arXiv:2305.05468v1 [math.DG] 9 May 2023

扭曲乘积芬斯勒度量的 Landsberg 曲率

边丽泽，何勇*，韩江辉新疆师范大学数学科学学院，中国新疆乌鲁木齐 830017

摘要： 设 $(M_1,\ F_1)$ 和 $(M_2,\ F_2)$ 是两个芬斯勒流形。F_1 和 F_2 的扭曲乘积芬斯勒度量是定义在乘积流形 $M_1 \times M_2$ 上的 Finsler度量 $F = \sqrt{F_1^2 + f^2 F_2^2}$，其中 f 是定义在 $M_1 \times M_2$ 上的正光滑函数。本文推导了扭曲乘积芬斯勒度量的 Landsberg 曲率和平均兰德斯伯格曲率。获得了扭曲乘积芬斯勒度量成为兰德斯伯格度量或弱 Landsberg 度量的充要条件。并证明，每个扭曲乘积芬斯勒度量具有相对各向同性 Landsberg 曲率（分别为相对各向同性平均 Landsberg 曲率），当且仅当它是兰德斯伯格度量（分别为弱 Landsberg 度量）。

关键词： 扭曲乘积，Finsler度量，Landsberg 曲率，平均兰德斯伯格曲率，相对各向同性 Landsberg 曲率，相对各向同性平均 Landsberg 曲率

MSC（2020）： 53B40,53C60

1 引言

在芬斯勒几何中，存在若干重要的非黎曼量，使得芬斯勒几何比黎曼几何更加丰富。因此，研究非黎曼量是有意义的。嘉当挠率 C 是一种基本的非黎曼量。沿测地线对 C 求导可得 Landsberg 曲率 L [1]。C 和 L 的迹分别为平均嘉当挠率 I 和平均兰德斯伯格曲率 J。平均兰德斯伯格曲率 J 表示平均嘉当挠率 I 沿测地线[1]的变化率。

Berwald 曲率是最重要的非黎曼量。Finsler度量的 Berwald 曲率恒为零，当且仅当它是 Berwald 度量 [1]。兰德斯伯格度量，即 Landsberg 曲率恒为零的度量，比 Berwald 度量更一般。众所周知，每个 Berwald 度量都是兰德斯伯格度量，但反过来未必成立。因为在 Berwald 流形上，所有切空间在诱导范数下彼此线性等距；而在兰德斯伯格流形上，所有切空间在诱导范数下彼此等距。

事实上，寻找非 Berwald 型 Landsberg 度量被称为芬斯勒几何中的独角兽问题 [2]。迄今为止，还没有发现正则的非 Berwald 型 Landsberg 度量 [3]。然而，如果度量是几乎正则的（允许在某些方向上奇异），过去几年中已经发现了一些非 Berwald 型 Landsberg 度量。具体来说，

* 通讯作者电子邮箱：heyong@xjnu.edu.cn

Zhou、Wang 和 Li [3] 构造了几乎正则的 Landsberg 一般 (α, β)-度量，Shen[4] 给出了一些几乎正则的 Landsberg (α, β)-度量的例子；当然，它们都是非 Berwald 型 Landsberg 度量。

近年来，扭曲积被广泛用于构造具有特殊曲率性质的黎曼度量和芬斯勒度量。Bishop 和 O'Neill 首先引入扭曲积 [5] ，用于构造具有负截面曲率的黎曼流形。Asanov [6, 7]将扭曲积的概念推广到芬斯勒空间。Hushmandi 和 Rezaii [8] 得到了真（非平凡）扭曲积芬斯勒度量为兰德斯伯格度量的等价条件：构成该扭曲积芬斯勒度量的两个芬斯勒度量中，一个是兰德斯伯格度量，另一个退化为黎曼度量，并且满足一个方程。Peyghan、Tayebi 和 Najafi [9]得到了真扭曲积芬斯勒度量为弱 Landsberg 度量的充要条件；类似地，一个芬斯勒度量是弱 Landsberg 度量，另一个退化为黎曼度量，并且满足一个方程。他们还证明，每个具有相对各向同性 Landsberg（分别为相对各向同性平均 Landsberg ）曲率的双重扭曲积芬斯勒度量都是兰德斯伯格度量（分别为弱 Landsberg 度量）。He 和 Zhong [10]证明，双重扭曲积复芬斯勒流形是复 Landsberg 流形，当且仅当其分量流形都是复 Landsberg 流形，且复扭曲函数为正的常数。

扭曲积是扭曲积的一种自然推广。黎曼流形的扭曲积概念最早由 Chen [11] 提出，随后由 Ponge 和 Reckziegel [12]推广到伪黎曼情形。Chen [13] 研究了 K¨ahler 流形上的扭曲积 CR-子流形。Kozma、Peter 和 Shimada [14] 将扭曲积推广到芬斯勒几何，并研究了扭积芬斯勒流形的 Cartan 联络、测地线和完备性。Peyghan、Tayebi 和 Nourmoham- madi [15] 分别获得了扭曲乘积芬斯勒度量成为 Berwald 度量或弱 Berwald 度量的充要条件。最近，Xiao 和 He 等人 [16]获得了双扭曲积复芬斯勒流形成为复 Landsberg 流形的充要条件。关于扭曲乘积芬斯勒度量的更多细节，参见 [17–20]。

因此，探究扭曲乘积芬斯勒度量成为兰德斯伯格度量或弱 Landsberg 度量的充要条件，是一个自然的问题。我们这样做的目的是研究构造某些特殊芬斯勒度量（如兰德斯伯格度量和弱 Landsberg 度量）的可能性。此外，我们还想了解，具有相对各向同性兰德斯伯格曲率（分别为相对各向同性平均兰德斯伯格曲率）的扭曲乘积芬斯勒度量具有哪些性质。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾芬斯勒几何的一些基本概念和记号，并调整扭曲乘积芬斯勒度量的指标系统。第 3 节推导扭曲乘积芬斯勒度量的平均嘉当挠率系数。第 4 节和第 5 节推导扭曲乘积芬斯勒度量的 Landsberg 曲率系数和平均兰德斯伯格曲率系数，并给出扭曲乘积芬斯勒度量成为兰德斯伯格度量或弱 Landsberg 度量的充要条件。最后，我们证明，每个扭曲乘积芬斯勒度量具有相对各向同性的 Landsberg 曲率（分别地，具有相对各向同性的平均兰德斯伯格曲率），当且仅当它是兰德斯伯格度量（分别地，弱 Landsberg 度量）。

2 预备知识

本节简要回顾本文所需的一些基本概念和记号。

设 M为一个 n 维 C^∞ 流形。记 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 为 M上的局部坐标，并记 $(x,y)=(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$ 为 M的切丛 TM上的诱导局部坐标。

定义 2.1。 [22] M的 Finsler度量 是一个函数 $F\colon TM\to[0,\infty)$，满足以下性质

(i) F在去掉}零截面 $TM-$ {的切丛上光滑；(ii) 对所有 $\lambda>0$, $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$；(iii) $n\times n$ Hessian 矩阵

$$(g_{ij})=\Big(\Big[\frac{1}{2}F^2\Big]_{y^iy^j}\Big)$$

在 $TM-$ {零截面}上正定。

记 (g^{ik}) 为 (g_{kj}) 的逆矩阵，使得 $g^{ik}g_{kj}=\delta^i{}_j$。并且 $y_i=g_{ij}y^j$.

每个 Finsler度量 F都会诱导一个喷射 $\mathbb{G}:=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2\mathbb{G}^i\frac{\partial}{\partial y^i}$。喷射系数 $\mathbb{G}^i$ 定义为

$$\mathbb{G}^i:=\frac{1}{4}g^{ip}\{[F^2]_{x^qy^p}y^q-[F^2]_{x^p}\}.$$

F 的测地线用局部坐标表示为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2\mathbb{G}^i(x,\frac{dx}{dt})=0.$$

为区分 Finsler 情形与黎曼情形，Finsler [23] 引入了嘉当挠率 $C:=C_{ijk}dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k$，Cartan [24]则对其进行了强调。嘉当挠率系数 C_{ijk} 定义为

$$C_{ijk}:=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}.$$

众所周知，$C_{ijk}=0$ 当且仅当 F 是黎曼度量 [1]。注意，对于 g^{ij}，有$C^{ij}{}_k:=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k}$。

平均嘉当挠率 $I:=I_idx^i$ 是 C的迹。平均嘉当挠率系数I_i 定义为

$$I_i:=C_{ijk}g^{jk}. \tag{2.1}$$

根据代克定理， F 是黎曼度量当且仅当 $I_i=0$ [1]。

在本文中，用“ $|$”表示水平协变导数，用“ ; ”表示垂直协变导数，使得 $T^j_{i;s}=\frac{\partial T^j_{\ i}}{\partial y^s}$。

Landsberg 曲率 $L:=L_{ijk}dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k$是 C沿测地线变化的速率，使得 $L_{ijk}:=C_{ijk|m}y^m$。而 L_{ijk} 也可以定义为

$$L_{ijk}:=-\frac{1}{2}FF_{y^l}\frac{\partial^3\mathbb{G}^l}{\partial y^i\partial y^j\partial y^k}=-\frac{1}{2}FF_{y^l}B_i{}^l{}_{jk}=-\frac{1}{2}g_{lm}y^mB_i{}^l{}_{jk}=-\frac{1}{2}y_lB_i{}^l{}_{jk}, \tag{2.2}$$

其中 $B_i{}^l{}_{jk}$ 为 Berwald 曲率系数。当且仅当 $L_{ijk}=0$ [1]时，Finsler度量称为兰德斯伯格度量。显然，每个 Berwald 度量都是兰德斯伯格度量。

平均兰德斯伯格曲率 $J:=J_i dx^i$ 是 I 沿测地线变化的速率，使得 $J_i:=I_{i|m}y^m$。此外， J_i 定义为

$$J_i:=L_{ijk}g^{jk}. \tag{2.3}$$

当且仅当 $J_i=0$ [1]时，Finsler度量称为弱 Landsberg 度量。显然，兰德斯伯格度量必为弱 Landsberg 度量，但反之一般不成立。然而，在二维情形下，任何弱 Landsberg 度量必为兰德斯伯格度量 [25]。

若 Finsler度量 F 满足 L_{ijk} 和 J_i 分别符合以下方程，则称其具有相对各向同性 Landsberg 曲率和相对各向同性平均兰德斯伯格曲率

$$L_{ijk}+c(x)FC_{ijk}=0, \tag{2.4}$$

$$J_i+c(x)FI_i=0, \tag{2.5}$$

其中， $c=c(x)$是定义在 M [26]上的标量函数。众所周知，每个兰德斯伯格度量（分别地，每个弱 Landsberg 度量）都具有相对各向同性 Landsberg 曲率（分别地，相对各向同性平均兰德斯伯格曲率），例如 $c(x)=0$，但反之一般不成立。

设 (M_1,F_1) 和 (M_2,F_2) 是两个芬斯勒流形，具有 $dimM_1=m$ 和 $dimM_2=n$，则 $M=M_1\times M_2$ 是一个芬斯勒流形，具有 $dimM=m+n$。

在整篇论文中，我们在乘积流形 $M=M_1\times M_2$ 上使用自然乘积坐标系。设 (p_0,q_0) 是乘积流形 M 上的一点，则在 M_1 和 M_2 上分别存在坐标图 (U,x_1) 和 (V,x_2)，使得 $p_0\in U$ 和 $q_0\in V$。由此，我们在 M 上得到一个坐标图 (W,x)，使得 $W=U\times V$，且 $(p_0,q_0)\in W$；对于所有 $(p,q)\in W$， $x(p,q)=(x_1(p)\ x_2(q))$，其中 $x_1=(x^1,\dots,x^m)$， $x_2=(x^{m+1},\dots,x^{m+n})$。

设 TM_1、 TM_2和 TM分别是 M_1、 M_2和 M的切丛。设 $\pi_1:M_1\times M_2\to M_1$ 和 $\pi_2:M_1\times M_2\to M_2$ 是自然投影映射，则$d\pi_1:T(M_1\times M_2)\to TM_1$和 $d\pi_2:T(M_1\times M_2)\to TM_2$分别是由 π_1 和 π_2诱导的切映射。注意，对于每个$y=(y_1,y_2)\in T_x(M_1\times M_2)$，若 $y_1=(y^1,\dots,y^m)\in T_{x_1}M_1$且 $y_2=(y^{m+1},\dots,y^{m+n})\in\sim\sim\sim T_{x_2}M_2$，则 $d\pi_1(x,y)=(x_1,y_1)$，且 $d\pi_2(x,y)=(x_2,y_2)$。记 $M_1=TM_1-\{$零截面$\}$、 $M_2=TM_2-\{$零截面$\}$ 以及 $M=\sim\ \sim M_1\times M_2\subset T(M_1\times M_2)-\{$零截面$\}$。

在乘积流形 $M=M_1\times M_2$ 上，我们考虑如下度量。

定义 2.2. [14] 设 $(M_1,\ F_1)$ 和 $(M_2,\ F_2)$ 是两个芬斯勒流形，且 $f:M\to R^+$ 是一个光滑函数。芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的扭曲乘积是一个芬斯勒度量$\sim F:M\to R^+$，定义如下：

$$F(x,y)=\sqrt{F_1^2(\pi_1(x),d\pi_1(y))+f^2(\pi_1(x),\pi_2(x))F_2^2(\pi_2(x),d\pi_2(y))}, \tag{2.6}$$

$\sim$其中 $x\in M$、 $y\in M$、 f 称为扭曲函数。简言之， F 称为扭曲乘积芬斯勒度量。

$\sim$请注意，自然会想到， F应定义在 M 上，而非定义在 $T(M_1\times M_2)-\sim\sim\sim\{zero\ section\}$上，也不是定义在 $M_1\times TM_2$或 $TM_1\times M_2$上，因为当且仅当 F_i 来自 M_i 的黎曼度量时， F_i 才在 TM_i 上光滑，且 $i=1,\ 2$。

如果函数 f 仅依赖于 M_1，则 F 成为翘曲积芬斯勒度量。如果函数f 仅依赖于 M_2，则 F 成为乘积芬斯勒度量。特别地，当 f 为常数时， F 是平凡的。除非另有说明，本文在一般意义下研究扭曲乘积芬斯勒度量。

为便于清晰表述，我们采用了不同于 [14] 中的指标系统。在本文中，小写希腊指标，如 α, β 等，取值范围为 1 到 $m+n$；小写拉丁指标，如 i, j 等，取值范围为 1 到 m；带撇号的小写拉丁指标，如 i', j' 等，取值范围为 $m+1$ 到 $m+n$。与.....相关的量

[1]

(M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 分别用上标 1 和 2 表示，例如 $C_{ijk}{}^{2}$ 和 $C_{i'j'k'}$。

$\widetilde{M}$ 上的局部坐标 (x, y) 通过以下变换得到

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \cdots, x^m), \quad \bar{x}^{i'} = \bar{x}^{i'}(x^{m+1}, \cdots, x^{m+n}),\\
&\bar{y}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} y^j, \quad \bar{y}^{i'} = \frac{\partial \bar{x}^{i'}}{\partial x^{j'}} y^{j'}.
\end{aligned}$$

对于$\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$，有

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \bar{y}^j}, \quad \frac{\partial}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial \bar{x}^{j'}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial \bar{y}^{j'}}.$$

记 $g_{ij} = [\frac{1}{2}F_1^2]_{y^i y^j}$ 和 $h_{i'j'} = [\frac{1}{2}F_2^2]_{\bar{y}^{i'} y^{j'}}$。因此，扭曲乘积芬斯勒度量的基本张量矩阵 $(G_{\alpha\beta})$ 为

$$(G_{\alpha\beta}) = \left(\left[\frac{1}{2}F^2\right]_{y^\alpha y^\beta}\right) = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 h_{i'j'} \end{pmatrix}$$

其逆矩阵（$G^{\beta\alpha}$）为

$$(G^{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} g^{ji} & 0 \\ 0 & f^{-2} h^{j'i'} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

3 扭曲乘积Finsler度量的嘉当挠率

本节将推导扭曲乘积芬斯勒度量的平均嘉当挠率系数。

命题 3.1. *[15]* 设 F 为*Finsler*度量 F_1 和 F_2的扭曲乘积。则 F 的嘉当挠率系数 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 为

$$C_{ijk} = \overset{1}{C}_{ijk}, \tag{3.1}$$

$$C_{i'j'k'} = f^2 \overset{2}{C}_{i'j'k'}, \tag{3.2}$$

$$C_{i'jk} = C_{ij'k} = C_{ijk'} = C_{i'j'k} = C_{i'jk'} = C_{ij'k'} = 0. \tag{3.3}$$

命题 3.2. 设 F 是 *Finsler*度量 F_1 和 F_2 的扭曲乘积。那么 F 的平均嘉当挠率系数 I_α 为

$$I_i = \overset{1}{I}_i, \tag{3.4}$$

$$I_{i'} = \overset{2}{I}_{i'}\,. \tag{3.5}$$

证明。 根据 (2.1)，我们有

$$I_\alpha = C_{\alpha\beta\gamma}G^{\beta\gamma}. \tag{3.6}$$

将 $\alpha = i$ 代入 (3.6)，得

$$I_i = C_{ijk}G^{jk} + C_{ij'k}G^{j'k} + C_{ijk'}G^{jk'} + C_{ij'k'}G^{j'k'}, \tag{3.7}$$

将 (2.7)、(3.1) 和 (3.3) 代入 (3.7)，得

$$I_i = \overset{1}{C}_{ijk}\,g^{jk} = \overset{1}{I}_i\,.$$

同理，可得 (3.5)。 □

4 扭曲乘积芬斯勒度量的 Landsberg 曲率

众所周知，兰德斯伯格度量必具有相对各向同性 Landsberg 曲率，但反过来一般并不成立。我们想知道，对于扭曲乘积芬斯勒度量，反过来是否成立。为此，我们首先给出扭曲乘积芬斯勒度量成为兰德斯伯格度量的充要条件。

命题 4.1。 *[15]* 设 F 是 *Finsler*度量 F_1 与 F_2的扭曲乘积。则 F 的 *Berwald* 曲率系数 $B_\alpha{}^\lambda{}_{\beta\gamma}$ 为

$$B_i{}^l{}_{jk} = \overset{1}{B}_i{}^l{}_{jk} + f\,\overset{1}{C}{}^{lp}_{i;j;k}\,\frac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2, \tag{4.1}$$

$$B_i{}^l{}_{jk'} = B_i{}^l{}_{k'j} = B_{k'}{}^l{}_{ij} = 2f\,\overset{1}{C}{}^{lp}_{i;j}\,\frac{\partial f}{\partial x^p}y_{k'}, \tag{4.2}$$

$$B_i{}^l{}_{j'k'} = B_{j'}{}^l{}_{ik'} = B_{j'}{}^l{}_{k'i} = 2f\,\overset{1}{C}{}^{lp}_{i}\,\frac{\partial f}{\partial x^p}h_{j'k'}, \tag{4.3}$$

$$B_{i'}{}^l{}_{j'k'} = -2f\,\overset{2}{C}_{i'j'k'}\,g^{lp}\frac{\partial f}{\partial x^p}, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} B_{i'}{}^{l'}{}_{j'k'} = \overset{2}{B}_{i'}{}^{l'}{}_{j'k'} + f^{-1}(&\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{i';j';k'}F_2^2 + 2\,\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{j';k'}\,y_{i'} + 2\,\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{i';k'}\,y_{j'} + 2\,\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{i';j'}\,y_{k'} \\ &+ 2\,\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{i'}\,h_{j'k'} + 2\,\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{j'}\,h_{i'k'} + 2\,\overset{2}{C}{}^{l'p'}_{k'}\,h_{i'j'} - 2h^{l'p'}\,\overset{2}{C}_{i'j'k'})\frac{\partial f}{\partial x^{p'}}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$B_i{}^{l'}{}_{jk} = B_i{}^{l'}{}_{jk'} = B_i{}^{l'}{}_{k'j} = B_{k'}{}^{l'}{}_{ij} = B_i{}^{l'}{}_{j'k'} = B_{j'}{}^{l'}{}_{ik'} = B_{j'}{}^{l'}{}_{k'i} = 0. \tag{4.6}$$

命题 4.2. 设 F 是 *Finsler*度量 F_1 和 F_2的扭曲乘积。那么， F 的 *Landsberg* 曲率系数 $L_{\alpha\beta\gamma}$ 为

$$L_{ijk} = \overset{1}{L}_{ijk} + f\,\overset{1}{C}{}^{p}_{ij;k}\,\frac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2, \tag{4.7}$$

$$L_{ijk'} = L_{ik'j} = L_{k'ij} = f\,\overset{1}{C}{}^{p}_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} y_{k'}, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} L_{i'j'k'} = {} & \overset{2}{L}{}_{i'j'k'} + f\,\overset{2}{C}{}_{i'j'k'}\,y^p \frac{\partial f}{\partial x^p} + f^{-1}(\overset{2}{C}{}^{p'}_{i'j';k'}\,F_2^2 + \overset{2}{C}{}^{p'}_{j'k'}\,y_{i'} \\ & + \overset{2}{C}{}^{p'}_{i'k'}\,y_{j'} + \overset{2}{C}{}^{p'}_{i'j'}\,y_{k'} + \overset{2}{C}{}_{i'j'k'}\,y^{p'})\frac{\partial f}{\partial x^{p'}}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$L_{ij'k'} = L_{j'ik'} = L_{j'k'i} = 0. \tag{4.10}$$

证明。 根据 (2.2)，我们有

$$L_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} y_\lambda B_\alpha{}^\lambda{}_{\beta\gamma}. \tag{4.11}$$

将 $\alpha = i, \beta = j, \gamma = k$ 代入 (4.11)，得到

$$L_{ijk} = -\frac{1}{2}(y_l B_i{}^l{}_{jk} + y_{l'} B_i{}^{l'}{}_{jk}), \tag{4.12}$$

将 (4.1) 和 (4.6) 代入 (4.12)，并注意到 $y_l\,\overset{1}{C}{}^{lp}_{i\ ;j;k} = -2\,\overset{1}{C}{}^{p}_{ij;k}$，得到

$$\begin{aligned} L_{ijk} &= -\frac{1}{2} y_l (\overset{1}{B}{}_i^l{}_{jk} + f\,\overset{1}{C}{}^{lp}_{i;j;k}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} F_2^2) \\ &= \overset{1}{L}{}_{ijk} + f\,\overset{1}{C}{}^{p}_{ij;k}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} F_2^2. \end{aligned}$$

同理，我们可以得到 (4.8)-(4.10)。 □

定理 4.3. 设 F 是 *Finsler*度量 F_1 和 F_2的扭曲乘积。那么， F 是兰德斯伯格度量，当且仅当 F_1 是兰德斯伯格度量， F_2 是黎曼度量，且方程$\overset{1}{C}{}^{p}_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} = 0$ 成立。

证明. F 是兰德斯伯格度量，当且仅当

$$L_{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{4.13}$$

根据命题 4.2，(4.13) 等价于

$$\begin{cases} \overset{1}{L}{}_{ijk} + f\,\overset{1}{C}{}^{p}_{ij;k}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} F_2^2 = 0, & (4.14) \\ f\,\overset{1}{C}{}^{p}_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} y_{k'} = 0, & (4.15) \\ \overset{2}{L}{}_{i'j'k'} + f\,\overset{2}{C}{}_{i'j'k'}\,y^p \frac{\partial f}{\partial x^p} + f^{-1}(\overset{2}{C}{}^{p'}_{i'j';k'}\,F_2^2 + \overset{2}{C}{}^{p'}_{j'k'}\,y_{i'} + \overset{2}{C}{}^{p'}_{i'k'}\,y_{j'} \\ + \overset{2}{C}{}^{p'}_{i'j'}\,y_{k'} + \overset{2}{C}{}_{i'j'k'}\,y^{p'})\frac{\partial f}{\partial x^{p'}} = 0. & (4.16) \end{cases}$$

首先，我们证明必要性。由于 $f \neq 0$，(4.15) 表明

$$\overset{1}{C}{}^{p}_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^p} = 0. \tag{4.17}$$

对 (4.17) 关于 y^k 求导，得到

$$C^{1}_{ij;k}\frac{\partial f}{\partial x^p}=0, \tag{4.18}$$

1将 (4.18) 代入 (4.14)，则 (4.14) 化简为 $L_{ijk}=0$，这意味着 F_1 是兰德斯伯格度量。对 y^i 求 (4.16) 的导数，我们得到

$$C^{2}_{i'j'k'}\frac{\partial f}{\partial x^i}=0. \tag{4.19}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x^i}\neq 0$，(4.19) 表明 $C^{2}_{i'j'k'}=0$，这意味着 F_2 是黎曼的。

其次，我们证明充分性。假设 F_1 是兰德斯伯格度量， F_2 是黎曼度量且 $C^{1}_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^p}=0$，容易得知（4.14）- （4.16）成立，这意味着 F 是兰德斯伯格度量。

□

注 4.4。 在定理 4.3 中，如果扭曲函数 f 仅依赖于 M_1，则 F 成为翘曲积芬斯勒度量，此时定理 4.3 就变成了 [9]，中的定理 6。换言之，定理 4.3 是 [9] 中定理 6 的推广。

定理 4.5。 每个扭曲乘积芬斯勒度量具有相对各向同性的兰德斯伯格曲率，当且仅当它是兰德斯伯格度量。

证明。 充分性显然，下面证明必要性。 F 具有相对各向同性的兰德斯伯格曲率，当且仅当

$$L_{\alpha\beta\gamma}+c(x)FC_{\alpha\beta\gamma}=0. \tag{4.20}$$

根据命题 3.1 和命题 4.2，(4.20) 等价于

$$\begin{cases} L^{1}_{ijk}+f\,C^{1}_{ij;k}\dfrac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2+c(x)F\,C^{1}_{ijk}=0, & (4.21)\\ f\,C^{1}_{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x^p}y_{k'}=0, & (4.22)\\ L^{2}_{i'j'k'}+f\,C^{2}_{i'j'k'}\,y^p\dfrac{\partial f}{\partial x^p}+f^{-1}(C^{2}_{i'j';k'}\,F_2^2+C^{2}_{j'k'}\,y_{i'}+C^{2}_{i'k'}\,y_{j'} & \\ +C^{2}_{i'j'}\,y_{k'}+C^{2}_{i'j'k'}\,y^{p'})\dfrac{\partial f}{\partial x^{p'}}+c(x)Ff^2\,C^{2}_{i'j'k'}=0. & (4.23) \end{cases}$$

对 $y^{i'}$ 对 (4.21) 求导，得到

$$2f\,C^{1}_{ij;k}\frac{\partial f}{\partial x^p}y_{i'}+c(x)f^2F^{-1}y_{i'}\,C^{1}_{ijk}=0, \tag{4.24}$$

将 (4.24) 与 $y^{i'}$ 缩并，得到

$$2f\,C^{1}_{ij;k}\frac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2+c(x)f^2F^{-1}F_2^2\,C^{1}_{ijk}=0. \tag{4.25}$$

对（4.25）进行变换，再将其代入（4.21），可将（4.21）化简为

$$L^{1}_{ijk}+c(x)(F-\frac{1}{2}f^2F^{-1}F_2^2)\,C^{1}_{ijk}=0. \tag{4.26}$$

对（4.26）关于 $y^{i'}$ 求导，得到

$$c(x)\frac{1}{2}f^4F^{-3}F_2^2y_{i'}\overset{1}{C}_{ijk}=0, \tag{4.27}$$

将 (4.27) 与 $y^{i'}$收缩，得到

$$c(x)\frac{1}{2}f^4F^{-3}F_2^4\overset{1}{C}_{ijk}=0. \tag{4.28}$$

类似地，由 (4.23) 可得

$$c(x)f^4F^{-3}F_1^2F_2^2\overset{2}{C}_{i'j'k'}=0. \tag{4.29}$$

注意到，根据 (4.28) 和 (4.29)， F 是非黎曼的，因此 $c(x)=0$，这意味着 F 是一个 Landsberg 度量。 □

5 扭曲乘积芬斯勒度量的平均兰德斯伯格曲率

众所周知，弱 Landsberg 度量必具有相对各向同性的平均 Landsberg 曲率，但反过来一般并不成立。类似地，我们想知道对于扭曲乘积芬斯勒度量，逆命题是否成立。为此，我们首先给出扭曲乘积芬斯勒度量成为弱 Landsberg 度量的充要条件。

命题 5.1. 设 F 是 *Finsler*度量 F_1 和 F_2 的扭曲乘积。那么， F 的平均兰德斯伯格曲率系数 J_α 为

$$J_i=\overset{1}{J}_i+f\overset{1}{I}^p_{;i}\frac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2, \tag{5.1}$$

$$J_{i'}=f^{-2}\overset{2}{J}_{i'}+(f\overset{1}{I}^p y_{i'}+f^{-1}\overset{2}{I}_{i'}y^p)\frac{\partial f}{\partial x^p}+f^{-3}(\overset{2}{I}^{p'}_{;i'}F_2^2+\overset{2}{I}^{p'}y_{i'}+\overset{2}{I}_{i'}y^{p'})\frac{\partial f}{\partial x^{p'}}. \tag{5.2}$$

证明。根据 (2.3)，我们有

$$J_\alpha=L_{\alpha\beta\gamma}G^{\beta\gamma}. \tag{5.3}$$

将 $\alpha=i$ 代入 (5.3)，得到

$$J_i=L_{ijk}G^{jk}+L_{ij'k}G^{j'k}+L_{ijk'}G^{jk'}+L_{ij'k'}G^{j'k'}, \tag{5.4}$$

将 (2.7)、(4.7) 和 (4.10) 代入 (5.4)，得到

$$J_i=(\overset{1}{L}_{ijk}+f\overset{1}{C}^p_{jk;i}\frac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2)g^{jk}=\overset{1}{J}_i+f\overset{1}{I}^p_{;i}\frac{\partial f}{\partial x^p}F_2^2.$$

同理，可得 (5.2)。 □

定理 5.2。 设 F 是 *Finsler*度量 F_1 和 F_2 的扭曲乘积。那么， F 是弱 *Landsberg* 度量，当且仅当 F_1 是弱 *Landsberg* 度量、 F_2 是黎曼度量，且方程 $\overset{1}{I}^p\frac{\partial f}{\partial x^p}=0$ 成立。

证明。 F 是弱 Landsberg 度量，当且仅当

$$J_\alpha = 0. \tag{5.5}$$

根据命题 5.1，(5.5) 等价于

$$\begin{cases} \overset{1}{J}_i + f\, \overset{1}{I}^p_{;i}\, \dfrac{\partial f}{\partial x^p} F_2^2 = 0, & (5.6) \\ f^{-2}\, \overset{2}{J}_{i'} + (f\, \overset{1}{I}^p\, y_{i'} + f^{-1}\, \overset{2}{I}_{i'}\, y^p) \dfrac{\partial f}{\partial x^p} + f^{-3} (\overset{2}{I}^{p'}_{;i'}\, F_2^2 + \overset{2}{I}^{p'}\, y_{i'} + \overset{2}{I}_{i'}\, y^{p'}) \dfrac{\partial f}{\partial x^{p'}} = 0. & (5.7) \end{cases}$$

首先，我们证明必要性。对 y^i 求 (5.7) 的导数，得到

$$(f\, \overset{1}{I}^p_{;i}\, y_{i'} + f^{-1}\, \overset{2}{I}_{i'}\, \delta^p_{\ i}) \frac{\partial f}{\partial x^p} = 0, \tag{5.8}$$

对 y^j 求 (5.8) 的导数，可得

$$\overset{1}{I}^p_{;i;j}\, \frac{\partial f}{\partial x^p} = 0, \tag{5.9}$$

用 y^j 收缩 (5.9)，得到

$$-2\, \overset{1}{I}^p_{;i}\, \frac{\partial f}{\partial x^p} = 0. \tag{5.10}$$

[1]利用 (5.10)，(5.6) 化简为 $J_i = 0$，因此 F_1 是弱 Landsberg 度量。类似地，利用 (5.10)，(5.8) 可简化为

$$\overset{2}{I}_{i'}\, \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0. \tag{5.11}$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x^i} \neq 0$，(5.11) 表明 $\overset{2}{I}_{i'} = 0$，这意味着 F_2 是黎曼度量。用 y^i 收缩 (5.10)，得到

$$2\, \overset{1}{I}^p\, \frac{\partial f}{\partial x^p} = 0.$$

其次，我们证明充分性。假设 F_1 是弱 Landsberg 度量， F_2 是黎曼度量，且 $\overset{1}{I}^p\, \frac{\partial f}{\partial x^p} = 0$，容易得知(5.6)-(5.7) 成立，这意味着 F 是弱 Landsberg 度量。

□

注 5.3. 在定理 5.2 中，如果扭曲函数 f 只依赖于 M_1，那么 F 就成为翘曲积芬斯勒度量；此时定理 5.2 就是 [9], 中的定理 8。换句话说，定理 5.2 是 [9]中定理 8 的推广。

定理 *5.4. </style}*每个扭曲乘积芬斯勒度量都具有相对各向同性平均 *Landsberg* 曲率，当且仅当它是弱 *Landsberg* 度量。

证明。充分性显然，下面证明必要性。 F 具有相对各向同性平均 Landsberg 曲率，当且仅当

$$J_\alpha + c(x) F I_\alpha = 0, \tag{5.12}$$

根据命题 3.2 和命题 5.1，(5.12) 等价于

$$\begin{cases} \overset{1}{J}_i + f\, \overset{1}{I}^{p}_{;i}\, \dfrac{\partial f}{\partial x^p} F_2^2 + c(x) F\, \overset{1}{I}_i = 0, & (5.13) \\ \overset{2}{J}_{i'} + f(f^2\, \overset{1}{I}^{p}\, y_{i'} + \overset{2}{I}_{i'}\, y^p) \dfrac{\partial f}{\partial x^p} + f^{-1}(\overset{2}{I}^{p'}_{;i'}\, F_2^2 + \overset{2}{I}^{p'}\, y_{i'} + \overset{2}{I}_{i'}\, y^{p'}) \dfrac{\partial f}{\partial x^{p'}} \\ \quad + c(x) f^2 F\, \overset{2}{I}_{i'} = 0. & (5.14) \end{cases}$$

对 (5.13) 关于 $y^{i'}$ 求导，得到

$$2f\, \overset{1}{I}^{p}_{;i}\, \frac{\partial f}{\partial x^p} y_{i'} + c(x) f^2 F^{-1} y_{i'}\, \overset{1}{I}_i = 0, \tag{5.15}$$

用 $y^{i'}$ 收缩 (5.15)，得到

$$2f\, \overset{1}{I}^{p}_{;i}\, \frac{\partial f}{\partial x^p} F_2^2 + c(x) f^2 F^{-1} F_2^2\, \overset{1}{I}_i = 0. \tag{5.16}$$

变换 (5.16)，再将其代入 (5.13)，可将 (5.13) 化简为

$$\overset{1}{J}_i + c(x)(F - \frac{1}{2} f^2 F^{-1} F_2^2)\, \overset{1}{I}_i = 0. \tag{5.17}$$

对 (5.17) 关于 $y^{i'}$ 求导，得到

$$c(x) \frac{1}{2} f^4 F^{-3} F_2^2 y_{i'}\, \overset{1}{I}_i = 0, \tag{5.18}$$

用 $y^{i'}$ 收缩 (5.18)，得到

$$c(x) \frac{1}{2} f^4 F^{-3} F_2^4\, \overset{1}{I}_i = 0. \tag{5.19}$$

类似地，由 (5.14) 可得

$$c(x) f^4 F^{-3} F_1^4 F_2^2\, \overset{2}{I}_{i'} = 0. \tag{5.20}$$

注意，根据 (5.19) 和 (5.20)，F 是非黎曼的，因此 $c(x) = 0$，这意味着 F 是弱 Landsberg 度量。 □

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12261088、11761069）的资助。

参考文献

[1] Z. Shen, 《喷射与芬斯勒空间的微分几何》, 克卢维尔学术出版社, 荷兰多德雷赫特, 2001年。

[2] D. Bao, 《黎曼-芬斯勒几何中的两个曲率驱动问题》, 《纯粹数学》高级研究丛书, 第48卷（2007年）, 19-71页。

[3] S. Zhou, J. Wang, B. Li，关于一类近正则兰德斯伯格度量，中国科学：数学，62（5）（2019年）935-960。[4] Z. Shen，关于芬斯勒几何中的一类兰德斯伯格度量，加拿大数学杂志，61（6）（2009年）1357-1374。[5] R. L. Bishop, B. O'Neill，负曲率流形，美国数学会汇刊，145（1969年）1-49。[6]G. S. Asanov，史瓦西度量的芬斯勒扩张，《物理学进展》，40（7）（1992年）667-693。[7] G. S. Asanov，定义在乘积 $R \times M$ 上的芬斯勒度量函数及其潜在应用，数学物理学报告，41（1）（1998年）117-132。[8] A. B. Hushmandi, M. M. Rezaii，兰德斯伯格型扭曲积芬斯勒空间，《数学物理学杂志》，52（9）（2011年）093506。[9] E. Peyghan, A. Tayebi, B. Najafi，具有某些非黎曼曲率性质的双扭曲积芬斯勒流形，《波兰数学年刊》，3（105）（2012年）293-311。[10] Y. He, C. Zhong，复芬斯勒流形的双扭曲积，《数学物理学报》，36（6）（2016年）1747-1766。[11] B. Y. Chen，子流形几何及其应用，东京：东京科学大学，III，1981年。[12] R. Ponge, H. Reckziegel，伪黎曼几何中的扭曲积，《几何学专论》，48（1）（1993年）15-25。[13] B. Y. Chen，凯勒流形中的扭曲积CR-子流形，《淡水牛津数学科学杂志》，16（2）（2000年）105-121。[14] L. Kozma, I. R. Peter, H. Shimada，芬斯勒流形的扭曲积，数学物理学报告，57（3）（2006年）375-384。[15] E. Peyghan, A. Tayebi, F. L. Nourmohammadi，关于扭曲积芬斯勒流形，《ISRN几何学》。（2013年）732432。[16] W. Xiao, Y. He, X. Lu, X. Deng，复芬斯勒流形的双扭曲积，《数学研究学报》，55（2）（2022年）158-179。[17] X. Deng, Y. He, N. Zhang，贝瓦尔德双扭曲积芬斯勒度量，《新疆师范大学学报》，40（2）（2021年）（中文）。[18] X. Deng, Y. He, Q. Ni，弱贝瓦尔德双扭曲积芬斯勒度量，《纯粹数学》，11（7）（2021年）1389-1399。（中文）。[19] W. Xiao, Y. He, C. Tian, J. Li，复爱因斯坦-芬斯勒双扭曲积度量，《数学分析及其应用杂志》，509（2）（2022年）125981。

[20] W. Xiao、Y. He、S. Li、Q. Ni，《局部共形平坦的双扭曲积复芬斯勒流形》，数学杂志。（2022年）[21] W. Xiao、Y. He、X. Deng、J. Li，《双扭曲积复芬斯勒流形的局部对偶平坦性》，数学进展。（2022年）（中文）[22] D. Bao、S. S. Chern、Z. Shen，《黎曼-芬斯勒几何导论》。数学研究生教材第200卷，施普林格，纽约，纽约州，美国，2000年。[23] P. Finsler，《一般空间中的曲线与曲面》，（哥廷根大学博士论文，1918年），比克豪泽出版社。31（10）（1951年）319。[24] E. Cartan，《芬斯勒空间》，科学与工业新知。巴黎：Hermann。（1934年）79。[25] B. Li、Z. Shen，《一类弱兰茨伯格度量》，中国科学A辑：数学。50（4）（2007年）573–589。[26] X. Chen、Z. Shen，《关于道格拉斯度量》，德布勒森数学出版物。66（3–4）（2005年）503–512。