arXiv:2305.05530v1 [math.FA] 8 May 2023

Jordan–Banach代数中的李–特罗特公式及其在研究谱值乘法泛函中的应用

GERARDO M. ESCOLANO、ANTONIO M. PERALTA 和 ARMANDO R. VILLENA

摘要。我们建立了含幺复 Jordan–Banach 代数中的一些李–特罗特公式，并证明对于含幺复 Jordan–Banach 代数中的任意一对元素 a,b， $\mathfrak{A}$恒等式

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{a}{n}}\circ e^{\frac{b}{n}}\right)^n = e^{a+b},\ \lim_{n\to\infty}\left(U_{e^{\frac{a}{n}}}\left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = e^{2a+b},\ \text{and}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(U_{e^{\frac{a}{n}},e^{\frac{c}{n}}}\left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = e^{a+b+c}$$

成立。这些公式实际上是从一个涉及取值于 $\mathfrak{A}$ 的全纯函数的更一般结果推导出来的。这些公式被用于研究谱值（不一定是线性的）泛函 $f:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，该泛函满足 $f(U_x(y)) = U_{f(x)}f(y)$，对所有 $x,y\in\mathfrak{A}$ 均成立。我们证明，对于任何这样的泛函 f，都存在唯一的连续（Jordan）乘法线性泛函 $\psi:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，使得对于 $\mathfrak{A}$ 中包含单位元的全体可逆元之集的连通分支中的每个 x，均有 $f(x) = \psi(x)$。如果进一步假设 $\mathfrak{A}$ 是一个 JB*-代数且 f 连续，那么 f 是 $\mathfrak{A}$ 上的线性乘法泛函。这些新结论是 Maouche、Brits、Mabrouk、Shulz 和 Touré 所得结果的恰当 Jordan 版本。

1. 引言

当前的泛函分析研究，尤其是关于保持映射的研究，特别关注这样一个问题：在经典结果中，能否在假设保持另一种代数或几何性质的前提下，以某种方式去除传统的线性条件？著名的 Gleason-Kahane-Zelazko 定理便是一个例子。该定理断言，对于一个（结合的）复巴拿赫代数 $\phi: A\to\mathbb{C}$, 其中 A 是一个（结合的）复巴拿赫代数，非零线性泛函是乘法泛函，当且仅当它是谱值的，也就是说，$\phi(a)$ 属于 a 的谱， $\sigma(a)$，在 A 中（见 [3, 定理 4.1。1]）。下述关于保持映射的自然问题，正是由上述定理直接引出的。

问题1.1. 设 $f: A\to\mathbb{C}$ 是一个来自（含幺）复巴拿赫代数的乘法泛函。假设对每个 $x\in A$，$f(x)$ 都属于 x 的谱。问：f 是 A 上的乘法线性泛函吗?

Maouche 在其开创性著作 [18], 中研究了这一问题，并证明了以下结果：

2010年数学主题分类。主要分类46L05；46L10；46H05。关键词和短语：Lie–Trotter 公式；巴拿赫代数；Jordan–Banach代数；谱；乘法泛函；Gleason-Kahane-˙Zelazko定理；Kowalski–Słodkowski定理；保持映射。1

定理 1.2。 [18] 设 A 是一个含幺复 Banach 代数，且 $f : A \to \mathbb{C}$ 是一个（不一定连续的）乘法谱值泛函。那么，存在唯一的乘法线性泛函 ψ定义在 A 上，并且在 A 的所有可逆元构成的群中单位元所在的连通分支上与 f 一致。

前一定理的结论是最优的，因为 f 通常不必是线性的 [18, 例子]。在 Maouche 作出贡献后，问题 1.1 已在交换含幺 C*-代数中由 Touré 和 Brits 找到肯定的解 [22], 在冯·诺依曼代数中由 Touré、Shulz 和 Brits 找到肯定的解 [23], 并在含幺 C*-代数中由 Brits、Mabrouk 和 Touré 找到肯定的解 [6]。本文的主要目标是探讨问题 1.1 在含幺复 Jordan–Banach 代数中的情形。然而，为了理解这一问题在 Jordan 框架下的恰当形式，我们将回顾本研究中发展出的一些基本概念和其他工具。

在上述文献中为解决该问题而展开的论证包含两个关键结果，即 Lie–Trotter 公式和 Kowalski–Słodkowski 定理（关于后一个定理的更多细节，见第 3节）。

所谓的 Lie–Trotter 公式是算子理论中的一项著名结果，它断言，对于结合复 Banach 代数 A 中任意给定的元素 a 、 b，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{a}{n}} e^{\frac{b}{n}}\right)^n = e^{a+b}, \tag{1.1}$$

其中我们记e^x 为元素 x 在 A中的通常指数函数（例如，参见 [3,练习 15，第 67], [10, 定理 2。10]）。即使对于不交换的元素对，Lie–Trotter 公式也成立。这一结果在量子理论中的应用可参见 [21, 8, 11]。例如，可以通过 Lie–Trotter 公式得到费曼–卡茨公式 [2,§6.3。1]。

实数或复数Jordan–Banach代数是一个赋备空间 $\mathfrak{A}$ ，其上配备一个双线性映射 $(a,b) \mapsto a \circ b$（称为Jordan积），并满足以下公理：

(J1) $\|a \circ b\| \leq \|a\| \|b\|$，对于所有 a、b $\in \mathfrak{A}$；(J2) $a \circ b = b \circ a$，对于所有 a、b $\in \mathfrak{A}$（交换律）；(J3) $(a^2 \circ b) \circ a = (a \circ b) \circ a^2$, 对于所有 a、b $\in \mathfrak{A}$（Jordan 恒等式）。

请注意，乘积的结合性已由 Jordan 恒等式取代。在本文中，我们只考虑复 Jordan–Banach 代数。若存在元素 $\mathbf{1} \in \mathfrak{A}$ （称为 $\mathfrak{A}$ 的单位元），使得对所有 a $\in \mathfrak{A}$ 都有 $\mathbf{1} \circ a = a$，我们就称 $\mathfrak{A}$ 为含幺的。若不理解如下定义的 U 映射，就很难透彻理解 Jordan 代数。给定元素 a $\in \mathfrak{A}$ ，符号 U_a 表示 $\mathfrak{A}$ 上由 $U_a(b) := 2(a \circ b) \circ a - a^2 \circ b$ 定义的线性映射，其中对每个 b $\in \mathfrak{A}$。

一个自然的例子可以从任意赋有自然Jordan积的结合的巴拿赫代数 A 导出，该Jordan积定义为 $\circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$。巴拿赫代数的Jordan–Banach子代数称为特殊子代数。每个 C*-代数的厄米部分都是实Jordan–Banach子代数，但不是结合的子代数。尽管本文从纯数学的角度研究Jordan–Banach代数，但我们注意到，Jordan代数的引入旨在为公理化量子力学提供一个合适的框架，这一目标由 P. Jordan、J. von Neumann 和 E. Wigner[13] 提出。

鉴于复 Jordan–Banach代数 $\mathfrak{A}$ 中由单个元素 a（及单位元）生成的闭 Jordan子代数 $\mathfrak{A}_a$ 是一个结合的

交换复Banach代数，通常的全纯函数演算可以非常自然地应用于复 Jordan–Banach代数的情形（参见 [4, §2，定理 2.3] 以及 [7, 定理 4.1.88 和 4.1.93]）。含幺 Jordan–Banach代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素 a 称为可逆元，如果存在 $b \in \mathfrak{A}$，使得 $a \circ b = \mathbf{1}$ 且 $a^2 \circ b = a$。元素 b 是唯一的，记作 a^{-1}（参见 [12,3.2.9] 或 [7, 定义 4.1.2]）。符号 $\mathfrak{A}^{-1}$ 表示 $\mathfrak{A}$中所有可逆元构成的集合。掌握这些基本概念后，很容易看出，我们可以通过全纯函数演算或幂级数 $e^a = \exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n / n!$ 来定义 $\mathfrak{A}$ 中每个元素 a 的指数；所得元素在 $\mathfrak{A}$ 中可逆，并且属于由 a 和 1 生成的 Jordan–Banach子代数。复 Jordan–Banach代数的基本谱理论已相当完备，其性质与结合复 Banach 代数中的谱理论相似（更多细节见[7, 第 4] 章或下一小节 1.1）。元素 $a \in \mathfrak{A}$ 的 Jordan谱是集合 $\text{J-}\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \mathbf{1} \notin \mathfrak{A}^{-1}\}$.，它非空且紧。

Lie–Trotter 公式在复 Jordan–Banach 代数的背景下仍完全未被探索。我们应首先询问：“（1.1）中 Lie–Trotter 公式最恰当的 Jordan 版本是什么？”第一个候选方案是将结合乘积替换为 Jordan 乘积，即

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{a}{n}} \circ e^{\frac{b}{n}}\right)^n = e^{a+b}, \quad (a, b \in \mathfrak{A}). \tag{1.2}$$

即使在结合的情形下，这个版本似乎也很新颖。不过，考虑到两个可逆元的 Jordan积通常并非可逆元——实际上，存在形如 e^a 和 e^b 的元素，其 Jordan积为零——而形如 $U_a(b) := 2(a \circ b) \circ a - a^2 \circ b$ 的表达式在 a 和 b 均可逆时会给出可逆元，因此第二个自然公式可能如下：

$$\lim_{n\to\infty} \left(U_{e^{\frac{a}{n}}} \left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = e^{2a+b}, \text{ or more generally, } \lim_{n\to\infty} \left(U_{e^{\frac{a}{n}}, e^{\frac{c}{n}}} \left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = e^{a+b+c}, \tag{1.3}$$

对所有 a、b、$c \in \mathfrak{A}$，其中 $U_{a,c}(b) := (a \circ b) \circ c + (c \circ b) \circ a - (a \circ c) \circ b$，且 $U_{a,a}(b) = U_a(b)$。我们在第 2 节证明，公式 (1.2) 和 (1.3) 在含幺复 Jordan–Banach 代数中均成立。实际上，我们证明了一个更一般的结果：若 $f : \mathbb{D}_r \to \mathfrak{A}$ 是一个全纯映射，从 $\mathbb{C}$ 中半径为 r 的开圆盘映入一个含幺复 Jordan–Banach 代数，且 $f(0) = \mathbf{1}$，(λ_n) 是 $\mathbb{D}_r$ 中的一个序列，满足 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$，而 (μ_n) 是 $\mathbb{C}$ 中的一个序列，满足 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \mu_n = \lambda \in \mathbb{C}$，那么对于每个充分大的 $n \in \mathbb{N}$, $\left(f(\lambda_n)\right)^{\mu_n}$ 都是良定义的，并且

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(\lambda_n)\right)^{\mu_n} = \exp\left(\lambda f'(0)\right)$$

（见定理 2.1）。公式（1.3）和（1.2）的有效性作为推论在推论 2.2中得以确立。

第 3 节开篇旨在陈述著名的 Gleason-Kahane-Zelazko 定理在复 Jordan–Banach 代数中的一个版本，该版本由结合复 Banach 代数中的相应版本推导而来。更具体地说，复 Jordan–Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 上的非零线性泛函是（Jordan-）乘法的，当且仅当 $\varphi(a) \in \text{J-}\sigma(a)$ 对所有 $a \in \mathfrak{A}$ 成立（见定理 3.2）。接下来假设 $\mathfrak{A}$ 是

含单位元，我们接下来的目标是探究谱值 Jordan–乘法泛函 $f\colon \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 与主连通分支上的 Jordan-乘法泛函相一致的程度，这与 Maouche 针对巴拿赫代数证明的结果思路相同 [18]。Loos 提出的 Jordan–Banach 代数理论中的一项里程碑式结果 [17], 给出了可逆元主连通分支（即包含 $\mathbf{1}$的连通分支）的代数刻画， $\mathfrak{A}^{-1}$，对于含单位元的复 Jordan–Banach 代数， $\mathfrak{A}$，其形式为

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1}=\left\{U_{\exp(a_1)}\cdots U_{\exp(a_n)}(\mathbf{1}) : a_i\in\mathfrak{A},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

该主连通分支 $\mathfrak{A}^{-1}$的特殊形式，以及缺少证明（不一定是线性的）Jordan-乘法映射保持以下形式三重乘积的论证$U_a(b)$，促使我们在下述 Jordan 版本的问题1.1中考虑不同的假设。

问题1.3。设 $f:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是满足以下条件的（不一定是线性的）泛函：
(a) $f(U_x(y))=U_{f(x)}f(y)$, 对所有 $x,y\in\mathfrak{A}$,
(b) 对所有 $x\in\mathfrak{A}$., $f(x)\in J\text{-}\sigma(x)$
f 是否与 $\mathfrak{A}^{-1}$ 的主连通分支上的某个（Jordan-）乘法线性泛函一致？如果进一步假设 f 连续，那么 f 是否是 $\mathfrak{A}$ 上的（Jordan-）乘法线性泛函?

在定理 3.9 中，我们对问题 1.3中的第一个问题给出了完整的肯定回答。与 Manouche 在 [18]针对含幺复Banach代数所得的结果相比，我们的论证完全没有用到 Kowlaski–Słodkowski 定理，而是以一个较弱的技术引理取而代之。我们还将研究谱值映射 $f\colon \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，它们是 Jordan-乘法的（见定理 3.7），并将说明，得益于 Zelazko 围绕 Gleason–Kahane–Zelazko定理的一项经典贡献，可以从 Jordan 版本推导出 Maouche 的结果。

关于保持映射的所有先前结果在某种意义上都是最优的，因为 Maouche 给出了一个反例，证明存在一个（不连续的）具有乘法性的谱值泛函 $f\colon C[0,1]\to\mathbb{C}$，它不是线性的（见 [18, 例]）。

在最后的第4节中，我们针对问题1.3中的第二个问题，在含单位元的JB*-代数情形下给出了完整的肯定解答。正如C*-代数是指配备代数对合 $a\mapsto a^*$、满足“几何”Gelfand–Naimark公理 $\|a^*a\|=\|a\|^2$ $(a\in A)$ 的复Banach代数 A，JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 则是配备代数对合 $a\mapsto a^*$、满足“几何”公理 $\|U_a(a^*)\|=\|a\|^3$ $(a\in\mathfrak{A})$ 的复 Jordan–Banach 代数。值得注意的是，如果为 C*- 代数 A 配备其自然的 Jordan代数结构，则有 $U_a(a^*)=aa^*a$，因此，JB*-代数定义中的几何公理是 Gelfand–Naimark公理的一种等价表述。我们的研究将Touré和Brits在 [22], 中针对C*-代数得出的最一般已知结论推广到了Jordan情形：每个从含单位元的JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 到$\mathbb{C}$的连续谱值泛函 f，只要满足对所有 $x,y\in\mathfrak{A}$，$f(U_x(y))=U_{f(x)}f(y)$，便是一个线性（Jordan）乘法泛函（见定理4.3）。我们的方法独立于C*-代数情形下的论证，而且可以说略为简单。

1.1. Jordan–Banach代数背景。幂结合性是Jordan代数的基本性质之一，更具体地说，对于每个Jordan–Banach代数

由 Jordan–Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 中的单个元素 a 生成的 Jordan–Banach 子代数 $\mathfrak{A}_a$ 是结合的。等价地，通过令 $a^0 = \mathbf{1}$，且 $a^{n+1} = a \circ a^n$，我们有 $a^n \circ a^m = a^{n+m}$，对于所有 n,m $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$（参见 [12, 引理 2.4.5] 或 [1, 推论 1.4]）。因此，$\mathfrak{A}_a$ 是一个交换且结合的巴拿赫代数。

给定 Jordan–Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素 a、c，符号 $U_{a,c}$ 表示由 $U_{a,c}(b) := (a \circ b) \circ c + (c \circ b) \circ a - (a \circ c) \circ b$ 定义的 $\mathfrak{A}$ 上的线性映射。显然，$U_{a,a}$ 与引言中提到的映射 U_a 一致。可逆性与 U 映射密切相关，因为元素 $a \in \mathfrak{A}$ 可逆当且仅当 U_a 是双射，且在这种情况下 $U_a^{-1} = U_{a^{-1}}$（参见 [12, 3.2.9] 和 [7, 定义 4.1.2 及定理 4.1.3]）。我们用 $\mathfrak{A}^{-1}$ 表示 $\mathfrak{A}$ 中所有可逆元的集合。众所周知，$\mathfrak{A}^{-1}$ 是开集（见 [7, 定理 4.1.7]），因此 $\mathfrak{A}^{-1}$ 是局部连通的，其所有连通分支都是开集。

两个可逆元的Jordan积一般来说并不可逆。不过，形如$U_x(y)$的元素可逆，当且仅当x和y均可逆（参见[7, 定理 4.1.3(vi)]）；此时，$(U_x(y))^{-1} = U_x^{-1}(y^{-1})$；因此，$(x^{-1})^2 = (x^2)^{-1} = x^{-2}$。由此可知，每个可逆元的平方和n次幂（$n \in \mathbb{N}$）都是可逆元。

含幺复 Jordan–Banach 代数中元素 a 的谱（也称 Jordan谱）$\mathfrak{A}$（记作 J-σ(a)）是所有使得 $a - \lambda\mathbf{1}$ 不可逆的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的集合。与结合Banach代数的情形一样，J-σ(a) 是复平面的一个非空紧子集（见 [7, 定理 4.1.17]。本文中我们将频繁用到以下结论：若将与含幺复 Banach 代数 A 自然关联的 Jordan–Banach 代数记作 A^{sym}，则 A 中的元素 a 在 Jordan意义下可逆，当且仅当它在通常意义下可逆。特别地，对于每个 $a \in A$，都有 σ(a) =J-σ(a)。

我们将专著 [12, 1] 和 [7] 视为关于 Jordan–Banach代数和 JB*-代数的权威资料。关于全纯函数演算的更多细节，读者可参阅 [4, §2，定理 2.3] 以及 [7, 定理 4.1.88 和 4.1.93]。

2. Jordan–Banach代数中的 Lie–Trotter 公式

本节是本文的技术核心，包含了 Jordan–Banach代数框架下的若干李–特罗特型公式。或许可以先从说明以下一点开始：对于含幺复结合Banach代数，式（1.3）中关于 Jordan积的 Lie–Trotter 公式可以由经典公式推导得出。具体而言，设 A是一个含幺复 Banach 代数。不难通过归纳法看出恒等式

$$\left(e^{\frac{a}{n}} e^{\frac{b}{n}} e^{\frac{a}{n}}\right)^n = e^{-\frac{a}{n}} \left(e^{\frac{2a}{n}} e^{\frac{b}{n}}\right)^n e^{\frac{a}{n}}$$

对所有 a、b ∈ A 及所有自然数 n 均成立。因此，对上述表达式取极限，并应用原始 Lie–Trotter 公式以及乘积的联合连续性，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \left(U_{e^{\frac{a}{n}}}\left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{a}{n}} e^{\frac{b}{n}} e^{\frac{a}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{a}{n}} \left(e^{\frac{2a}{n}} e^{\frac{b}{n}}\right)^n e^{\frac{a}{n}} = e^{2a+b}. \tag{2.1}$$

读者可能会认为，如果我们在一个含单位元的复 Jordan–Banach代数 $\mathfrak{A}$ 中固定任意两个元素 [12,定理 2.4。14],a、b，根据 Shirshov–Cohn定理

由 $\mathfrak{B}$ 生成的 $\mathfrak{A}$ Jordan子代数 a、b 和 $\mathbf{1}$ （纯粹从代数意义上说）是特殊的，因此我们可以找到一个结合代数 A，满足 $\mathfrak{B}$ 是 A 的Jordan子代数。原则上，我们不能应用（2.1）中的结论，因为 Shirshov–Cohn定理是一个纯代数结果，而且通常我们不知道结合代数 A 是否可以假定为巴拿赫代数。此外，即使在结合情形下，似乎也无法从经典李–特罗特公式得到（1.2）。

接下来我们将以标准意义使用全纯向量值函数。设 X 为复巴拿赫空间，若从非空开集 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 到 X 的函数 f 满足：对于所有 $\lambda_0 \in \Omega$，$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(\lambda) - f(\lambda_0)\,\lambda - \lambda_0$ exists（在 X 中），则称其为（强）复可微或全纯~~函数。众所周~~知，映射 $f\colon \Omega \to X$ 是全纯的，当且仅当它是弱全纯的，也就是说，对于每个泛函 $\varphi \in X^*$，函数 $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是全纯的 [9, 推论 15.2.2]。每个全纯函数 f 都满足柯西积分公式，该公式用 Gelfand–Pettis X 值积分表示[9, 推论 15.2.2], ；实际上，f 满足通常的柯西理论积分公式，并且特别地，它是无穷可微的，还可表示为收敛幂级数，其系数由柯西公式给出 [9, 推论 15.2.3]。我们还将研究从复巴拿赫空间 X 的开子集 Ω 到另一个复巴拿赫空间 Y 的全纯映射，即在 Ω 中每一点都弗雷歇可微的映射 $f\colon \Omega \to Y$。后者的例子可由复巴拿赫代数和 Jordan–Banach代数中的全纯函数演算给出（参见 [7,定理 1.3.21 和 4.1.93]）。

现在可以陈述本节的主要结果。以下将 $\mathbb{D}_r$ 记作 $\mathbb{C}$ 中以 0 为圆心、半径为 $r > 0$的开圆盘。符号 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{D}_1$。

定理 2.1. 设 $\mathfrak{A}$ 为含幺复Jordan–Banach代数，且 $f\colon \mathbb{D}_r \to \mathfrak{A}$为全纯映射，满足 $f(0) = \mathbf{1}$。假设 (λ_n) 是 $\mathbb{D}_r$ 中的一个序列，且 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$，而 (μ_n) 是 $\mathbb{C}$ 中的一个序列，满足 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \mu_n = \lambda \in \mathbb{C}$。那么，对每个充分大的 $n \in \mathbb{N}$，$\big(f(\lambda_n)\big)^{\mu_n}$ 均有定义，且

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(\lambda_n)\big)^{\mu_n} = \exp\big(\lambda f'(0)\big).$$

证明。根据全纯函数演算的基本性质、f 的连续性以及其他假设，$\big[f(\lambda_n)\big]^{\mu_n}$ 当 n 充分大时有定义，并且我们有

$$\big[f(\lambda_n)\big]^{\mu_n} = \exp\big[\mu_n \log f(\lambda_n)\big] = \exp\big(\lambda_n \mu_n g(\lambda_n)\big),$$

其中 $g\colon \mathbb{D}_r \to J$ 定义为

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\log\big(f(\zeta)\big)}{\zeta}, & \text{if } \zeta \neq 0, \\ f'(0), & \text{if } \zeta = 0. \end{cases}$$

只需证明

$$\lim_{\zeta\to 0} g(\zeta) = g(0) = f'(0).$$

根据 [7,定理 4.1，93],集合 $\Omega = \{x \in \mathfrak{A}\colon J\text{-}\sigma(x) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-\}$ 是开集，且映射-。

$$\Theta\colon \Omega \to \mathfrak{A}, \quad \Theta(x) = \log(x) \quad \forall x \in \Omega$$

是全纯的。此外，给定 $0<\rho<1$， Θ 在 1 处的弗雷歇微分 $D\Theta(1)$: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 由下式给出。

$$\begin{aligned} D\Theta(\mathbf{1})(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-1|=\rho} \log(\zeta)\, U_{(\zeta\mathbf{1}-\mathbf{1})^{-1}}(x)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-1|=\rho} \frac{\log(\zeta)}{(\zeta-1)^2}\, x\, d\zeta \\ &= \log'(1)x = x, \text{ for all } x\in\mathfrak{A}. \end{aligned}$$

于是，$U = f^{-1}(\Omega)$ 是 $\mathbb{C}$ 中 0 的一个开邻域，并且映射 $\Theta\circ f$ 在 U 上是全纯的，且有

$$\lim_{\zeta\to 0} g(\zeta) = (\Theta\circ f)'(0) = D\Theta(f(0))(f'(0)) = D\Theta(\mathbf{1})(f'(0)) = f'(0),$$

如所需。 □

在（1.2）和（1.3）中预期的李–特罗特公式现可作为我们前述定理的推论得到。

推论 2.2. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺复 Jordan–Banach 代数。则公式 e

$$\lim_{n\to\infty}\left(U_{e^{\frac{a}{n}},e^{\frac{c}{n}}}\left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = e^{a+b+c},\ \lim_{n\to\infty}\left(U_{e^{\frac{a}{n}}}\left(e^{\frac{b}{n}}\right)\right)^n = e^{2a+b},$$

$$\textit{and}\ \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{a}{n}}\circ e^{\frac{b}{n}}\right)^n = e^{a+b},$$

对所有 a、b、$c\in\mathfrak{A}$ 均成立。

证明。为证明第一个公式，只需应用定理2.1 并令

$$f(\zeta) = U_{e^{\zeta a},e^{\zeta c}}\left(e^{\zeta b}\right),\quad \forall\zeta\in\mathbb{C},$$

$(\lambda_n) = (\frac{1}{n})$ 和 $(\mu_n) = (n)$。第二和第三个公式分别通过令 $=c$ 和 $c = 0$ 从第一个公式得出。□

注2.3。 定理 2.1 是产生新的李–特罗特型公式的强大工具，因为全纯映射 f具有很大的自由度。例如，取 $f(\zeta) := e^{\zeta a}\circ(\mathbf{1}+\zeta b+\zeta^3 d^3)\circ\cos(\zeta c)$， 其中 a、b、c、d属于一个Jordan–Banach代数 $\mathfrak{A}$ 我们得到。

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\lambda_n a}\circ(\mathbf{1}+\lambda_n b+\lambda_n^3 d^3)\circ\cos(\lambda_n c)\right)^{\mu_n} = e^{\lambda(a+b)},$$

对于每个零序列 (λ_n) 和每个标量序列 (μ_n)，若 $(\lambda_n\mu_n)\to\lambda$，则该公式左侧序列中的项仅在 n 足够大时考虑。

值得注意的是，定理 2.1 在 A 为含幺复结合Banach代数时同样成立。在这种情况下，全纯映射 f 也可以通过结合乘积来定义。

3. Jordan–Banach代数中的 Gleason–Kahane–Zelazko定理及其逆定理

本节旨在提供上一节所建立的 Lie–Trotter 公式的一个应用。正如我们在引言中所述，Maouche 在A到复数域的映射的研究中，采用了适用于含幺复 Banach 代数的 Lie–Trotter 公式 [18]。该结果表明，对于每个满足条件 $\Delta : A \to \mathbb{C}$ 的（不一定是线性的）乘法谱值泛函 $\Delta(a) \in \sigma(a)$，都存在一个定义在 ψ 上的 A 乘法线性泛函，该泛函在可逆元的主连通分支上与 Δ 一致。本文旨在探讨从含幺复 Jordan–Banach 代数到$\mathbb{C}$的谱值乘法泛函是否具有类似的结论。

Maouche 的结果假设泛函ϕ具有乘法性，但代价是放宽了线性条件。证明中采用的另一项关键工具是一条著名结果，其假设中不要求线性；我们指的是 Kowlaski–Słodkowski定理。

定理 3.1。（Kowalski–Słodkowski [15]）设 A 是一个复Banach代数，且 Δ: A $\to \mathbb{C}$ 是一个泛函，满足 $\Delta(0) = 0$，并且

$$\Delta(a) - \Delta(b) \in \sigma(a-b),$$

对所有 a, b $\in$ A 均成立。则 Δ 是线性且具有乘法性的。

据我们所知，Gleason–Kahana–Zelazko 定理和 Kowalski– Słodkowski 定理在 Jordan–Banach代数的情形下尚未得到妥善讨论。下面我们简要说明它们为何成立。

定理3.2. 设 $\mathfrak{A}$ 为一个复Jordan–Banach代数，且 φ: $\mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 为一个非零线性泛函。则以下陈述等价：
(a) $\varphi(a) \in$ J-σ(a)，对所有 a $\in \mathfrak{A}$ 均成立。(b) φ是含幺的，或存在一个到 $\mathfrak{A}$ 的幺元化的含幺扩张，并将 $\mathfrak{A}$ 中的可逆元映射为非零复数。(c) φ是（Jordan）乘法性的。

证明。我们只证明 (a) $\Rightarrow$(c)，其他蕴含关系或多或少都是标准的。假设 $\mathfrak{A}$ 含幺不失一般性。固定一个元素 a $\in \mathfrak{A}$，并用 $\mathfrak{B}$ 表示由 a 和单位元生成的 Jordan–Banach 代数。众所周知，$\mathfrak{B}$ 是一个交换含幺复 Banach 代数。根据谱的基本性质，受限泛函 $\varphi|_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ 满足$\varphi(a) \in$J-$\sigma_{\mathfrak{A}}$(a) $\subseteq$ J-$\sigma_{\mathfrak{B}}$(a)，并且在 $\mathfrak{B}$ 中，每个元的 Jordan 谱与通常意义下的谱定义的是同一个集合。因此，由 Banach 代数的 Gleason–Kahane–Zelazko 定理可知，$\varphi|_{\mathfrak{B}}$ 具有乘法性，从而对于所有 a $\in \mathfrak{A}$，都有 $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$。容易验证，$\varphi$是一个（Jordan）乘法泛函。□

Kowalski–Słodkowski定理的Jordan版本，无法通过将巴拿赫代数的相应结果限制到由任意两个元素生成的Jordan代数 $\mathfrak{B}$，再应用Shirshov–Cohn 定理来得到；这主要是因为该结果纯属代数性质，而我们通常并不知道$\mathfrak{B}$能否嵌入为某个巴拿赫代数的Jordan子代数。然而，原始的

Kowalski和Słodkowski在这种情况下的证明也同样适用（实际上，Kowalski–Słodkowski定理的球面变体在 [16, 19]中也适用于Jordan–Banach代数，细节留给读者）。

定理3.3。设 $\mathfrak{A}$ 是一个复Jordan–Banach代数，且 $\Delta: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 是满足 $\Delta(0) = 0$ 的泛函，并且

$$\Delta(a) - \Delta(b) \in J\text{-}\sigma(a-b),$$

对所有 $a, b \in \mathfrak{A}$均成立。则 Δ 是线性且具有乘法性的。

我们在此采用的方法的一个新颖之处在于，我们的论证不需要应用 Kowalski–Słodkowski 定理，只需使用这两位作者提出的一个较弱的代数引理。具体而言，若A 是一个复巴拿赫代数，则每个 $\mathbb{R}$-线性谱值泛函 $\varphi: A \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$-线性的 [15, 引理2。1]。若 $\mathfrak{A}$ 是一个复Jordan–Banach代数，且 $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性谱值泛函，将其限制在由单个元素$a \in \mathfrak{A}$生成的 Jordan–Banach 子代数 $\mathfrak{B}$上，我们便可像定理3.2的证明那样得出结论：$\varphi|_{\mathfrak{B}}$（因而 φ）是 $\mathbb{C}$-线性的。我们将这一结论表述如下。

引理3.4. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个复 Jordan–Banach代数，且 $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 是一个$\mathbb{R}$-线性谱值泛函，则φ是 $\mathbb{C}$-线性的。

在回顾现有研究成果之后，接下来我们将探讨李–特罗特公式对含单位复 Jordan–Banach 代数的影响。

引理 3.5. 设 X 是一个复巴拿赫空间，A 是一个含幺复 Banach 代数，且 ϕ：X → A 是满足以下条件的映射：
(a) $\phi(0) = 1$，(b) $\phi(x + y) = \phi(x)\,\phi(y)$，对所有 $x, y \in X$，(c) ϕ是连续的。

则存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性映射ψ：X →A，使得

$$\phi(x) = e^{\psi(x)}, \ \textit{for all } x \in X.$$

证明. 固定任意 $x \in X$。则映射 ϕ_x：$\mathbb{R} \to A$ 定义为

$$\phi_x(t) = \phi(tx) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

是 A 上的连续单参数群，因此存在唯一的 $\psi(x) \in A$，使得对每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\phi_x(t) = e^{t\psi(x)}$，即，

$$\phi(tx) = e^{t\psi(x)} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

(参见 [7, 定理1.1。31]) 。特别地，$\phi(x) = e^{\psi(x)}$。

我们的下一个目标是证明 ψ 是 $\mathbb{R}$-线性的。设 x、$y \in X$ 且 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned} e^{t\psi(\alpha x+\beta y)} &= \phi\big(t(\alpha x+\beta y)\big) = \phi\big((t\alpha)x + (t\beta)y\big) = \phi\big((t\alpha)x\big)\phi\big((t\beta)y\big) \\ &= e^{t\alpha\psi(x)} e^{t\beta\psi(y)} = e^{t(\alpha\psi(x)+\beta\psi(y))}, \end{aligned}$$

这表明 $\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y)$。 □

Lie–Trotter 公式的 Jordan 版本现在发挥了作用。

引理 3.6. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺复 Jordan–Banach 代数，并设 $\mathrm{f}:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个泛函，使得
(a) $\mathrm{f}(1)=1$, (b) $\mathrm{f}(x\circ y)=\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y)$,
对所有 $x,y\in\mathfrak{A}$，(c) f 在 1 处连续。

因此，存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性泛函 $\psi:\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，使得

$$f(e^x)=e^{\psi(x)},\ \textit{for all}\ x\in\mathfrak{A}.$$

证明。我们将证明，可以对泛函$\phi:\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$（定义为 $\phi(x):=\mathrm{f}(e^x)$）应用前面的引理 3.5。首先注意到，f 在 1 处的连续性可传递到每个形如 e^x. 的元素。具体而言，若 $(y_n)\to e^x$，则序列 $(e^{-x}\circ y_n)$ 在范数下收敛到 1，因此 $\mathrm{f}(e^{-x})\,\mathrm{f}(y_n)=\mathrm{f}(e^{-x}\circ y_n)\to\mathrm{f}(1)=1$。由假设可知，f 在 e^x处连续，进而证明了ϕ的连续性。因此，接下来只需证明，对所有 $x,y\in\mathfrak{A}$，都有 $\phi(x+y)=\phi(x)\phi(y)$。为此，我们应用推论 2.2 中最后一个 Lie–Trotter 公式以及关于 f 的假设，得到

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y)=f(e^x)f(e^y)&=f\big((e^{x/n})^n\big)f\big((e^{y/n})^n\big)=\big(f(e^{x/n})\big)^n\big(f(e^{y/n})\big)^n\\&=\big(f(e^{x/n})f(e^{y/n})\big)^n=\big(f(e^{x/n}\circ e^{y/n})\big)^n\\&=f\big((e^{x/n}\circ e^{y/n})^n\big)\to f(e^{x+y})=\phi(x+y).\end{aligned}$$

□

接下来，我们可以陈述关于含幺复Jordan–Banach代数上的（Jordan）乘法泛函的结论。

定理3.7. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺复 Jordan–Banach 代数，且 $\mathrm{f}:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$是一个（不一定线性的）谱值（Jordan）乘法泛函，也就是说，

$$f(x)\in\text{J-}\sigma(x),\ \textit{and}\ f(x\circ y)=f(x)f(y),\quad\forall x,y\in\mathfrak{A}.$$

那么，存在唯一的乘法连续（复）线性泛函$\psi:\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 使得

$$f(e^x)=\psi(e^x),\ \textit{for all}\ x\in\mathfrak{A}.$$

证明. 一方面，我们有 $\mathrm{f}(1)\in\text{J-}\sigma(1)=\{1\}$，因此 $\mathrm{f}(1)=1$。

f 在f处$\mathbf{1}$的连续性 [18, 定理]）可由标准论证得到。为完整起见，我们注意到

$$f(\mathbf{1}+x)\subseteq\text{J-}\sigma(\mathbf{1}+x)=1+\text{J-}\sigma(x),$$

这意味着 $\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(\mathbf{1}+x)\in\text{J-}\sigma(-x)$，因此 $|\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(\mathbf{1}+x)|\le\|x\|$。

引理 3.6 证明了存在一个实线性泛函 $\psi:\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 满足$f(e^x)=e^{\psi(x)}$ 对所有 $x\in\mathfrak{A}$。证明的其余部分旨在说明

$$\psi(x)\in\text{J-}\sigma(x),\ \text{for all}\ x\in\mathfrak{A}.$$

也就是说，根据构造和谱映射定理，我们有

$$\exp\big(\psi(x)\big)=f(e^x)\in\text{J-}\sigma\left(e^x\right)=\exp\big(\text{J-}\sigma(x)\big),\ \text{for all}\ x\in\mathfrak{A}.\tag{3.2}$$

我们固定 $x\in\mathfrak{A}$ 和任意的 $t\in\mathbb{R}^+$，使得

$$|t\psi(x)|<1\ \text{and}\ \|tx\|<1.$$

那么 $\psi(tx) = t\psi(x) \in \mathbb{D}$ 且 J-$\sigma(tx) \subset \mathbb{D}$，并且由于复指数函数在 $\mathbb{D}$上是单射，由 (3.2) 可推出 $\psi(tx) \in$J-$\sigma(tx)$。因此，

$$\psi(x) = t^{-1}\psi(tx) \in t^{-1}\text{J-}\sigma(tx) = \text{J-}\sigma(x).$$

因此，我们可以应用引理 3.4 推得 ψ是复线性的，因此——根据 Gleason–Kahane–Zelazko 定理的 Jordan 版本（见定理 3.2），ψ具有乘法性。

最后我们注意到，由于 ψ具有乘法性、有界且线性，因此有

$$f(e^x) = e^{\psi(x)} = \psi(e^x), \text{ for all } x \in \mathfrak{A}.$$

□

需要指出的是，与 [18], 中的论证不同，前一个证明不需要应用 Kowalski-Słodkowski 定理。

令 A 表示一个含幺复结合巴拿赫代数，其单位元为 1。在这种情况下，A^{-1} 中的可逆元构成 A 的一个乘法子群，但一般而言并不连通。A^{-1} 的主连通分支（即包含 1 的 A^{-1} 的连通分支）记为 A_1^{-1}。已知

$$A_1^{-1} = \{e^{a_1} \cdots e^{a_n} : a_i \in A,\ n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.3}$$

并且它恰好是 A^{-1} 中包含 exp(A) 的最小子群（参见 [5, 命题8.6和8.7]）。

值得注意的是，我们可以根据先前的结果重新得到 [18] 中的 Maouche定理。具体而言，设 $f : A \to \mathbb{C}$ 是一个（不一定是线性的）乘法泛函，满足对所有 $x \in A$，均有 $f(x) \in \sigma(x)$，其中 A 是一个含幺复 Banach 代数。显然，f 是 Jordan-乘法的；又由于对所有 $x \in A$，均有 $\sigma(x) =$J-$\sigma(x)$，定理3.7保证存在一个连续且具有乘法性的泛函 $\psi: A \to \mathbb{C}$，满足对所有 $x \in A$，均有 $f(e^x) = \psi(e^x)$。 [24] 中的定理1表明 ψ 是乘法性的。由 (3.3) 可知，f 和 ψ 在 A_1^{-1} 上相同。

在 Jordan 情形下，我们将采用一致的记号。含幺复 Jordan–Banach代数中可逆元的主连通分支 $\mathfrak{A}$ 记作 $\mathfrak{A}_1^{-1}$。Loos 在 [17] 中的一个深刻结果表明

$$\mathfrak{A}_1^{-1} = \left\{U_{\exp(a_1)} \cdots U_{\exp(a_n)}(\mathbf{1}) : a_i \in \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

因此，$\mathfrak{A}_1^{-1}$在 $\mathfrak{A}^{-1}$ 中既开又闭，且其每个连通分支都是解析弧连通的 [17, 推论]。可逆元的 Jordan积通常不可逆，因此，将（3.3）中的结合乘积替换为 Jordan积的表达式是行不通的。

含幺复 Jordan–Banach代数 $\mathfrak{M}$ 中由可逆元构成的子集 $\mathfrak{A}$称为二次子集，若 $U_a(b) \in \mathfrak{M}$ 对所有 a、$b \in \mathfrak{M}$均成立。文献 [20, 引理 25] 证明了，$\mathfrak{A}_1^{-1}$刻画了包含 exp($\mathfrak{A}$)的最小二次子集。

前面的简要描述说明了下一个结果中各项假设的由来。

引理 3.8. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺复 Jordan–Banach 代数，并设 $f: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 是一个非零（不一定线性的）泛函，满足：
(a) f 在 1 处连续。(b) 对所有 x、y，
$f(U_x(y)) = U_{f(x)}f(y), \in \mathfrak{A}$。

那么存在唯一的实线性泛函 $\psi\colon \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，满足以下互斥陈述之一。

(1) 对所有 $x\in\mathfrak{A}$，$f(e^x)=e^{\psi(x)}$。
(2) 对所有 $x\in\mathfrak{A}$，$f(e^x)=-e^{\psi(x)}$。

此外，第一项陈述（分别地，第二项陈述）成立当且仅当 $f(1)=1$（分别地，$f(1)=-1$）。

证明。我们定义一个泛函 $\phi:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，其定义为 $\phi(x)=f(e^x)$。首先，我们来证明 f 和 ϕ 的一些性质。由于

$$\phi(0)=f(e^0)=f(\mathbf{1})=U_{f(\mathbf{1})}(f(\mathbf{1}))=f(\mathbf{1})^3=\phi(0)^3,$$

且 f 非零，因此 $\phi(0)=f(1)\in\{\pm 1\}$。

首先假设 $f(1)=1$。在这种情况下，$f(x^2)=f(U_x(1))=U_{f(x)}f(1)=f(x)^2$，并且归纳可得，对所有自然数 n 和 $x\in\mathfrak{A}$，$f(x^n)=f(x)^n$。此外，对所有 $x\in\mathfrak{A}$，$\phi(x)\neq 0$ 且 $\phi(-x)=f(e^{-x})=f(e^x)^{-1}=\phi(x)^{-1}$

若 $(x_n)\to x$ 在范数下成立，则序列 $(U_{e^{\frac{x_n}{2}}}(e^{-x}))$ 在范数下趋于 1。根据 f 的假设，我们有

$$\phi(x_n)\phi(x)^{-1}=f(e^{\frac{x_n}{2}})^2f(e^{-x})=f(e^{x_n})f(e^{-x})=f(e^{\frac{x_n}{2}})^2f(e^{-x})=f\left(U_{e^{\frac{x_n}{2}}}(e^{-x})\right)\to 1,$$

这证明了ϕ的连续性。

现在我们注意到

$$\left(U_{f(e^{x/n})}f(e^{y/n})\right)^n=f(e^{x/n})^{2n}f(e^{y/n})=f(e^{2x})f(e^y)=\phi(2x)\phi(y)$$

另一方面，根据推论 2.2中的第二个公式，并结合 f 在 e^{2x+y} 处的连续性，可得

$$\left(U_{f(e^{x/n})}f(e^{y/n})\right)^n=\left(f\left(U_{e^{x/n}}e^{y/n}\right)\right)^n=f\left(\left(U_{e^{x/n}}e^{y/n}\right)^n\right)\to f(e^{2x+y})=\phi(2x+y).$$

这两个恒等式合起来给出 $\phi(2x+y)=\phi(2x)\phi(y)$，等价地，对于所有 x、$y\in\mathfrak{A}$，有 $\phi(x+y)=\phi(x)\phi(y)$。

现在我们可以应用引理 3.5 于 ϕ，从而推出存在唯一的实线性泛函 $\psi\colon \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 满足 $f(e^x)=\phi(x)=e^{\psi(x)}$，对所有 $x\in\mathfrak{A}$。

若 $f(1)=-1$，则泛函 $-f$ 满足与 f 相同的假设，且将 1 映为 1。根据第一部分的结论，存在一个（唯一的）实线性泛函$\psi\colon \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，满足 $-f(x)=e^{\psi(x)}$，对所有 $x\in\mathfrak{A}$ 均成立。□

若 A 和 B 是含幺巴拿赫代数，且 $\Delta\colon A\to B$ 是一个含幺（不一定线性的）映射，那么不难看出，Δ 是 Jordan-乘法的（即 $\Delta(a\circ b)=\Delta(a)\circ\Delta(b)$），当且仅当 $\Delta(U_a(x))=U_{\Delta(a)}\Delta(x)$（只需注意，在此特定情形下，对所有 $a,x\in A$，$U_a(x)=axa$）。若 $\Delta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是一个含幺（不一定线性的）映射，则有

$$\Delta(U_a(x))=U_{\Delta(a)}\Delta(x),\ \forall a,x\in\mathfrak{A}\Rightarrow\Delta\text{ is Jordan-multiplicative}.$$

当 Δ 为线性时，反向蕴含显然成立；然而，在缺乏线性的情况下，我们尚不清楚反向蕴含是否成立。

前文提到的含幺复 Jordan–Banach 代数中可逆元素的主连通分支的特殊代数描述 [17], 以及前面的讨论，促使我们在下一个结果中考虑一些特殊但自然的假设。

定理3.9. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺复 Jordan–Banach 代数，并设 $f:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个（不一定是线性的）泛函，满足：
(a) $f(U_x(y)) = U_{f(x)}f(y)$，对所有 $x, y \in \mathfrak{A}$，(b) $f(x) \in J\text{-}\sigma(x)$，对所有 $x \in \mathfrak{A}$.
于是，存在唯一的连续（Jordan-）乘法线性泛函 $\psi:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，使得对 $\mathfrak{A}$ 中包含单位元的所有可逆元集合的连通分支中的每个 x，均有 $f(x)=\psi(x)$。

证明。与定理3.7的证明一样，$f(1)=1$，且条件 $1-f(1+x)\in J\text{-}\sigma(x)$ 意味着 $|1-f(1+x)|\le\|x\|$，这足以证明 f 在 1 处连续。由引理 3.8，存在实线性泛函 $\psi:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$，满足对所有 $x\in\mathfrak{A}$，$f(e^x)=e^{\psi(x)}$。仿照定理3.7证明的第二部分进行推导，可得$\psi(x)\in J\text{-}\sigma(x)$。引理3.4证明了 ψ 是 $\mathbb{C}$-线性的，因此对所有 $x\in\mathfrak{A}$，$f(e^x)=e^{\psi(x)}=\psi(e^x)$。

最后，根据[17], 的主连通分支 $\mathfrak{A}^{-1}$ 是集合

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1}=\left\{U_{\exp(a_1)}\cdots U_{\exp(a_n)}(\mathbf{1}) : a_i\in\mathfrak{A},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

因此，通过结合性质 $f(e^x)=e^{\psi(x)}=\psi(e^x)$，对于所有满足假设 (a) 的 $x\in\mathfrak{A}$，我们得出，对于所有 $x\in\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1}$，$f(x)=\psi(x)$。□

应当注意，定理3.9 的证明无需应用 Kowalski-Słodkowski定理，而只需使用较弱的技术性引理3.4。

注3.10。 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺复 Jordan–Banach 代数，并设f： $\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个满足定理3.9中假设的（不一定线性的）泛函。那么，f是一次齐次的，即$f(\lambda x)=\lambda f(x)$，对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$均成立。事实上，

$$f(U_{\sqrt{\lambda}\mathbf{1}}(x))=U_{f(\sqrt{\lambda}\mathbf{1})}f(x)=f(\sqrt{\lambda}\mathbf{1})^2f(x)=\sqrt{\lambda}^2f(x)=\lambda f(x).$$

4. 连续谱值乘法映射

我们已经从[18, 例] 得知，存在一个非线性（且不连续）的谱值乘法泛函 $f:C[0,1]\to\mathbb{C}$。因此，定理3.7和3.9中的结论是最优的。然而，加入连续性这一假设后，关于复巴拿赫代数上的谱值乘法映射自动线性的问题1.1，最近已由 Brits、Mabrouk、Schulz 和 Touré 针对交换含幺 C*代数、冯·诺依曼代数以及含幺 C*代数解决（参见 [23, 22, 6]）。针对含幺 C*代数的现有解法所采用的一个关键工具，是 [23, 引理3.6], 中提出的工具：对于从含幺 C*代数 A 到$\mathbb{C}$的每个连续乘法谱值泛函 f，以及每个 $x\in A$，函数 $\lambda\to f(x-\lambda\mathbf{1})$ 在$\mathbb{C}\setminus\sigma(x)$的无界连通分支上是解析的。在下一个结果中，我们将证明上述工具的推广：即使在更一般的假设下，所讨论的函数实际上也是仿射的。

引理 4.1. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺Jordan–Banach代数，且 $f:\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个满足以下条件的泛函（不一定是线性的）：
(a) f 连续；(b) 对所有 $x,y\in\mathfrak{A}$，$f(U_x(y))=U_{f(x)}f(y)$；

(c) 对每个 $x \in \mathfrak{A}$，$f(x) \in J\text{-}\sigma(x)$。

令 ψ 为定理 3.9 给出的有界（Jordan）乘法线性泛函。若 $x \in \mathfrak{A}$ 且 $\mathscr{O}_x$ 表示 $\mathbb{C} \setminus J\text{-}\sigma(x)$ 的无界分支，则

$$f(\lambda \mathbf{1} - x) = \lambda - \psi(x), \text{ for all } \lambda \in \mathscr{O}_x.$$

若 $x \in J$ 满足 $J\text{-}\sigma(x)$ 包含于一条直线中，则

$$f(\lambda \mathbf{1} - x) = \lambda - \psi(x), \text{ for all } \lambda \in \mathbb{C},$$

并且，特别地，

$$f(x) = \psi(x).$$

证明。注意到

$$\lambda \mathbf{1} - x \in \mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1}, \quad \forall \lambda \in \mathscr{O}_x \setminus \{0\}. \tag{4.1}$$

所需结论可直接由 [20, 注 2.4(2)]，得出；不过，为了完整起见，我们在此给出一个简短的论证。注意到 $\lambda \mapsto \mathbf{1} - \lambda^{-1} x$ 是从定义域 $\mathscr{O}_x \setminus \{0\}$ 到 $\mathfrak{A}^{-1}$ 的连续映射，因此集合

$$\left\{ \mathbf{1} - \lambda^{-1} x : \lambda \in \mathscr{O}_x \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathfrak{A}^{-1}$$

是连通的。另一方面，1 属于上述集合的闭包，因为

$$\lim_{\substack{|\lambda| \to \infty \\ \lambda \in \mathscr{O}_x \setminus \{0\}}} \mathbf{1} - \lambda^{-1} x = \mathbf{1}.$$

因此，

$$\left\{ \mathbf{1} - \lambda^{-1} x : \lambda \in \mathscr{O}_x \setminus \{0\} \right\} \cup \{\mathbf{1}\} \subseteq \mathfrak{A}^{-1}$$

是连通的，且包含 $\mathbf{1}$。因此，上述集合包含于 $\mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1}$。考虑到 $\mathbb{C}^* \mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathbf{1}}^{-1}$，可以得出（4.1）成立。定理 3.9 保证

$$f(\lambda \mathbf{1} - x) = \psi(\lambda \mathbf{1} - x) = \lambda \psi(\mathbf{1}) - \psi(x) = \lambda - \psi(x), \quad \forall \lambda \in \mathscr{O}_x \setminus \{0\}.$$

当 $0 \in \mathscr{O}_x$ 时，利用 f 的连续性，可以将上述恒等式推广到整个定义域 $\mathscr{O}_x$。

假设 $J\text{-}\sigma(x)$ 包含于一条直线上。那么 $\mathscr{O}_x$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密，由先前证明的恒等式以及 f 的连续性，可得所需恒等式。取 $\lambda = 0$，得到 $f(x) = \psi(x)$。□

下面的推论是 [23, 引理 3。6] 的强化版本，它具有更一般的假设和更强的结论，可由前述引理以及 Zelazko 提出的相关结果推出；该结果断言，巴拿赫代数上的每个 Jordan-乘法的线性泛函都是乘法的 [24]。

推论 4.2. 设 A 是一个含幺巴拿赫代数，且 $f : A \to \mathbb{C}$ 是一个满足以下条件的（不一定是线性的）泛函：

(a) f 是连续的；(b) f 具有乘法性；(c) 对每个 $x \in A$，$f(x) \in \sigma(x)$。

设 ψ为 Maouche定理给出的有界（Jordan-）乘法线性泛函（见定理 *1.2*）。若 x ∈A，且 $\mathscr{O}_x$ 表示$\mathbb{C}\setminus\sigma$（$x$）的无界分支，则

$$f(\lambda\mathbf{1}-x)=\lambda-\psi(x),\ \textit{for all}\ \lambda\in\mathscr{O}_x.$$

特别地，映射 $\lambda\mapsto f(\lambda\mathbf{1}-x)$ 在 $\mathscr{O}_x$ 上是仿射的。如果 x ∈J 满足 σ(x) 包含于一条直线上，那么

$$f(\lambda\mathbf{1}-x)=\lambda-\psi(x),\ \textit{for all}\ \lambda\in\mathbb{C},$$

特别地，f(x) = ψ(x)。

现在，我们可以转而关注问题 1.3 中关于含单位元 JB*-代数的第二个问题。按照标准记号，今后我们将用 $\mathfrak{A}_{sa}$表示 $\mathfrak{A}$中所有自伴元素的集合。众所周知，由单个元素 *生成的 JB $\mathfrak{A}$子代数 $a\in\mathfrak{A}_{sa}$ 在等距意义下作为 JB*-代数同构于一个交换 C*-代数（参见 [12,定理3.2。2]）。

定理4.3。设 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位元的 JB*-代数，并设 f：$\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ 是一个（不一定线性的）泛函，满足：
(a) f 是连续的；(b) 对所有 x、y ∈$\mathfrak{A}$，f (U_x (y)) $=U_{f(x)}f(y)$；(c) 对每个 x ∈$\mathfrak{A}$，f(x) ∈ J-σ(x)。
那么，f 是 $\mathfrak{A}$上的线性（Jordan）乘法泛函。

证明。 令 $\psi\in\mathfrak{A}^*$ 为定理 3.9给出的泛函。我们首先注意到

$$f(x+\lambda\mathbf{1})=\psi(x)+\lambda,\quad \forall x\in\mathfrak{A}_{sa},\ \lambda\in\mathbb{C}, \tag{4.2}$$

尤其是

$$f(x)=\psi(x),\quad \forall x\in\mathfrak{A}_{sa}. \tag{4.3}$$

事实上，若 $x\in\mathfrak{A}_{sa}$，则 J-σ$(x)\subset\mathbb{R}$，由引理 4.1 可得所述恒等式。

现在，设 x,y ∈$\mathfrak{A}_{sa}$，并假设 x 可逆且为正的。那么我们有

$$f(x+iy)=\psi(x+iy). \tag{4.4}$$

为此，我们注意到$U_{x^{-1/2}}(y)\in\mathfrak{A}_{sa}$，因此，假设条件和（4.3）给出

$$\begin{aligned}f(x+iy)&=f\big(U_{x^{1/2}}(\mathbf{1}+iU_{x^{-1/2}}(y))\big)=U_{f(x^{1/2})}f\big(\mathbf{1}+iU_{x^{-1/2}}(y)\big)\\&=U_{\psi(x^{1/2})}\psi\big(\mathbf{1}+iU_{x^{-1/2}}(y)\big)=\psi(x)\big(1+\psi(iU_{x^{-1/2}}(y))\big)\\&=\psi(x)\big(1+iU_{\psi(x^{-1/2})}\psi(y)\big)=\psi(x)\big(1+i\psi(x^{-1})\psi(y)\big)\\&=\psi(x)+i\psi(y)=\psi(x+iy).\end{aligned}$$

令 x, y ∈$\mathfrak{A}_{sa}$，并且仅假设 x ≥0。我们将证明

$$f(x+iy)=\psi(x+iy). \tag{4.5}$$

将（4.4）中的 x 替换为 $n^{-1}\mathbf{1}+x$，可得

$$f(n^{-1}\mathbf{1}+x+iy)=\psi(n^{-1}\mathbf{1}+x+iy)$$

然后令 n 趋于无穷，并考虑到 f 和 ψ的连续性，我们得到（4.5）。

现在取 x、$y \in \mathfrak{A}_{sa}$，使得 $f(x) \neq 0$。我们将证明 $f(x+iy) = \psi(x+iy)$。设 $x = a - b$，其中 a、$b \in \mathfrak{A}_{sa}$，a、$b \geq 0$，且 $U_a(b) = U_b(a) = 0$（只需注意到由 x 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数与一个交换 C*-代数 JB*-同构，即可得到这一点 [12, 定理3.2.2]）。接着，考虑到假设、（4.5）以及 $U_a(a) \geq 0$ 这一事实，我们得到以下恒等式

$$\begin{aligned} f(a)^2 f(x+iy) &= U_{f(a)} f(x+iy) = f\big(U_a(x+iy)\big) = f\big(U_a(x) + iU_a(y)\big) \\ &= f\big(U_a(a) + iU_a(y)\big) = \psi\big(U_a(a) + iU_a(y)\big) \\ &= \psi\big(U_a(x) + iU_a(y)\big) = \psi\big(U_a(x+iy)\big) \\ &= U_{\psi(a)}\psi(x+iy) = \psi(a)^2\psi(x+iy) = f(a)^2\psi(x+iy). \end{aligned}$$

同样地，我们得到

$$\begin{aligned} f(b)^2 f(x+iy) &= U_{f(b)} f(x+iy) = f\big(U_b(x+iy)\big) = f\big(U_b(x) + iU_b(y)\big) \\ &= f\big(-U_b(b) + iU_b(y)\big) = -f\big(U_b(b) - iU_b(y)\big) \\ &= -\psi\big(U_b(b) - iU_b(y)\big) = \psi\big(-U_b(b) + iU_b(y)\big) \\ &= \psi\big(U_b(x) + iU_b(y)\big) = \psi\big(U_b(x+iy)\big) = U_{\psi(b)}\psi(x+iy) \\ &= \psi(b)^2\psi(x+iy) = f(b)^2\psi(x+iy). \end{aligned}$$

因此得到

$$\big[f(a)^2 + f(b)^2\big]\big[f(x+iy) - \psi(x+iy)\big] = 0. \tag{4.6}$$

现在我们断言 $f(a)^2 + f(b)^2 \neq 0$。否则，由于 $f(a) = \psi(a)$，$f(b) = \psi(b) \in \mathbb{R}$ 我们可推出 $f(a) = f(b) = 0$，从而

$$f(x) = \psi(x) = \psi(a) - \psi(b) = f(a) - f(b) = 0,$$

这与 $f(x) \neq 0$ 矛盾。由（4.6）可得

$$f(x+iy) = \psi(x+iy),$$

如所要求。

最后，假设 $f(x) = 0$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f(x + n^{-1}\mathbf{1}) = \psi(x + n^{-1}\mathbf{1}) = \psi(x) + n^{-1}\psi(1) = f(x) + n^{-1} = n^{-1} \neq 0$，应用前面已经证明的结果可得

$$f(x + n^{-1}\mathbf{1} + iy) = \psi(x + n^{-1}\mathbf{1} + iy).$$

取极限并利用 f 和 ψ 的连续性，我们得到这两个映射在整个 $\mathfrak{A}$ 上重合。□

显然，结合前面的定理 [6] 并利用中的 Zelazko 定理，我们可以重新得到主要结果 [24]。

推论 4.4. [6, 定理 2.1] 设 A 是一个含幺 C*-代数。那么，任何满足对每个 $a \in A$ 都有 $f(a) \in \sigma(a)$ 的连续乘法泛函 $f : A \to \mathbb{C}$，都是线性的，因此是 A 的一个特征。

定理1.2、定理 3.9, [6,定理 2。1], 以及定理 4.3 在非含幺情形下是否仍然成立，仍是一个尚未解决的问题。

致谢

第二和第三作者获得了 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 的部分资助，以及“欧洲区域发展基金（ERDF）：建设欧洲的一种方式”项目资助 PID2021-122126NB-C31 和安达卢西亚自治区政府的 PY20 00255、FQM185 及 FQM375 项目资助。第一作者获得了西班牙格拉纳达大学的 FPU21/00617 项目资助，该项目由西班牙大学部设立；此外还获得了 IMAG–玛丽亚·德·梅斯特基金项目 CEX2020-001105-M/AEI/10.13039/ 501100 011033 的资助。

参考文献

[1] E. M. Alfsen 和 F.W. Shultz，《算子代数状态空间的几何》，数学：理论与应用，Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2003

[2] D. Applebaum，《线性算子半群：及其在分析、概率论与物理学中的应用》，伦敦数学会学生读本，第 93 卷。剑桥大学出版社，英国剑桥，2019 年。[3] B. Aupetit，《谱理论入门》，Universitext。Springer-Verlag，美国纽约，1991 年。[4] B. Aupetit，《Jordan–Banach代数中极大单边理想的谱刻画》，《剑桥哲学会数学学报》117（1995），479–489。[5] F.F. Bonsall，J. Duncan，《完备赋范代数》，数学及其边界领域成果，第 80 卷。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1973 年。[6] R. Brits，M. Mabrouk，C. Touré，《C*代数上的乘法性 Gleason-Kahane-˙Zelazko 定理》，《数学分析及其应用杂志》500（2021），第 1 期，论文编号 125089，共 4 页。[7] M. Cabrera García，A. Rodriguez Palacios，《非结合赋范代数：第 1 卷，Vidav–Palmer 与 Gelfand–Naimark 定理》，剑桥大学出版社，2014 年。[8] E.B. Davies，《单参数半群》，伦敦数学会专著，第 15 号。伦敦等地：Academic Press，Harcourt Brace Jovanovich 旗下出版公司（1980）。[9] P. Garrett，《以实例讲解自守形式的现代分析》，第 2 卷。剑桥：剑桥大学出版社，2018 年。[10] B.C. Hall，《李群、李代数与表示：初等导论》，数学研究生教材，第 222 卷。Springer-Verlag，美国纽约，2003 年。[11] B.C. Hall，《数学家的量子理论》，数学研究生教材，第 267 卷。Springer，美国纽约，2013 年。[12] H. Hanche-Olsen，E. Størmer，《Jordan算子代数》，Pitman，伦敦，1984 年。[13] P. Jordan，J. von Neumann，E. Wigner，《量子力学形式体系的一种代数推广》，《数学年刊》（第 2 辑）35，第 1 期（1934），29–64。[14] T. Kato，《任意一对自伴收缩半群的 Trotter 乘积公式》，载于《泛函分析专题：献给 M. G. Krein 的论文集》，《数学进展补编研究》3，Academic Press（1978），第 185–195 页。[15] S. Kowalski，Z. Słodkowski，《巴拿赫代数中乘法线性泛函的刻画》，《数学研究》67（1980），215–223。[16] L. Li，A.M. Peralta，L. Wang，Y.S. Wang，《一致代数与 Lipschitz 代数上的弱 2-局部等距映射》，《巴塞罗那数学出版物》63（2019），第 1 期，241–264。[17] O. Loos，《巴拿赫Jordan代数中可逆元的集合》，《数学成果》29（1996），第 1–2 期，111–114。[18] A. Maouche，《取值于谱中的乘法形式》，《数学讨论会》71，1，43，1996，45（），第 – 期。[19] S. Oi，《Kowalski-Słodkowski定理的球面版本及其应用》，《澳大利亚数学会杂志》111（2021），第 3 期，386–411。[20] A.M. Peralta，《单位Jordan–Banach代数中可逆元集合之间的满射等距映射》，《数学分析及其应用杂志》502（2021），第 2 期，文章编号 125284，共 21 页。[21] B. Simon，《泛函积分与量子力学》，纯粹与应用数学，第 86 卷。纽约—旧金山—伦敦：Academic Press（1979）。[22] C. Touré，R. Brits，《C(X)上的乘法谱泛函》，《澳大利亚数学会通报》102（2020），第 2 期，303–307。

[23] C.Touré，F. Schulz，R. Brits，《取值于谱中的乘法映射》，《数学研究》239，第 1 期，55，2017，66（），第 – 期。[24] W. ˙Zelazko，《复Banach代数中乘法线性泛函的刻画》，《数学研究》30（1968），83–85。

格拉纳达大学理学院数学分析系，18071 格拉纳达，西班牙。

电子邮箱地址：gemares@correo.ugr.es

数学分析系，理学院，格拉纳达大学，18071 格拉纳达，西班牙。格拉纳达大学数学研究所（IMAG）。

电子邮箱：aperalta@ugr.es

格拉纳达大学理学院数学分析系，西班牙格拉纳达 18071。格拉纳达大学数学研究所（IMAG）。

电子邮件地址：avillena@ugr.es