[18] L. Hartmann 和 M. Spreafico。 R *J. Gökova* 圆锥台的挠率与解析挠率。，：– 。[19] L. Hartmann 和 M. Spreafico。关于偶维锥的 Cheeger-M¨uller 定理。 *Algebra i Analiz*，27(1)：194–217，2015。[20] L. Hartmann 和 M. Spreafico。紧流形上的有限度量锥的解析挠率。 *J. Math. Soc. Japan*，69(1)：311–371，2017。[21] L. Hartmann 和 M. Spreafico。锥形奇点空间的交叉挠率与解析挠率。arXiv:2001.07801，2020。[22] F. Kirwan 和 J. Woolf。 *An introduction to intersection homology theory*。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，第二版，2006。[23] F. Lapp。具有喇叭奇点的算子的指标定理。2013。ahttps://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/17490/lapp.pdf?sequence=1。[24] M. Lesch。奇异空间上解析挠率的拼接公式。 *Anal. PDE*，6 256，2013 1 221( )：– 。

[25] M. Lesch 和 N. Peyerimhoff。关于具有度量号角的流形的指标公式。
Comm. Partial , ( ), . [26]
Diff. Eq. 23 3 1996
W. L ¨ *J. Differential* uck。
Geom. 37 2 263 322, 1993
带边界和对称性的流形的解析挠率与拓扑挠率。 , ( ): – . [27] U. Ludwig。将 Cheeger 和 M¨uller 的一条定理推广到具有孤立锥形奇点的空间。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 356(3):327–332, 2018。[28] V. A. Marchenko。 *Sturm-Liouville operators and applications*。AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯，罗得岛州，修订版，2011年。[29] W. S. Massey。 *A basic course in algebraic topology*，第127卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1991年。[30] J. Milnor。Whitehead挠率。 *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:358–426, 1966。[31] W. M
¨ *R* 28 3 233 305, uller。黎
1978
曼流形上的解析挠率与-挠率。 *Adv. in Math.*, ( ): – .[32] W. M¨uller 和 B. Vertman。具有锥形奇点的流形上解析挠率的度量异常。 *Comm. Partial Differential Equations*, 39(1):146–191, 2014。[33] J. R. Munkres。 *Elements of algebraic topology*。Addison-Wesley 出版公司，门洛帕克，加利福尼亚州，1984年。[34] J. D. Murray。 *Asymptotic analysis*，第48卷，属于 *Applied Mathematical Sciences*。施普林格出版社，纽约，第二版，1984年。[35] H.-D. Niessen 和 A. Zettl。奇异斯图姆-刘维尔问题：弗里德里希斯扩张与特征值比较。 *Proc. London Math. Soc. (3)*, 64(3):545–578, 1992。[36] F. W. J. Olver。 *Asymptotics and special functions*。AKP Classics。A K Peters 有限公司，韦尔斯利，马萨诸塞州，1997年。1974年原版的重印本 [学术出版社，纽约；MR0435697 (55 #8655)]。[37] D. B. Ray 和 I. M. Singer。
R *Advances in* -挠率与黎
Math. 7 145 210, 1971
曼流形上的拉普拉斯算子。 , : – . [38] K. Schm
¨ *Unbounded self adjoint operators on Hilbert space* 265 *Graduate Texts in* udgen。 ,
Mathematics 2001
第 卷，属于。施普林格出版社，纽约 - 柏林，。[39] G. Schwarz。
Hodge decomposition—a method for solving boundary value problems，第1607卷，属于 *Lecture Notes in Mathematics*。施普林格出版社，柏林，1995年。[40] E. H. Spanier。 *Algebraic topology*。施普林格出版社，纽约， [1995?]。1966年原版的修订重印本。[41] M. Spreafico。谱型双重序列的ζ行列式。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140 6 1881 1896, 2012 ( ): – . [42] M. Spreafico。欧拉同构、欧拉基与 Reidemeister 扭率。 *Mosc. Math. J.*, 18(3):517– 555, 2018。[43] M. Spreafico。具有锥形奇点的空间上的交叉德拉姆理论。2021年。[44] S. M. Vishik。广义雷-辛格猜想。一、具有光滑边界的流形。
Comm. , ( ): – .
Math. Phys. 167 1 1 102, 1995
[45] J. Weidmann。 *Linear operators in Hilbert spaces*，第68卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约-柏林，1980年。由 Joseph Sz¨ucs 从德文翻译。[46] K. Yosida。 *Functional analysis*。《数学经典》。施普林格出版社，柏林，1995年。第六版（1980年）的重印本。[47] A. Zettl。 *Sturm-Liouville theory*，第121卷，属于 *Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年。

(Mauro Spreafico) 数学与应用系，米兰比可卡大学，米兰，以及意大利莱切国家核物理研究所
Email address：mauro.spreafico@unimib.it