arXiv:2305.05539v1 [math.CA] 7 May 2023

通过径向耗散性得到的 Rellich 不等式

YI C. HUANG

Abstract. 我们给出了一种概念上简单且本质上是一维的欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中的Rellich不等式方法。特别地，我们证明，当 $n \geq 4$时，标准拉普拉斯算子的径向部分与球面部分构成一个$[0, \pi/2]$ 角，这一性质已在Evans-Lewis、Machihara-Ozawa-Wadade以及Bez-Machihara-Ozawa的相关研究中得到认识。我们的证明直接而简短。

1. Introduction

设 $\mathbf{R}_n = \frac{n(n-4)}{4}$。对于适当的 f，我们考虑以下 Rellich不等式：

$$\mathbf{R}_n^2 \left\| \frac{f}{|x|^2} \right\|_2^2 \leq \|\Delta f\|_2^2, \tag{1.1}$$

其中 $|\cdot|$和 $\|\cdot\|_2$分别表示欧几里得距离和 L^2-范数 $\mathbb{R}^n$。注意，对于 1.1)，当 $n = 4$ 时显然成立；若要处理 Sobolev 空间 $H^2(\mathbb{R}^n)$中的一般函数，则必须限制在 $n \geq 5$。对于拉普拉斯算子，有

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{|x|^2} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中 Δ_r 表示径向拉普拉斯算子 $\partial_r^2 + \frac{n-1}{|x|}\partial_r$，径向导数 ∂_r 定义为 $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla$，而 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 表示球面上的 Laplace-Beltrami 算子 $\mathbb{S}^{n-1}$。令

$$L_j = \partial_j - \frac{x_j}{|x|}\partial_r, \quad j = 1, \cdots, n,$$

将其视为球型导数。因此，我们有如下关系

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} = |x|^2 \sum_{j=1}^{n} L_j^2.$$

注意，$-\sum_{j=1}^{n} L_j^2$是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的非负算子。

近期，[MOW17] 和 [BMO23], Machihara-Ozawa-Wadade 和 Bez-Machihara-Ozawa 从等式的框架出发证明 Rellich 不等式，并得到了以下优美的等式：对于 $n \geq 2$ 且 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$，

$$\|\Delta f\|_2^2 = \|\Delta_r f\|_2^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} L_j^2 f \right\|_2^2 + 2\mathbf{R}_n \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{L_j f}{|x|} \right\|_2^2 + 2\left\langle -\sum_{j=1}^{n} L_j^2 f_*, f_* \right\rangle, \tag{1.2}$$

其中 $f_* = \partial_r f + \frac{n-4}{2}\frac{f}{|x|}$。这里 $\cdot,\cdot$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的内积。

日期：2023年5月10日。2020年数学主题分类：主要分类 26D10；次要分类 46E35、35A23。关键词和短语：Rellich不等式，径向导数，耗散性。作者的研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：11801274）的资助。作者谨向早稻田大学的 Tohru Ozawa 教授致以诚挚谢意，感谢其热心支持。

（1.2）中的最后两项对于 $n \geq 4$ 均为非负项。这一性质可以在 Evans-Lewis 对 Laptev-Weidl 型 Hardy 不等式的延续研究 [EL05] 中找到[LW99]。本文旨在给出这一性质的一个直接、简洁且篇幅短小的证明，同时该证明不依赖于通过 L_j 和 f_* 对（1.2）进行的显式表示。

为方便起见，令

$$\Delta_s = \frac{1}{|x|^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} = \sum_{j=1}^{n} L_j^2.$$

定理 1.1（Evans-Lewis）。对于 $n \geq 4$ 和 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n/\{0\})$，

$$\operatorname{Re}\langle \Delta_r f, \Delta_s f\rangle \geq 0, \tag{1.3}$$

因此

$$\|\Delta f\|_2^2 \geq \|\Delta_r f\|_2^2 + \|\Delta_s f\|_2^2. \tag{1.4}$$

注 1.2. 正如[BMO23], 对于 $n = 3$ 成立

$$\|\Delta f\|_2^2 \geq \|\Delta_r f\|_2^2 \quad \text{and} \quad \|\Delta f\|_2^2 \geq \left(\frac{5}{8}\right)^2 \|\Delta_s f\|_2^2.$$

在这种 $n = 3$ 情况下，为（1.3）给出更精细的角度描述是很有意义的。 .

关于 Rellich 不等式的更多信息，请参见 [EL05、MOW17、BMO23]。关于齐性群的相关思想，参见 Ruzhansky 和 Suragan [RS17、RS19]。

2. Proof of Theorem 1.1

设 g 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数。一个简单的分部积分论证表明，$\frac{d}{dr}$ 是 $L^2(\mathbb{R}_+, r^\alpha dr)$ 中的耗散算子，其中 $\alpha \geq 0$[1]。因此，对于 $n \geq 4$,

$$\operatorname{Re}\left\langle \frac{1}{r}\partial_r g, \frac{g}{r^2}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1}dr)} \leq 0.$$

另请注意，$\partial_r^2 + \frac{(n-2)-1}{r}\partial_r$ 是 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{(n-2)-1}dr)$ 中的耗散算子，即

$$\operatorname{Re}\left\langle \left(\partial_r^2 + \frac{(n-2)-1}{r}\partial_r\right) g, \frac{g}{r^2}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1}dr)} \leq 0,$$

可视为拉普拉斯算子在 $\mathbb{R}^{n-2}$ 限制于径向函数时的耗散性[2]。上述两个不等式通过展开为球谐函数导出（1.3）。

注 2.1。利用极坐标和富比尼定理，我们看到

$$\|\Delta_r f\|_2^2 \geq \mathbf{R}_n^2 \left\|\frac{f}{|x|^2}\right\|_2^2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}),$$

可化为半直线上的加权 Rellich 不等式，参见 [HS23]。将此与 (1.4) 结合，便提出了一种本质上一维的方法来处理 (1.1)。

注 2.2. 总之，我们将 $\mathbb{R}^n$ 上的 Rellich不等式归结为 $n \geq 4$ 时 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-4}dr)$ 中 $\frac{d}{dr}$ 的耗散性。这是 $n \geq 4$ 发挥作用的关键部分。

[1]例如，参见 Hayashi-Ozawa 的重访文章 [HO17，第 3] 节，文中对 Tosio Kato 关于将 Landau-Kolmogorov 不等式推广至耗散算子的深刻且影响深远的工作进行了拓展 [Kat71] 。[2]这种维数变换技巧在波传播及其在非径向情形下对 Strichartz 估计的应用中很有用，例如参见 Kato-Nakamura-Ozawa [KNO07，引理 2。1]。

符合伦理标准

利益冲突 作者声明，不存在可能影响本研究报告的已知竞争性经济利益或个人关系。

数据和材料的可用性 不适用。

References

[BMO23] Neal Bez、Shuji Machihara 和 Tohru Ozawa。《Rellich不等式》再探。《数学杂志》，303(2)：文章编号：49，2023。[EL05] W. Desmond Evans 和 Roger T. Lewis。关于带磁势的 Rellich 不等式。《数学杂志》，251(2)：267–284，2005。[HO17] Masayuki Hayashi 和 Tohru Ozawa。关于耗散算子的 Landau-Kolmogorov 不等式。《美国数学会会刊》，145(2)：847–852，2017。[HS23] YI C. HUANG 和 Fuping Shi。等式框架下半直线上的 Rellich型不等式。arXiv 预印本 arXiv:2304.01061，2023。[Kat71] Tosio Kato。关于 Hardy、Littlewood 和 P´olya 的一个不等式。《数学进展》，7(3)：217–218，1971。[KNO07] Jun Kato、Makoto Nakamura 和 Tohru Ozawa。波动方程的加权Strichartz估计的一般化及其在自相似解中的应用。《纯粹与应用数学通讯》，60(2)：164–186，2007。[LW99] Ari Laptev 和 Timo Weidl。磁Dirichlet型的 Hardy不等式。载于《量子力学中的数学结果》（布拉格，1998），《算子理论：进展与应用》第108卷，第299–305页。Birkh¨auser，巴塞尔，1999。[MOW17] Shuji Machihara、Tohru Ozawa 和 Hidemitsu Wadade。关于 Rellich不等式的评论。《数学杂志》，286(3-4)：1367–1373，2017。[RS17] Michael Ruzhansky 和 Durvudkhan Suragan。齐性群上的 Hardy与Rellich不等式、恒等式及尖锐余项。《数学进展》，317：799–822，2017。[RS 19] Michael Ruzhansky 和 Durvudkhan Suragan。齐性群上的 Hardy不等式：Hardy不等式诞生100周年，第327卷。Springer，2019。

School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023,People's Republic of China电子邮箱：Yi. Huang.Analysis@gmail.com 主页：https://orcid.org/0000-0002-1297-7674