arXiv:2305.05450v3 [cond-mat.stat-mech] 9 Nov 2023

网络渗流为耦合振荡系统的突变提供早期预警：一项解释性分析

No´emie Ehstand,[1,*] Reik V. Donner,[2,3] Crist´obal L´opez,[1] and Emilio Hern´andez-Garc´ıa[1]
[1] *IFISC (CSIC-UIB), Instituto de Física Interdisciplinar y Sistemas Complejos, Campus Universitat de les Illes Balears, E-07122 Palma de Mallorca, Spain*
[2] *Department of Water, Environment, Construction and Safety,Magdeburg-Stendal University of Applied Sciences, Breitscheidstraße 2, D-39114 Magdeburg, Germany*
[3] *Research Department IV-Complexity Science and Research Department I-Earth System Analysis, Potsdam Institute for Climate Impact Research (PIK) – Member of the Leibniz Association, Telegrafenberg A31, D-14473 Potsdam, Germany*(日期：2023年11月10日)

功能网络是研究空间扩展系统或多变量系统中统计相互依赖结构的有力工具。它们已被用于深入了解科学各领域中复杂系统的动力学。特别是，相关网络的渗流特性已被用于识别临界转变的早期预警信号。在这项工作中，我们进一步探究渗流指标在预判耦合的不规则振荡系统中不同类型状态突变方面的潜力。作为典型模型系统，我们研究了一个由扩散耦合的含噪 FitzHugh-Nagumo振荡器构成的环的动力学，并表明，当振荡器几乎完全同步时，基于渗流的前兆能够成功地对系统两种状态之间的快速切换发出非常早的预警。我们通过将平均场行为所体现的全局趋势与个体随机涨落的同步区分开来，阐明渗流转变背后的机制。随后，我们将相同的方法应用于厄尔尼˜诺—南方涛动不同阶段的海表温度异常实际数据。这有助于更深入地理解哪些因素使渗流前兆能够有效地作为厄尔尼˜诺和拉尼˜娜事件初现时的早期预警指标。

I. 引言

在各种复杂系统中，包括气候[1、4], 生态 [5, 6], 、金融 [7, 8] 和生理 [9] 系统，截然不同的动力学状态之间发生突变是一种引人注目的现象。这些所谓的临界转变或状态转变会产生重大影响，因为它们会使系统的功能和结构发生剧烈变化。因此，提前充分预判这些变化对于风险管理和减轻其影响至关重要。

大量研究致力于识别即将发生的临界转变的通用早期预警信号 [10–16] ，而对于由分岔引发的转变，其概念体系已相当成熟；按照 Ashwin 等人提出的术语，这类转变被称为 B型临界转变 [4]。在这种情况下，控制参数逐渐变化，直到达到临界阈值或临界点，系统随后突然重组为一个全新的动力学状态。动力系统理论表明，当系统状态失去稳定性时，便会发生这种情况，从而迫使系统转向新的吸引子。在大多数情况下 [3], , 随着系统接近失稳点，其雅可比矩阵的主导特征值趋近于零，这意味着系统受到扰动后恢复到平衡态的速率会降低 [17–19]。这种现象称为临界减速 [20]。

针对临界转变，人们基于临界减速的统计特征提出了多种早期预警指标，包括时间指标[21–28] 和空间指标 [29–31]。此外，一些研究综合了空间和时间指标[32]。与这些进展并行，许多研究展示了复杂网络在研究由相互连接单元组成的系统中的统计结构方面的潜力 [33–37]。尤其是，多项研究采用基于网络的框架来预测由分岔诱发的临界转变[38–40]。Rodriguez-Mendez等人 [40] 研究了表征空间扩展系统中不同位置间强相关性的功能网络，并证明这类网络中的多种渗流量化指标能够有效预判即将发生的分岔。

更具体地说，在由扩散或类似的均匀化相互作用耦合的互连（例如空间分布的）单元组成的系统中，随着系统接近分岔，由于上述减速效应（耦合作用的时间越来越充裕），不同单元之间的变异会变得越来越相关。这种相干性的增强可以体现在不同时间尺度的动力学中，从快速波动的同步，到共同长期行为（例如随机趋势）的出现。在基于相关性的

* n.ehstand@ifisc.uib-csic.es

功能网络中，这体现为连接密度的增加。因此，随着条件使系统逐渐接近分岔，连通性不断增强，最终形成一个大型连通分量，其中包含了所有节点中的相当一部分。这称为渗流。网络在分岔处达到完全连通，但实际达到渗流阈值的时刻早于分岔。在这种情况下，功能网络的渗流是分岔临近的早期预警信号，而渗流转变本身的前兆信号则比分岔的标准预期信号提供更早的预判。Rodriguez-Mendez 等人针对各种 B型临界转变情形，对这一方法的成功应用作了充分说明等人[40]。

尽管其具有普适性，并且与各个学科都相关，但复杂系统中并非所有有趣或重要的突变都属于B型临界转变[4, 41]。例如，状态转变可能由噪声波动引起，而不一定接近任何分岔点，从而使系统跃迁到另一种动态吸引子。这被称为N型临界转变。在其他情况下，随着控制参数的变化，吸引子也会发生改变。如果参数变化速率过快，系统可能离开吸引域，从而导致所谓的R型临界转变。此外，Kuehn [42] 考虑了由双时间尺度系统中快动力学的分岔所诱发的类似临界转变情形。除了B型临界转变之外，是否也能发现突变的普适性预警信号，仍是一个悬而未决的问题，也构成了一项重大挑战。

在本文中，我们探讨了基于功能网络表征的渗流指标，能否在经典B型临界转变情形之外，预示空间扩展复杂系统中的突变，重点关注呈现不规则振荡的系统。我们首先考察快慢系统，选取一个由非周期性随机FitzHugh-Nagumo振荡器组成的系统作为主要示例；这些振荡器通过扩散耦合，并排列在一维环形晶格上。所有模型参数均保持不变，因此不会发生分岔或B型临界转变。然而，不同全局状态之间仍会在不规则的时间发生跳变，而我们希望为这些跳变寻找预期信号。为此，我们构建了一个时变功能网络，用于描述系统快变量在不同位置处相关性的演化。我们表明，网络中会发生渗流转变，并且能够预示系统振荡不同阶段之间不规则的突变。随后，我们刻画了可能导致渗流转变的不同过程所作出的贡献。这些过程包括各个振子之间的共同趋势，以及叠加的（随机）波动所发生的同步。

所得结果为理解多组分复杂系统的功能网络表征中出现的随时间变化的结构变化提供了新的见解，从而有助于更好地理解和解释基于渗流的前兆在现实世界振荡现象中的应用。厄尔尼诺和拉尼娜气候现象中，渗流框架此前展现出的预判能力便是一个例证。值得注意的是，Rodriguez-Mendez等人[40] 将基于渗流的框架应用于赤道太平洋海表温度（SST）的时间序列。他们展示了该方法预判厄尔尼诺和拉尼娜事件的能力，这两种事件是单一气候振荡——厄尔尼诺-南方涛动（ENSO）的两个极端阶段。其他研究也证实，气候网络中渗流转变的不同特征可为厄尔尼诺或拉尼娜的发生提供早期预警指标[43–46]。事实上，据报道，功能性气候网络的若干拓扑和几何特性可为不同ENSO阶段下空间扩展的海气耦合系统整体状态提供有用的诊断信息[47–49]。尽管如此，导致这些相关网络发生渗流转变的数学机制仍远未得到充分理解。借鉴对导致FitzHugh-Nagumo 系统中渗流转变的过程的研究所得认识，我们确定了Rodriguez-Mendez等人 [40]报告的渗流框架预判厄尔尼诺和拉尼娜的表现背后的机制：所考察区域内海表温度变化呈现整体趋势。

本文其余部分安排如下。在第 II 节中，我们介绍网络构建以及用于识别临界转变的基于渗流的前兆原理。第 III 节首先介绍耦合的 FitzHugh-Nagumo振荡器系统，并描述其数值积分方法。随后，我们详细说明渗流框架在该系统中的应用及所得结果。最后，在第 IV节中，我们展示如何借鉴前述示例，深入理解导致描述厄尔尼诺˜和其他厄尔尼诺˜—南方涛动阶段的（基于相关性的）功能网络连通结构变化的动力过程。

II. 相关网络与渗流

A. 功能网络

空间扩展动力系统可以近似为由各自局部动力学支配的空间局部单元，这些单元通过扩散、对流、传导等过程相互作用。功能网络是一种离散方式，用于编码这些局部动力学之间的统计关联。它们已成功用于深入了解复杂系统的动力学，应用领域涵盖神经生理学[50], 城市系统 [51], 地震学 [52]

和气候学 [35, 37, 53]。I
n通过如下方式构建的功能网络，分析空间扩展动力系统不同空间位置之间强相关性的形成。设时空场 $u(x, t)$ 描述系统状态的演化（尽管可能并不完整），其中 x 是空间，t 是时间。我们对空间和时间进行离散化，得到序列 $\{u_k(t_l)\}_{kl}$，其中 $k \in \{1, \ldots, N\}$ 标记将用作功能网络 N节点的不同空间位置，$l \in \{1, \ldots, R\}$ 标记各个时间点。通过对来自不同空间位置的成对时间序列之间的相互依赖关系进行统计分析，构建连接。最常见的做法是通过零时滞皮尔逊相关计算位置 a 和 b 处变异的相似性

$$\rho_{ab} = \frac{\sum_l p_a(t_l) p_b(t_l)}{\sqrt{(\sum_l p_a(t_l)^2)(\sum_l p_b(t_l)^2)}}, \tag{1}$$

其中，$p_k(t_l) = u_k(t_l) - \frac{1}{R}\sum_l u_k(t_l)$ 表示各位置处场相对于其时间平均值的偏差。在节点 a 和 b 之间建立一条连边，当皮尔逊相关高于给定阈值 γ 时：$\rho_{ab} > \gamma$。这里仅考虑正相关，但将该形式扩展到 $|\rho_{ab}| > \gamma$ 的情况也很简单，例如 Ekhtiari 等人 [54] 就采用了这种做法。

以这种方式构建的（无向）网络描述了系统各部分在时间区间 $[t_1, t_R]$ 内最强的正线性相关性。我们将其称为“时间 t_R 的网络”，强调它仅包含截至时间 t_R 的过去信息，这对于旨在进行预测和预判的形式体系是恰当的。通过在连续区间 $[t_2, t_{R+1}]$、$[t_3, t_{R+2}]$ 等上重复这一过程，我们构建出时间 t_{R+1}、t_{R+2} 等时刻的网络，形成一个时变功能网络 [47],，即一种特殊类型的时序网络 [55]，其结构反映了在由各包含 R 个时间步的时间窗口内评估得到的系统相关性随时间的演化。因此，通过分析网络的拓扑性质如何随时间变化，可以检测系统相关结构在某一时刻发生的重组，从而揭示时空动力学的变化。

我们指出，上述网络构建方法只是众多可用方法中最简单的一种。这些方法利用网络理论框架揭示空间扩展动力系统的动力学特性（例如参见 [35]）。还可以使用其他统计依赖性度量，例如滞后相关[43, 46], 或信息论度量 [56]，它们可能会生成编码时间序列相似性不同方面的功能网络 [57]。不过，本文仅采用最简单的方法，因为它基本上无需了解底层机制，也无需了解生成时空信号的空间和时间尺度。我们将证明，这一框架足以发现剧烈转变的预期信号，并提取有关其起源的一些信息。

B. 渗流

渗流理论通常描述随着连接的添加或移除，网络连通性所发生的变化[34, 58]。在许多足够大的网络中，存在一个临界连接数；达到该数量时，不连通簇会合并为一个更大的连通簇，其中包含相当大比例的节点。这种现象称为渗流转变。可以使用多种指标来描述网络的簇性质 [34]。具体而言，我们在此考察最大连通分量的相对大小S_1，即构成最大簇的节点比例，以及随机选取的节点属于大小为 s 的簇的概率 c_s $s \neq 1$。后一个量可表示为

$$c_s = \frac{s n_s}{N}, \tag{2}$$

其中，n_s 是大小为 s 的簇的数量，N 是网络中的节点数。监测演化中的功能网络随时间变化的这些特征，有助于识别并可能提前预判时变网络中的渗流转变。

研究表明，相关网络中的渗流指标能够为即将发生的空间扩展系统 B型临界转变提供非常早的预警信号 [40]。值得注意的是，临界减速会出现在各种（尽管并非所有 [3]）类型的分岔附近。正如引言中所述，在由具有均匀化相互作用（如扩散耦合）的互连空间单元构成的系统中，接近分岔时动力学的减速为相互作用产生较强相关性提供了充足时间，进而形成连边密度较大的相关网络。最终，连通性的增加会导致功能网络发生渗流转变。系统参数发生变化时，渗流阈值会先于分岔（即在连通性较低时）达到；而在分岔处，系统将达到完全连通。因此，系统参数变化过程中出现渗流转变，本身就是预示分岔临近的早期预警信号；而渗流转变本身的预期信号则能更早地预警即将到来的分岔或 B型临界转变。Rodriguez-Mendez等人 [40] 展示了这一方法在各种 B型临界转变情形中的应用。

然而，自然界中许多重要的突变并不能归因于B型临界转变过程。因此，接下来我们将研究渗流测度在B型临界转变之外预测空间扩展复杂系统突变的潜力，重点关注呈现不规则振荡的系统。我们的目标是预测相关的突发

变化，即振荡周期中系统状态发生的变化。

III. 扩散耦合的含噪 FitzHugh-Nagumo 振荡器

A. 模型描述

FitzHugh-Nagumo（FN）系统是可激发系统的一个简约且典型的模型，能够呈现振荡状态。它是 Hodgkin-Huxley 模型的简化版，该模型用于描述沿神经轴突传递电脉冲 [59] ，最初由 FitzHugh 推导 [60] ，后由 Nagumo [61]发展而来。该模型的典型形式如下

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) - v + I, \\ \frac{1}{\epsilon}\dot{v} &= u - bv + c, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $f(u) = \alpha u(u-a)(1-u)$， α、 a、 b、 c、 I为常数参数。可激发变量 u 在原始模型中对应膜电位，其动力学较快；恢复变量v 的动力学较慢。两个变量之间的时间尺度分离由 $\epsilon \ll 1$ 给出。根据参数的取值，系统（3）有一个或三个定常点，其稳定性决定了解的行为。本研究所选的参数组（包括 $I = c = 0$）下，系统在（0,0）处有一个不稳定焦点，并存在唯一的吸引极限环，从而产生周期性脉冲。这类振荡对于神经生物系统建模至关重要 [50, 60, 61], ，也适用于电路[62], 、地震学 [63], 和气候科学 [64]。

在本研究中，我们考虑一个由 N个通过扩散耦合的一维环形晶格上的非周期性随机 FN 型振子组成的系统。节点 k 处状态（u_k, v_k）的时间演化由以下方程描述。

$$\begin{aligned} \dot{u_k} &= f(u_k) - v_k + I + (\Delta u)_k + \sqrt{2D^{(u)}}\eta_k^{(u)}, \\ \frac{1}{\epsilon}\dot{v_k} &= u_k - bv_k + c + (\Delta v)_k + \sqrt{2D^{(v)}}\eta_k^{(v)}, \end{aligned} \tag{4}$$

对于 $k = 1$, ..., N。在下文中，我们将把标签 k称为“空间”。节点 k 通过扩散项 $(\Delta u)_k = u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k$ 和 $(\Delta v)_k = v_{k+1} + v_{k-1} - 2v_k$ 与两侧最近的邻居耦合。为避免不必要的复杂动力学，我们选择使 u 和 v 变量的扩散系数相等，并对空间单位进行缩放，使这一共同扩散系数变为 1。项 $\eta_k^{(u)}(t)$ 和 $\eta_k^{(v)}(t)$ 是两个相互独立的高斯白噪声源，其中 $\langle \eta_r^{(a)}(t)\eta_s^{(b)}(t')\rangle = \delta_{ab}\delta_{rs}\delta(t-t')$。向确定性系统中加入噪声，是因为真实系统不可避免地包含随机涨落。

并且，由于构建第 II 节所述相关网络需要定义良好的空间相关函数。尽管存在这些加性噪声项，只要其强度保持较低，所产生的 FN 动力学仍表现为相当规则的周期振荡。为了使模型更接近我们希望研究的不规则振荡类型——对此类振荡的预测并非易事——我们让参数 ϵ随时间逐步变化，该参数对 u 与 v之间的时间尺度分离影响最直接。具体而言，ϵ 在系统完成一个完整振荡周期所需的时间内保持恒定。此处，一个完整振荡周期定义为所有 N 个振子的平均动力学完成一个完整周期。一旦完成一个周期，就会从区间 $(0.001, 0.033)$ 上按均匀概率分布选取一个新的 ϵ 值（对所有 k都相同）。选择该范围是为了产生适合本研究目的的振荡周期长度。这种对 $\epsilon = \epsilon(t)$ 的选择使振荡周期具有很强的不规则性，让系统更接近自然界的振荡现象，也使得预判各种突变变得更具挑战性。

B. 数值积分

在下文中，我们选择 $\alpha = 1, a = -1, b = -0.83, c = 0, I = 0$ 和噪声强度 $D^{(u)} = D^{(v)} = 0.01$。我们考虑 $N = 500$ 个振子。

为数值计算系统（4）的解，我们从均匀初始状态（$u_k(0) = -0.16$， $v_k(0) = 0.01$） $\forall\ k \in \{1, ..., N\}$开始。解以积分时间步长 $dt = 0.05$演化。在每个时间步，首先通过四阶龙格-库塔格式对方程的确定性部分进行积分 [65, 第 7 节。4]。然后，将N 相互独立、均值为零且方差为 $2D^{(u)}dt$ 和 $2\epsilon^2 D^{(v)}dt$ 的随机高斯分布数分别加到 u_k和 v_k上， $k \in \{1, ..., N\}$。

图 1 展示了解的演化过程（u， v）。图 1(a) 和 1(c) 展示了场 u 和v 随空间和时间的演化。作为另一种观察方式，图 1(b) 和 1(d) 展示了所有（ u 和 v ）节点的个体时间序列叠加图。变量的演化 u 和 v 在空间上相当一致，即所有节点 k 几乎完全同步，这是扩散耦合和参数选择的结果。我们观察到，状态变量 u 呈现出不对称的非周期振荡，并在正值和负值之间突然切换。状态变量 v 随时间线性增加和减少。

在下一节中，我们将探讨渗流前兆能否在不使用变量 v 的任何信息的情况下，预判快变量 u 状态的非规则突变。为此，我们按照前文所述的方法，从离散场 $u_k(t_l)$ 构造一系列网络。

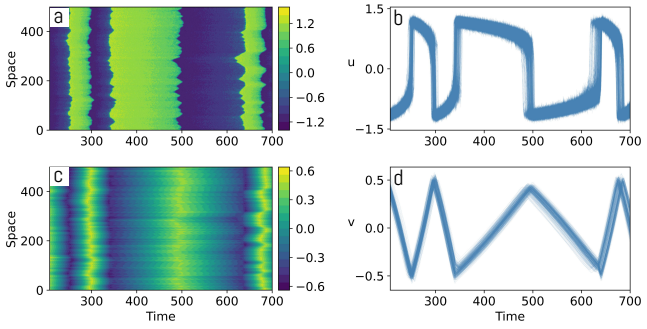

图 1. *Left*: 场 u (a) 和 v (c) 随空间和时间的演化。 *Right*: u(b) 和 v (d) 的全部 ($N = 500$) 条独立时间序列叠加图。

上一节中，采用连续的时间窗口，每个窗口包含 140 个步长，即 7 个时间单位（$140 \cdot dt$），并设置相关性阈值 $\gamma = 0.6$。在网络构建过程中，忽略来自字段 $v_k(t_l)$ 的信息。如前所述，时间 t 时刻的网络（及其网络指标）描述的是时间 t 之前的时间窗口内所包含的信息。

请注意，由于 (1) ϵ 随时间变化，导致振荡不规则，以及 (2) 构建网络时未利用场 v 的信息， u 行为的可预测性变得更具挑战性。

C. FN系统中基于渗流的前兆

空间方差的增加通常被用作动力系统中突变的前兆 [29, 30]。因此，我们首先计算状态变量 u 的方差： $\bar{\sigma}_u(t_l) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(u_k(t_l) - \bar{u}(t_l))^2}$，~~其中 $\bar{u}(t_l) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k(t_l)$~~ 是空间平均值（对所有节点取平均）。图 2(a) 再次展示了所有节点上 u_k 时间序列的演化，以供参考。图 2(b)、2(c) 和 2(d) 中的灰色阴影表示 u 值变号的时间区间，该区间的边界由第一个和最后一个过零的振子确定。图 2(b) 显示，方差峰值出现在此区间内。然而，直到系统进入“跳变”时间区间，也就是直到第一个振子变号之前，都检测不到空间方差的上升。因此，对于该系统，方差峰值表明突变已经发生，但不能用作预示性早期预警工具。

图 2（c）和 2（d）展示了网络度量 S_1、最大连通分量的相对大小以及 c_2，即随机选择的节点属于大小为 2 [40] 的分量的概率。请注意，在图 2（d）中，浅蓝色曲线显示 c_2 的实际值，而深蓝色曲线则对其进行了平滑处理

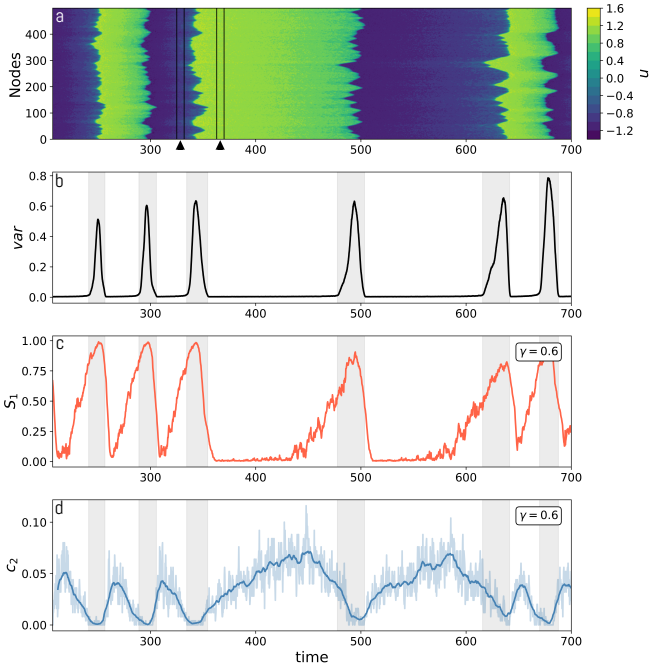

图 2. *(a)* 变量 u的时空演化， *(b)*的空间方差， u， *(c)* 相对规模 S_1 ： 由变量构建的网络中最大连通分量的相对规模 u_k ，相关阈值为 $\gamma = 0.6$， *(d)* 概率 c_2：随机选取的节点属于网络中规模为 2 的分量的概率。浅蓝色曲线表示 c_2的原始值，深色曲线则通过 40 点窗口平均（即 2 个时间单位）对数据进行平滑，窗口中心位于所关注的时间点。灰色阴影表示 u_ks 变号的时间区间。两个三角形标示出两个时间区间的位置，每个区间包含 140 个时间步，其相关性见图 4。

这些数据使 c_2 的数值整体上升和下降趋势更加明显。平滑处理采用以目标点为中心的 40 点窗口平均（相当于 2 个时间单位）。

我们观察到， S_1 和 c_2 都能预示与系统振荡相关的状态变量的骤增和骤降。具体而言， S_1 在 u_k数值发生剧烈变化之前很久就开始上升（表明渗流阶段开始）。它在状态变量转变期间达到最大值，随后迅速下降，并在转变后不久降至 0。 S_1 的行为反映出，随着 u 数值即将跃变，单个节点处动力学之间的相关性会增加，相应地，网络中的连接密度也会增加，最终形成一个规模显著的簇。小规模（2、3、4 等）簇中的节点数量先增加，随后随着大多数节点开始连接到相对规模为 S_1的渗流簇上而再次减少。这使得 c_2 的数值出现峰值，恰逢 S_1 开始上升， [图2（d）], 为 u的骤变提供了非常早期的预警信号。请注意， S_1 在跃变附近的不对称性

而 c_2 在突变之后缺乏峰值，是由于系统的突变跳跃具有不可逆性：在所有振子中的 u_k 符号发生改变后，网络中的相关状态会彻底改变。

尽管振荡并不规则，而且在构建网络时忽略了变量 v 的信息，网络度量仍能很好地预判 u 数值的突变。然而，我们发现空间方差并未提供显著的预判能力。这表明，在当前系统中，使用渗流指标作为突变的前兆具有优势。

D. 导致渗流的过程

系统功能网络中出现渗流，表现为在振子状态发生全局跳变之前 S_1 增大，反映了相关性增强，而相关性增强可能由两种不同过程（或两者共同作用）引发：

(i). 根据式（1）中空间皮尔逊系数的定义可知，相比于稳态基态附近的小幅波动，所有空间单元共同发生的大幅且一致的变化会产生大得多的 ρ_{ab} 值。因此，对于全局状态突变之前所有空间单元均呈上升或下降趋势的系统，相关网络中将出现渗流，从而对即将发生的突变发出早期预警。这是一种相当普遍的机制，在各种真实系统中都应能提供预期信号；在这些系统中，剧烈的全局变化会打破相对平静的状态。

（ii）。在 FN 系统这一特殊情况下，可能存在另一种机制。正如前文所述， u 和 v 演化于两个不同的时间尺度上。从局部方程（3）的结构来看，‘慢’变量 v 可视为驱动‘快’变量u [66]动力学的分岔参数： u 缓慢漂移，直至 v 越过临界阈值，由此产生类似于 u 动力学发生鞍结分岔的效应。因此，系统会迅速转变到另一种 u状态。事实上，即使 u的跳变并不规则，也可以通过观察 v 的趋势并估计其何时达到临界值，清楚地预判这些跳变（见图1）。因此，我们在网络构建中忽略了关于 v的信息，以贴近现实情况，因为在现实中，相关变量可能无法直接观测。这里的情况与前文所述的 B型临界转变非常相似。因此， u 中有效分岔所伴随的临界减速，可以解释相关性增加以及渗流为何先于每次突变发生。这第二种机制是可靠的，且在理论上已有充分理解，但不如第一种机制普遍，因为它只会出现在快慢动力系统中（这类系统确实常用于模拟临界转变[42]）。

我们的目标是阐明上述两种机制（或它们的某种组合）中的哪一种促成了渗流框架成功预测FN系统转变。为此，我们提议对经过修改的时空数据重复进行渗流分析，其中所有同步的上升/下降趋势都已移除，因此任何剩余的预测能力都应仅源于机制（ii）。具体而言，我们使用高斯核，从耦合FN模型中每个位置 k 的时间序列中移除上升/下降趋势。也就是说，对于位置k处时间序列的每个时间步 t_l ，我们移除加权平均值： $u_k(t_l)$，我们移除加权平均值：

$$\frac{1}{\sum_{l'}\omega_{l'}^{(l)}}\sum_{l'}\omega_{l'}^{(l)}u_k(t_{l'})\ , \tag{5}$$

其中 $\omega_{l'}^{(l)}=\exp[-(t_l-t_{l'})^2/(2b^2)]$ ，带宽为 $b=40$（对应 2 个时间单位）。时间窗口以 t_l 为中心，以尽可能理想地去除趋势。这意味着在 t_l处获得去趋势时间序列时，需要考虑一些未来值。这并非问题，因为本小节仅旨在阐明渗流早期预警成功的机制；为此，我们对整个时间序列进行后处理。预期信号本身的发现则在第 IIIC 节中，通过仅使用所分析时间序列的过去值来恰当地完成，这符合实时监测应用的需求。

残余变异性如图 3(a) 所示。基于去趋势后的波动构建的网络中， S_1 和 c_2 的时间序列如图 3(b) 和3(c) 所示。灰色阴影标示了跃变区域；由于数据存在较大变化，去趋势无法彻底完成，因此这些区域仍存在瞬态效应。由于进行了去趋势，机制 (i) 应当不存在，至少在灰色阴影区域之外，只有机制 (ii) 在发挥作用。我们观察到，预判能力与使用原始（即未经去趋势处理的）数据得到的结果相似。这一结果表明，该系统在每次突变之前确实会发生临界减速，从而导致空间相关性增强。不过请注意，此处选取的相关性阈值为 $\gamma=0.536$，而上述示例中为 $\gamma=0.6$ 。事实上，当网络由去趋势后的数据构建时，也就是机制 (i) 不存在时，空间点之间的相关性强度通常应较低。

图 4 进一步展示了机制 (i) 对相关值的影响，方法是考察系统演化过程中两个不同时间区间内相关值的分布，这两个区间分别以高[图 4(a)-4(d)] 和低 [图 4(e)-4(h)] 共同趋势

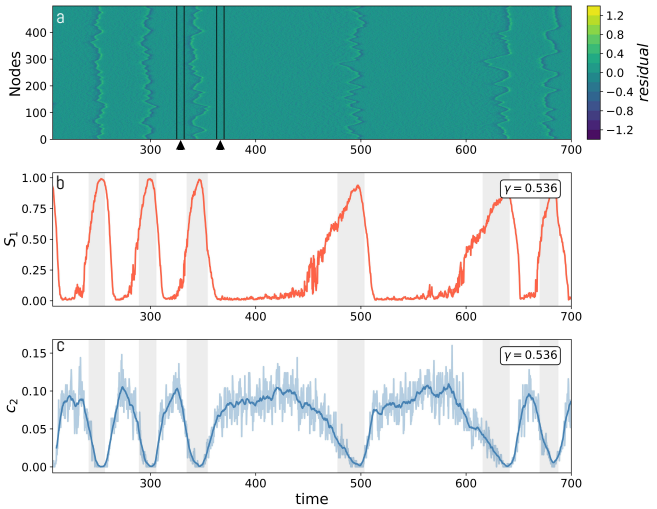

图 3。 *(a)* 对变量进行去趋势后得到的残余波动 u_k， *(b)* 最大连通分量在 S_1 由去趋势时间序列构建的网络中的相对大小，u_k 相关阈值为 $\gamma = 0.536$， *(c)*概率 c_2 随机选取的节点属于大小为 2 的连通分量的概率。浅蓝色曲线表示 c_2的原始值，深色曲线则使用以所关注时间为中心的 40 点窗口平均（即 2 个时间单位）对数据进行平滑。灰色阴影表示 u_ks 改变符号的时间区间。两个三角形标示了两个各含 140 个时间步的时间区间的位置，这些区间的相关性见图4。

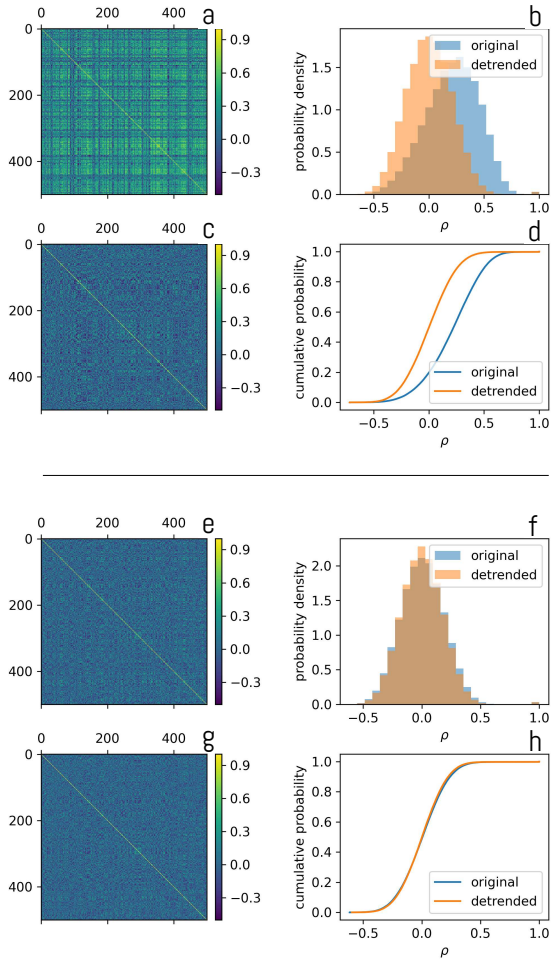

图 4. *a-d*：根据原始数据和去趋势数据，在时间区间 $[325, 332]$ 内计算的相关性，该区间由图 2 和 3中的第一个黑色三角形标出。面板 *a* 和 *c*：分别根据原始数据和去趋势数据计算的相关矩阵。面板 *b* 和 *d*：两种情况下相关性分布（概率密度和累积概率）的比较。面板 *e-h*：时间区间 $[363, 370]$ 内的相关性，该区间由图 2 和 3中的第二个黑色三角形标出。面板 *e* 和 *g*：根据原始数据和去趋势数据计算的相关矩阵。面板 *f* 和*h*：相关性分布与累积分布的比较。

个体动力学之间。首先，图4(a)-4(d)刻画了时间区间 $[325, 332]$ 内系统的相关性（见图2 和 3中的第一个标记），即 u的数值发生跳变之前。原始数据和去趋势数据的相关矩阵分别绘于图4(a)和4(c)中。未去趋势情形下较高的相关值和更复杂的结构 [见图4(a)] 显而易见。为了更客观地比较相关值，我们在图4(b)中展示了两种情形下数值的概率密度，并在图4(d)中展示了它们的累积分布。这些结果证实了先前的观察：由原始数据计算得到的相关性总体上远高于由去趋势数据计算得到的相关性。因此，除了在去趋势数据中观察到的波动同步 [机制 (ii)]，之外，在系统接近转变时，未去趋势情形下所有空间单元的动力学还存在一个共同的显著全局趋势 [机制 (i)] 。

图 44(e)-4(h)进一步印证了这一解释，其中展示的量与图4(a)-4(d)相同，但对应的时间区间为 $[363, 370]$。这发生在跳变之后不久，且距离下一次跳变较远（见图2 和3中的第二个标记）。在此时间区间内，所有空间单元的上升/下降趋势都不那么明显，原始数据与去趋势数据的相关性结构和分布差异也很小。

请注意，图4(a)-4(d)所示的原始数据与去趋势数据之间相关强度的差异，明显影响了网络中的连接密度。事实上，对于相关阈值 γ的任意选择，更大比例的相关值 ρ_{ab}将满足判据 $\rho_{ab} > \gamma$；与根据去趋势数据计算这些相关性相比，根据原始数据计算时满足该判据的相关性比例更高。这导致前一种情况下的网络连通性更高，也导致图γ 2和3中采用了不同的阈值。

本节所呈现的结果表明，根据原始数据计算得到的网络中渗流指标的上升（反映FN系统中相关性的增强）受到过程（i）和（ii）的共同支持，尽管机制（ii）单独存在时也足以提供明确的预期信号（图（3））。

区分各个过程的贡献，有助于我们更好地理解渗流前兆的行为，以及它们在 FN 系统之外的适用情形。具体而言，渗流指标有望很早就检测到任意扩展系统动力学中的全局趋势。因此，若已知全局趋势的上升或下降先于系统状态的突变，就可以利用渗流指标的灵敏度，对即将发生的变化进行极早期预警。此外，在动力学减速发生于跃变之前的系统中，预期信号会更加强大。对时空序列进行后处理有助于揭示渗流转变的主要机制，进而增进对系统动力学的认识。下一节将通过一个真实世界的气候案例进一步阐释这一点。

IV. 厄尔尼诺和拉尼娜事件期间海表温度网络中的渗流

厄尔尼˜诺和拉尼˜娜是厄尔尼诺-南方涛动（ENSO）的暖相和冷相。ENSO是热带太平洋占主导地位的年际振荡，会影响整个地球气候系统[67]。ENSO周期平均约为4年，但变化很大，因此难以预测[68, 69]。

多项研究采用不同的数据集、变量、网络构建方法和渗流指标[40, 43–46]，表明在厄尔尼诺和拉尼娜事件发生之前，热带太平洋的气候变量中往往会出现渗流转变。然而，在ENSO周期中并没有明显的参数变化，可以解释这些指标之所以有效，是因为系统跨越了某个分岔或发生了B型临界转变。事实上，尽管一些ENSO模型中存在霍普夫分岔 [67],，其动力学可以被概念化为由噪声激发的亚临界振荡，或超临界噪声振荡，但定义厄尔尼诺和拉尼娜事件本身的剧烈变化，无法轻易被认定为跨越了任何分岔。

在上一节中，我们展示了，当耦合FN振子系统接近突变时，空间相关性会增加；而两个因素共同作用可能导致这一增加，即受监测变量中的共同趋势的影响，或是事件临近时动力学减速的影响。基于这些观察，我们

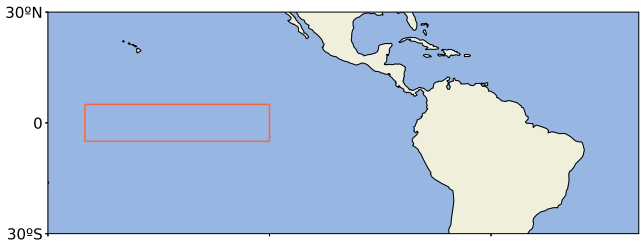

图5. 红色方框标示了NINO3.4指数所监测的平均海表温度区域（南纬5度至北纬5度／西经120度至170度）。功能网络的节点在该区域内按规则的 $0.375^\circ \times 0.375^\circ$ 网格选取（见正文）。

现在探讨以下问题：“‘厄尔尼诺-南方涛动-渗流’是否与热带气候变量中的大尺度趋势有关，还是由动力学某些阶段的临界减速所致？”

为回答这一问题，我们以[40] 的网络研究为基础，比较由热带太平洋海表温度（SST）构建的网络与由同一区域去趋势海表温度构建的网络的渗流指标演变。具体而言，海表温度数据取自欧洲中期天气预报中心（ECMWF）的ERA-Interim再分析产品 [70],，这是一套全球数据集，涵盖40年，时间范围为1979年1月至2019年8月。我们在南纬5度至北纬5度／西经120度至170度区域内，选择了3618个网络节点，并将其放置在 $0.375^\circ \times 0.375^\circ$网格上——该区域正是计算常用NINO3.4指数时采用的太平洋区域。研究范围如图5所示。在每个节点处，通过减去平均季节循环计算每日海表温度异常。根据滑动窗口内异常时间序列的相关性确定网络连接；滑动窗口长度为200天，由此得到一个时变网络。

我们关注三个时期：1987年7月至1988年7月、1996年10月至1998年4月，以及2009年9月至2011年1月。图中的灰色曲线表示所研究区域的平均海表温度异常。6。温度骤降和骤升分别对应拉尼˜娜和厄尔尼˜诺事件。这些事件通常定义为：尼˜诺3.4区域的海表温度（SST）异常连续五个3个月滑动平均值低于（高于）-0.5°C（$+0.5$°C）阈值。图中的竖直虚线标示了每次事件的开始日期，即第一个月的第一天。

根据海表温度异常计算得到的网络中，最大连通分量的相对大小如图6(a)-6(c)（红色曲线）所示；相关阈值 $\gamma = 0.999$ 对应1988年、1997年和1998年的事件，$\gamma = 0.998$对应2010年的事件。这里需要采用较高的相关阈值，以避免网络完全连通，从而观察其中的变化

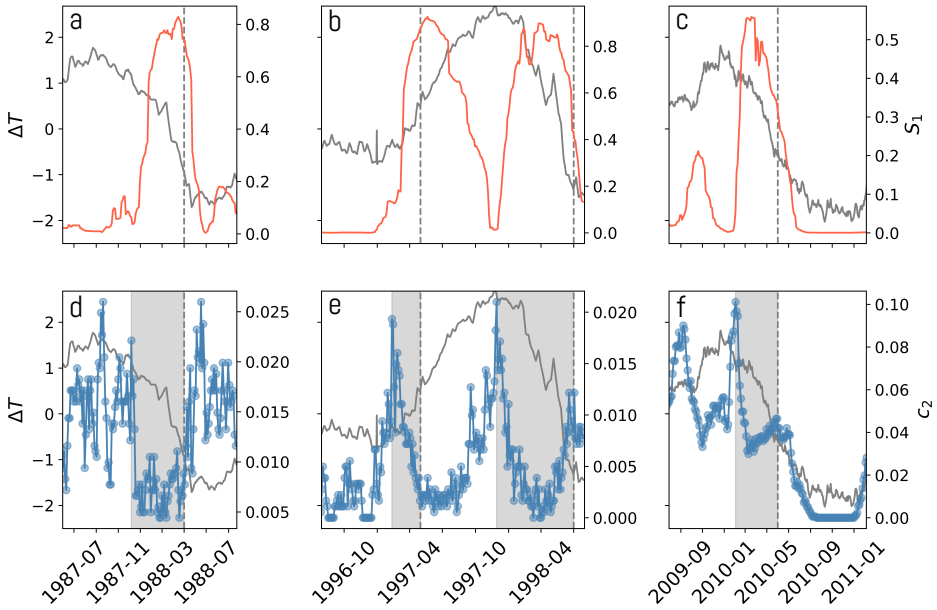

图6. a,b,c 三个不同时期（灰色）南纬5度至北纬5度／西经120度至170度区域的平均海表温度异常。虚线表示厄尔尼诺／拉尼娜事件的开始。海表温度相关网络中最大连通分量的相对大小 S_1 （红色）；前两个时期的相关阈值为 $\gamma = 0.999$ ，最后一个时期为 $\gamma = 0.998$ 。d,e,f 海表温度相关网络中，随机选取的节点属于大小为2的连通分量的概率 c_2 （蓝色）。复现自 Rodriguez-Mendez *et al.* [40]

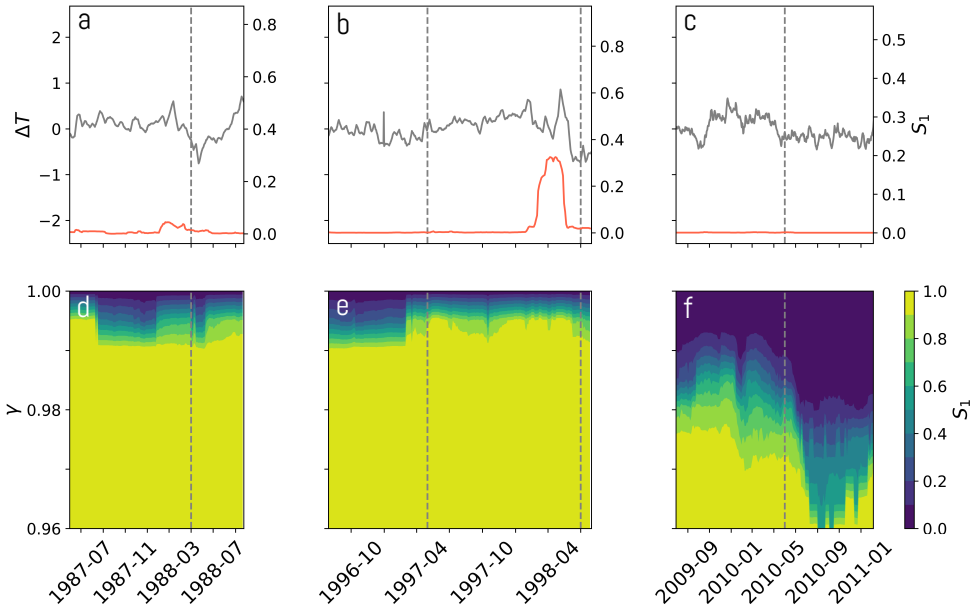

图 7. a,b,c 南纬5度至北纬5度／西经120度至170度区域的平均 *detrended* 海表温度异常（灰色）。虚线表示厄尔尼诺／拉尼娜事件的开始。海表温度*detrended* 相关网络中最大连通分量的相对大小 S_1 （红色）；前两个时期的相关阈值为 $\gamma = 0.999$ ，最后一个时期为 $\gamma = 0.998$ 。 d,e,f 在一系列相关阈值 $\gamma \in [0.96, 1.00]$下的数值 S_1 。

网络度量 S_1 和 c_2。我们清楚地看到，在每次事件发生之前，S_1 都会增加，这与[40]中的报告一致。此外，图6(d)-6(f)（蓝色曲线）显示了随机选择的节点属于大小为 2 的分量的概率，c_2。该量提供了额外的预判，如图中的灰色阴影所示。具体而言，c_2 所提供的预判，对于 1988 年的事件为 146 天，对于 1997 年的事件为 79 天，对于 1998 年的事件为 214 天，对于 2010 年的事件为 119 天。

接下来，我们希望确定导致所观测到的渗流转变的机制究竟是全局趋势，还是临界减速引起的波动同步。为此，与 FN 振荡器的情况一样，我们对时空序列进行后处理，在每个网格点使用带宽为 60 天的高斯核对其进行去趋势。去趋势过程在图7(a)-7(c)中进行了展示，其中以灰色表示每个所考虑时段内波动的空间平均值。图7(a)-7(c)还展示了 S_1（红色）在使用去趋势数据构建的网络中的时间序列，其相关阈值与上文相同。我们观察到，在 S_1 [中不存在峰值，或许图7(b)]除外。为了确保 S_1 中信号的缺失并非由于 γ的选择所致，我们在图 S_1 77(d)-7(f)中展示了不同阈值范围内的˜值。在所有情况下，该测度中缺乏清晰结构，证实了厄尔尼诺-南方涛动事件发生前波动相关性缺乏变化。不过，我们注意到，在 2009—2011 年期间的拉尼娜事件之后，相关性会下降，但这并不具有预警价值。还需要进行更详细的分析来确定其原因。

因此，我们可以得出结论：厄尔尼诺˜和拉尼˜娜事件发生前最大连通分量规模的增大，是由每次事件发生前海表温度的大尺度趋势所致，而不是由空间中某些位置的动力学减速所致。这有助于排除可能的机制，因为一些厄尔尼诺-南方涛动模型遵循与 FN 模型非常相似的慢快结构[64]。事实证明，渗流前兆是监测厄尔尼诺-南方涛动不规则振荡的有力工具，其灵敏度足以很早就检测到正在显现的趋势，从而能够对即将到来的厄尔尼诺˜和拉尼˜娜事件发出非常早的预警信号。

V. 结论

总之，我们分析了编码空间扩展系统中相关性演变的时变功能网络。这类网络中结构的发展，有助于探测系统动力学中细微的变化，而这些变化很容易被其他分析技术忽略。具体而言，我们发现，在耦合随机 FitzHugh-Nagumo振子系统中，渗流前兆能够预示振荡不同阶段之间的突变。渗流反映了系统相关性的增强，这种增强源于两个过程的共同作用：(i) 突变发生前所有空间单元呈现的全局趋势或一致倾向；(ii) 叠加在该趋势之上的噪声波动相关性增强（临界减速）。

这些考量有助于更好地理解和解读渗流前兆在厄尔尼诺-南方涛动研究中的应用。我们的结果表明，在所研究的厄尔尼诺˜和拉尼˜娜事件发生之前，NINO3.4 区域海表温度相关性的增强，是由海表温度的大尺度趋势触发的；也就是说，每次事件发生前，所有或至少足够多的空间点上的海表温度都会升高或降低，而非温度动力学减速所致。这为理解渗流前兆在这一特定案例中表现出效能的机制提供了见解。我们仅关注局部尺度，即厄尔尼诺˜海盆，并在构建网络时使用瞬时皮尔逊相关。因此，我们的结论不能直接推广到其他厄尔尼诺˜渗流研究；这些研究考察的尺度更大，并采用了滞后相关，例如文献 [43, 46]。在这些研究中，渗流的标志是大尺度簇和遥相关的出现，其成因尚待探明。

追踪复杂系统网络描述中的结构变化，有望揭示这些系统的各种动力学特征。除了厄尔尼诺现象之外，Gupta 等人还利用这些方法追踪并识别短暂的热带气旋 [71]。Sun 等人 [72] 实施了一种渗流模型，用于研究大气的结构与复杂性。Fan 等人 [73] 采用复杂网络框架，研究与全球变暖相关的大气环流变化，并评估未来气候变化的影响。这些例子表明，复杂网络及其渗流特性有望用于研究当前和未来的气候。沿着这一思路，我们的工作进一步揭示了渗流前兆可能适用的情形。

为便于今后使用本文所述的渗流框架，我们在 [74] 提供了一个 Python 笔记本，用于对 FitzHugh-Nagumo 系统进行积分，参数详见第 III节，并计算相关网络及其渗流指标（第 II节）。

致谢

本项目获得了欧盟地平线 2020研究与创新计划的资助，该计划依据玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第813844号实施；同时还获得了西班牙国家研究署（MCIN/AEI/10.13039/501100011033）在玛ʻıa de Maeztu项目CEX2021-

001164-M下的资助，以及西班牙国家研究署（MCIN/AEI/10.13039/501100011033）和欧洲区域发展基金“建设欧洲的一种方式”在LAMARCA项目（编号PID2021-123352OB-C32）下的资助。R.V.D.获

谨此感谢德国联邦教育与研究部（BMBF）通过 JPI Climate/JPI Oceans 项目 ROADMAP（资助编号：01LP2002B）提供的资金支持。

[1] R. B. Alley、J. Marotzke、W. D. Nordhaus、J. T. Over- peck、D. M. Peteet、R. A. Pielke、R. T. Pierrehumbert、P. B. Rhines、T. F. Stocker、L. D. Talley 和 J. M. Wal- lace，《科学》299，2005（2003）。[2] T. M. Lenton、H. Held、E. Kriegler、J. W. Hall、W. Lucht、S. Rahmstorf 和 H. J. Schellnhuber，《美国国家科学院院刊》105，1786（2008）。[3] J. M. T. Thompson 和 J. Sieber，《国际分岔与混沌杂志》21，399（2011）。[4] P. Ashwin、S. Wieczorek、R. Vitolo 和 P. Cox，《英国皇家学会哲学汇刊 A：数学、物理与工程科学》370，1166（2012）。[5] R. M. May，《自然》269，471（1977）。[6] M. Scheffer、S. Carpenter、J. A. Foley、C. Folke 和 B. Walker，《自然》413，591（2001）。[7] W. Yan、R. Woodard 和 D. Sornette，《物理学程序》3，1641（2010）。[8] D. Smug、P. Ashwin 和 D. Sornette，《PLOS ONE》13，e0195265（2018）。[9] M. I. Maturana、C. Meisel、K. Dell、P. J. Karoly、W. D’Souza、D. B. Grayden、A. N. Burkitt、P. Jiruska、J. Kudlacek、J. Hlinka、M. J. Cook、L. Kuhlmann 和 D. R. Freestone，《自然通讯》11，2172（2020）。[10] M. Scheffer、J. Bascompte、W. A. Brock、V. Brovkin、S. R. Carpenter、V. Dakos、H. Held、E. H. van Nes、M. Ri- etkerk 和 G. Sugihara，《自然》461，53（2009）。[11] M. Scheffer、S. R. Carpenter、V. Dakos 和 E. H. van Nes，《生态学、进化与系统学年度评论》46，145（2015）。[12] T. M. Lenton，《自然·气候变化》1，201（2011）。[13] C. Kuehn，《非线性科学杂志》23，457（2012）。[14] F. Romano 和 C. Kuehn，《国际分岔与混沌杂志》28，1850103（2018）。[15] F. Kwasniok，《混沌：非线性科学跨学科期刊》28，033614（2018）。[16] N. Boers，《自然·气候变化》11，680（2021）。[17] C. Wissel，《生态学》65，101（1984）。[18] K. Wiesenfeld 和 B. McNamara，《物理评论 A》33，629 1986（）。[19] E. H. van Nes 和 M. Scheffer，《美国博物学家》169，738（2007）。[20] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with ap-plications to physics, biology, chemistry, and engineering*（CRC出版社，2018）。[21] S. R. Carpenter 和 W. A. Brock，《生态学通讯》9，311（2006）。[22] A. R. Ives，《生态学专论》65，217（1995）。[23] H. Held 和 T. Kleinen，《地球物理研究快报》31，L23207（2004）。[24] T. M. Lenton、V. N. Livina、V. Dakos、E. H. van Nes 和 M. Scheffer，《英国皇家学会哲学汇刊 A：数学、物理与工程科学》370，1185（2012）。[25] V. Guttal 和 C. Jayaprakash，《生态学通讯》11，450（2008）。[26] T. Kleinen、H. Held 和 G. Petschel-Held，《海洋动力学》53，53（2003）。[27] D. A. Seekell、S. R. Carpenter 和 M. L. Pace，《美国博物学家》178，442（2011）。[28] F. Nazarimehr、S. Jafari、S. M. R. H. Golpayegani 和 J. C. Sprott，《非线性动力学》88，1493（2017）。[29] V. Guttal 和 C. Jayaprakash，《理论生态学》2，3（2008）。[30] V. Dakos、S. K´efi、M. Rietkerk、E. H. van Nes 和 M. Scheffer，《美国博物学家》177，E153（2011）。[31] S. R. Carpenter 和 W. A. Brock，《生态圈》1，10（2010）。[32] G. Tirabassi 和 C. Masoller，《混沌、孤子与分形》155，111720（2022）。[33] G. Nicolis、A. G. Cant´u 和 C. Nicolis，《国际分岔与混沌杂志》15，3467（2005）。[34] M. Newman，*Networks*（牛津大学出版社，2010）。[35] H. A. Dijkstra、E. Hern´andez-Garc´ıa、C. Masoller 和 M. Barreiro，*Networks in Climate*（剑桥大学出版社，2019）。[36] J. Fan、J. Meng、J. Ludescher、X. Chen、Y. Ashkenazy、J. Kurths、S. Havlin 和 H. J. Schellnhuber，《物理学报告》896，1（2021）。[37] J. Ludescher、M. Martin、N. Boers、A. Bunde、C. Cie mer、J. Fan、S. Havlin、M. Kretschmer、J. Kurths、J. Runge、V. Stolbova、E. Surovyatkina 和 H. J. Schellnhuber，《美国国家科学院院刊》118，e1922872118（2021）。[38] M. Mheen、H. A. Dijkstra、A. Gozolchiani、M. Toom、Q. Feng、J. Kurths 和 E. Hernandez–Garcia，《地球物理研究通讯》40，2714（2013）。[39] G. Tirabassi、J. Viebahn、V. Dakos、H. Dijkstra、C. Ma- soller、M. Rietkerk 和 S. Dekker，《生态复杂性》19，148（2014）。[40] V. Rodr´ıguez-M´endez、V. M. Egu´ıluz、E. Hern´andez- Garc´ıa 和 J. J. Ramasco，《科学报告》6，29552（2016）。[41] U. Feudel、A. N. Pisarchik 和 K. Showalter，《混沌：非线性科学跨学科期刊》28，033501（2018）。[42] C. Kuehn，《物理学D辑：非线性现象》240，1020（2011）。[43] J. Meng、J. Fan、Y. Ashkenazy 和 S. Havlin，《混沌：非线性科学跨学科期刊》27，035807（2017）。[44] Z. Lu、N. Yuan 和 Z. Fu，《科学报告》6，26779（2016）。[45] Z. Lu、Z. Fu、L. Hua、N. Yuan 和 L. Chen，《科学报告》8，14912（2018）。[46] R. Sonone 和 N. Gupte，《物理评论E辑》103，L040301（2021）。[47] A. Radebach、R. V. Donner、J. Runge、J. F. Donges 和 J. Kurths，《物理评论E辑》88，052807（2013）。

[48] T. Kittel、C. Ciemer、N. Lotfi、T. Peron、F. Rodrigues、J. Kurths 和 R. V. Donner，《欧洲物理学杂志·专题》230，3075（2021）。[49] M. Wiedermann、A. Radebach、J. F. Donges、J. Kurths 和 R. V. Donner，《地球物理研究快报》43，7176（2016）。[50] M. Gerster、R. Berner、J. Sawicki、A. Zakharova、A. ˇSkoch、J. Hlinka、K. Lehnertz 和 E. Sch¨oll，《混沌：非线性科学跨学科期刊》30，123130（2020）。[51] Z. Neal 和 C. Rozenblat，*Handbook of Cities and Networks* 2021（爱德华·埃尔加出版社）。[52] S. Abe 和 N. Suzuki，《物理学A：统计力学及其应用》337，357（2004）。[53] J. F. Donges、Y. Zou、N. Marwan 和 J. Kurths，《欧洲物理学杂志·专题》174，157（2009）。[54] N. Ekhtiari、C. Ciemer、C. Kirsch 和 R. V. Donner，《欧洲物理学杂志·专题》230，3019（2021）。[55] P. Holme 和 J. Saram¨aki，《物理学报告》519，97（2012）。[56] J. I. Deza、M. Barreiro 和 C. Masoller，《混沌：非线性科学跨学科期刊》25（2015）。[57] L. N. Ferreira、N. C. R. Ferreira、E. E. N. Macau 和 R. V. Donner，《欧洲物理学杂志·专题》230，2973（2021）。[58] D. Stauffer 和 A. Aharony，*Introduction To Percolation Theory* 2018（泰勒与弗朗西斯出版社）。[59] A. L. Hodgkin 和 A. F. Huxley，《生理学杂志》117，500（1952）。[60] R. FitzHugh，《数学生物物理学通报》17，257（1955）。[61] J. Nagumo、S. Arimoto 和 S. Yoshizawa，《IRE汇刊》50，2061（1962）。[62] H. Bao、W. Liu 和 M. Chen，《非线性动力学》96，1879（2019）。[63] J. H. E. Cartwright、V. M. Egu´ıluz、E. Hern´andez-Garc´ıa 和 O. Piro，《国际分岔与混沌》09，2197 (1999). [64] F.-F. Jin，《大气科学杂志》54，811 (1997). [65] R. Toral 和 P. Colet，*Stochastic Numerical Methods: An Introduction for Students and Scientists*（Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA，2014）。[66] E. Meron，《物理学报告》218，1 (1992). [67] H. A. Dijkstra，*Nonlinear Climate Dynamics*（剑桥大学出版社，2013）。[68] P. D. Nooteboom、Q. Y. Feng、C. L´opez、E. Hern´andez-Garc´ıa 和 H. A. Dijkstra，《地球系统动力学》9，969 2018( )。[69] H. A. Dijkstra、P. Petersik、E. Hern´andez-Garc´ıa 和 C. L´opez，《物理学前沿》7，153 (2019). [70] D. P. Dee、S. M. Uppala、A. J. Simmons、P. Berrisford、P. Poli、S. Kobayashi、U. Andrae、M. A. Balmaseda、G. Balsamo、P. Bauer、P. Bechtold、A. C. M. Beljaars、L. van de Berg、J. Bidlot、N. Bormann、C. Delsol、R. Dra- gani、M. Fuentes、A. J. Geer、L. Haimberger、S. B. Healy、H. Hersbach、E. V. H´olm、L. Isaksen、P. K˚allberg、M. K¨ohler、M. Matricardi、A. P. McNally、B. M. Monge- Sanz、J.-J. Morcrette、B.-K. Park、C. Peubey、P. de Ros- nay、C. Tavolato、J.-N. Th´epaut 和 F. Vitart，《英国皇家气象学会季刊》137，553 2011( )。[71] S. Gupta、N. Boers、F. Pappenberger 和 J. Kurths，《气候动力学》57，3355 (2021). [72] Y. Sun、J. Meng、Q. Yao、A. A. Saberi、X. Chen、J. Fan 和 J. Kurths，《物理评论E辑》104，064139 (2021). [73] J. Fan、J. Meng、Y. Ashkenazy、S. Havlin 和 H. J. Schellnhuber，《美国国家科学院院刊》115，E12128 (2018). [74] N. Ehstand，https://github.com/noemiee/FitzHugh-Nagumo-percolation-analysis.git (2023)。