arXiv:2305.05509v1 [math.DG] 9 May 2023

浸入到 Sasakian 空间形式中

A. LOI、G. PLACINI 和 M. ZEDDA

摘要。我们研究 Sasakian 流形到有限维和无限维 Sasakian 空间形式中的浸入。在证明 Sasakian 情形下的 Calabi 刚性定理后，我们刻画了所有能够（局部）Sasakian 浸入非椭圆 Sasakian 空间形式的齐次 Sasakian 流形。此外，我们还分别在紧情形和非紧情形下，刻画了能够嵌入标准球面的齐次 Sasakian 流形。

1. 引言及主要结果陈述

Sasakian 流形 $M = (M, \eta, R, g, \Phi)$ 是一种接触流形，配备了相容的黎曼度量和横向复结构，后者定义了与 Reeb 叶状结构横向的 K¨ahler 结构。除横向结构外，Sasakian 流形还关联着另一种自然的 K¨ahler 结构：其黎曼锥上的结构。由于二者之间存在深刻联系，许多 K¨ahler 几何问题都可以在 Sasakian 情形下研究，并得到类似结果。本文便是一个例子。具体而言，我们关注能够浸入或嵌入 Sasakian 空间形式的 Sasakian 流形。尽管这一问题在 K¨ahler 情形下由 Calabi 于 20 世纪 50 年代开创，已有悠久的研究传统 [4]（近期综述见 [18]），但 Sasakian 对应问题直到最近才受到相对较少的关注。20 世纪 60 年代末和 70 年代，人们以不同名称研究过这一问题，例如 Harada [9, 10, 11, 12], 、Kenmotsu [13],、Kon [14, 15], 、Okumura [19], ；直到最近，Bande、Cappelletti–Montano 以及排名最前的两位作者才对其进行了研究 [2, 5, 21]。

我们关注浸入单连通 Sasakian 空间形式中的 Sasakian 浸入，最初着眼于 Calabi 的一些经典结果的 Sasakian 类比。与 K¨ahler 情形一样，给定 $N \leq \infty$，按横向变形计，只有三种维数为 $2N + 1$ 、具有 ϕ-截面曲率c的完备单连通 Sasakian 空间形式 $M(N, c)$。具体而言，它们分别是具有 $c < -3$的双曲空间形式、具有 $c = -3$ 的海森堡空间，以及具有 $c > -3$ 的标准球面。此外，Sasakian 空间形式是复空间形式上的丛，前两种情形下的丛是平凡的。因此，当所考虑的 Sasakian 流形是正则的时，利用 Sasakian 浸入会诱导 Reeb 叶空间的 K¨ahler 浸入这一事实，便可直接从 K¨ahler 情形推出一些结论。例如，Harada [12] 在未宣称原创性的情况下，已经指出了 Sasakian 空间形式浸入 Sasakian 空间形式的分类。我们利用 Sasakian 空间的纤维化

日期：2023年5月10日；©A. Loi、G. Placini 和 M. Zedda 2023。2010年数学主题分类。53C25；53C30；53C24；53C42；53A55。关键词和短语。Sasakian空间形式；Sasakian 浸入；Calabi刚性；齐次Sasakian流形。作者获 INdAM 和 GNSAGA - 代数、几何结构及其应用国家小组资助。前两位作者获 GOACT 资助——该项目由撒丁岛基金会资助，并由 PNRR e.INS下一代撒丁岛创新生态系统资助（CUP F53C22000430001，MUR代码 ECS00000038）。

本文将反复用到形式。例如，我们第一个结果——Calabi刚性定理的 Sasakian 类比——的证明就依赖于这一事实。

定理 1.1（Sasakian 刚性）。设 $\varphi_1, \varphi_2 \colon M \longrightarrow M(n,c)$ 是从 Sasakian 流形 M 浸入具有 $N \leq \infty$ 的 Sasakian空间形式 $M(N,c)$ 的 Sasakian 浸入。则存在 $M(N,c)$ 的 Sasakian 变换 T，使得 $\varphi_1 = T \circ \varphi_2$。

请注意，这是空间形式的一个特殊性质。事实上，可以找到许多 Sasakian 流形的例子，它们可浸入 Sasakian 流形 M，但这些浸入不由 M 的等距变换关联。例如，可以取一个 M，它是基于 Green [8] 提供的例子构造的正则 Sasakian 流形。另一个经典结果，其证明与 Calabi 的证明完全类似，是关于局部浸入的延拓结果。

定理 1.2（整体延拓）。设 M 是一个单连通 Sasakian 流形。若对所有 $p \in M$，都存在一个局部 Sasakian 浸入 $\varphi_p \colon U_p \longrightarrow M(N,c)$，将 p 的邻域 U_p 浸入具有 $N \leq \infty$ 的 Sasakian空间形式 $M(N,c)$，则 M 可整体浸入 $M(N,c)$。此外，该浸入在 $M(N,c)$ 的刚性变换意义下唯一。

对于基本群非平凡的流形，这显然不成立。例如，紧致海森堡流形是 $\mathbb{R}^{2n+1} = M(n,-3)$ 对积分海森堡群取商所得，它可以局部浸入（但不能全局浸入）到 $M(n,-3)$ 本身。对于某些特殊情形，每一点处存在局部浸入这一假设可以弱化为仅在某一点处存在局部浸入，例如当 Sasakian 流形是局部齐性流形或度量为实解析时。

给定一个 Sasakian 流形 M，判断 M 是否可 Sasakian 嵌入或浸入某个 Sasakian 空间形式，是一个极具挑战性的问题。有鉴于此，我们首先考察（局部）齐性 Sasakian 流形这一特殊情形。在这种情形下，与 K¨ahler 情形类似，存在一种二分现象。也就是说，浸入全纯截面曲率为 $c \leq -3$ 的 Sasakian 空间形式，比浸入球面受到的限制严格得多。在 Sasakian 情形中，这一点在 [2] 已经十分明显：该文作者研究了将 η-Einstein 流形局部浸入全纯截面曲率为 $c \leq -3$ 的 Sasakian 空间形式的问题。事实上，对于局部齐性 Sasakian 流形的局部浸入，我们得到一个类似结果，它是 Di Scala、Ishi 和 Loi 定理 [6] 的 Sasakian 类比。具体而言，记 $F(n,b)$ 为维数为 $2n$、全纯截面曲率为 $4b$ 的复空间形式，我们证明如下结论

定理 1.3. 设 M 是一个维数为 $2n+1$ 的完备局部齐性萨萨基流形。假设存在一个开子集 $U \subset M$，以及一个 Sasakian 浸入 $\varphi \colon U \longrightarrow M(N,c)$，且满足 $N \leq \infty$。

(1) 如果 $c < -3$，M 与 $M(n,c)/\Gamma$ 对 $M(n,c)$ 的 Sasakian 变换离散群 Sasaki 等价。此外，如果 $U = M$，则 $\Gamma = \{1\}$。(2) 如果 $c = -3$，则 M 与其商空间相 Sasaki 等价。

$$\mathbb{R} \times F(k,0) \times F(n_1,b_1) \times \cdots \times F(n_r,b_r)$$

其中，对于 $i = 1, \ r$ 由一群萨萨基变换 Γ 作用，$k + n_1 + \cdots + n_r = n$ 和 $b_i < 0$。此外，如果 $U = M$，群 Γ 是平凡的。

我们简要评论这一结果。首先请注意，上述任何基本群非平凡的萨斯基流形都表明，定理 1.2 中关于 $\pi_1(M)$ 的假设是必要的。可以明确描述基本群 $\Gamma = \pi_1(M)$。更具体地说，Γ

是因子 \(F(n_i, b_i)\) 的 K¨ahler 等距变换离散子群乘积的扩张，参见注 4.3。当定理 1.3 中考虑的浸入是整体的时，我们可以明确描述该浸入，见注 4.2。特别是，如果我们假设 $N < \infty$，那么该浸入就是将 $M(n, c)$ 线性嵌入到 $M(N, c)$ 中。注意，在 [2] 中，在 M 是 η-Einstein 且满足 $N < \infty$ 的假设下，也得到了相同的结论。关于无限维 Sasakian 空间形式，注意到根据定理 1.3，对于 $c < -3$， $M(n, c)$ 是 η-Einstein 的，并且可浸入 $M(\infty, -3)$。一个有趣的开放问题与 K¨ahler 情形下的一个猜想密切相关，即 [18, 猜想 4.1。4], , 其内容是刻画可浸入 $M(\infty, -3)$ 的 η-Einstein 流形。

与 K¨ahler 领域类似，曲率为 c> -3 的空间形式 $M(N, c)$ 中的 Sasakian 浸入灵活性要大得多。这归根结底是 Kodaira 嵌入定理及其 Sasakian 版本所致，后者将在下文第5节中详细说明。具体而言，任意射影流形 X 的 Kodaira 嵌入 $X \longrightarrow F(N, 1)$ 将 Hopf 丛$M(N, 1) \longrightarrow F(N, 1)$ 拉回后，会得到一个正则 Sasakian 流形 M，以及一个 Sasakian 嵌入 $M \longrightarrow M(N, 1)$。另一方面，给定一个 Sasakian 流形 M，了解 M 上的 Sasakian 结构是否属于这一类型，即 M 是否可嵌入标准球面，是一个值得探讨的问题。根据结构定理 2.1，正则 Sasakian 流形 M 经横向齐次变换后，是一个厄米线丛的酉丛 (L^{-1}, h^{-1})，其底空间为 K¨ahler 流形 (X, ω)，且 $c_1(L) = [\omega]$。因此，当前问题与寻找一个将 (X, L) 嵌入 $(\mathbb{C}\mathrm{P}^N, \mathcal{O}(1)$ 的问题密切相关，并且该嵌入须关于线丛上的厄米度量保持等距。

与非椭圆情形一样，我们在初步研究这一问题时聚焦于齐性流形。注意，若限于有限维情形，则能够浸入 $M(N, 1)$ 的 Sasakian 流形必为紧致流形，见注 6.3。我们的下一个结果表明，对于齐性流形，这一条件也是充分的，而且该浸入实际上是一个嵌入。此外，我们还能明确描述这个嵌入。

定理 1.4. 在横向齐次变换意义下，紧致齐性 Sasakian 流形 M 可 Sasakian 嵌入 φ 有限维标准球面 S^{2N+1}，且该嵌入在 $\mathbb{C}^{N+1}$的酉变换意义下唯一。

此外，将 M 与 K¨ahler 流形 X上的线丛 (L^{-1}, h^{-1}) 所关联的酉丛相识别后，该嵌入可表示为

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow S^{2N+1} \\ v &\mapsto \frac{(v(s_0(x)), \ldots, v(s_N(x)))}{\sum_{j=0}^{N} h\left(s_j(x), s_j(x)\right)} \end{aligned}$$

其中 v 位于s 属于 $x \in X$ 上的 L^{-1} 的纤维，而 $(s_0, \ldots, s_N)$ 是 L的一个合适的基 H^0。

文献 [25] 证明，能够浸入 $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ 的 K¨ahler 流形必然是单连通的。尽管在 Sasakian 情形下并非如此，但不对基本群作任何假设也不足为奇，因为紧致齐性 Sasakian 流形的基本群必然是循环群。可以将这一结果与文献 [5] 进行比较；在该文中，Cappelletti–Montano 和第一作者刻画了能够余维 2 浸入 $M(N, 1)$ 的 η-Einstein 流形。

如果允许标准球面是无限维的，那么有许多 Sasakian 流形可以浸入到 $M(N, 1)$ 中。即便只考虑齐性情形，也可以看出紧致性并非必要条件。在 K¨ähler 情形下，经过相似变换后，一个齐

流形可以浸入到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ 中，当且仅当它是单连通的，参见 [6, 定理 3] 和 [16, 定理 1.1]。我们证明，可浸入无限维球面的齐性 Sasakian 流形的刻画与之类似。

定理 1.5. 设 M 是一个齐次Sasakian流形。那么， M 经适当的 $\mathcal{D}$-齐次变换后存在一个 Sasakian 浸入 $\varphi\colon M \longrightarrow S^\infty$，当且仅当 $\pi_1(M)$ 是循环的。

虽然在紧情形下，为了使横向 K¨ahler 形式成为整形式，横向齐次变换是必要的，但在这里，这一条件本质上有所不同。事实上，存在一些可缩的齐性 Sasakian 流形，它们无法浸入 S^∞，尽管每个横向 K¨ahler 类都是平凡的，因而也是整的，参见注 6.2。注意，定理 1.5 中的浸入是满的，即其像不包含在任何真全测地子流形中，当且仅当流形 M 是非紧的。如果去掉齐性假设，即使度量是完备的且 $N < \infty$，这一结论也不再成立。参见例 6.4，其中给出了一个从非紧完备 Sasakian 流形到有限维标准球面的单射 Sasakian 浸入。综合以上结果，我们得到

推论 1.6. 一个齐次Sasakian流形 M 在横向齐次变换下，存在到有限维标准球面 S^{2N+1} 中的 Sasakian 嵌入 φ，当且仅当它是紧致的。

论文结构。本文组织如下。第2节回顾 Sasakian 几何的基础知识，特别关注齐性 Sasakian 流形、Sasakian 浸入和正则 Sasakian 结构。本文的主要结果分为三个部分。具体而言，第3节讨论 Sasakian 流形到 Sasakian 空间形式中的浸入，并证明 Sasakian 刚性（定理 1.1）和整体延拓定理（定理 1.2）。第4节专门证明定理 1.3。本文其余部分讨论到有限维和无限维球面中的浸入。特别是，第5节讨论正则 Sasakian 流形到标准球面的 CR 嵌入，并讨论诱导的 Sasakian 结构。第6节利用这些讨论证明定理 1.4 和定理 1.5。

2. Sasakian 流形

Sasakian 几何可以通过接触度量几何以及相关的 K¨ahler 锥来理解，参见 Boyer 和 Galicki [3] 的专著。为方便读者，我们将介绍这两种表述，但主要聚焦于正则情形，因为它是本文的核心。下文中，所有流形和轨形均假定为连通的。

流形 M 上的 K-接触结构 (η, Φ, R, g) 由一个接触形式 η 和切丛 $\mathrm{T}M$ 的一个自同态 Φ 构成，并满足以下性质：

- $\Phi^2 = -\mathrm{Id} + R \otimes \eta$，其中 R 是 η 的 Reeb向量场，
- $\Phi_{|\mathcal{D}}$ 是一个与辛形式 $\mathrm{d}\eta$ 相容的几乎复结构，该辛形式定义在 $\mathcal{D} = \ker \eta$ 上，
- Reeb向量场 R 关于度量 $g(\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\eta(\cdot, \Phi\cdot) + \eta(\cdot)\eta(\cdot)$ 是 Killing 的。

给定这样的结构，可以考虑黎曼锥 $\big(M \times \mathbb{R}^+ t^2 g + \mathrm{d}t^2\big)$ 上的几乎复结构 J，其定义为

- $J = \Phi$ 在 $\mathcal{D} = \ker \eta$ 上，以及
- $R = J(t\partial_t)|_{\{t=1\}}$。

Sasakian结构是一种 K-接触结构 (η, Φ, R, g)，其相关联的几乎复结构 J是可积的，因此 $(M \times \mathbb{R}^+, t^2 g + \mathrm{d}t^2, J)$ 是 K¨ahler。Sasakian 流形是配备了 Sasakian结构 (η, Φ, R, g) 的流形 M。

等价地，也可以用 K¨ahler 锥来定义 Sasakian 流形。具体而言，光滑流形 M 上的 Sasakian结构定义为 $M \times \mathbb{R}^+ = Y$上的 K¨ahler 锥结构，即 Y上的 K¨ahler结构 (g_Y, J)，其形式为 $g_Y = t^2 g + \mathrm{d}t^2$，其中 t是 $\mathbb{R}^+$上的坐标，g是 M上的度量。此时，(Y, g_Y, J)称为 M的 K¨ahler 锥，而后者又与子流形 $\{t = 1\}$等同。于是， Y上的 K¨ahler 形式为

$$\Omega_Y = \frac{i}{2} \partial \overline{\partial} t^2.$$

Y上的 Reeb向量场定义为

$$R = J(t \partial_t).$$

这定义了一个全纯Killing向量场，其度量对偶 1-形式为

$$\eta = \frac{g_Y(R, \cdot)}{t^2} = \mathrm{d}^c \log t = i(\overline{\partial} - \partial) \log t$$

其中 $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$。注意， J通过如下方式诱导出 TM 的一个端omorphism Φ：

- $\Phi = J$在 $\mathcal{D} = \ker \eta_{\mathbb{T}M}$上，且
- $\Phi(R) = 0$。

等价地，通过令 g和 η，即可确定端omorphism Φ

$$g(X, Z) = \frac{1}{2} \mathrm{d}\eta(X, \Phi Z) \quad \text{for } X, Z \in \mathcal{D}.$$

容易看出，限制在 $M = \{t = 1\}$上时，(η, Φ, R, g) 是接触度量意义下的 Sasakian 结构，其 K¨ahler 锥本身就是 (Y, g_Y, J)。在不会引起混淆时，我们将用 R和 η同时表示 Y上和 M上的对象。

由于 g和 η在 R下是不变的，Reeb 叶状结构在横向上是 K¨ahler 的，即分布 $\mathcal{D}$具有一个在 R作用下不变的 K¨ahler 结构 (g^T, ω^T, J^T)。具体而言，我们有

$$\omega^T = \frac{1}{2} \mathrm{d}\eta, \quad J^T = \Phi_{|\mathcal{D}} \text{ and } g^T(X, Z) = \frac{1}{2} \mathrm{d}\eta(X, J^T Z) = g_{|\mathcal{D}}.$$

特别地，可以看出

$$\omega^T = \frac{1}{2} \mathrm{d}\eta = \frac{i}{2} \mathrm{d}(\overline{\partial} - \partial) \log t = i \partial \overline{\partial} \log t. \tag{1}$$

Reeb向量场在 M上定义了一个叶状结构，称为 Reeb 叶状结构。Sasakian结构的一个重要二分性取决于 Reeb 叶状结构叶片的正则性。也就是说，如果存在叶状坐标图，使得每个叶片与每个坐标图相交有限次，则称该 Sasakian结构为拟正则。否则称其为非正则。此外，如果每个叶片与每个坐标图都只相交一次，则称该 Sasakian结构为正则。由于以下结构定理，紧致正则和拟正则 Sasakian 流形已得到相当充分的理解。

定理 2.1（[3]）。设（M, η, Φ, R, g）是一个拟正则紧致萨萨基流形。则 Reeb 叶状结构（X, ω, g_ω）的叶空间是一个带有整数 K¨ahler 形式 $\frac{1}{2\pi}\omega$ 的紧致 K¨ahler 循环轨形，因此投影 π：（M, g） $\longrightarrow$（X, g_ω）是一个黎曼浸没。此外，当且仅当 M 上的 Sasakian结构是正则的时， X 才是光滑流形。

反之，任何在紧致 K¨ahler 循环轨形（X,ω）上的、具有欧拉类 $-\frac{1}{2\pi}[\omega]\in H^2_{orb}(X,\mathbb{Z})$ 的主 S^1-轨丛 M 都承认一个 Sasakian结构。

这一结果使我们能够用 K¨ahler 轨形 X 的代数几何来重新表述紧致拟正则 Sasaki 流形M 的几何。鉴于这一对应关系对于本文后续内容的重要性，我们将对其进行详细阐述。由于我们的结果只需涉及正则情形，因此这里只讨论这一情形。不过，同样的描述也适用于拟正则紧致 Sasakian 流形。我们先来介绍 Sasakian 结构的 $\mathcal{D}$-齐次变换这一概念。

定义2.2（$\mathcal{D}$-齐次变换或横向齐次变换）。设 (M,η,Φ,R,g) 是一个（不一定紧致的）Sasakian 流形，且 $a\in\mathbb{R}$ 为正数。我们可以由 (η,Φ,R,g) 定义 Sasakian 结构 (η_a,Φ_a,R_a,g_a)，如下：

$$\eta_a=a\eta,\quad \Phi_a=\Phi,\quad R_a=\frac{R}{a},\quad g_a=ag+(a^2-a)\eta\otimes\eta=ag^T+\eta_a\otimes\eta_a.$$

等价地，我们可以在 M 上定义同一结构：在 K¨ahler 锥上取一个新坐标 $t=t^a$。显然，根据上述表述，这会在 $M=\{t=1\}=\{t=1\}$ 上诱导出相同的 Sasakian 结构 (η_a,Φ_a,R_a,g_a)。我们将这一结构称为 (η,Φ,R,g) 的 $\mathcal{D}_a$-齐次变换。

现在给定紧致正则 Sasaki 流形 (M,η,Φ,R,g)，并考虑上述定理 2.1 中给出的投影 π：$(M,g)\longrightarrow(X,\omega)$。注意，$\pi$ 局部将接触分布 $\mathcal{D}$ 与 X 的切空间等同起来。因此，除去 $\mathcal{D}$-齐次变换外，我们有$\pi^*(\omega)=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\eta$。此外，端omorphism Φ 确定了 X 上的复结构，而 g诱导出 K¨ähler 度量 g_ω，即 $g^T=\pi^*g_\omega$。

在这种情况下，类 $\frac{1}{2\pi}[\omega]\in H^2(X,\mathbb{Z})$ 定义了 X上的一个丰沛线丛 L。此外，锥 $Y=M\times\mathbb{R}^+$ 可按以下方式与 $L^{-1}=L^*$ 中零截面的补集等同。设 L 上有一个厄米度量 h，使得

$$\omega=-i\partial\overline{\partial}\log h.$$

然后，其在 L^{-1} 上的对偶 h^{-1} 定义了（$p,\ t$）$\in M\times\mathbb{R}^+=L^{-1}\setminus\{0\}$ 的第二个坐标，定义为

$$\begin{aligned} t:L^{-1}\setminus\{0\}&\longrightarrow\mathbb{R}^+\\ (p,v)&\mapsto|v|_{h_p^{-1}}\end{aligned}\tag{2}$$

其中，v 是 L^{-1} 的一个向量，位于 p 上方的纤维中。采用此记号，K¨ahler 锥（$M\times\mathbb{R}^+$，$t^2g+\mathrm{d}t^2$，I）上的 K¨ahler 形式为

$$\Omega=\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}t^2.\tag{3}$$

由这些数据可以得到 Sasakian结构

$$\omega^T=-i\partial\overline{\partial}\log h,\quad \eta=i(\overline{\partial}-\partial)\log t.\tag{4}$$

因此，在紧致 K¨ähler 流形 X 上的丰沛线丛 L 上选择厄米度量 h，便完全确定了与 L^{-1} 相关的 $U(1)$-轨形丛上的 Sasakian结构。由此得到的 Sasakian 流形 (M,η,R,g,Φ) 称为 (X,ω) 上的 Boothby-Wang 丛。注意，尽管微分流形由 $\frac{1}{2\pi}[\omega]$ 唯一确定，但 Sasakian结构确实取决于 h 的选择，事实上也由其确定。

最基本的例子是 S^{2n+1} 上的标准 Sasakian结构，也就是由 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 上 $\mathcal{O}(1)$ 的 Fubini-Study 度量 $h = h_{FS}$ 所确定的 Boothby-Wang 丛。我们详细介绍这一构造，以进一步阐明上述表述。

例 2.3（标准Sasakian球面）。设 $h = h_{FS}$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 上全纯线丛 $\mathcal{O}(1)$ 的 Fubini-Study 厄米度量。回忆一下，其在 $\mathcal{O}(-1)\setminus\{0\} = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 上的对偶度量 h^{-1} 由欧几里得范数给出。这在 K¨ahler 锥 $\mathcal{O}(-1)\setminus\{0\} = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} = S^{2n+1}\times\mathbb{R}^+$ 上定义了一个坐标 t。具体而言，对于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的坐标 $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$，有

$$t : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$z \mapsto |z| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} z_i\overline{z}_i}$$

现在，锥上的 K¨ahler 度量就是平坦度量

$$\Omega_{flat} = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}t^2 = \frac{i}{2}\sum \mathrm{d}z_i\wedge\mathrm{d}\overline{z}_i.$$

Reeb向量场 R_0 和接触形式 η_0 为

$$R_0 = J(t\partial_t) = i\sum z_i\partial_{z_i} - \overline{z}_i\partial_{\overline{z}_i},\quad \eta_0 = i(\overline{\partial}-\partial)\log t = \frac{i}{2t^2}\sum z_i\mathrm{d}\overline{z}_i - \overline{z}_i\mathrm{d}z_i.$$

显然，将其限制到 S^{2n+1} 后，η_0 和 R_0 与圆度量 g_0，以及 J 在 $\ker\eta_0$ 上的限制 Φ_0 一起，在 S^{2n+1} 上给出一个 Sasakian结构。这恰好对应于 Hopf 丛 $S^{2n+1}\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^n$。此外，我们有

$$\pi^*\omega_{FS} = \omega^T = \frac{1}{2}\mathrm{d}\eta_0 = \frac{i}{2|z|^4}\sum_i |z_i|^2\mathrm{d}z_i\wedge\mathrm{d}\overline{z}_i - \sum_{i,j}\overline{z}_i z_j\mathrm{d}z_i\wedge\mathrm{d}\overline{z}_j$$

其中 $\pi:\ \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是标准投影。

一般而言，Reeb叶状结构的叶空间 X 甚至不一定是轨形。然而，当 Sasakian结构正则且完备时，无论 M是否紧致，X 都是一个 K¨ähler 流形，参见例如 [23]。

现在我们将注意力转回不一定紧致的 Sasakian 流形，并回顾另一类众所周知的 Sasakian结构变形，即所谓的横向 K¨ähler 变换。具体而言，给定一个 K¨ähler 锥 $Y = M\times\mathbb{R}^+$，我们考虑所有与 Reeb场 R相容的、定义在 (Y, J) 上的 K¨ähler 度量。换言之，这些势函数 $\widetilde{t}^2$ 满足$\sim t\partial_t = t\partial_{\widetilde{t}}$。这意味着相应的 K¨ähler 形式和接触形式满足

$$\widetilde{\Omega} = \Omega + i\partial\overline{\partial}e^{2f},\quad \widetilde{\eta} = \eta + d^c f$$

对于一个在 ∂_t 和 R作用下不变的函数 f。这类函数称为基本函数。我们仍需要˜来识别流形 $\{t=1\}$ 和 $\{t=1\}$。这通过微分同胚

$$F : Y \longrightarrow Y$$
$$(p,t)\mapsto \left(p, te^{-f(p)}\right)$$

将 $\{t=1\}$ 映射到 $\{t = e^{-f(p)}\} = \{\widetilde{t}=1\}$。容易验证，$\eta$、$R$ 和 $d^c f$ 在 F 下是不变的，因此 $\widetilde{\eta} = \eta + d^c f$ 在 M 上成立。此外，横向 K¨ahler 形式是 7

由 $\widetilde{\omega}^T = \omega^T + i\partial\overline{\partial} f$ 相关。注意，当 Sasaki 结构是拟正则时，基本函数对应于底空间轨形上的函数 X。因此，如果 t 来自L^{-1}上的厄米度量 h^{-1}，那么这样的变换可通过将 h^{-1} 替换为 f 的函数 $e^f h^{-1}$ 来实现： $X \longrightarrow \mathbb{C}$，满足$\omega + i\partial\overline{\partial} f > 0$。这等价于在与 ω相同的类中选取一个不同的 K¨ahler 形式 $\widetilde{\omega}$。我们将上述讨论总结为以下定义。

定义 2.4（横向 K¨ahler 变形）。设 (M, η, R, g, Φ) 是一个 Sasakian 流形，其 K¨ahler 锥为 (Y, J)，K¨ahler 势为 t^2。对于基本函数 f，将 t 替换为 $\widetilde{t} = e^f t$，并保持 (Y, J, R) 不变，即得到一个横向 K¨ahler 变换。当 Sasaki 结构为拟正则且如 (4) 所示给出时，将 h^{-1} 替换为 $e^f h^{-1}$，即得到一个横向 K¨ahler 变换。

本文主要关注 Sasakian 流形的浸入与嵌入，因此回顾最相关的定义。若存在微分同胚 φ: $M_1 \longrightarrow M_2$，使得下式成立，则两个 Sasakian 流形 $(M_1, \eta_1, R_1, g_1, \phi_1)$ 和 $(M_2, \eta_2, R_2, g_2, \phi_2)$ 等价：

$$\varphi^* \eta_2 = \eta_1 \quad \text{and} \quad \varphi^* g_2 = g_1.$$

如果该条件成立，则 φ 也保持端omorphism ϕ_1 和 Reeb向量场。如上述定义中隐含的意思，Sasakian 流形 (M, η, R, g, ϕ) 到其自身的 Sasakian 等价，通常称为 (M, η, R, g, ϕ) 的 Sasakian 变换。

2.1. 复空间形式与 Sasakian 空间形式。为明确记号，我们回顾一些关于复空间形式与 Sasakian 空间形式的事实。在文献中，空间形式并不一定被假定为单连通且完备，但在本文中始终如此。

定义 2.5. 复空间形式 $F(N, b)$，$N \leq \infty$ 是一个完备、单连通的复流形，实维数为 $2N$，全纯截面曲率为常数 $4b$。

复空间形式根据全纯截面曲率的符号加以区分。也就是说，在全纯等距意义下，复空间形式分为三种类型。

($b = 0$) $F(N, 0)$ 是复空间 $\mathbb{C}^N$。如果 $N = \infty$, $F(\infty, 0)$ 是由满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2 < \infty$ 的复数序列 $(z_1, z_2, \ldots)$ 构成的希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{C})$。在这两种情况下， $F(N, 0)$ 都被视为赋予了平坦度量。

($b > 0$) $F(N, b)$ 是复射影空间 $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$。当 $N = \infty$, $F(\infty, b) = \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ 是等价类 $[z_1 \colon z_2 \colon \cdots]$ 的空间，其中 $(z_1, z_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ 关于标准 $\mathbb{C}^*$-作用。该空间赋有 Fubini-Study形式 ω_{FS}，其全纯截面曲率为常数 $4b$，在齐次坐标下表示为

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2b} \partial\overline{\partial} \log \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2.$$

($b < 0$) $F(N, b) = \mathbb{C}\mathrm{H}^\infty$ 是半径为 $-\frac{1}{b}$、位于 $\mathbb{C}^N$ 中的球（当 $N = \infty$ 时为 $\ell^2(\mathbb{C})$），其配备了双曲 K¨ahler 形式 ω_{hyp}，且具有常数全纯截面曲率 $4b$:

$$\omega_{hyp} = \frac{i}{2b} \partial\overline{\partial} \log \left(1 + b \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2 \right).$$

Sasakian 空间形式的定义与此类似。给定一个具有黎曼截面曲率 Sec 的 Sasakian 流形 (M,η,R,g,ϕ)，g 的 ϕ-截面曲率 H 定义为

$$H(X)=\mathrm{Sec}(X,\phi X)$$

对于所有与 R 正交的单位长度向量场 X。

定义 2.6。Sasakian 空间形式 $M(N,c)$, $N\le\infty$，是一个维数为 $2N+1$、具有常数 ϕ-截面曲率 $H\equiv c$ 的完备单连通 Sasakian 流形。

Tanno [26] 证明，有限维 Sasakian 空间形式有三种类型，即具有 $c<-3$、$c=-3$ 和 $c>-3$ 的空间形式。在 Boothby-Wang 对应下，常数 ϕ-截面曲率 c 恰好对应于常数全纯横向截面曲率 $c+3$。也就是说，ϕ-截面曲率与横向度量 g^T 的截面曲率 Sec^T 之间的关系为

$$H(X)=\mathrm{Sec}^T(X,\phi X)-3 \tag{5}$$

对于与 R 正交的单位长度向量场 X，例如参见 [3, 第 7.3] 节。我们介绍 Tanno 分类，包括无限维情形，并特别关注其与复空间形式的关系。

($c=-3$) $M(N,-3)$ 与带有标准接触结构的 $\mathbb{R}^{2N+1}=\mathbb{R}\times F(N,0)$ Sasaki 等价。特别地，若 $N=\infty$，则 $M(\infty,-3)$ 是希尔伯特空间 $\mathbb{R}\times\ell^2(\mathbb{C})$。在这两种情况下，$M(N,-3)$ 均配备接触形式 $\eta=\mathrm{d}t+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N}(z_j\mathrm{d}\overline{z}_j-\overline{z}_j\mathrm{d}z_j)$ 和 Reeb向量场∂_t，其中 t 是第一个因子上的坐标。端omorphism ϕ 定义为通过投影 $\pi\colon\mathbb{R}\times F(N,0)\longrightarrow F(N,0)$，将 $\mathbb{C}^N(\ell^2(\mathbb{C}))$ 的复结构作水平提升。度量 g定义为 $g=g^T+\eta\otimes\eta$，其中 g^T是 $F(N,0)$ 上的平坦度量。($c>-3$) $M(N,c)$ 与标准Sasakian球面 S^{2N+1}(S^∞ if $N=\infty$) Sasaki 等价。这是一个以 $\mathbb{C}\mathrm{P}^N=F(N,b)$ 为底空间的 Boothby-Wang丛，其横向 K¨ahler 度量具有常数全纯截面曲率 $4b=c+3$。

($c<-3$) $M(N,c)$ 与 $\mathbb{R}\times F(N,b)$ Sasaki 等价，其中横向 K¨ahler 结构是常全纯截面曲率为 $4b=c+3$ 的双曲复空间 $F(N,b)$ 的结构。具体而言，考虑到第二个因子的投影 $\pi\colon\mathbb{R}\times F(N,b)\longrightarrow F(N,b)$，并令 α 为 $F(N,b)$ 上的一个 1-形式，使得 $\mathrm{d}\alpha=\omega_{hyp}$。定义 $M(\infty,c)$ 的接触形式为 $\eta=\mathrm{d}t+\pi^*\alpha$，其 Reeb向量场为 ∂_t，其中 t 是第一个因子的坐标。端omorphismϕ 定义为 $F(N,b)$ 的复结构的水平提升。度量 g 由 $g=g^T+\eta\otimes\eta$ 给出，其中 g^T 是 $F(N,b)$ 上与 ω_{hyp} 相关的 Bergman 度量。

选择曲率为 $4b$ 而不是 b，源于这样一个事实：按照我们所采用的归一化方式，$\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ 上的 Fubini-Study形式具有恒定的截面全纯曲率 4。此外，在这一选择下，带有圆度量的球面 S^{2N+1} 是 Sasakian空间形式$M(N,1)$，并纤维化于复空间形式 $\mathbb{C}\mathrm{P}^N=F(N,1)$之上。

注意，每个单连通空间形式 $M(N,c)$ 都允许一个纤维化 $\pi\colon\ M(N,c)\ \to F(N,b)$，其底空间为一个具有 $4b=c+3$ 的复空间形式，且其纤维是 Reeb 叶状结构的叶。当 $c>-3$ 时，π 是一个主圆丛，而在另外两种情况下，该纤维化是平凡的。注意，在这两种情况下，复空间形式 $F(N,b)$ 的 Kähler 形式的任意原始形式 α 的任意选择，都会导出一个具有常数 ϕ-截面曲率的 Sasakian结构，并且该结构与我们所固定的 Sasakian结构 Sasaki 等价。

2.2. 关于非紧 Sasakian 流形的一些说明。我们以讨论非紧正则 Sasakian 流形的一些基本性质，特别是非紧齐性 Sasakian 流形的基本性质，来结束本节。这些流形是以齐性 K¨ahler 流形为底空间、以 $\mathbb{R}$ 或 S^1 为纤维的纤维丛，见 [3, Theorem 8.3.5]。设 M 为齐性 Sasakian 流形， X 为相应纤维丛的 K¨ahler 底空间。

首先，我们指出，当纤维为 $\mathbb{R}$ 时，该丛是平凡的。这是因为总空间 M 和底空间 X 都是可定向的，因此该丛也是可定向的。由于这是实线丛，可定向就意味着平凡。

现在我们要证明，如果底流形 X 是紧的，那么 Sasakian 流形 M 不可能是一个平凡丛的总空间。如果 M 是紧的，这可直接由结构定理得出。对于 M 非紧的情形，则由下述内容得出

引理 2.7. 设 X 是一个 K¨ahler 流形。乘积 $X \times \mathbb{R}$ 存在一种 Sasakian 结构，使 Reeb 轨道恰为平凡纤维化的纤维，当且仅当横向 K¨ahler 形式 ω 在 X 上是恰当的。

证明。记 $M = X \times \mathbb{R}$ 和 $\pi\colon\ X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$ 为到第一因子的投影。设 t 为第二因子的坐标。

首先，假设 $\omega = \mathrm{d}\alpha$ 是 X 上的一个恰当 K¨ahler 形式，且 g^T 是相应的度量。此外，设 t 是第二个因子的坐标。那么，形式 $\eta = \mathrm{d}t + \pi^*\alpha$ 是 M 上的一个接触形式，并定义了一个 Sasakian结构 $(\eta, \partial_t, g, \Phi)$，其中 $g = g^T + \eta \otimes \eta$，而 Φ 是 X 上复结构的水平提升。在这种情况下，到横向 K¨ahler 空间的投影就是上面的 π。

现在假设 M 具有 Sasakian结构 (η, R, g, Φ)，使得 Reeb 轨道是平凡纤维化的纤维。也就是说，经过 (x,t) 的 Reeb 轨道是 $\{x\}\times\mathbb{R}$，而上面的 π 恰好是到 Reeb 叶状结构叶空间的投影。于是，Reeb 向量场的流定义了第二个因子的坐标 $t\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow X \times \mathbb{R}$，从而 $R = \partial_t$。那么我们可以写成$\eta = \mathrm{d}t + \gamma$，其中 $\gamma(\partial_t) = 0$。此外，由于 $\iota_{\partial_t}\mathrm{d}\gamma = \iota_{\partial_t}\mathrm{d}\eta = 0$，形式 γ 是基本的，也就是说，$\gamma = \pi^*\alpha$，其中 α 是 X 上的某个 1-形式。因此， $\pi^*\omega = \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}\pi^*\alpha$ 是恰当的， ω 也如此。□

如果将 $\mathbb{R}$ 替换为 S^1，该结论同样成立。事实上， $X \times S^1$ 上的这种 Sasakian结构可以提升到 $X \times \mathbb{R}$。反之，如果 X 具有 K¨ahler 形式 $\omega = \mathrm{d}\alpha$，那么对于 S^1上的任意体积形式 β，接触形式 $\eta = \beta + \pi^*\alpha$ 在 $X \times S^1$上定义了一个 Sasakian结构。特别地，如果 X 是紧致的，那么引理 2.7 表明，不可能存在任何纤维化到 X上的 Sasakian结构，且其总空间为 $X \times \mathbb{R}$。显然，由于 $X \times S^1$ 是紧致的，定理 2.1 也给出了这一结论。为便于后文参考，我们将上述讨论专门应用于齐性流形。

命题 2.8. 设 M 是一个非紧的齐性 Sasakian 流形，则 M 是一个以非紧齐性 K¨ahler 流形 X为底空间的纤维化的全空间。此外，如果纤维是$\mathbb{R}$，那么 X 是可缩的。

证明。回顾一下，齐次Sasakian流形 M 是正则的，并纤维化到一个齐次 K¨ahler 流形 X 上，纤维为 $\mathbb{R}$ 或 S^1。如果底空间 X 是紧的，那么纤维必定是 $\mathbb{R}$，因为 M 是非紧的。由可定向性可知，该纤维化是平凡的，而引理 2.7意味着 X具有一个恰当的 K¨ahler 形式。由此可知，底空间 X 必定是非紧的。

此外，如果纤维是 $\mathbb{R}$，那么根据 M 和 X 的可定向性，再次可知丛是平凡的。于是，引理 2.7 再次表明， X 存在一个恰当的 K¨ahler 形式。因此， X 存在一个全局 K¨ahler 势函数，也就是说， X 是一个可缩流形，见 [16, 定理 1.2]。□

注意，关于纤维化的纤维的假设对于获得X的可缩性是必要的。例如，可以在乘积 $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \times \mathbb{C}\mathrm{H}^l$上的圆丛上构造一个齐次Sasakian结构。该论证表明，任何纤维化到一个没有紧致因子的齐次K¨ahler流形 X 上的齐次Sasakian流形，均具有上述所描述的结构 $X \times \mathbb{R}$。

3. Sasakian 空间形式中 Sasakian 浸入的延拓与唯一性

本节将一般性地讨论 Sasakian 流形浸入 Sasakian 空间形式的问题。给定两个 Sasakian 流形（M_1、η_1、R_1、g_1、ϕ_1）和（M_2、η_2、R_2、g_2、ϕ_2），M_1 到 M_2 的 Sasakian 浸入（嵌入）是指满足以下条件的浸入（嵌入）$\varphi\colon\ M_1 \longrightarrow M_2$

$$\varphi^*\eta_2 = \eta_1, \qquad \varphi^* g_2 = g_1,$$
$$\varphi_* R_1 = R_2 \quad \text{and} \quad \varphi_* \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \varphi_*.$$

我们可以用 Sasakian 流形 M_1 和 M_2的 K¨ahler 锥来重新表述这一定义。也就是说，满足上述条件的映射 φ 显然可以延拓为一个映射

$$\widetilde{\varphi}\colon M_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow M_2 \times \mathbb{R}$$
$$(p, t) \mapsto (\varphi(p), t).$$

显然，如果 φ 是一个 Sasakian 浸入（相应地，嵌入），那么 $\widetilde{\varphi}$ 就是一个 K¨ahler 浸入（相应地，嵌入）。

反之，若 Y_1 和 Y_2 分别是 M_1 和 M_2 的 K¨ahler 锥，其坐标分别为 t_1 和 t_2，则满足 $\widetilde{\varphi}^*(t_2) = t_1$ 的 K¨ahler 浸入（嵌入）$\widetilde{\varphi}\colon\ Y_1 \longrightarrow Y_2$ 限制为 Sasakian 浸入（嵌入）$\varphi\colon M_1 \longrightarrow M_2$。由于这对我们的目的通常更为有用，我们给出如下

定义 3.1（Sasakian 浸入与嵌入）。设 M_1 和 M_2 是两个 Sasakian 流形，其 K¨ahler 锥分别为 Y_1 和 Y_2，坐标分别为 t_1 和 t_2。从 M_1 到 M_2 的 Sasakian 浸入（分别地，嵌入）是一个 K¨ahler 浸入（分别地，嵌入）$\varphi\colon\ Y_1 \longrightarrow Y_2$，满足 $\varphi^*(t_2) = t_1$。

注 3.2。鉴于 Sasakian 浸入 $M_1 \longrightarrow M_2$ 与 K¨ahler 锥的 K¨ahler 浸入等价，为简便起见，我们通常用同一个字母表示这两个映射。

定理 1.1 的证明。我们将证明当 M 是纤维化于可缩 K¨ahler 流形 X上的平凡纤维化时，定理成立。然后，我们将此结果应用于 Darboux邻域，通过标准论证得到所需结论。

设 M 是一个 Sasakian 流形，使得 Reeb 叶状结构定义了一个到可缩 K¨ahler 流形 X 的映射，即 M 与 $X \times \mathbb{R}$ 微分同胚。首先，我们聚焦于 $c > -3$ 的情形。此时，K¨ahler 锥 $M \times \mathbb{R}^+$ 存在两个 K¨ahler 浸入 $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^+}$ 和 $\widetilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^+}$，它们映入 $S^{2N+2} \times \mathbb{R}^+ = \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$，因而也映入复空间形式 $\mathbb{C}^{N+1}$。因此，根据 Calabi刚性定理，存在一个 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上的刚性变换 F，使得 $\widetilde{\varphi}_1 = F \circ \widetilde{\varphi}_2$。由此可得结论，因为根据 $\widetilde{\varphi}_1$ 和 $\widetilde{\varphi}_2$ 的定义，F 必为酉变换。

现在我们可以假设 $c \leq -3$。回顾一下，在这种情况下，$M(N, c) = F(N, b) \times \mathbb{R}$，其中 $4b = c + 3$。由于 Sasakian 浸入将 Reeb叶映射到 Reeb叶，浸入 φ_1, φ_2 覆盖了两个

K¨ahler 浸入的定义使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} M = X \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi_i} & M(N,c) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\psi_i} & F(N,b) \end{array}$$

对于 $i = 1$，2。由于纤维化 π和 $\widetilde{\pi}$是平凡的，映射 φ_i具有如下形式： $\varphi_i(x,t) = (\psi_i(x)\ f_i(x,t))$，其中 $x \in X$，$f_i \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ 和 $i = 1$，2。现在，根据 Calabi刚性定理，存在一个作用于 $F(N,b)$ 的刚性变换 T，使得 $\psi_1 = T \circ \psi_2$。这可提升为刚性变换$\widetilde{}$ $\widetilde{}\hat{}T$: $M(N,c) \longrightarrow M(N,c)$，其定义为 $T(p,s) = (T(p)\ s)$。因此，我们得到浸入 $\hat{}\varphi_2 := \widetilde{}$ $\hat{}T \circ \varphi_2$: $M \longrightarrow M(N, c)$，定义为 $\hat{}\varphi_2(x,t) = (T \circ \psi_2(x)\ f_2(x,t)) = (\psi_1(x)\ f_2(x,t))$。

现在，浸入 φ_1和 φ_2均为 Sasakian，这一事实推出 $f_i(x,t) = t + a_i$ for $i = 1, 2$. Let $a = a_1 - a_2$，并记 T_a: $M(N,c) \longrightarrow M(N,c)$ 为平移 $T_a(p,s) = (p, s+a)$。那么，Sasakian 浸入 φ_1和 φ_2之间满足关系 $\varphi_1 = T \circ \varphi_2$，其中 T是由 $T = T_a \circ T$给出的刚性变换$\widetilde{}$。

注意，当浸入是满的，也就是说，其像不包含在 $M(N,c)$的全测地子流形中时，变换 T 是唯一的。这是由刚性变换 T的唯一性ˆ得出的，见定理 2.1.4]的证明。现在，设 M 是任意一个 Sasakian 流形， φ_1, φ_2是从 M到 Sasakian空间形式 $M(N,c)$的两个浸入。将靶空间限制在 $M(N,c)$的一个全测地子流形上后，可以假设 φ_1, φ_2都是满的。每个点 $p \in M$ 都有一个 Darboux邻域 U_p，可视为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开圆盘上的平凡萨萨基纤维化（其中 dim(M) $= 2n + 1$）。将 φ_1, φ_2限制在 U_p上，便得到从 U_p到 $M(N,c)$的 Sasakian 浸入；根据证明的第一部分，对某个唯一的刚性变换 T_p（属于 $M(N,c)$）有$\varphi_{1|U_p} = T_p \circ \varphi_{2|U_p}$。这定义了一个映射 $p \mapsto T_p$，将 M映到 $M(N,c)$的刚性变换群。由于该映射局部为常值且 M 连通，因此它是常值的。因此，存在唯一的 $M(N,c)$的 Sasakian 变换 T，使得 $\varphi_1 = T \circ \varphi_2$ 在全局成立。□

No利用定理 1.1，我们可以通过经典论证证明定理 1.2 ent

定理 1.2 的证明。对于每个 $p \in M$，考虑一个测地凸达布坐标图 $W_p \subset U_p$，使得集合 $\{W_p\}_{p \in M}$ 仍然是 M 的开覆盖。现在固定一点 $p_0 \in M$。对于任意一点 $p \in M$，存在一条路径 γ，从 p_0 到 p。由紧致性可知，存在有限个坐标图 W_{p_0}、.....、W_{p_k} 覆盖 γ 的像。此外，我们可以对这些 W_{p_i} 重新排序，使得对于所有 $i = 0$、.....、$k-1$，交集 $W_{p_i} \cap W_{p_{i+1}} \cap \gamma$ 都非空。记 W_{p_i} 与 γ 的交集为 γ_i。现在，集合 $W_{p_0} \cap W_{p_1}$ 有两个到 M 中的 Sasakian 浸入（N、c）。根据定理 1.1，存在唯一的 M（N、c）的 Sasakian 变换 T_1，使得其限制在 $W_{p_0} \cap W_{p_1}$ 上时满足 $T_1 \circ \varphi_{p_1} = \varphi_{p_0}$。因此，以 φ_{p_1} 替代 $T_1 \circ \varphi_{p_1}$，我们可以将 Sasakian 浸入延拓到 $\gamma_0 \cup \gamma_1$。重复这一过程有限次，我们便可将浸入延拓到整条路径 γ；又由于 M 是路径连通的，便可延拓到整个流形 M。此外，由于 M 是单连通的，这一延拓是良定义的。最后一个结论直接由定理 1.1 得出。□

4. 将齐性Sasakian流形 Sasakian 浸入到曲率 $c \leq -3$ 的 Sasakian 空间形式中

本节研究浸入到 Sasakian 空间形式中的情形，特别考虑齐次或更一般地局部齐性的 Sasakian 流形。这一研究受到 K¨ahler 几何中相应平行结果的启发。特别地，我们寻求以下结果的 Sasakian 类比。

定理 4.1（[6]）。设 (X, ω) 是一个复 n 维齐性 K¨ähler 流形，并假设 X 可 K¨ähler 嵌入到 $F(N, b)$ 中，且满足 $N \leq \infty$。

(1) If $b < 0$ then $X = F(n, b)$.

(2) If $b = 0$ then $X = F(k, 0) \times F(n_1, b_1) \times \cdots \times F(n_r, b_r)$ where $k + n_1 + \cdots + n_r = n$ and $b_i < 0$ for all $i = 1, \ldots, r$.

定理 4.1 对下面证明其 Sasakian 类比结果至关重要。

$\widetilde{\ }$定理 1.3 的证明。（1）假设 $c < -3$，并考虑万有覆盖 $\widetilde{\pi}$：$M \longrightarrow M$，其中 $\widetilde{\ }$ M。由于 M 完备且局部齐性，其万有覆盖 M 是一个齐性$\widetilde{\ }$Sasakian 流形。注意，在原像 $\widetilde{\pi}^{-1}(U)$ 中的任意点$\widetilde{\ }$处，M 都存在到 $M(N, c)$ 的局部 Sasakian 浸入。因此，由于其 Sasakian 变换群具有传递性，M 在任意一点处都存在嵌入。现在，根据定理 1.2，存在一个整体 Sasakian$\widetilde{\ }$浸入 $\widetilde{\varphi}$：$M \longrightarrow M(N, c)$。

回顾，(X, ω) 其$\widetilde{\ }$ $\widetilde{M}$ 是正则的，并且它是约齐性 K¨ähler 流形上的一个纤维化，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\varphi}$ 覆盖一个 K¨ähler 浸入 ψ：$X \longrightarrow F(N, b)$，其中 $4b = c + 3$。由定理 4.1 可知，X 与 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$复空间形式 $F(n, b)$ 双全纯等距，因此丛 $M \longrightarrow X$ 的纤维必为 $\mathbb{R}$，因为 X $\widetilde{\ }$是单连通的。由 $\widetilde{\varphi}$ 是 Sasakian 流形这一事实，我们得出丛 $\widetilde{\pi}$：$M \longrightarrow M$ $\widetilde{\ }$恰好是丛 $M(N, c) \longrightarrow F(N, b)$ 在 ψ 下的拉回。特别地，M 与 $M(n, c)$ Sasaki 等价。也就是说，我们得到以下交换图，其中水平映射是 K¨ähler 浸入或 Sasakian 浸入，垂直映射是标准纤维化。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} = M(n, c) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & M(N, c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{X} = F(n, b) & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & F(N, b) \end{array}$$

我们得出结论：M 与 $M(n, c)/\Gamma$ Sasaki 等价，其中 $\Gamma = \pi_1(M)$ 通过 Sasakian 变换作用。

(2) 在 $c = -3$ 类似于前一点所述情形的情况下，论证思路相同，因此我们只指出其中的差异。

在这种情况下，根据定理 4.1，齐性 K¨ähler 流形，其中 $k + n_1 + \cdots + n_r = n$ 且 $b_i < 0$，对所有 $i = 1, \ldots, r$ 均成立。$\widetilde{\ }$因此，流形 M 与其上的标准 Sasakian 流形 Sasaki 等价。换言之，M 是丛 $M(N, c) \longrightarrow F(N, b)$ 在浸入 ψ 下的拉回。也可以将 M 视为通过识别标准 Sasakian 流形在 F 各因子上的纤维而得到的 Sasakian 流形

~，也就是 Sasakian 空间形式 $M(k,-3)$ 和 $M(n_i,4b_i-3)$，其中$i=1,\dots,r$，由此得证。□

注 4.2. 在 $U=M$ 的情况下，浸入实际上具有非常明确的表达形式。这是因为 $\sim\ \ \sim M$ 与 $M(n,c)$ 在 Sasaki 等价意义下等价，并且浸入 $\widetilde{\varphi}$ 覆盖了 K¨ahler 浸入 $\psi\colon\ X\longrightarrow F(N,b)$，参见定理 1-2]。具体而言，在对 $M(N,c)$ 进行刚性变换后，当 $c<-3$ 时，浸入 $\widetilde{\varphi}$ 由 $M(n,c)$ 到 $M(N,c)$ 的 $=\mathbb{R}\times\mathbb{C}\mathbf{H}^n$ 到 $=\mathbb{R}\times\mathbb{C}\mathbf{H}^N$ 的线性嵌入给出。当 $c=-3$ 时，我们有 $M=\mathbb{R}\times F(k,0)\times F(n_1,b_1)\times\cdots\times F(n_r,b_r)$。在这种情况下，浸入由 $(f_0,f_1,\dots,f_r)$ 给出，其中 f_0 是前两个因子的线性嵌入，并且对于所有 $i=1,\dots,r$，

$$f_i(z_1,\dots,z_{n_i})=\frac{-1}{2\sqrt{b_i}}\left(\dots,\sqrt{\frac{(|j|-1)!}{j!}}z_1^{j_1}\cdots z_{n_i}^{j_{n_i}},\dots\right)$$

其中 $|j|=j_1+\cdots+j_{n_i}$和 $j!\ =j_1!\ \cdots j_{n_i}!$ 特别地，这意味着，如果在定理 1.3 的第 (2) 部分中 $N<\infty$和 $U=M$，那么只出现前两个因子，即 $M=M(n,-3)$。

注 4.3。根据 [3, 定理 8.3。5] M 与定理 1.3 中的一样是正则的，并且它是齐性 K¨ahler 流形 X 上的一个纤维化，其纤维或者是 $\mathbb{R}$，或者是 S^1。X 的万有覆盖恰好是~定理 1.3 的证明中的流形 X。当丛 $M\longrightarrow X$ 的纤维为 $\mathbb{R}$时，群 Γ 是横截 K¨ahler 变换群，因为它恰好是$\sim X=X/\Gamma$的基本群。若纤维为 S^1，则 Γ 是群 $\pi_1(X)$ 的中心 $\mathbb{Z}$-扩张；该群由 X的 K¨ahler~等距变换组成。特别地，当 $c=-3$时，我们有

$$X=\frac{F(k,0)}{\Delta}\times\frac{F(n_1,b_1)}{\Gamma_1}\times\cdots\times\frac{F(n_r,b_r)}{\Gamma_r}$$

其中，Δ（分别地，Γ_i）是作用于 F（$k,0$）（分别地，F（$n_i,\ b_i$））的 Kähler 变换离散群，对所有 i 均成立。也就是说，π_1（X）分解为直积 $\Delta\times\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_r$。

5. 正则且完备 Sasakian 流形到球面的 CR 浸入

在本文余下部分，我们将研究齐性 Sasakian 流形嵌入或浸入标准Sasakian球面的存在性充分条件。在我们考虑的所有情形中，这类嵌入都通过同一种一般方法获得。具体来说，我们利用 Reeb 叶状结构的叶空间（即一个 K¨ahler 流形）的代数几何，构造到标准 Sasakian球面的嵌入。本节旨在介绍紧致和非紧正则 Sasakian 流形的此类 CR 嵌入；无论从哪个方面看，它们都是 Kodaira 嵌入在 Sasakian 几何中的对应物。请注意，文献 [20] 也研究过 Sasakian 流形到球面的 CR 嵌入。不过，这里我们讨论的是诱导结构的显式表达。

设 M 是一个紧致正则 Sasaki 流形。根据结构定理，M 是一个 (1)-主丛 $\pi\colon\ M\longrightarrow X$，其底空间是紧致 Kähler 流形 (X,ω)，且 $2\pi^*\omega=\mathrm{d}\eta$。此外，$M$ 是与线丛 L^{-1} 相关联的酉丛，其中 $c_1(L)\ =[\omega]$。最后这个条件意味着 L 是充足的。换言之，(X,L) 是一个极化 Kähler 流形。因此，当 $k\in\mathbb{N}$ 足够大时，丛 $L^{\otimes k}=L^k$ 是非常丰沛的，于是我们可以定义 Kodaira 嵌入 $\psi_k\colon\ X\longrightarrow\mathbb{C}\mathbf{P}^{N_k}$，其中 $\dim(H^0(L))\ =N_k+1$。

我们希望构造一个 CR 嵌入 $\varphi_k\colon\ M\longrightarrow S^{2N_k+1}$，将 M 嵌入覆盖 Kodaira 嵌入 ψ_k的标准球面中。等价地，根据定义 3.1，我们可以构造一个全纯

φ_k 的嵌入：K¨ahler 锥 $Y = M \times \mathbb{R}^+$ 到 K¨ahler 锥$S^{2N_k+1} \times \mathbb{R}^+$的 $Y \longrightarrow \mathbb{C}^{N_k+1} \setminus \{0\}$ 。

设 h 是 L 上的厄米度量，其 Ricci 曲率形式为 ω，并且 L^{-1} 上的对偶度量h^{-1} 按照式 (2) 在 $M \times \mathbb{R}^+ = L^{-1} \setminus \{0\}$ 上诱导坐标。这分别在丛 L^k 和 $L^{-k} = (L^*)^k$ 上诱导度量h^k 和 h^{-k} 。选取截面空间 $H^0(L^k)$的一组标准正交基 $(s_0, \ldots, s_{N_k})$，其中标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ 定义为

$$\langle s, t \rangle_k = \int_X h^k \left(s(x), t(x) \right) \frac{\omega^n}{n!} \tag{6}$$

其中 s、$t \in H^0$（L^k）。固定一个开集 $U \subset X$ 和一个局部平凡化 σ： $U \longrightarrow L^k$，从而对于全纯函数 f_j： $U \longrightarrow \mathbb{C}$，我们有 $s_j = f_j \sigma$ 。然后，Kodaira 嵌入局部表示为

$$\begin{aligned} \psi_{k|_U} : U &\longrightarrow \quad \mathbb{C}\mathrm{P}^{N_k} \\ x &\mapsto \left[\frac{s_0(x)}{\sigma(x)} : \cdots : \frac{s_{N_k}(x)}{\sigma(x)} \right]. \end{aligned}$$

我们有 $\psi_k^* \mathcal{O}(1) = L^k$，也就是说， L^{-k} 是典范线丛 $\mathcal{O}(-1)$ 在 $\psi_k(X)$ 上的限制。现在， σ 定义了 L^{-k} 在 U 上的一个平凡化，因此，对于 $x \in U$，向量 $v \in L_x^{-k}$ 可以表示为 $\sim \alpha_v = v(\sigma(x))$，其中 $\alpha_v \in \mathbb{C}$。记 ψ_k 为由 Kodaira 嵌入诱导的全纯嵌入 $L^{-k} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{N_k+1} \setminus \{0\}$ 。由恒等式 $\alpha_v = v(\sigma)$ 和 $s_j = \sigma f_j$，可得 ψ_k 的如下局部表达式 ~。

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \quad \mathbb{C}^{N_k+1} \setminus \{0\} \\ (x, \alpha_v) &\mapsto (\alpha_v f_0(x), \ldots, \alpha_v f_N(x)) = (v(s_0(x)), \ldots, v(s_N(x))) \,. \end{aligned}$$

回顾一下，取 k 次幂定义了一个全纯 k 重覆盖 p_k： $L^{-1} \setminus \{0\} \longrightarrow L^{-k} \setminus \{0\}$。因此，我们可以定义一个全纯浸入

$$\varphi_k = \widetilde{\psi}_k \circ p_k : L^{-1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{N_k+1} \setminus \{0\} = \mathcal{O}(-1) \setminus \{0\}. \tag{7}$$

该嵌入的无坐标描述如下

$$\begin{aligned} \varphi_k : L^{-1} &\longrightarrow \; H^0(L)^* \\ v \; &\mapsto \left(s \mapsto \frac{v(s)}{|s|} \right) \end{aligned}$$

其中，范数 $|s|$ 由式 (6) 诱导。此外，通过 φ_k 拉回的 $\mathcal{O}(-1)$ 上的 Fubini-Study 厄米度量 h_{FS}^{-1} 计算如下

$$\begin{aligned} \varphi_k^*(h_{FS}^{-1})_x(w, w) &= \sum_{j=0}^{N_k} \left| \alpha_{w^k} f_j(x) \right|^2 = \sum_{j=0}^{N_k} \left| w^k(s_j(x)) \right|^2 = \sum_{j=0}^{N_k} h^{-1}(w^k, w^k) h^k \left(s_j(x), s_j(x) \right) \\ &= h^{-k}(w, w) \sum_{j=0}^{N_k} h^k \left(s_j(x), s_j(x) \right) = B_k(x) h^{-k}(w, w) \end{aligned}$$

其中 $B_k(x) = \sum_{j=0}^{N_k} h^k(s_j(x)\ s_j(x))$ 是 (X, L^k) 的 Bergman 核， $w \in L^{-1} \setminus \{0\}$ 且$p_k(w) = w^k \in L^{-k}$。我们将上述讨论总结如下

命题 5.1. 设 M 是由紧致射影流形 X 上的 Hermitian丛 (L,h) 确定的紧致正则 Sasaki 流形。对于每个整数 $k >> 0$，存在一个全纯嵌入 $\varphi_k\colon M\times\mathbb{R}^+\longrightarrow S^{2N_k+1}\times\mathbb{R}^+$，使得 $\varphi_k^*(\tau)=B_kt^k$，其中 B_k 是 L^k 的 Bergman 核，τ 和 t 分别是 $S^{2N_k+1}\times\mathbb{R}^+$ 第二因子上的坐标和$M\times\mathbb{R}^+$。

当 Sasakian 流形 M 是非紧 K¨ahler 流形 (X,ω) 上正 Hermitian 丛 (L,h) 所关联的酉丛，且$\omega=-i\partial\overline{\partial}\log h$时，也可以进行相同的构造。由于构造过程类似，我们只强调必要的调整；有关 K¨ahler 情形的详情，见 [22]。首先，我们必须将向量空间 $H^0(L^k)$ 替换为 L^k 的有限范数全纯截面所构成的希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_{k,h}=\{s\in\mathrm{Hol}(L)\mid\langle s,s\rangle_k<\infty\}. \tag{8}$$

现在，只有假设 ε-函数

$$\varepsilon_k(x)=\sum_{j=0}^{N}h^k\left(s_j(x),s_j(x)\right) \tag{9}$$

of $\mathcal{H}_{k,\ h}$ with $N\leq\infty$ 是严格正函数时，构造才有意义。在此假设下，映射 φ_k 有良好定义，但目标空间通常是 $\ell^2(\mathbb{C})\setminus\{0\}$，因为截面空间不一定是有限维的。鉴于此，该映射现在只是一个全纯浸入，而函数 B_k 则由 ε-函数 ε_k取代。我们将非紧情形的讨论总结如下

命题5.2. 设 M 为由非紧 K¨ahler 流形 X 上的 Hermitian丛(L,h)确定的正则 Sasakian 流形，并假设空间$\mathcal{H}_{k,h}$ 是非平凡的。那么存在一个全纯浸入 $\varphi_k\colon M\times\mathbb{R}^+\longrightarrow S^\infty\times\mathbb{R}^+$，使得 $\varphi_k^*(\tau)=\varepsilon_kt^k$，其中 ε_k 是$\mathcal{H}_{k,h}$的 ε函数，τ和 t 分别是 $S^\infty\times\mathbb{R}^+$ 和 $M\times\mathbb{R}^+$第二因子上的坐标。

注5.3。虽然 $\varphi_k^*(h_{FS}^{-1})$ 不是线丛 L^{-1} 上的厄米度量（它在 $\mathbb{C}^*$-作用下的缩放方式不正确），但它定义了 $M\times\mathbb{R}^+$ 上的一个坐标变换 $(p,t)\mapsto(p,B_kt^k)$（紧情形下为 $(p,t)\mapsto(p,\varepsilon_kt^k)$），对应于$\mathcal{D}_k$-齐次变换与横向 K¨ahler 变形的复合。

6. 齐性 Sasakian 流形到 $c>-3$ Sasakian 空间形式的 Sasakian 浸入

鉴于上一节的讨论，我们现在可以刻画齐性 Sasakian 流形到球面中的嵌入。

定理 1.4 的证明。设 M 是一个紧致齐性 Sasakian 流形。那么 M 是与广义旗流形 (X,ω) 上的全纯线丛 $\pi\colon L^{-1}\longrightarrow X$ 相关联的单位丛的全空间。经过可能的 $\mathcal{D}$-齐次变换后，我们可以假设 $2\pi^*\omega=\mathrm{d}\eta$ 是 $\mathcal{D}$ 上的横向 K¨ahler 结构，使得 $c_1(L)=[\omega]$，其中 L 是 L^{-1} 的对偶。特别地，L 是广义旗流形上的充足线丛，因此是非常丰沛的。于是，选择 L 上的厄米度量 h，使其 Ricci 曲率形式为 ω，且其对偶度量 h^{-1} 在 L^{-1} 上诱导出 $M\times\mathbb{R}^+$ 上的坐标，我们便可对 $k=1$ 应用命题 5.1。特别地，我们得到一个全纯嵌入 $\varphi=\varphi_1\colon M\times\mathbb{R}^+\longrightarrow S^{2N+1}\times\mathbb{R}^+$，使得 $\varphi^*(\tau)=Bt$，其中 B 是 L 的 Bergman 核，τ 和 t 是 $S^{2N+1}\times\mathbb{R}^+$ 第二个因子上的坐标，并且

$M \times \mathbb{R}^+$ 分别。此外，由于 (X, ω) 是一个广义旗流形，Bergman 核B 是一个正的常数，见 [1, 定理 4.3]。

现在，为了得到一个等距映射，即使 $\varphi^*(\tau) = t$，只需相对于 $H^0(L)$ 的一个缩放正交基定义映射 φ。具体而言，我们通过令 $\widetilde{s}_j = \frac{s_j}{\sqrt{B}}$（其中 $j = 0$，……，N），考虑 $H^0(L)$ 的一个新正交基 $(\widetilde{s}_0, \ldots, \widetilde{s}_N)$。可以直接计算 $\mathcal{O}(-1) = \mathbb{C}^{2N+1}$ 上 Fubini-Study 度量 h_{FS}^{-1} 的拉回为

$$\varphi^*(h_{FS}^{-1}) = \sum_{j=0}^{N} \left| \alpha_v \widetilde{f}_j(x) \right|^2 = \sum_{j=0}^{N} |v(\widetilde{s}_j(x))|^2 = \frac{1}{B} \sum_{j=0}^{N} h^{-1}(v,v) h\left(s_j(x), s_j(x)\right)$$
$$= h^{-1}(v,v) \frac{\sum_{j=0}^{N} h\left(s_j(x), s_j(x)\right)}{B} = h^{-1}$$

这里我们使用了第5节中的记号。

因此，我们构造了 M 的 K¨ahler 锥到标准 Sasakian 球面的 K¨ahler 锥 $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ 的一个 K¨ahler 嵌入 $\varphi\colon M \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow S^{2N+1} \times \mathbb{R}^+$。也就是说，这是一个将 M 嵌入 S^{2N+1} 的 Sasakian 嵌入。

最后，设 φ_1、φ_2 是 $M \times \mathbb{R}^+$ 到 $\mathbb{C}^{N+1}$ 的两个 K¨ähler 嵌入，使得 $\varphi_1^*(\tau) = \varphi_2^*(\tau) = t$，其中 τ 是 $\mathbb{C}^{N+1}$ 的欧几里得范数。根据 Calabi 刚性定理，存在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 的刚性变换 T，使得 $\varphi_1 = T \circ \varphi_2$。此外，$T$ 是酉的，因为 $\varphi_1^*(\tau) = \varphi_2^*(\tau) = t$。由此可知，嵌入 φ 在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 的酉变换意义下唯一。□

注 6.1. 紧致齐性 Sasakian 流形 M 在任何其他 Sasakian空间形式 $M(n, c)$ 中都不能在一点处存在浸入，其中 $c \leq -3$。这是因为，当 $b \leq 0$ 时，M 所纤维化其上的广义旗流形 X 不能（局部）浸入 $F(N, b)$。

现在我们可以聚焦于无限维情形，并对能够浸入 S^∞ 的齐次Sasakian流形进行分类。

定理 1.5 的证明。首先证明，能够浸入 S^∞ 的（不一定紧致的）齐次Sasakian流形 M 的基本群是循环群。这样的流形 M 以齐次 K¨ähler 流形 X 为底空间进行纤维化，其纤维为 $\mathbb{R}$ 或 S^1。此外，Sasakian 浸入 $M \longrightarrow S^\infty$ 诱导出一个 K¨ähler 浸入 $X \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$。因此，根据 [6, 定理 3] 及纤维化的长正合列，X 是单连通的，从而得出所需结论。

反过来，设 M 是一个基本群为循环群的齐次Sasakian流形。若 M 紧致，则结论直接由定理 1.4 得出。因此，我们可以将讨论限制在 M 非紧的情形。根据命题 2.8，M 以一个非紧齐次 K¨ähler 流形 (X, ω) 为底空间进行纤维化。根据 Dorfmeister 和 Nakajima 的经典结果，[7], 这样的流形 X 是一个复积（但不一定是 K¨ähler 积）$\mathbb{C}^d \times T \times F \times \Omega$，其中 T 是复环面，F 是广义旗流形，而 Ω 是齐次有界域。由纤维化的长正合列可推得，因子 T 不可能出现，因为 $\pi_1(X) = \pi_1(T)$ 必须是循环群 $\pi_1(M)$ 的商。因此，X 是单连通的。

我们先讨论丛的纤维为 S^1 的情形，稍后再处理纤维为 $\mathbb{R}$的情形。尽管 M 是非紧的，M 上的Sasakian结构是正则的，且纤维为 S^1，因此与紧情形类似，M 是线丛 $\pi\colon L^{-1} \longrightarrow X$ 的单位丛。此外，经过可能的 $\mathcal{D}$-伸缩后，我们可以假设 $2\pi^*\omega = \mathrm{d}\eta$ 是 $\mathcal{D}$ 上的横向K¨ahler结构，使得 $c_1(L) = [\omega]$，其中 L 是 L^{-1}的对偶。选取 L 上的厄米度量 h，其Ricci 曲率形式为 ω。现在存在一个

适当的实数 $k>0$，使得第5节中定义的空间$\mathcal{H}_{k,\ h}$是非平凡的，见 [24]。此外，$\mathcal{H}_{k,\ h}\neq\{0\}$ 当且仅当其 ε-函数 ε_k 实际上是一个正的常数时成立，参见引理2.2]。因此，对于这样的 k，命题5.2的假设均得到满足。于是我们得到一个全纯浸入 φ_k：$M\times\mathbb{R}^+\longrightarrow S^\infty\times\mathbb{R}^+$，使得 $\varphi_k^*(\tau)=\varepsilon_k t^k$，其中 ε_k 是常数，τ 和 t 分别是 $S^\infty\times\mathbb{R}^+$ 和 $M\times\mathbb{R}^+$ 第二因子上的坐标。与定理 1.4的证明类似，通过重新缩放构造浸入 φ_k时所用的正交基，我们可以修改该浸入，使得 $\varphi_k^*(\tau)=t^k$。现在回想一下，将 t 替换为 t^k 等价于进行 $\mathcal{D}_k$-伸缩（参见注5.3和定义2.2），由此我们证明了纤维为 S^1时的结论。

现在只剩下纤维化 $M\longrightarrow X$ 的纤维为 $\mathbb{R}$ 的情形。根据命题 2.8，M 纤维化在一个可缩的齐性 K¨ahler 流形 (X,ω) 上，即 $M=X\times\mathbb{R}$。此外，X 是一个齐性 K¨ahler 流形，其基本群为循环群，因而是平凡群。注意，$\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ 通过 Reeb向量场的流以 Sasakian 等距变换作用于 $X\times\mathbb{R}$。商空间是 Sasakian 流形 $N=X\times S^1$，万有覆盖映射 $\widetilde{\pi}\colon M\longrightarrow N$ 是一个 Sasakian 浸入（它就是第二个因子上的指数映射）。现在，N 是一个 Sasakian 流形，纤维化在单连通齐性 K¨ahler 流形 X 上。根据前一种情形，存在一个合适的 $\mathcal{D}$-齐次变换，使得 N 到 S^∞ 的 Sasakian 浸入为 $\varphi\colon N\longrightarrow S^\infty$。在 $\widetilde{\pi}$ 下将这一结构拉回到 M 上，所得结构是我们最初齐性结构的一个 $\mathcal{D}$-齐次变换。最后，复合映射 $\widetilde{\pi}\circ\varphi\colon M\longrightarrow S^\infty$ 是一个 Sasakian 浸入，将（赋予这种 $\mathcal{D}$-齐次结构的）M 浸入 S^∞。□

注 6.2. 关于 $\mathcal{D}$-齐次变换的假设是必要的，因为存在一些单连通齐次 Sasakian 流形，除非进行横向齐次变换，否则无法浸入 S^∞。一个这样的例子是定义在 $M=\Omega\times\mathbb{R}$ 上的齐次 Sasakian 结构，其中横向 K¨ahler 结构由有界对称域 Ω 上 Bergman 度量的适当倍数给出。事实上，Sasakian 浸入 $M\longrightarrow S^\infty$涵盖了一个 K¨ahler 浸入 $\Omega\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$，而该浸入存在当且仅当 $c\gamma$ 属于 Ω 的 Wallach集（见 [17, 定理 2]），其中 γ 表示 Ω 的属。因此，任何有界对称域 Ω（除 $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$外）以及足够小的 c 都能提供这样的例子。

注 6.3. 能够浸入 S^{2N+1}且满足 $N<\infty$ 的齐次 Sasakian 流形 M必定是紧的。事实上，它纤维化在一个齐次 K¨ahler 流形 X之上，而该流形能够浸入 $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$。根据 [25] X，它必定是紧的，而$M\longrightarrow X$ 的纤维必定是 S^1。这意味着，定理 1.5 中的浸入是满的，即其像不包含在某个真全测地子流形中，当且仅当流形 M 是非紧的。若去掉齐性假设，即使度量完备且 $N<\infty$，这一结论也不再成立。下例给出了这样一种浸入。

例 6.4. 设 $T\subset\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个复二维阿贝尔簇，并选取 $\mathbb{C}$ 的一个副本，使其在 T 中稠密。将 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的 Fubini-Study 度量分别限制到 T 和 $\mathbb{C}$ 上，并分别记为 g_T 和 g。因此，$(\mathbb{C},g)$ 是一个等距浸入 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的非紧 K¨ahler 流形。现在，Hopf 丛 $S^{2n+1}\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 限制为一个圆丛 $M\longrightarrow\mathbb{C}$。流形 M 是一个非紧正则 Sasakian 流形，它可注入地 Sasakian 浸入 S^{2n+1}，因此 S^∞。此外，M 上的 Sasakian 度量是完备的，因为 $\mathbb{C}$ 上的 K¨ahler 度量 g 是完备的。事实上，由于紧致性，K¨ahler 度量 g_T 满足 $ag_0<g_T<bg_0$，其中 g_0 是平坦度量，a、b 是适当的常数。因此，同样的不等式在 $\mathbb{C}$ 上也成立，即 $ag_0<g<bg_0$，从而迫使 g 完备。

参考文献

1. Claudio Arezzo 和 Andrea Loi，《动量映射、标量曲率与 K¨ahler 流形的量子化》，《数学物理通讯》246 (2004)，第 3 期，543–559。MR 2053943 2. Gianluca Bande、Beniamino Cappelletti-Montano 和 Andrea Loi， η-爱因斯坦萨斯基浸入非紧萨斯基空间形式，《纯粹与应用数学年刊》(4) 199 (2020)，第 6 期，2117–2124。MR 4165673 3. Charles P. Boyer 和 Krzysztof Galicki，《Sasakian 几何》，牛津数学专著丛书，牛津大学出版社，牛津，2008。MR 2382957 4. Eugenio Calabi，复流形的等距嵌入，《数学年刊》(2) 58 (1953)，1–23。MR 57000 5. Beniamino Cappelletti-Montano 和 Andrea Loi，球面中的爱因斯坦和 η-爱因斯坦萨斯基子流形，《纯粹与应用数学年刊》(4) 198 (2019)，第 6 期，2195–2205。MR 4031847 6. Antonio Jose Di Scala、Hideyuki Ishi 和 Andrea Loi，齐性 K¨ahler 流形到复空间形式中的 K¨ahler 浸入，《亚洲数学杂志》16 (2012)，第 3 期，479–487。MR 2989231 7. Josef Dorfmeister 和 Kazufumi Nakajima，齐性 K¨ahler 流形的基本猜想，《数学学报》161 (1988)，第 1–2 期，23–70。MR 962095 8. Mark L. Green，全纯映射到 K¨ahler 流形的度量刚性，《微分几何杂志》13 (1978)，第 2 期，279–286。MR 540947 9. Minoru Harada，浸入 Sasakian 空间形式的 Sasakian 空间形式，《东京学艺大学学报》(4) 24 (1972)，7–11。MR 322745 10. ，论萨斯基子流形，《东北数学杂志》(2) 25 (1973)，103–109。MR 324590 11. ，论萨斯基子流形 II，《东京学~~艺大学~~学报》(4) 25 (1973)，19–23。MR 324591 12. ，关于浸入 Sasakian 空间形式的某些萨斯基子流形，《东京学艺大学学报》(4) 27 (1975)，35–39。MR 388277 13. Katsuei Kenmotsu，Sasakian 流形中的不变子流形，《东北数学杂志》(2) 21 (1969)，495–500。MR 259806 14. Masahiro Kon，正规接触度量流形的不变子流形，《K¯odai 数学研讨会报告》25 (1973)，330–336。MR 324581 15. ，Sasakian 流形中的不变子流形，《数学年刊》219 (1976)，第 3 期，277–290。MR 425844 16. Andrea Loi 和 Roberto Mossa，关于齐性 K¨ahler 流形的一些评述，《奉献几何学》179 (2015)，377–383。MR 3424675 17. Andrea Loi 和 Michela Zedda，无限维射影空间中的 K¨ahler-爱因斯坦子流形，《数学年刊》350 (2011)，第 1 期，145–154。MR 2785765 18. ，K¨ahler 流形到复空间形式中的 K¨ahler 浸入，《意大利数学联盟讲义》，第 23 卷，施普林格，沙姆；意大利数学联盟，[博洛尼亚], 2018。MR 3838438 19. Masafumi Okumura，论接触度量浸入，《K¯odai 数学研讨会报告》20 (1968)，389–409。MR 264564 20. Liviu Ornea 和 Misha Verbitsky，紧致 Sasakian 流形的嵌入，《数学研究快报》14 (2007)，第 4 期，703–710。MR 2335996 21. G. Placini，Sasakian-Ricci 孤立子到 Sasakian 空间形式中的 Sasakian 浸入，《几何与物理杂志》166 (2021)，论文编号 104265，7 页。MR 4249127 22. J. H. Rawnsley，相干态与 K¨ahler 流形，《牛津数学季刊》(2) 28 (1977)，第 112 期，403–415。MR 466649 23. Bruce L. Reinhart，带有丛型度量的叶状流形，《数学年刊》(2) 69 (1959)，119–132。MR 107279 24. Jonathan Rosenberg 和 Mich`ele Vergne，可解李群的调和诱导表示，《泛函分析杂志》62 (1985)，第 1 期，8–37。MR 790768 25. Masaru Takeuchi，复射影空间中的齐性 K¨ahler 子流形，《日本数学杂志》(新系列) 4 (1978)，第 1 期，171–219。MR 528871 26. Shˆukichi Tanno，具有恒定 ϕ-全纯截面曲率的 Sasakian 流形，《东北数学杂志》(2) 21 (1969)，501–507。MR 251667

卡利亚里大学数学与计算机科学系，意大利卡利亚里市医院街 72 号，邮编 09124 电子邮箱：loi@unica.it 卡利亚里大学数学与计算机科学系，意大利卡利亚里市医院街 72 号，邮编 09124 电子邮箱：giovanni.placini@unica.it 帕尔马大学数学、物理与计算机科学系，意大利帕尔马 电子邮箱：michela.zedda@unipr.it