arXiv:2305.05545v1 [math.RT] 9 May 2023

通过莫尔斯复形上的杯积实现箭图簇的卷积

GRAEME WILKIN

Abstract. 博雷尔-摩尔同调中的卷积在中岛构造海森堡代数的表示以及 Kac-Moody 代数的修正包络代数的表示过程中发挥着重要作用。在最基本的形式下，两个箭图簇之间的卷积通过箭图的 Hecke 对应，先进行拉回，再进行推前来定义。

在此前的研究中，我们证明了 Hecke 对应可以通过流线空间得到一种莫尔斯理论解释。本文的目标是证明，定义中岛表示生成元的拓扑信息，可以编码在一个杯积中。该杯积对应于定义在无关系箭图的表示空间这一光滑空间上的莫尔斯复形，随后再将其拉回到满足给定一组关系的表示所构成的子簇上。研究结果不仅适用于作为主要研究动机的中岛箭图，也适用于由这些箭图衍生出的其他带关系的箭图（例如手锯箭图）。

对于箭图表示空间上的矩映射范数平方，流线空间上通常的 Morse-Bott-Smale 横截性条件并不成立，但仍满足较弱版本的横截性。本文很大一部分篇幅用于在这种弱横截性的情形下发展一套一般理论；通过增加一个中间步骤，即与某个欧拉类取杯积，可以由此恢复莫尔斯复形上微分和杯积的通常构造。对于箭图表示空间，这个欧拉类可以明确计算。

1. Introduction

计算空间 X 的上同调，一种广为人知的方法是先构造一个滤过 $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n = X$，再利用谱序列计算上同调。从莫尔斯理论的角度来看，可以通过考察函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 以及与之相关的梯度流或伪梯度流 $\varphi\colon X \times \mathbb{R} \to X$ 来处理这个问题。如果该流具有良好的紧性和收敛性，那么便可得到与 f相关的 X 的典范莫尔斯滤过。莫尔斯理论主定理指出，若该流在 X 的临界点附近也具有良好的局部性质（例如，f 是莫尔斯函数或莫尔斯–博特函数），那么谱序列第一页上的各群就可以用临界集的上同调及其莫尔斯指标来表示。

此外，如果流具有性质良好的临界集之间的流线空间（例如，若函数是 Morse-Bott-Smale，使得稳定流形与不稳定流形总是横截相交），那么谱序列中的微分和杯积便可通过流线空间上的拉回/推前同态来计算。使用莫尔斯理论的好处在于，上述所有数据（临界集、它们的指标以及流线空间

Date: 2023年5月10日。本文基于作者于2022年秋季驻留加州伯克利数学科学研究所期间开展的研究，该研究得到美国国家科学基金会第1440140号资助项目的支持；当时研究所举办的项目名称为“规范理论的解析与几何方面”。

临界点之间的流线空间）都可以利用函数 f 和流 φ进行解析描述，从而为我们提供一种具体计算谱序列各项的方法。

有许多有趣的例子并不直接满足上述条件。例如，横截性可能不成立，或者（更糟的是）空间可能是奇异的。本文的主要动机例子是箭图 Q 的表示空间 Rep(Q, v)，其中维数向量 v 固定；以及表示的子簇 Rep(Q, v $\mathcal{R}$)，它们满足给定的一组关系 $\mathcal{R}$。空间 Rep(Q, v) 是一个向量空间，带有复约化群 G 的线性作用，并具有一种辛结构，使得极大紧子群 K 的作用是哈密顿的。由此可得到一个矩映射 μ : Rep(Q, v) $\to \mathfrak{k}^*$，其定义仅相差一个中心元常数 $\alpha \in Z(\mathfrak{k}^*)$。这一框架属于一大类例子，在这些例子中，$\|\mu - \alpha\|^2$ 的莫尔斯理论已得到充分研究（参见 [2], [12]）；事实证明，相应的分层相对于 K 的作用是等变完美的，从而为商空间 [12]的上同调导出了非常明确的递归公式。

[29] 的结果完全刻画了 $\|\mu - \alpha\|^2$ 在空间 Rep(Q, v) 上的流线，并表明流线空间与 Hecke对应相关。因此，自然会问，莫尔斯-Bott-Smale 理论能否扩展到这一情形，以及中岛的工作 [17], [18], [19] 中出现的、通过 Hecke对应定义的拉回/推前同态，是否也会在构造谱序列上的杯积时出现。本文的目标是证明情况确实如此（参见定理 1.4）。

在第 2.6 节中，我们证明横截性在这一情形下不成立；然而，仍满足一种较弱形式的横截性，其定义如下。给定一个黎曼流形 M 和一个光滑函数f: $M \to \mathbb{R}$，可以定义向下梯度流 $\varphi_t(x_0)$，满足 $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x_0) = -\nabla f(\varphi_t(x_0))$ 和 $\varphi_0(x_0) = x_0$。如果该流具有良好性质，例如满足 [30] 的条件 (1)–(3)（M 是实解析的，f 是具有孤立临界值的解析函数，且该流满足紧致性条件），那么对于每一对临界集 C_ℓ 和 C_u，若 $f(C_\ell) < f(C_u)$，我们可以定义稳定集和不稳定集

$$W^+_{C_\ell} := \{x \in M \mid \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) \in C_\ell\}$$
$$W^-_{C_u} := \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) \in C_u\}, \quad \text{and} \quad W^-_{C_u,0} := W^-_{C_u} \setminus C_u.$$

以及位于某条流线上的点所构成的空间

$$\mathcal{F}^{u,0}_{\ell,0} := W^+_{C_\ell} \cap W^-_{C_u}.$$

然后，弱横截条件定义如下。

定义 1.1（参见定义 6.1）。设 M 是一个黎曼流形，且 f： $M \to \mathbb{R}$ 是满足 [30] 的条件 (1)–(3) 的最小退化光滑函数。若满足以下条件，则流线空间满足弱横截性。

(T1) 流线空间 $\mathcal{F}^{u,\ell}_0$，在 $W^-_{C_u,0}$ 中有一个管状邻域，记作 $D^u_\ell \to \mathcal{F}^{u,\ell}_0$，。(T2) 分层 $W^+_{C_\ell}$ 在 M 中有一个管状邻域，记作 $\tilde{V}_\ell \to W^+_{C_\ell}$，它限制为一个圆盘丛 $V_\ell \to \mathcal{F}^{u,\ell}_0$，，使得 D^u_ℓ 是 V_ℓ 的子丛。

注 1.2. 通常的 Morse-Bott-Smale 横截性条件等价于条件 $D_\ell^u = V_\ell$。

命题 2.29 表明，$\|\mu - \alpha\|^2$: 表示空间(Q, v) $\to \mathbb{R}$ 满足弱横截性，因此，对于一大类有趣的例子，该定义都成立。证明这一点的关键在于对 [29], 进行局部分析。该分析表明，关于上临界集附近流线空间结构的解析问题，可以归结为不稳定集线性化上的代数问题（同胚意义下），我们称之为负切片。此外，这个同胚限制在任意 G不变子集 [29, 上仍是同胚（推论 4.24]）。于是，流线空间对应于负切片的一个子簇，并有明确的描述（参见第 2.6.1 节）。

备注 1.3。莫尔斯理论有许多不同版本，其中通过扰动函数来获得性质良好的 Morse-Smale 函数。我们在此希望避免这种做法，因为未经扰动的函数$\|\mu - \alpha\|^2$: 表示空间(Q, v) $\to \mathbb{R}$ 包含大量有用的拓扑信息；例如，临界集对应于维数较低的箭图簇，而流线则与 Nakajima 的 Hecke 对应 [29]相关。此外，将讨论限制在满足给定关系集的表示子簇后，情况依然如此。此时，扰动函数会更加困难，因为光滑性的缺失意味着任意扰动都可能产生一个其梯度流不保留该子簇的函数。

本文的核心在于证明：定义来自 [19] 的 Nakajima 表示生成元的拓扑信息，编码在未扰动函数 $\|\mu - \alpha\|^2$ 对应的莫尔斯复形的杯积中，这正是我们在此采用弱横截性而不扰动函数的原因。

对于 Morse-Bott-Smale 函数，可以利用连接临界集的流线空间，通过拉回/推前同态构造微分和杯积（参见 [4]）。在弱横截性的情形下，仍然可以利用流线空间在莫尔斯复形上定义微分和杯积；不过此时还需要增加一个步骤，即与商丛 V_ℓ/D_ℓ^u 的欧拉类取杯积（参见第 6.2 节）。

这一理论适用于光滑空间表示空间(Q, v)，然而从表示论的角度来看（参见 [17], [18], [19], [20], [21]），研究表示空间(Q, v $\mathcal{R}$) $\subset$ 表示空间(Q,v)中满足给定一组 $\mathcal{R}$ 关系的表示子集更有意思。最重要的例子是 Nakajima 箭图簇，其关系具有复矩映射的形式；不过，下文的结果并不局限于这一类例子。

$\|\mu - \alpha\|^2$ 在 Rep(Q, v) 上的梯度流由复约化群 G 生成，因此保持子集 Rep(Q, v $\mathcal{R}$) 不变。由此，我们可以构造一个单射，将 Rep(Q, v $\mathcal{R}$) 中的每个临界集映射到相应的 Rep(Q, v) 中的临界集，因此，上文定义的杯积同态拉回后，成为奇异空间 Rep(Q, v $\mathcal{R}$) 上临界集的上同调之间的同态。McGerty 和 Nevins 的 Kirwan 满射性定理 [16]

表明，对于中岛箭图， $H^*(\mathcal{M}(Q,\mathrm{v}_\ell,\mathcal{R}))$ 的所有类都属于拉回 $H^*(\mathcal{M}(Q,\mathrm{v}_\ell)) \to H^*(\mathcal{M}(Q,\mathrm{v}_\ell,\mathcal{R}))$ 的像，其中 $\mathrm{v}_\ell \leq \mathrm{v}$。

为了在奇异空间上的临界集之间构造卷积同态，我们需要与环境光滑空间上的一个精心选取的上同调类作杯积。事实证明，这个上同调类是该空间的流线空间的一个显式定义的子流形 $\tilde{\tau}$ 的托姆类 $\tilde{}$ 与陈类 ξ 的杯积（参见推论 9.2 和推论 9.5；另见引理 9.7）。本文的主要结果是定理 9.8，它表明卷积由杯积诱导。

定理 1.4（定理 9.8）。设 Q 是一个箭图，其一组 $\mathcal{R}$ 完全二次关系完全受限于中岛箭图的关系（参见定义 2.2 和 3.2）。考虑矩映射能量函数 $\|\mu-\alpha\|^2$ 的一对相邻临界集 C_u（上）和 C_ℓ（下）：$\mathrm{Rep}(Q,\mathrm{v},\mathcal{R}) \to \mathbb{R}$，它们对应于维数向量为 $\mathbf{v_u} < \mathbf{v}_\ell = \mathbf{v_u} + \mathbf{e_k} \leq \mathrm{v}$ 的箭图簇 $\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u},\mathcal{R})$ 和 $\mathcal{M}(Q,\mathbf{v}_\ell,\mathcal{R})$。

那么庞加莱对偶于通过 Hecke 对应在博雷尔-摩尔同调中的卷积

$$H_*^{BM}(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v}_\ell,\mathcal{R})) \xrightarrow{\pi_\ell^*} H_*^{BM}(\mathcal{B}(Q,\mathbf{v_u},\mathbf{v}_\ell,\mathcal{R})) \xrightarrow{(\pi_u)_*} H_*^{BM}(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u},\mathcal{R}))$$

$\tilde{}$由环境光滑空间 $\mathrm{Rep}(Q,\mathrm{v}) \times \mathrm{Gr}(\mathrm{v_u},\mathrm{v}_\ell)$上矩映射能量函数对应的莫尔斯复形上的杯积与 $\tilde{\tau} \smile \xi$ 诱导。

论文结构。第 2 节概述了必要的定义和构造，内容自成一体，为后续各节在箭图表示空间上发展莫尔斯理论奠定基础。第 3 节给出了一种一般性构造，可用于证明一大类带关系的箭图所对应的模空间和负切片是光滑的；随后我们可利用该构造在第9节建立这些空间的变形理论。第 4 节回顾如何构造与莫尔斯滤过相关的谱序列第一页上的微分和杯积。这里的构造只用到莫尔斯滤过的存在，并采用了一种便于衔接第 5 节的表述方式。第 5 节利用莫尔斯理论主定理进一步细化杯积和微分的构造，使其能够用局部化在临界点周围的相对上同调群和流线空间来表示。我们重点讨论相邻临界集的情形（这足以构造 [19] 的表示的生成元）；一般情形则需要对流线空间作紧化处理，这留待后续论文讨论。

到目前为止，所有结果都适用于满足[30] 中的条件（1）–（5）的函数 $f\colon Z \to \mathbb{R}$（特别是，我们不要求空间 Z 是光滑的）。在第 6 节中，我们现在将讨论范围限制在空间为流形且函数满足 Kirwan 最小退化条件（参见 [12]）以及定义 6.1 中的弱横截条件的情形。此时，第 4 节和第 5 节中的相对上同调群可以改写为临界集和流线空间的上同调群，而微分和杯积则可以用这些空间之间的拉回映射和杯积映射来表示（参见交换图（6.5）和（6.6））。

在第 7 节中，我们回顾一些关于博雷尔-摩尔同调的事实，然后在第 8 节中证明，用于构造微分和杯积的同态是拉回的 Poincar´e 对偶

以及博雷尔-摩尔同调中的推前。第9节接着给出主要结果（定理 9.8），证明与某个子流形的托姆类作杯积后，拉回得到一个同态，该同态在满足给定关系集的表示空间上与博雷尔-摩尔同调中的卷积对偶于庞加莱对偶。

2. Background

本节回顾 [29] 和 [30] 中的重要定义和定理，这些内容将在本文其余部分中使用。关于箭图的材料取自原始文献 [11], [17], [19]和 [9]。本文采用的记号和设定沿用 [29] 中的用法。

2.1. 箭图的表示空间。箭图是一个有向图，由顶点集合 $\mathcal{I}$、边集合 $\mathcal{E}$ 以及首尾映射 $h, t: \mathcal{E} \to \mathcal{I}$组成。如果集合 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{E}$ 都是有限集，则该箭图是有限的。箭图 Q的复表示由一组复向量空间 $\{V_k\}_{k\in\mathcal{I}}$ 和$\mathbb{C}$-线性同态 $\{x_a: V_{t(a)} \to V_{h(a)}\}_{a\in\mathcal{E}}$组成。表示的维数向量是向量 $\mathbf{v} := (\dim_{\mathbb{C}} V_k)_{k\in\mathcal{I}} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{I}}_{\geq 0}$。

所有维数向量固定为 $\mathbf{v}$ 的 Q 复表示的向量空间记为

$$\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}) := \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} \operatorname{Hom}(V_{t(a)}, V_{h(a)}). \tag{2.1}$$

群

$$G_{\mathbf{v}} := \prod_{k\in\mathcal{I}} \mathsf{GL}(V_k, \mathbb{C}) \tag{2.2}$$

作用于空间 $\operatorname{Vect}(Q,\mathbf{v}) := \bigoplus_{k\in\mathcal{I}} V_k$，因此也通过对每个向量 $\operatorname{Hom}(V_{t(a)}, V_{h(a)})$ 诱导的作用作用于表示空间$(Q, \mathbf{v})$

$$(g_i)_{k\in\mathcal{I}} \cdot (x_a)_{a\in\mathcal{E}} := \left(g_{h(a)} x_a g_{t(a)}^{-1}\right)_{a\in\mathcal{E}}. \tag{2.3}$$

在每个向量空间 V_k 上给定 Hermitian结构后，我们可以定义酉群 $\mathsf{U}(V_k)$，从而定义

$$K_{\mathbf{v}} := \prod_{k\in\mathcal{I}} \mathsf{U}(V_k).$$

这通过包含映射 $K_{\mathbf{v}} \hookrightarrow G_{\mathbf{v}}$作用于 $\operatorname{Rep}(Q,\mathbf{v})$。 $G_{\mathbf{v}}$ 和 $K_{\mathbf{v}}$ 的李代数分别记作 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$ 和 $\mathfrak{k}_{\mathbf{v}}$ 。给定表示 $x \in \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v})$， $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$ 在切空间 $T_x \operatorname{Rep}(Q,\mathbf{v})$上的无穷小作用记作 $\rho_x^{\mathbb{C}}: \mathfrak{g}_{\mathbf{v}} \to T_x \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v})$，其定义如下公式所示。

$$\rho_x^{\mathbb{C}}(u) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tu} \cdot x = \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} (u_{h(a)} x_a - x_a u_{t(a)}) \in \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} \operatorname{Hom}(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \cong \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}) \tag{2.4}$$

$\mathfrak{k}_{\mathbf{v}}$ 的作用记为 $\rho_x: \mathfrak{k}_{\mathbf{v}} \to \operatorname{Rep}(Q,\mathbf{v})$，并通过包含映射 $\mathfrak{k}_{\mathbf{v}} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$定义。在使用这些同态的伴随时，$\rho_x^{\mathbb{C}}$ 与 ρ_x 之间的区别十分重要；例如，在定义 2.10 中定义局部切片时便是如此。

给定一个箭图 Q，设 $\mathbf{v_1} = (v_k^{(1)})_{k\in\mathcal{J}} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{J}}$ 和 $\mathbf{v_2} = (v_k^{(2)})_{k\in\mathcal{J}} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{J}}$ 是 Q的维数向量。对于每个 $k \in \mathcal{J}$，设 $V_k^{(1)}$ 和 $V_{(2)\,k}$ 分别表示维数为 $v_k^{(1)}$ 和 $v_k^{(2)}$ 的复向量空间。我们定义这些空间

$$\mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) := \bigoplus_{k\in\mathcal{J}} \mathrm{Hom}(V_k^{(1)}, V_k^{(2)}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) := \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(V_{t(a)}, V_{h(a)}).$$

这些是 Q 中长度为 0 和长度为 1 的路径上的同态空间。注意 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}} \cong \mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v})$。$\mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ 的维数记为

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = \sum_{k\in\mathcal{J}} v_k^{(1)} v_k^{(2)}.$$

箭图的 Ringel 形式（参见 [9, 第 2] 节）在 $\mathbb{Z}^{\mathcal{J}}$ 上是

$$\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) = \sum_{k\in\mathcal{J}} v_k^{(1)} v_k^{(2)} - \sum_{a\in\mathcal{E}} v_{t(a)}^{(1)} v_{h(a)}^{(2)}. \tag{2.5}$$

Ringel 形式给出了变形复形 (2.38) 的欧拉示性数的一个简洁表达式，我们在 (2.41) 中使用了这一表达式。

2.2. 具有关系的箭图表示。 Q 中的一条路径是有限条边的串接，记作 $p = a_n \cdots a_1$，其中 $h(a_j) = t(a_{j+1})$，对每个 $j = 1$、.....、$n-1$。路径 $p = a_n \cdots a_1$ 的头和尾分别为 $h(p) := h(a_n)$ 和 $t(p) := t(a_1)$。路径 $p = a_n \cdots a_1$ 确定了一个同态 $\mathrm{Rep}(Q, \mathrm{v}) \to \mathrm{Hom}(V_{t(p)}, V_{h(p)})$，定义为

$$x \mapsto x_p := x_{a_n} \cdots x_{a_1}.$$

给定一个表示 $x = x_1 \oplus x_2 \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_1}) \oplus \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_2})$，其中向量空间记作 $\mathrm{Vect}(Q, \mathrm{vj}) = \bigoplus_{k\in\mathcal{J}} V(j)_k$ for $j = 1, 2$，路径 $p = a_n \cdots a_1$ 确定一个同态 $dp_x : \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \to \mathrm{Hom}(V(2)_{t(p)}, V(1)_{h(p)})$，定义如下。对于每个 $a \in \mathcal{E}$ and $j = 1, 2$，令 $(x_j)_a : V(j)_{t(a)} \to V(j)_{h(a)}$ 表示表示 x_1 and x_2中的同态，并对任意 $\delta x \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1)$ 定义

$$dp_x(\delta x) := \sum_{\ell=1}^{n} (x_1)_{a_n} \cdots (x_1)_{a_{\ell+1}} (\delta x)_{a_\ell} (x_2)_{a_{\ell-1}} \cdots (x_2)_{a_1}. \tag{2.6}$$

令 $\mathcal{P}_{t,h}$ 表示具有给定尾 $t \in \mathcal{J}$ 和头 $h \in \mathcal{J}$的所有路径的集合。给定一个箭图 Q，一个头为 $h(r) \in \mathcal{J}$ and 尾为 $t(r) \in \mathcal{J}$ 的关系 r 是路径的有限个 $\mathbb{C}$- 线性组合，记作

$$r = \sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p p.$$

二次关系是指其中唯一的路径 p with $\lambda_p \neq 0$ 长度为二的关系。任意关系都确定一个代数映射 $\nu_r : \mathrm{Rep}(Q, \mathrm{v}) \to \mathrm{Hom}(V_{t(r)}, V_{h(r)})$，其定义为

$$x \mapsto \sum_p \lambda_p x_p.$$

G给定有限关系集 $\mathcal{R}$，定义 ν: Rep$(Q, \mathrm{v}) \to \bigoplus_{r\in\mathcal{R}} \mathrm{Hom}(V_{t(r)}, V_{h(r)})$ b y

$$\nu(x) = \bigoplus_{r\in\mathcal{R}} \nu_r(x). \tag{2.7}$$

$(Q, \mathcal{R})$ 的一个表示是 ν 核中的一个表示。维数向量为 v 的 $(Q, \mathcal{R})$ 的所有表示构成的空间是子集 Rep$(Q, \mathrm{v}\ \mathcal{R}) := \nu^{-1}(0) \subset$ Rep(Q, v)。例如，带关系的箭图用于构造超凯勒 ALE 4 流形 [13]，、超凯勒 ALE 4 流形上瞬子的模空间 [14]，，以及更一般地，[17],[19], [20], [21] 的超凯勒商空间。[22] 的手锯箭图是带关系箭图的另一个重要例子。值得注意的是，所有这些例子都具有二次关系。

为了研究变形复形 (2.38)，我们定义

$$\mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) := \bigoplus_{r\in\mathcal{R}} \mathrm{Hom}(V^{(2)}_{t(r)}, V^{(1)}_{h(r)}) \tag{2.8}$$

对于有限关系集 $\mathcal{R}$。对每个 $r \in \mathcal{R}$，记作 $r = \sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),\ h(r)}} \lambda_p p$。给定一个表示 $x = x_1 \oplus x_2 \in$ Rep$(Q,$ $\mathrm{v_1}, \mathcal{R}) \oplus$ Rep$(Q, \mathrm{v_2}, \mathcal{R})$，我们可以将同态 (2.6) 扩展为同态 $d\nu_x$: Hom$^1(Q, \mathrm{v_2}, \mathrm{v_1}) \to$ Rel$(Q, \mathrm{v_2}, \mathrm{v_1}, \mathcal{R})$，其定义如下：

$$d\nu_x(\delta x) := \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r) dp_x(\delta x). \tag{2.9}$$

通常的变形理论表明，若以下变形复形中的 $\rho^{\mathbb{C}}_x$ 是单射且 $d\nu_x$ 是满射，则模空间 (2.22) 中的点是光滑的。

$$\mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_x} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \xrightarrow{d\nu_x} \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathcal{R}), \tag{2.10}$$

在这种情况下，模空间的切空间由上述复形的中间上同调给出。

以下引理将在第 2.4 节中用于证明，可以使用变形复形 (2.38) 来定义负切片。

引理 2.1. 设 $\mathcal{R}$ 为一个有限关系集，设 $x = x_1 \oplus x_2 \in$ 表示空间$(Q, \mathrm{v_1}) \oplus$ 表示空间$(Q, \mathrm{v_2})$，并设 $\delta x \in$ Hom$^1(Q, \mathrm{v_2}, \mathrm{v_1})$。那么 $\nu(x) = \nu(x + \delta x)$ 当且仅当 $\delta x \in \ker\ d\nu_x$。

证明。关于复合 Rep$(Q, \mathrm{v_1}, \mathcal{R}) \oplus$ Rep$(Q, \mathrm{v_2}, \mathcal{R})$，对于每个 $k \in \mathcal{I}$ let $V_{(1)\,k}$ and$V^{(2)}_k$，表示顶点 k 处的向量空间。

首先注意，对于任意一对边 a_1、$a_2 \in \mathcal{E}$，若有 $t(a_2) = h(a_1)$，则我们有

$$(x_2)_{a_2}(\delta x)_{a_1} = 0, \quad (\delta x)_{a_2}(x_1)_{a_1} = 0, \quad (\delta x)_{a_2}(\delta x)_{a_1} = 0.$$

上面的第一个方程是由以下事实推出的：$(x_1)_{a_2}$ 的定义域是 $V^{(2)}_{t\ (a_2)}$，而$(\delta x)_{a_1}$ 的像包含于 $V^{(1)}_{h\ (a_1)} = V_{(1)\ t(a_2)}$，因此复合为零。其他方程可由

类似的推理得出。因此，对于每条路径 $p = a_n \cdots a_1$，我们有

$$(x+\delta x)_p = (x_1)_{a_n} \cdots (x_1)_{a_1} + (x_2)_{a_n} \cdots (x_2)_{a_1} + \sum_{\ell=1}^{n} (x_1)_{a_n} \cdots (x_1)_{a_{\ell+1}} (\delta x)_{a_\ell} (x_2)_{a_{\ell-1}} \cdots (x_2)_{a_1}$$
$$= (x_1)_p + dp_x(\delta x) + (x_2)_p.$$

将上述公式对每个关系求和，$r = \sum_p \lambda_p p \in \mathcal{R}$ 得到

$$\nu_r(x+\delta x) = \sum_p \lambda_p (x+\delta x)_p = \sum_p \lambda_p \left((x_2)_p + (x_1)_p\right) + \sum_p \lambda_p dp_x(\delta x)$$

因此，对所有关系求和，$r \in \mathcal{R}$ 可得

$$\nu(x+\delta x) = \nu(x) + d\nu_x(\delta x).$$

因此，$\nu(x) = \nu(x+\delta x)$ 当且仅当 $d\nu_x(\delta x) = 0$。 □

现在考虑所有关系都是二次关系的情形。此时每个关系都具有如下形式

$$r = \sum_{p \in \mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r) p, \quad p = a_2(p)a_1(p).$$

定义 2.2。一组 $\mathcal{R}$ 二次关系是完备的，当且仅当

(1) 对于每条边 $a \in \mathcal{E}$ 以及每个满足 $h(a) = h(r)$ 的关系 $r \in \mathcal{R}$，都存在一条路径$p \in \mathcal{P}_{t(r),\ h(r)}$ 使得 $\lambda_p(r) \neq 0$ 且 $a = a_2(p)$；(2) 对于每条满足 $t(a) = t(r)$ 的边 $a \in \mathcal{E}$，若存在某个关系 $r \in \mathcal{R}$，则 r 是唯一满足此性质的关系，并且存在唯一一条路径 $p \in \mathcal{P}_{t(r),\ h(r)}$ 使得 $\lambda_p(r) \neq 0$ 且$a = a_1(p)$。

完备性用于引理 2.6，该引理给出了计算变形复形 (2.38) 中所用态射 $d\nu_x$ 的余核的公式。这个公式在实例中更容易使用，因为它只取决于某个表示的像的维数。下面的例子表明，完备性在许多值得关注的例子中都会出现；特别是，[13], [14],[17], [19], [20], [21] 和 [22] 中的所有箭图都具有完备的二次关系集。

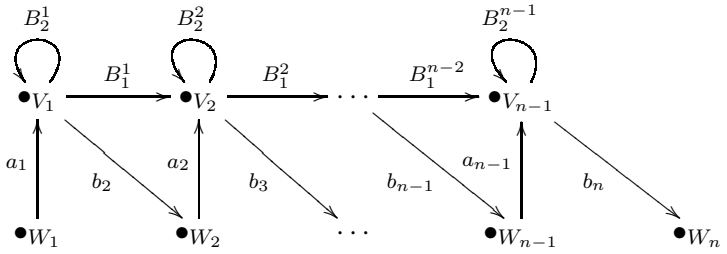
例 2.3（中岛箭图具有完备关系）。中岛箭图是一个箭图 Q，其顶点为 $\mathcal{I}$，边为 $\mathcal{E}$，首尾映射为 $h, t : \mathcal{E} \to \mathcal{I}$，满足每条边 $a \in \mathcal{E}$ 都有一条共轭边$\bar{a} \neq a$，使得 $h(\bar{a}) = t(a)$，$t(\bar{a}) = h(a)$，且 $\bar{\bar{a}} = a$。选取边的一个子集 $\mathcal{E}^{0,\ 1} \subset \mathcal{E}$，使得$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{0,\ 1} \cup \mathcal{E}^{0,\ 1}$，且 $\mathcal{E}^{0,\ 1} \cap \mathcal{E}^{0,\ 1}$ 为空。对于每个顶点 $k \in \mathcal{I}$，存在一个关系

$$r_k = \sum_{a \in \mathcal{E}^{0,1} :\, h(a)=k} a\bar{a} - \sum_{a \in \mathcal{E}^{0,1} :\, t(a)=k} \bar{a}a. \tag{2.11}$$

因此，对于每个关系 r_k，都有 $t(r_k) = h(r_k)$。令 $\mathcal{R}$ 表示关系 $\{r_k\}_{k \in \mathcal{I}}$的有限集。从 (2.11) 可清楚看出，对于每条边 $a \in \mathcal{E}^{0,\ 1}$，都存在唯一的关系 $r = r_{h(a)}$，使得对于恰好一条路径 p，有 $a = a_2(p)$，且 $\lambda_p(r) \neq 0$。同样的推理也适用于每条边 $\bar{a} \in \mathcal{E}^{0,\ 1}$，因为 $h(\bar{a}) = t(a)$。因此，定义 2.2 的第一个条件成立。再次明确考察 (2.11) 可清楚看出，定义 2.2 的第二个条件也成立，因此该关系集是完备的。

例 2.4（手锯箭图具有完备关系）。设 Q 是 [22] 中的“手锯”箭图，其边标记如下。

(2.12)



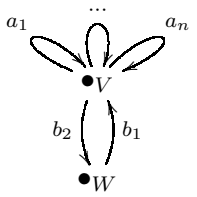
对于每个 $k=1,\ \dots,\ n-2$，都有一个关系。

$$r_k = B_1^k B_2^k - B_2^{k+1} B_1^k + a_{k+1} b_{k+1} \tag{2.13}$$

每个关系都会诱导出一个映射 $\nu_{r_k}\colon \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}) \to \mathrm{Hom}(V_k, V_{k+1})$。因此，我们可以看到，对于每个$k=1,\dots,n-2$，顶点 V_{k+1} 满足 $V_{k+1}=h(r_k)$。对于这些顶点中的每一个，我们都有 $\{a\in\mathcal{E}:\ \ h(a)=V_{k+1}\}=\{a_{k+1},B_1^k,B_2^{k+1}\}$。由此可以看出，根据 (2.13)，定义 2.2 的第一个条件得以满足。类似地，对于每个 $k=1,\dots,n-2$，顶点 V_k 满足 $V_k=t(r_k)$，并且$\{a\in\mathcal{E}:\ \ t(a)=V_k\}=\{b_{k+1},B_1^k,B_2^k\}$。同样，由 (2.13) 可以看出，定义 2.2 的第二个条件得以满足，因此这些关系是完备的。

下一个例子是 ADHM箭图的扩展版本。

例 2.5. 设 Q 是一个箭图，有两个顶点，在下图中分别标记为 V 和 W；顶点 V 上有任意多个环（标记为 $a_1,\dots,a_n$），而 V 和 W 之间有边 b_1 和 b_2。



给定任意置换 $\sigma\in S_n$，定义关系

$$r = a_1a_{\sigma(1)} + a_2a_{\sigma(2)} + \cdots + a_na_{\sigma(n)} + b_1b_2 \quad \text{and} \quad r' = b_2b_1. \tag{2.14}$$

于是可以直接验证这些关系是完备的，因为每条边 $a_1,\dots,a_n,b_1,b_2$ 都是某条路径的首边，该路径非平凡地出现在关系 r 或 r' 之一中；同时，它也是唯一一条出现在 r 或 r' 之一中的路径的尾边。

与上面的引理 2.1 一样，考虑一个表示 $x=x_1\oplus x_2\in\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v_1},\mathcal{R})\oplus\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v_2},\mathcal{R})$，并设 $\delta x\in\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v_2},\mathbf{v_1})$。对于每条长度为 2 的路径 $p=a_2a_1$，由 (2.6) 可得

$$dp_x(\delta x) = (x_1)_{a_2}(\delta x)_{a_1} + (\delta x)_{a_2}(x_2)_{a_1}.$$

因此，.....的伴随

$$\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v_2},\mathbf{v_1}) \xrightarrow{dp_x} \mathrm{Hom}(V_{t(a_1)},V_{h(a_2)})$$

is

$$(dp_x)^*(u) = (x_1)^*_{a_2} u + u(x_2)^*_{a_1}.$$

因此，(2.9) 变为

$$\begin{aligned} d\nu_x(\delta x) &= \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r) dp_x(\delta x) \\ &= \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r) \left((x_1)_{a_2(p)} (\delta x)_{a_1(p)} + (\delta x)_{a_2(p)} (x_2)_{a_1(p)} \right) \end{aligned}$$

因此，对于 $u = (u_r)_{r\in\mathcal{R}}$，伴随式

$$\mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \xrightarrow{d\nu_x^*} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})$$

由.....给出

$$d\nu_x^*(u) = \sum_{r\in\mathcal{R}} \sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \overline{\lambda_p(r)} \left((x_1)^*_{a_2} u_r + u_r (x_2)^*_{a_1} \right). \tag{2.15}$$

下一个引理给出了 $d\nu_x$ 的余核公式，该公式仅取决于 x_2 的像的维数。

引理 2.6. 设 $\mathcal{R}$ 是一组完全二次关系，令 $x = x_1 \oplus x_2 \in$ 表示空间$(Q, \mathbf{v_1})\oplus$表示空间$(Q, \mathbf{v_2})$，并考虑

$$\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \xrightarrow{d\nu_x} \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R})$$

由（2.9）可知。令 $\mathbf{r}$ 为 $(\mathrm{im}\, x_1)^\perp$ 的维数向量。那么，如果 $x_2 = 0$，我们有

$$\mathrm{coker}\, d\nu_x \cong \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{r}, \mathcal{R}). \tag{2.16}$$

特别是

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{coker}\, d\nu_x = \sum_{r\in\mathcal{R}} (v_2)_{t(r)} \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{r}_{h(r)} \tag{2.17}$$

证明。首先证明，$u \in \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{r}\ \mathcal{R})$ 意味着 $d\nu_x^*(u) = 0$。根据 $\mathbf{r}$ 的定义，$u \in \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{r}\ \mathcal{R})$ 意味着 $\mathrm{im}\ u \perp \mathrm{im}\ x_1$，因此对所有边 $a \in \mathcal{E}$ 和所有关系 $r \in \mathcal{R}$，都有 $(x_1)^*_a u_r = 0$。然后，由 (2.15) 和 $x_2 = 0$ 可知 $d\nu_x^*(u) = 0$。

现在我们利用关系的完备性来证明逆命题。如果 $u \in \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R})\ \backslash \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{r}\ \mathcal{R})$，那么 u 的像不垂直于 x的像，因此存在一条边$a \in \mathcal{E}$ 和一个关系 $r \in \mathcal{R}$，使得 $(x_1)^*_a u_r \neq 0$。由此可得，$h(a) = h(r)$，因此，关系完备且为二次的假设意味着存在一条路径 $p = aa'$，满足 $\lambda_p(r) \neq 0$。注意，这意味着 $t(a') = t(r)$，从而存在一个同态 $(\delta x)_{a'} \in \mathrm{Hom}(V_{t(a')}\ V_{h(a')}) \subset \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})$，使得

$$0 \neq \langle (x_1)_a (\delta x)_{a'}, u_r \rangle = \langle (\delta x)_{a'}, (x_1)^*_a u_r \rangle .$$

关系的完备性随后意味着 r 是满足 $t(a')=t(r)$ 的唯一关系，而p 是满足 $\lambda_p(r)\neq 0$ 和 $a_1(p)=a'$ 的唯一路径。这一唯一性意味着，在下列表达式中，对于 $d\nu_x^*$，求和中只有一项非零

$$\langle(\delta x)_{a'},d\nu_x^*(u)\rangle=\langle d\nu_x(\delta x)_{a'},u\rangle=\sum_r\sum_p\langle\lambda_p(r)(x_1)_a(\delta x)_{a'},u_r\rangle=\left\langle(\delta x)_{a'},\overline{\lambda_p(r)}(x_1)_a^*u_r\right\rangle.$$

因此，$u\in\mathsf{Rel}(Q,\mathbf{v_2},\mathbf{v_1},\mathcal{R})\setminus\mathsf{Rel}(Q,\mathbf{v_2},\mathcal{R})$ 意味着 $d\nu_x^*(u)\neq 0$，或者等价地，$d\nu_x^*(u)=0$意味着 $u\in\mathsf{Rel}(Q,\mathbf{v_2},\mathcal{R})$。□

最后，还有许多例子满足 $d\nu_x$ 是满射；在第9节中，这些例子将有助于证明某些子簇是光滑的。一个重要的例子是例2.3中来自中岛箭图的关系，此时 $\nu=\mu_{\mathbb{C}}$ 是复矩映射。在这种情况下，$\mathsf{Rel}(Q,\mathbf{v},\mathbf{v},\mathcal{R})=\mathsf{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})$，因此切空间的变形复形具有如下形式

$$\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})\xrightarrow{\rho_x^{\mathbb{C}}}\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})\xrightarrow{d\nu_x}\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})$$

因此，$d\nu_x$ 的像中的同态对应于李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}\cong\mathsf{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})$的元素。$d\nu_x$ 的伴随为

$$\begin{aligned}d\nu_x^*(u)&=\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}_{t(r),h(r)}}\lambda_p(r)\left((x_1)_{a_2}^*u_r+u_r(x_2)_{a_1}^*\right)\\&=\left(u_{t(a)}x_a^*-x_a^*u_{h(a)}\right)_{a\in\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

因此 关于 $\mathsf{Hom}^1(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})$ i 上 Hermitian 内积的转置 s

$$(d\nu_x^*(u))^*=\left(x_au_{t(a)}^*-u_{h(a)}^*x_a\right)_{a\in\mathcal{E}}=\rho_x^{\mathbb{C}}(u^*).$$

特别地，$\ker\ d\nu_x^*\cong\ker\ \rho_x^{\mathbb{C}}$。若该表示稳定，则 $\ker\ \rho_x^{\mathbb{C}}$由 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$ 的对角元素构成，因此 $d\nu_x$ 满射到 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}/\mathbb{C}$ 上。

2.3. 矩映射范数平方的性质。设 Q 是一个维数向量为 $\mathbf{v}=(v_k)_{k\in\mathcal{J}}$ 的箭图，并在向量空间 $V_k\cong\mathbb{C}^{v_k}$ 上固定一个 Hermitian结构。由此可在 $\mathsf{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 上定义相应的辛结构，具体如下。给定 $x\in\mathsf{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 以及切向量 $\delta x_1,\delta x_2\in T_x\mathsf{Rep}(Q,\mathbf{v})\cong\mathsf{Rep}(Q,\mathbf{v})$，定义度量

$$g(\delta x_1,\delta x_2):=\sum_{a\in\mathcal{E}}\mathsf{Re}\,\mathrm{tr}\left((\delta x_1)_a(\delta x_2)_a^*\right),\tag{2.18}$$

以及辛结构

$$\omega(\delta x_1,\delta x_2):=\sum_{a\in\mathcal{E}}\mathsf{Im}\,\mathrm{tr}\left((\delta x_1)_a(\delta x_2)_a^*\right).\tag{2.19}$$

注意，$\omega(\delta x_1,\delta x_2)=g(-i\delta x_1,\delta x_2)$，因此复结构 $I=-i\cdot\mathrm{id}$ 与度量相容。赋予该复结构和度量后，向量空间 $\mathsf{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 具有 K¨ahler 流形的结构。

在李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$ 上定义内积

$$\langle u_1, u_2\rangle = \sum_{k\in\mathcal{I}} \operatorname{tr}\left((u_1)_k (u_2)_k^*\right) \tag{2.20}$$

并注意到，这在 $K_{\mathbf{v}} \subset G_{\mathbf{v}}$ 的伴随作用下是不变的。利用内积，我们将 $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{k}^*$ 视为 $\rho_x^{\mathbb{C}*}\colon\ T_x \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}) \to \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$，表示相对于度量 g 和 $\mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$ 上的内积的无穷小作用 $\rho_x^{\mathbb{C}}\colon\ \mathfrak{g}_{\mathbf{v}} \to T_x \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 的伴随。

$K_{\mathbf{v}}$ 在 $\operatorname{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 上的作用保持辛形式 ω 不变，并且是哈密顿作用，其矩映射为

$$\mu(x) = \frac{1}{2i}\sum_{a\in\mathcal{E}} [x_a, x_a^*] \in \mathfrak{k}_{\mathbf{v}}^* \cong \mathfrak{k}_{\mathbf{v}}. \tag{2.21}$$

对于所有 $k \in K_{\mathbf{v}}$ 和 $x \in \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v})$，矩映射都是 $K_{\mathbf{v}}$-等变的 $\mu(k\cdot x) = \operatorname{Ad}_k \mu(x)$。$\mathfrak{k}_{\mathbf{v}}$ 的中心为

$$Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{v}}) = \left\{(\alpha_k \cdot \mathrm{id}_{V_k})_{k\in\mathcal{I}} \mid \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ for all } k \in \mathcal{I}\right\}.$$

如果 $\alpha = (i\alpha_k \cdot \mathrm{id}_{V_k})_{k\in\mathcal{I}} \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{v}})$ 满足 $\sum_{k\in\mathcal{I}} \alpha_k \dim_{\mathbb{C}} V_k = 0$，则称其为可容许的。注意，$\operatorname{tr}(\mu(x)) = 0$，因此当 α 不可容许时，$\mu^{-1}(\alpha)$ 为空。给定一个可容许的 $\alpha \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{v}})$，其辛商为

$$\mathcal{M}_\alpha(Q, \mathbf{v}) := \mu^{-1}(\alpha)/K_{\mathbf{v}}. \tag{2.22}$$

从现在起，α 始终表示 $\mathfrak{k}_{\mathbf{v}}$ 的一个可容许中心元。将维数向量 $\mathbf{v}$ 的秩和 α-度定义为。

$$\begin{aligned}\deg_\alpha(Q, \mathbf{v}) &:= \sum_{k\in\mathcal{I}} \alpha_k v_k\\ \operatorname{rank}(Q, \mathbf{v}) &:= \sum_{k\in\mathcal{I}} v_k\end{aligned}$$

α-斜率是 $\operatorname{slope}_\alpha(Q, \mathbf{v}) := \deg_\alpha(Q, \mathbf{v})/\text{秩}(Q, \mathbf{v})$。当且仅当每个真非零子表示都满足相应条件时，表示空间 $x \in \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 是 α-稳定的（分别为 α-半稳定的）。

$$\operatorname{slope}_\alpha(Q, \mathbf{v}') < 0 \quad (\text{resp. } \operatorname{slope}_\alpha(Q, \mathbf{v}') \le 0).$$

King [11, 命题 3.1] 表明，上述意义下的斜率稳定性与仿射几何不变量理论中的稳定性一致，并且 α-多稳定表示同构于 $\|\mu - \alpha\|^2$ 的极小值点。

以下定义用于引理 2.8，将临界点定义为平移动量映射的范数平方的极小值点的直和。

定义 2.7. 设 Q 为一个箭图，$\mathbf{v}$ 为一个维数向量，且 $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathcal{I}}$ 为 $\mathfrak{k}_{\mathbf{v}}$的一个可容许中心元。给定任意维数向量 $\mathbf{0} \le \mathbf{v}' \le \mathbf{v}$，$(Q, \mathbf{v}')$ 上诱导的可容许中心元为

$$\alpha' = \left((\alpha_k - \operatorname{slope}_\alpha(Q, \mathbf{v}')) \cdot \mathrm{id}_{V_k'}\right)_{k\in\mathcal{I}}. \tag{2.23}$$

定义能量函数 f: 表示空间$(Q, \mathbf{v}) \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \|\mu(x) - \alpha\|^2.$$

相对于度量 (2.18)， f 的梯度为

$$\operatorname{grad} f(x) = I\rho_x(\mu(x) - \alpha).$$

类比于 [2, 第 5], 节研究的杨–米尔斯泛函的临界点，临界点方程 $\operatorname{grad} f(x) = 0$ 表明，表示 x 可分解为子表示 $x = \bigoplus_{\ell=1}^{n} x_\ell$，使得每个 $x_\ell \in \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)$ 都满足 $\mu(x_\ell) = \alpha_\ell$，其中可容许中心元 $\alpha_\ell \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{v}_\ell})$ 是通过构造 (2.23) 由 $\alpha \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{v}})$ 诱导得到的。等价地，临界点是 $\|\mu(x_\ell) - \alpha_\ell\|^2$ 在 $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)$ 上的极小值点的直和。因此，每个临界集都由一个维数向量组成的向量标记

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \quad \text{such that } \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k. \tag{2.24}$$

更详细的解释见 [29, 第 2.4] 节。下文我们滥用记号，用$\mu^{-1}(\alpha_\ell)$表示 $\|\mu - \alpha_\ell\|^2$ 在 $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)$ 上的极小值点集合。

令 $\operatorname{Crit}(f) \subset \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 为 f 的所有临界点构成的集合。给定任意临界点 x，令$\beta = \mu(x) - \alpha$ 并定义

$$C_\beta := \operatorname{Crit}(f) \cap \mu^{-1}(\beta), \quad C_{K_{\mathbf{v}} \cdot \beta} := K_{\mathbf{v}} \cdot C_\beta. \tag{2.25}$$

对于箭图表示，采用与 Atiyah 和 Bott 的论证直接类似的方法 [2] ，可以按照 Harder-Narasimhan类型对临界集进行分类。类比 Atiyah 和 Bott 对 Yang-Mills 泛函的计算 [2], , 我们可以通过考察维数向量较小的表示空间上的能量极小值点，归纳计算临界集的等变上同调。

引理 2.8. $C_{K \cdot \beta}$ 的 $K_{\mathbf{v}}$-等变上同调为

$$H^*_{K_{\mathbf{v}}}(C_{K \cdot \beta}) \cong \bigotimes_{\ell=1}^{n} H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mu^{-1}(\alpha_\ell)).$$

给定初始条件 x_0，定义 $\phi(x_0, t)$ 为能量函数 $\|\mu - \alpha\|^2$ 的向下梯度流方程的解

$$\frac{d}{dt}\phi(x_0, t) = -I\rho_{\phi(x_0,t)}(\mu(\phi(x_0, t)) - \alpha), \quad \phi(x_0, 0) = x_0. \tag{2.26}$$

对于每个初始条件 x_0，存在唯一的极小值 $T \in [-\infty, 0)$，使得解$\phi(x_0, t)$ 对所有 $t \in (T, \infty)$ 均存在，并且当 $t \to \infty$ 时收敛到唯一的临界点。如果 T 有限，则 $\lim_{t \to T^+} f(\phi(x_0, t)) = \infty$。 [29] 的结果对当 $t \to -\infty$ 时收敛到临界点的解的同构类进行了分类。

对于每个 t使得方程 (2.26) 有解时，方程 $g_t \in G_{\mathbf{v}}$ 有解 n

$$\frac{dg_t}{dt} g_t^{-1} = -i(\mu(g_t \cdot x_0) - \alpha) \tag{2.27}$$

满足 $\phi(x_0, t) = g_t \cdot x_0$。特别地，梯度流保持任何在 $G_{\mathbf{v}}$ 的作用下不变的子集 $Z \subset \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})$。如果子集 Z 是闭的，那么流的极限也包含在Z中。因此，对于任何在 $G_{\mathbf{v}}$ 的作用下不变的闭子集，即使该子集是奇异的，且通常以导数定义梯度向量场的方法不适用，我们仍然可以在其上定义梯度流及其极限。

定义 2.9. 令 $Z \subset \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 为一个在 $G_{\mathbf{v}}$ 作用下保持不变的闭子集，并定义 $f\colon Z \to \mathbb{R}$ by$f(x) = \|\mu(x) - \alpha\|^2$。$f$ 的临界点是梯度流 (2.26) 的驻点。x 的不稳定集是

$$W_x^- := \left\{ y \in Z \mid \lim_{t \to -\infty} \phi(y, t) = x \right\}. \tag{2.28}$$

给定一个临界集 $C_{K \cdot \beta}$，不稳定丛是

$$W_{K \cdot \beta}^- := \left\{ y \in Z \mid \lim_{t \to -\infty} \phi(y, t) \in C_{K \cdot \beta} \right\} \tag{2.29}$$

稳定集或莫尔斯层记为

$$W_{K \cdot \beta}^+ := \left\{ y \in Z \mid \lim_{t \to \infty} \phi(y, t) \in C_{K \cdot \beta} \right\}. \tag{2.30}$$

2.3.1. 与临界集相关的负切片。设 x 是 $\|\mu - \alpha\|^2$ 的一个临界点，且 $\beta = \mu(x) - \alpha$。由于 $I\rho_x(\beta) = 0$，因此对于所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $e^{i\beta t} \cdot x = x$，从而在切空间 $T_x \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 上诱导出单参数子群 $\{e^{i\beta t} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset G_{\mathbf{v}}$ 的作用。

定义 2.10。令 $Z \subset$ 表示空间$(Q, \mathbf{v})$ 为一个由 $G_{\mathbf{v}}$ 保持不变的闭子集，并定义 $f\colon Z \to \mathbb{R}$，通过 $f(x) = \|\mu(x) - \alpha\|^2$。令 x 为 f 的临界点，且 $\beta = \mu(x) - \alpha$。在 x 处的局部切片是

$$S_x := \left\{ \delta x \in T_x \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}) \mid \delta x \in \ker(\rho_x^{\mathbb{C}})^* \text{ and } x + \delta x \in Z \right\}.$$

x 处的负切片为

$$S_x^- := \left\{ \delta x \in S_x \mid \lim_{t \to \infty} e^{i\beta t} \cdot \delta x = 0 \right\}. \tag{2.31}$$

给定如 (2.25) 中的临界集 $C_{K \cdot \beta}$，考虑平凡丛 $C_{K \cdot \beta} \times$ 表示空间$(Q, \mathbf{v}) \to C_{K \cdot \beta}$。通过将 x 上的纤维与 T_x 表示空间$(Q, \mathbf{v}) \cong$ 表示空间$(Q, \mathbf{v})$ 相识别，定义负切片丛

$$S_{K \cdot \beta}^- := \left\{ (x, \delta x) \in C_{K \cdot \beta} \times \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}) \mid \delta x \in S_x^- \right\} \tag{2.32}$$

与投影 $p\colon S_{K \cdot \beta}^- \to C_{K \cdot \beta}$ 一起。

由于无穷小作用 $\rho_x^{\mathbb{C}}$ 是 $K_{\mathbf{v}}$-等变的，且度量 (2.18) 和内积 (2.20) 都是 $K_{\mathbf{v}}$-不变的，因此伴随 $(\rho_x^{\mathbb{C}})^*$ 也是 $K_{\mathbf{v}}$-等变的。更明确地说，该作用为

$$\mathrm{Ad}_k((\rho_x^{\mathbb{C}})^*(\delta x)) = (\rho_{k \cdot x}^{\mathbb{C}})^*(k \cdot \delta x).$$

特别地，每个 $k \in K_{\mathbf{v}}$ 都定义了一个由 $\delta x \mapsto k \cdot \delta x$给出的同构 $S_x \cong S_{k \cdot x}$。由于矩映射是 $K_{\mathbf{v}}$-等变的，因此 $\lim_{t \to \infty} e^{i\mu(x)t} \cdot \delta x = 0$ 当且仅当 $\lim_{t \to \infty} e^{i\mu(k \cdot x)} \cdot (k \cdot \delta x) = 0$，并且

~因此，这个同构从切片 S_x 限制到负切片 $S_x^- \xrightarrow{=} S_{k\cdot x}^-$，从而定义了 $K_{\mathbf{v}}$ 在 $S_{K\cdot\beta}^-$上的作用。

下面我们更明确地描述负切片中的点。设 x 是一个临界点，满足 $\mu(x)=\beta$，这意味着该表示是子表示 $x=\bigoplus_\ell x_\ell$ 的直和，其维数向量为 $\mathbf{v}_\ell$，其中每个子空间 $\mathrm{Vect}(Q,\mathbf{v}_\ell)\hookrightarrow \mathrm{Vect}(Q,\mathbf{v})$ 都是 β 作用下的特征空间，特征值由斜率 $\alpha(Q,\mathbf{v}_\ell)$ 决定。下文中，我们约定子空间按 α- 斜率递增排序，即 $\ell_1<\ell_2$ 当且仅当斜率 $\alpha(Q,\mathbf{v}_{\ell_1})$ <斜率 $\alpha(Q,\mathbf{v}_{\ell_2})$。条件 $\lim_{t\to\infty} e^{i\beta t}\cdot \delta x=0$ 由此意味着 δx 包含于子空间

$$\delta x \in \bigoplus_{\ell_1<\ell_2} \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}_{\ell_2},\mathbf{v}_{\ell_1}) \subset \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}) = \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}).$$

引入负切片的意义在于，我们可以明确描述对 $(S_{K\cdot\beta}^-, S_{K\cdot\beta}^- \setminus C_{K\cdot\beta})$；然而，对于莫尔斯理论而言，自然的研究对象是对 $(W_{K\cdot\beta}^-, W_{K\cdot\beta}^- \setminus C_{K\cdot\beta})$（参见本文中的 [30] 和定理 4.1）。以下定理是 [29] 的主要结果之一，它表明负切片的拓扑与不稳定集的拓扑相同，因此我们可以将不稳定集内流线的研究归结为对负切片中某些显式子空间的研究（参见第 2.6 节）。

定理 2.11. 设 $Z\subset \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 是一个被 $G_{\mathbf{v}}$ 保持的闭子集，并定义 $f: Z\to\mathbb{R}$ by$f(x)=\|\mu(x)-\alpha\|^2$. 那么对每个临界集 $C_{K\cdot\beta}$，都存在 $W_{K\cdot\beta}^-$ 中 $C_{K\cdot\beta}$ 的一个邻域 U、$S_{K\cdot\beta}^-$ 中 $C_{K\cdot\beta}\times\{0\}$ 的一个邻域 V，以及一个 $K_{\mathbf{v}}$-等变的对的同胚

$$H_\beta : (U, U\setminus C_{K\cdot\beta}) \xrightarrow{\cong} (V, V\setminus (C_{K\cdot\beta}\times\{0\})). \tag{2.33}$$

2.4. 带框箭图的临界集与负切片。本节考虑一个箭图Q，其顶点为 $\mathcal{I}$，边为 $\mathcal{E}$，并设 $\mathbf{v}=(v_k)_{k\in\mathcal{I}}$ 为一个维数向量，其中一个顶点（记为 ∞）的维数为 1。定义 $\mathcal{I}'=\mathcal{I}\setminus\{\infty\}$ 为 Q 的其余顶点构成的集合。

定义2.12. 对于这样的箭图 Q 和维数向量 $\mathbf{v}=(v_k)_{k\in\mathcal{I}}$，典范中心元$\alpha(Q,\mathbf{v}):=(\alpha_k)_{k\in\mathcal{I}}$ 定义为

$$\alpha_k := \begin{cases} 1 & k\in\mathcal{I}' \\ -\sum_{j\in\mathcal{I}'} v_j & k=\infty \end{cases} \tag{2.34}$$

给定维数向量 $0\le \mathbf{v}'=(v'_k)_{k\in\mathcal{I}}\le \mathbf{v}$，且满足 $v'_\infty=1$，由 (2.23) 得到的中心元 α' 为 $\alpha'=(i\alpha'_k\cdot \mathrm{id}^{V'_k})_{k\in\mathcal{I}}$，其中

$$\alpha'_k = \left(\frac{1+\sum_{k\in\mathcal{I}'} v_k}{1+\sum_{k\in\mathcal{I}'} v'_k}\right)\alpha_k \quad \text{for each } k\in\mathcal{I}. \tag{2.35}$$

若 $v'_\infty=0$，则诱导的中心元 α' 为零。

注2.13. 注意，任何包含顶点 ∞的子表示都必须具有负斜率，而任何不包含顶点 ∞ 的子表示都必须具有正斜率。因此，在相对于此稳定性参数构造Harder-Narasimhan滤过（参见 [24]）时，我们看到

(1) 最大的 α-半稳定子表示是最大的不包含顶点 ∞的子表示；(2) 对最大半稳定子表示取商后得到的是一个 α-稳定表示，其中每个子表示都必须包含顶点 ∞；(3) 一个 α-不稳定表示的Harder-Narasimhan滤过是两步滤过。我们将用最大半稳定子表示的商的维数向量来表示该滤过的类型。(4) Crawley-Boevey [9] 的一种构造表明，任意带框箭图的稳定表示的模空间同胚于无框模空间 $\mathcal{M}_\alpha(Q, \mathbf{v})$，如式(2.22)所定义，其中箭图有一个维数为1的额外顶点，因此符合上述构造。通过这一对应，定义2.12的中心元确定了与中岛研究的超K¨ahler箭图簇 [17] 和手锯箭图簇 [22] 相同的稳定性条件。

关于定义 2 中的典范中心元 α，12, [29, 命题 3.13] 表明，任意临界点 x 均可分解为两个表示 $x = x_1 \oplus x_2$ 的直和，其对应的维数向量为 $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$，其矩映射 $\mu(x_1)$ 由（2.35）和 $\mu(x_2) = 0$给出。因此，标记临界集的向量（见（2.24））为 $(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}) = (\mathbf{v_1},\mathbf{v} - \mathbf{v_1})$，所以相对于此稳定性参数，临界集由向量 $\mathbf{v_1}$标记。

给定闭合的 $G_\mathbf{v}$-不变子集 $Z \subset \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 上的此类临界点 x，式（2.31）中的负切片变为

$$S_x^- = \left\{ \delta x \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \cap \ker(\rho_x^{\mathbb{C}})^* \mid x + \delta x \in Z \right\}. \tag{2.36}$$

现在令 $\mathcal{R}$ 为箭图上的有限关系集，并考虑 Z 是子集 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}\ \mathcal{R}) = \nu^{-1}(0) \subset \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 的情形，该子集定义于 [29, 第 3]节。由于 $x = x_1 \oplus x_2 \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \oplus \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v_2}, \mathcal{R})$ 且 $S_x^- \subset \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})$，因此 [29, 引理 3.29] 表明

$$S_x^- = \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \cap \ker(\rho_x^{\mathbb{C}})^* \cap \ker d\nu_x. \tag{2.37}$$

在每个临界点处，我们都有如下变形复形

$$\mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \xrightarrow{\rho_x^{\mathbb{C}}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \xrightarrow{d\nu_x} \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}). \tag{2.38}$$

在复形的每一项定义上同调群 $\mathcal{H}^0(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) := \ker\ \rho_x^{\mathbb{C}}$, $\mathcal{H}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) := \ker(\rho_x^{\mathbb{C}})^* \cap \ker\ d\nu_x$ and $\mathcal{H}^2(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) := \ker(d\nu_x)^*$，并定义

$$h^p(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^p(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R})$$

对每个 $p = 0$,1, 2。由（2.37）可得

$$S_x^- = \mathcal{H}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}). \tag{2.39}$$

定义 2.14。复形（2.38）的指标可以用（2.5）的 Ringel 形式表示，记作如下

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}\rangle_{\mathcal{R}} &:= \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}^0(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \\ &= \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}\rangle + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}).\end{aligned} \tag{2.40}$$

以下引理允许我们根据复形的指标以及变形复形的第二上同调群的维数，计算负切片的维数。

引理 2.15。

$$\dim_{\mathbb{C}} S_x^- = h^2(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) - \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}\rangle_{\mathcal{R}}\,. \tag{2.41}$$

证明。 $\ker \rho_x^{\mathbb{C}} \subset \operatorname{Hom}^0(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})$ 中的同态必为零，因为它将半稳定表示映射到斜率更小的稳定表示中（参见 [24, 引理 2.3]），因此 $h^0 = 0$。由于 $S_x^- = \mathcal{H}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R})$，由指标公式即可得出结论

$$\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}\rangle_{\mathcal{R}} = h^0 - h^1 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^1 = h^2 + h^0 - \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}\rangle_{\mathcal{R}}\,. \qquad \square$$

从现在起，我们省略 $K_{\mathbf{v}}$ 中维数向量 $\mathbf{v}$ 的记号，因为其含义由上下文可知。给定一个临界集 $C_{K\cdot\beta}$，其中每个临界点 x 都是一个直和 $x_1 \oplus x_2$，它按照 $\beta = \mu(x) - \alpha$ 的特征值，将各顶点处的向量空间分解为直和 $\operatorname{Vect}(Q, \mathbf{v}) \cong \operatorname{Vect}(Q, \mathbf{v_1}) \oplus \operatorname{Vect}(Q, \mathbf{v_2})$。定义 $C_{K\cdot\beta}$ 上的以下丛。

$$\begin{aligned}\underline{\operatorname{Hom}}^0(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) &= \left\{(x, u) \in C_{K\cdot\beta} \times \operatorname{Hom}^0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \mid u \in \operatorname{Hom}^0(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})\right\} \\ \underline{\operatorname{Hom}}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) &= \left\{(x, \delta x) \in C_{K\cdot\beta} \times \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{v}) \mid \delta x \in \operatorname{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})\right\}.\end{aligned}$$

由于矩映射是 K-等变的，因此这一分解也是如此，从而在这些丛上诱导出 K 的作用。复形 (2.38) 扩展为一个丛同态复形，而 (2.39) 表明 $S^-_{K\cdot\beta}$ 是该复形的中间上同调。

我们以一条关于负切片相对等变上同调的结果结束本节；该结果是 Atiyah 与 Bott [2, 第 13] 节以及 Kirwan [12, 第 4.23]节中关于海森矩阵的临界集和负特征丛的结果在奇异空间情形下的类比。

令 K_β 为相对于余伴随作用的 $\beta \in \mathfrak{k}^*$ 的各向同性群。临界集 $C_{K\cdot\beta}$具有纤维积 $C_{K\cdot\beta} \cong C_\beta \times_{K_\beta} K$ 的结构（参见 [12, 第 4.22]节）。特别地，我们有$H^*_K(C_{K\cdot\beta}) \cong H^*_{K_\beta}(C_\beta)$。

令 S^-_β 为通过包含映射 $C_\beta \hookrightarrow C_{K\cdot\beta}$对 $S^-_{K\cdot\beta}$ 的拉回。于是， $S^-_{K\cdot\beta}$ 和 $S^-_{K\cdot\beta} \setminus C_{K\cdot\beta}$ 也具有纤维积结构 $S^-_{K\cdot\beta} \cong S^-_\beta \times_{K_\beta} K$ 和 $S^-_{K\cdot\beta} \setminus C_{K\cdot\beta} \cong (S^-_\beta \setminus C_\beta) \times_{K_\beta} K$，因此我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^*_K(S^-_{K\cdot\beta}, S^-_{K\cdot\beta} \setminus C_{K\cdot\beta}) & \longrightarrow & H^*_K(S^-_{K\cdot\beta}) \cong H^*_K(C_{K\cdot\beta}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^*_{K_\beta}(S^-_\beta, S^-_\beta \setminus C_\beta) & \longrightarrow & H^*_{K_\beta}(S^-_\beta) \cong H^*_{K_\beta}(C_\beta) \end{array} \tag{2.42}$$

下一节将解释这样做的动机，其中莫尔斯理论主定理表明，研究由矩映射的范数平方所诱导的莫尔斯分层的谱序列中的各项这一问题，可归结为研究对 $(W^-_{K\cdot\beta}, W^-_{K\cdot\beta}\setminus C_{K\cdot\beta})$ 的相对上同调群。上述结果表明，这等价于在 K_β-等变上同调中研究对 $(S^-_\beta, S^-_\beta\setminus C_\beta)$ 的相对上同调群；后者更为简单，因为负切片是不稳定集的线性化版本，可以对其进行显式研究。

2.5. 归约到临界集的第一个分量。本节将讨论范围限制在箭图中的关系由相同长度的路径决定的情形，因此关系映射 ν 是齐次多项式。在这种情形下，我们可以证明上一节的相对等变上同调群会简化，这将更便于在莫尔斯复形上构造杯积和微分。这一限制并不苛刻，因为具有齐次关系的箭图包括一些重要例子，例如中岛箭图和 [22] 中研究的手锯箭图。

定义 2.16. 若一个关系由相同长度的路径定义，则称其为齐次关系。一组齐次关系是指其中每个关系都是齐次关系的集合 $\mathcal{R}$ 。

注记 2.17. 上述齐次关系集的定义只要求定义每个关系的路径长度相同。齐次关系集中的不同关系可以具有不同的长度。

如果关系 r 是齐次的，那么代数映射 ν_r : 表示空间$(Q,\mathbf{v}) \to \mathrm{Hom}(V_{t(r)}, V_{h(r)})$（参见[29, (3.1)]）由表示的分量 $\bigoplus_{a\in\mathcal{E}}\mathrm{Hom}(V_{t(a)}, V_{h(a)})$ 中的齐次多项式定义。

回顾 [29, 命题 3.13]，有 $C_\beta = C_{\beta_1}\times C_{\beta_2}$，其中 $C_{\beta_1}/K_{\beta_1} = \mathcal{M}(Q,\mathbf{v_1})$ 且 $C_{\beta_2} = \mu^{-1}(0)$ 在表示空间$(Q,\mathbf{v_2})$ 上。定义 $S^-_{\beta_1}$ 为负切片在子集$C_{\beta_1}\times\{0\}\subset C_\beta$上的限制。本节将证明，当箭图具有齐次关系时，相对上同调群$H^*_{K_\beta}(S^-_\beta, S^-_\beta\setminus C_\beta)$ 与 $H^*_{K_\beta}(S^-_{\beta_1}, S^-_{\beta_1}\setminus C_{\beta_1})$ 同构（参见下文推论 2.20）。因此，在第 5 节定义微分和杯积时，只需将注意力限制在子集$C_{\beta_1}\times\{0\}\subset C_{\beta_1}\times C_{\beta_2} = C_\beta$ 上，在该子集上计算要简单得多。

引理 2.18。如果这些关系是齐次的，那么映射 $x\mapsto tx$ for $t\in[0,1]$ 定义了一个 K - 等变的变形收缩，将 $\nu^{-1}(0)$ 和 $\mu^{-1}(0)\cap\nu^{-1}(0)$ 收缩至零表示。
证明。由于 $\nu = \bigoplus_{r\in\mathcal{R}}\nu_r$ 是齐次多项式的直和，因此 $\nu^{-1}(0)$ 在映射 $x\mapsto tx$ 下保持不变。同样，μ 的分量是二阶齐次多项式（参见 (2.21)），因此 $\mu^{-1}(0)$ 在 $x\mapsto tx$ 下也保持不变。□

推论 2.19。

$$H^*_{K_\beta}(S^-_\beta)\cong H^*_{K_\beta}(C_\beta)\cong H^*_{K_\beta}(C_{\beta_1})\cong H^*_{K_\beta}(S^-_{\beta_1}). \tag{2.43}$$

此外，si 由于 K_{β_1} 作用于 C_{β_1}，其各向同性群为对角U(1) $\subset K_{\beta_1}$，因此我们有

$$H^*_{K_\beta}(C^-_{\beta_1}) \cong H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_1})) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1)) \otimes H^*(BK_{\beta_2}).$$

对于较小的 $\varepsilon > 0$ 值，单参数子群 $\{e^{it\beta}\}$ 的作用定义了一个 K_β-等变同伦等价 $S^-_{\beta_1} \setminus C_{\beta_1} \cong S^-_\beta \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$。

对于任意 $t \in \mathbb{C}^*$，复形 (2.38) 在临界点 $x = (x_1, x_2)$ 和 $x_t = (x_1, tx_2)$ 上的中间上同调之间存在一个 K_β-等变同构。因此，对于 $S^-_\beta \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$ 中 $S^-_{\beta_1} \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$ 的任意邻域 U，我们可以定义一个 K_β-等变变形收缩，将 $S^-_\beta \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$ 收缩到 U。

由于 S^-_β、$S^-_{\beta_1}$ 和 $f^{-1}(c-\varepsilon)$ 均为实解析的，因此 [23, 定理 1.1] 表明，存在 U 的一个邻域 $S^-_{\beta_1} \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$，位于 $S^-_\beta \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$ 中，并且存在一个 K_β-等变变形收缩，将 U 收缩到 $S^-_{\beta_1} \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$。

结合上述两个变形收缩，我们得到一个同构

$$H^*_{K_\beta}(S^-_\beta \setminus C_\beta) \cong H^*_{K_\beta}(S^-_\beta \cap f^{-1}(c-\varepsilon)) \cong H^*_{K_\beta}(S^-_{\beta_1} \cap f^{-1}(c-\varepsilon)) \cong H^*_{K_\beta}(S^-_{\beta_1} \setminus C_{\beta_1}) \tag{2.44}$$

同构 (2.43) 和 (2.44) 与五引理共同给出以下结果。

推论 2.20. 对于任意具有齐次关系的箭图，我们有

$$H^*_{K_\beta}(S^-_\beta, S^-_\beta \setminus C_\beta) \cong H^*_{K_\beta}(S^-_{\beta_1}, S^-_{\beta_1} \setminus C_{\beta_1}). \tag{2.45}$$

2.6. 临界点之间的流线空间。本节中，我们将考察两个给定临界集之间的流线空间。这里的流是 (2.26) 中定义的负梯度流 $\phi(x,t)$。下临界集始终记为 C_ℓ（其 Harder-Narasimhan类型为 $\mathbf{v}_\ell$；参见注 2.13），上临界集记为 C_u（其类型为 $\mathbf{v}_u$）。

定义 2.21. 给定两个临界集 C_ℓ和 C_u，其中 $f(C_\ell) < f(C_u)$，流向 C_u 并从 C_ℓ 流出的表示空间为

$$\mathcal{F}^{u,0}_{\ell,0} := \left\{ x \in Z \mid \lim_{t\to\infty} \phi(x,t) \in C_\ell, \quad \lim_{t\to-\infty} \phi(x,t) \in C_u \right\}.$$

该流在 $\mathcal{F}^u_\ell$ 上定义了一个 $\mathbb{R}$ 作用，流线空间为

$$\tilde{\mathcal{F}}^{u,0}_{\ell,0} := \mathcal{F}^{u,0}_{\ell,0}/\mathbb{R}.$$

[29] 的主要技术结果是：任何满足 $\lim_{t\to-\infty}\phi(x,t) \in C_u$ 的表示 x，都同构于 Thm. 4.22] C_u [29, 负切片中的一个表示。在将范围限制到临界集的一个邻域后，这便确定了对 H 的一个同胚：$(W_u, W_u, 0) \xrightarrow{\sim} (S^-_u, S^-_u, 0)$（参见 [29, Cor. 4.24]）；借助此同胚，我们可以将流线空间视为临界集邻域内负切片丛 $H(\mathcal{F}^u, \ell_0^0,) \subset S_u, 0$ 的一个子集。

条件 $x \in \mathcal{F}^u, \ell_0^0,$ 对表示 x提出了两个代数限制。第一个限制是，Harder-Narasimhan滤过的类型由临界集 C_ℓ决定，因为该滤过的分次对象与向下流的极限的分次对象同构。该极限的

向上流决定了第二个条件，即表示 x 必须允许另一种滤过，这次其斜率递增，且分次对象由 C_u的类型决定，因为x 与 C_u 的负切片中的一个表示同构（参见 [29,引理 3.24]）。

2.6.1. 流线空间在负切片中的像。根据定义，流线空间包含于不稳定集 $\mathcal{F}^u,\ell^0,0 \subset W_{u,0}$ 中。通过同胚 $H:(W_u,W_{u,0}) \xrightarrow{\cong} (S_u,S_{u,0})$，我们可以研究像 $H(\mathcal{F}^u,\ell^0_0,) \subset S_{u,0}$，事实证明，这是一个更易处理的对象；我们可以对其进行显式描述，然后通过同胚 H^{-1} 将其传回不稳定集。在本节中，对于稳定性参数为定义2.12中的典范中心元这一情形，我们将确实完成这一工作。

在此情形下，下临界点 $x_\ell \in C_\ell$ 分解为

$$x_\ell = x_\ell^{(1)} + x_\ell^{(2)}, \quad x_\ell^{(1)} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell), \quad x_\ell^{(2)} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell). \tag{2.46}$$

注意，斜率$_\alpha(Q,\mathbf{v}_\ell)$ $<$斜率$_\alpha(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell)$。此外，$x_\ell^{(2)}$ 同构于 x 的最大半稳定子表示的 Jordan-H¨older 滤过的分次对象，而 $x_\ell^{(1)}$ 同构于 x 除以其最大半稳定子表示所得的商空间。

类似地，上临界点 $x_u \in C_u$ 分解为

$$x_u = x_u^{(1)} + x_u^{(2)}, \quad x_u^{(1)} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_1-\mathbf{d}), \quad x_\ell^{(2)} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_1+\mathbf{d}). \tag{2.47}$$

同样，我们有斜率$_\alpha(Q,\mathbf{v}_\ell-\mathbf{d})$ $<$斜率$_\alpha(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell+\mathbf{d})$，且 $x_u^{(1)}$稳定；然而这一次，$x_u^{(1)}$同构于 x的一个稳定子表示，而不是商表示。由于这两个临界点由一条流线连接，因此 [29, 引理 4.32] 表明，$x_u^{(1)}$ 同构于 $x_\ell^{(1)}$ 的一个子表示。特别地，这意味着 $\mathbf{d}>0$。以下引理对此作了总结。

引理 2.22. 连接 x_ℓ 和 x_u 的一条流线确定了从 $K_\mathbf{v}$到$K_{\mathbf{v}_\ell-\mathbf{d}} \times K_\mathbf{d} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$的结构群约化，其中 $x_\ell^{(1)} \in$表示空间 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)$，且 $x_u^{(1)} \in$表示空间 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell-\mathbf{d})$。于是，多稳定表示 $x_u^{(2)} \in$表示空间 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell+\mathbf{d})$分解为子表示

$$x_u^{(2)} = x_u^{(2,1)} + x_u^{(2,2)} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{d}) \oplus \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell). \tag{2.48}$$

从不稳定集到负切片的同胚 H 将表示 x 映射到 $\delta x \in S_{u,0}$。

利用推论 2.20，从现在起我们限制在 $x_\ell^{(2)}=0$ 的情形下。该条件对 $x \in \mathcal{F}^u$、ℓ^0_0 、施加了以下限制。

引理 2.23. 若 $x_\ell^{(2)}=0$，则 x 与 $x_\ell^{(1)}$ 同构，因而作为 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)$ 中的表示是稳定的。

证明。根据定理 [29, Thm. 4.22], , 表示 x 同构于 $S^-_{x_u}$中的某个表示，其中 $x_u = x_u^{(1)} + x_u^{(2)} \in C_u$。

由于 x向下流至 x_ℓ，Harder-Narasimhan类型因此已确定，所以对最大半稳定子表示取商空间（记作 $x_\ell^{(1)} = x/x_\ell^{(2)}$ ）后，其维数向量必为v_ℓ。此外， [29, Thm. 1.2] （向上流极限的代数结构）表明， $x_u^{(1)}$是 x 的一个稳定子表示，且包含顶点 ∞，因此它必定是$x_\ell^{(1)}$ 的子表示。表示 $x_u^{(2)}$满足 $\mu(x_u^{(2)}) = 0$ ，由 [29, Prop. 3.13] 可知，因此 $x_u^{(2)}$是半单的。关于这些子表示，负切片分解为

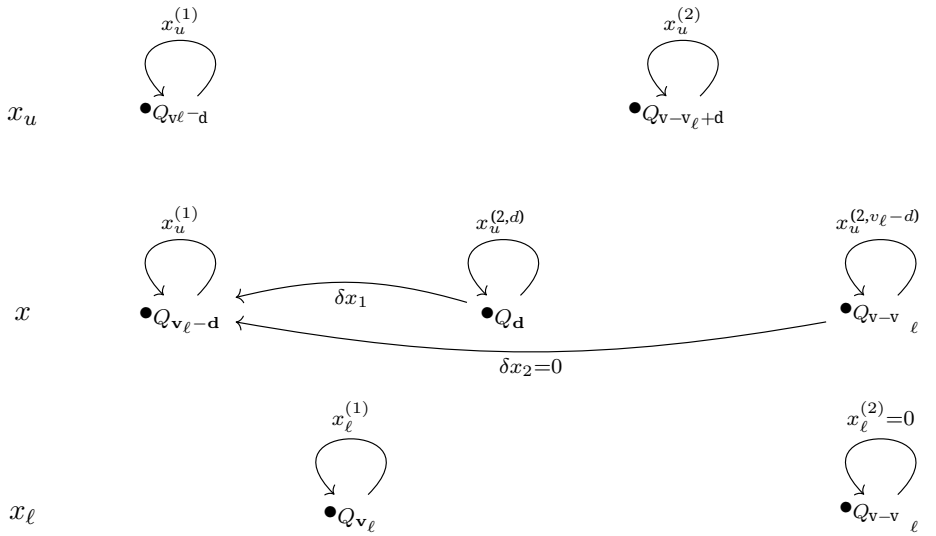
$$S_u^- \subset \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\ell + \mathbf{d}, \mathbf{v}_\ell - \mathbf{d}) \cong \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{d}, \mathbf{v}_\ell - \mathbf{d}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_\ell - \mathbf{d}) \text{ 。}$$

相对于这个分解，记 $\delta x = \delta x_1 + \delta x_2$ 和 $x_u^{(2)} = x_u^{(2,d)} + x_u^{(2,v_\ell - d)}$ 。因此，x 同构于 $x_u + \delta x_1 + \delta x_2$ ，而 $x_u^{(1)} + \delta x_1 + x_u^{(2,d)}$是模掉最大半稳定子表示所得的商空间。于是，稳定性参数的选取意味着 $x_u^{(1)} + \delta x_1 + x_u^{(2,d)}$是稳定的（见注 2.13），因此它同构于 $x_\ell^{(1)}$ 。因此

$$x \cong x_u^{(1)} + \delta x_1 + x_u^{(2,d)} + \delta x_2 + x_u^{(2,v_\ell - d)} = x_\ell^{(1)} + \delta x_2 + x_u^{(2,v_\ell - d)}.$$

由于 $\delta x_2 \in S_u^- \subset \mathrm{Hom}^1(Q, \mathrm{v} - \mathrm{v}_\ell, \mathrm{v}_\ell - \mathrm{d})$，那么 [29, 引理 3.26] 表明，若 $\delta x_2 \neq 0$，则 $x_\ell^{(1)} + \delta x_2$同构于较低临界点的负切片 $S_{\ell,\ 0}$ 中的一个非零元素，因此不可能流向 x_ℓ ，因为能量满足 $\|\mu(x_\ell^{(1)} + \delta x_2) - \alpha\|^2 < \|\mu(x_\ell) - \alpha\|^2$。因此我们必须有 $\delta x_2 = 0$。条件 $x_\ell^{(2)} = 0$ 意味着 $x^{(2,v_\ell - d)}{}_u$ ，所以 $x \cong x_u^{(1)} + \delta x_1 + x_u^{(2,d)} \cong x_\ell^{(1)}$ 。□

这一设置可由下图表示。记号 $Q_{\mathbf{v}_\ell}$ 表示具有维数向量 v_ℓ 的箭图 Q，从 $Q_{\mathbf{v}_\mathbf{d}}$ 到 $Q_{\mathbf{v}_{\ell-\mathbf{d}}}$ 的箭头表示空间 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathrm{v}_\mathbf{d}, \mathrm{v}_{\ell-\mathbf{d}})$ 中的一个同态；其特殊情形是从 $Q_{\mathbf{v}_\ell}$到自身的环，对应于 $\mathrm{Rep}(Q, \mathrm{v}_\ell)$ 中的一个表示。在上、下临界点处，箭头标注了相应的子表示，见 (2.46) 和 (2.47)。



推论 2.24. 将结构群从 $K_\mathbf{v}$ 约化到 $K_{\mathbf{v}_\ell - \mathbf{d}} \times K_\mathbf{d} \times K_{\mathbf{v} - \mathbf{v}_\ell}$后，像 $H(\mathcal{F}^u{}_{,\ell}{}^{0}_{0,}) \subset S_{u,0}^-$ 包含于子空间 $S_{u,0}^- \cap \mathrm{Hom}^1(Q, \mathrm{d}, \mathrm{v}_\ell - \mathrm{d})$。

2.6.2. 相邻临界集。推论 2.24 表明，流线 $H(\mathcal{F}^u,\ell^0_0,)\subset S^-_{u,0}$ 的像包含在负切片的一个给定子空间中，该子空间可用上、下临界集的代数数据（Harder-Narasimhan类型）来描述。一般而言，该像可能不等于这个子空间，因为可能存在收敛到某个中间临界集的流线。

本节考虑不存在中间临界集的特殊情形，因此像 $H(\mathcal{F}^u,\ell^0_0,)\subset S_{u,0}$ 等于推论 2.24 中确定的子空间。于是，我们可以将 $H(\mathcal{F}^u,\ell^0_0,)\subset S_{u,0}$ 的管状邻域明确地描述为 $H(\mathcal{F}^u,\ell^0_0,)$ 上的圆盘丛。

定义 2.25. 若两个临界集 C_ℓ 和 C_u 对应的 Harder-Narasimhan 类型分别为 $\mathbf{v}_u$ 和 $\mathbf{v}_\ell$，且对某个 $k\in\mathcal{I}$有 $\mathbf{v}_\ell=\mathbf{v}_u+\mathbf{e}_k$，则称它们相邻。

用推论 2.24 的记号表示，这等价于 $\mathbf{d}=\mathbf{e}_k$。再次，我们可以将$x_\ell=x_\ell^{(1)}+x_\ell^{(2)}\in C_\ell$、$x_u=x_u^{(1)}+x_u^{(2)}\in C_u$ 分解，并注意到（就计算相对上同调群 (2.45) 而言），推论 2.20 允许我们将注意力限制在 $x_\ell^{(2)}=0$和 $x_u^{(2)}=0$ 的情形。

由于 $x_u^{(2)}=0$ 和 $x_u^{(1)}$是 α-稳定的，因此 x_u 的各向同性群为 $\mathrm{U}(1)\times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}}$，它继而作用于负切片 $S^-_{x_u}$。回想一下，对角$\mathrm{U}(1)\subset K_{\mathbf{v}}$ 在 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 的所有元素上都平凡作用，因此，各向同性群在切片上的作用是由 $K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}}$ 在 $\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v_u},\mathbf{v_u})$ 上的作用诱导的。

引理 2.26. 若 C_ℓ 和 C_u 是相邻临界集，则对于每个满足 $x_u^{(2)}=0$的 $x_u=x_u^{(1)}+x_u^{(2)}\in C_u$，以及每个表示 $\delta x\in S_{u,0}\subset\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v_u},\mathbf{v_u})$，若 δx的核的维数向量为 $\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e_k}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell$，则以 $x_u+\delta x$ 为初始条件的向下流的极限包含于C_ℓ。反之，每个向下流至 $x_\ell=x_\ell^{(1)}+x_\ell^{(2)}\in C_\ell$ 且满足 $x_\ell^{(2)}=0$ 的负切片元素都必为此形式。

证明。由稳定性参数的选取、$x_u^{(1)}\in\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v_u})$的稳定性以及 $x_u^{(2)}=0$这一事实可知，$x_u+\delta x$ 的最大半稳定子表示的维数向量等于 δx的核。因此，$x_u+\delta x$ 流向 $x_\ell\in C_\ell$ 当且仅当 δx 的核的维数向量等于 $\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e_k}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell$。□

如果 C_ℓ 和 C_u 是相邻临界集，那么引理 2.22 表明存在一个到$K_{\mathbf{v_u}}\times\mathrm{U}(1)\times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$的结构群约化。对此约化取模后，流线空间可以明确地描述为上临界集的负切片的一个子空间。

推论 2.27. 设 C_ℓ 和 C_u 为相邻临界集，并将范围限制在形如 $x_u=x_u^{(1)}+x_u^{(2)}\in C_u$ 且满足 $x_u^{(2)}=0$ 的上临界点，以及形如 $x_\ell=x_\ell^{(1)}+x_\ell^{(2)}\in C_\ell$ 且满足 $x_\ell^{(2)}=0$的下临界点所构成的子集上。那么，将结构群约化至 $K_{\mathbf{v_u}}\times\mathrm{U}(1)\times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$后，流线空间 $\mathcal{F}^u,\ell^0_0$，在 C_u 上构成纤维丛，其在 $x_u\in C_u$ 上的纤维同构于 $V\setminus\{0\}$，

其中 V 是以下映射的余核

$$\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{e_k},\mathbf{v_u}) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x_u}} \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e_k},\mathbf{v_u}). \tag{2.49}$$

此外，子群 $\mathbf{U(1)}\subset K_{\mathbf{v_u}}\times \mathbf{U(1)}\times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$ 在权为 on $e.$

*P*roof 上自由作用。这由引理 2.26 以及引理 2.22 的显式描述得出 . □

因此，我们可以如下描述流线空间的管状邻域。

引理 2.28. 给定两个相邻临界集 C_ℓ 和 C_u ，其 Harder-Narasimhan 类型满足 $\mathbf{v}_\ell=\mathbf{v}_u+\mathbf{e}_k$，则在给定的 $\delta x\in H(\mathcal{F}^u_{,\ell\,0}{}^0_{,})$ 处， $H(\mathcal{F}^u_{,\ell\,0}{}^0_{,})\subset S_{u,0}$ 的管状邻域的纤维同构于以下对象的余核

$$\begin{array}{c}\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_u-\mathbf{e}_k,\mathbf{v}_u) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x_u}} \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_u-\mathbf{e}_k,\mathbf{v}_u)\\ \oplus \qquad\qquad \nearrow_{\rho^{\mathbb{C}}_{\delta x}}\\ \mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_k)\end{array} \tag{2.50}$$

它是 x_u 处负切片的一个直和项。

证明。上临界点 x_u 的负切片对应于以下映射的余核

$$\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_u) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x_u}} \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_u).$$

在这个切片内，引理 2.26 表明，流向 C_ℓ 的流线空间是由所有表示 $\delta x\in \mathbf{Hom^1(Q,\,v-v_u,\,v_u)}$ 构成的格拉斯曼子流形，其中核的维数向量为 $\mathbf{v-v_u-e_k}$。这个空间对应于将 x_u 的各向同性群 $K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}}$ 的结构群约化固定为子群 $K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_u-\mathbf{e_k}}\times K_{\mathbf{e_k}}$，使得 $\delta x\in \mathbf{Hom^1(Q,\,e_k,\,v_u)}$。

给定一个固定的结构群约化选择，法丛的纤维对应于以下映射的余核

$$\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_u-\mathbf{e}_k,\mathbf{v}_u) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x_u}} \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}-\mathbf{v}_u-\mathbf{e}_k,\mathbf{v}_u),$$

而要改变这一选择，则需要求出以下对象的法丛

$$K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}}\times_{(K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_u-\mathbf{e_k}}\times K_{\mathbf{e_k}})}\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e_k},\mathbf{v_u})\subset S^-_{x_u}.$$

它对应于 (2.50) 的余核，其中包含所有与上述纤维积的切空间正交的表示。□

应用同胚 $H:(W_u,W_{u,\,0})\xrightarrow{\cong}(S_u,S_{u,\,0})$，进而确定一个管状邻域 $U_\ell\to \mathcal{F}^u_{,\,\ell}{}^0_{,\,0}\subset W_{u,\,0}$，它与一个圆盘丛同胚。

现在，较低的临界点（根据引理 2.23，它与 $x=x_u+\delta x$ 同构）位于相应的 Harder-Narasimhan 分层内；该分层在全空间 Rep(*Q*, v) 中也有一个管状邻域，其纤维由以下复形的余核给出

$$\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v}_\ell,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x_\ell}} \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}_\ell,\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell).$$

相对于从 $K_{\mathbf{v}}$ 到 $K_{\mathbf{v_u}} \times K_{\mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e}_k}$ 的结构群约化，这个复形分解为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_u) & \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x_u}} & \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_u) \\ \oplus & \nearrow_{\rho^{\mathbb{C}}_{\delta x}} & \oplus \\ \mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k) & & \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k) \end{array} \tag{2.51}$$

注意，由于根据引理 2.23，x_ℓ 与 $x = x_u + \delta x$ 同构，因此 $\rho^{\mathbb{C}}_{x_\ell}$ 的像与 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k)$正交。因此，由于 $\mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}_u + \mathbf{e}_k$，上述复形包含 (2.50) 作为一个直和项。

由于 $\mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}$，也包含在临界集 C_ℓ的 Harder-Narasimhan 分层中，因此可以考虑该分层的一个管状邻域，并将其限制到圆盘丛 $\pi\colon N_\ell \to \mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}, 。$ 给定$x \in \mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}, ,$ 纤维 $\pi^{-1}(x)$对应于余核中原点的一个邻域

$$\mathrm{Hom}^0(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_\ell) \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_x} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_\ell). \tag{2.52}$$

因此，我们在 $\mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}$ 上有两个圆盘丛。

(1) 不稳定集 $W^-_{C_u}$ 内的一个管状邻域 $D \to \mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}$，其纤维由 (2.50) 的余核给出；以及 (2) 环境流形 Rep(, v) 中的 Harder-Narasimhan 分层的一个管状邻域，它限制为圆盘丛，$\overset{0}{\ell 0}, ,$ 其纤维由 (2.51) 的余核给出。

下文中我们将滥用记号，用相同的记号表示圆盘丛及其关联向量丛。式 (2.51) 的直和分解表明，D 是 V的子丛。以下命题对此作了总结。

命题 2.29。 C_ℓ 的 Harder-Narasimhan 分层有一个管状邻域，它在 $\mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}$,上的限制是圆盘丛 V，其纤维由式 (2.51) 的余核给出。流线空间$\mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}$,在 $W^-_{C_u}$ 中有一个管状邻域 D，其纤维由式 (2.50) 的余核给出。此外，若有必要，可缩小上述邻域，使丛 D 成为 V的子丛。

将结构群从 $K_{\mathbf{v}}$ 约化为$K_{\mathbf{v}_\ell - \mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$ （参见引理 2.22）后，商丛 $T := V/D$ 是平凡丛，其纤维为 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k)$。

2.6.3. 管状邻域商空间的等变欧拉类。上述命题表明，下层分层的管状邻域限制为一个圆盘丛 $V \to \mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}, ,$ 它包含不稳定集 $W^-_{C_u}$ 内的法丛 $D \to \mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}, ,$ 作为一个子丛。我们现在希望计算商丛的等变欧拉类，随后将在第 6.2 节中用于构造莫尔斯复形上的微分和杯积。

将结构群从 $K_{\mathbf{v}}$ 约化到 $K_{\mathbf{v_u}} \times K_{\mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e_k}}$ （参见引理 2.22）后，在 $\mathcal{F}^u, \overset{0}{\ell 0}$,上存在一个平凡丛 T，其纤维为 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k)$。由于这些纤维

V的纤维由 (2.51) 的余核给出，而 D 的纤维由 (2.50) 的余核给出，后者作为直和项出现在 (2.51) 中，因此$V \cong D \oplus T$。

为构造第 6 节中的微分和杯积，我们需要计算丛 T 的等变欧拉类。以下引理适用于此情形（参见 [3]）。

引理 2.30. 设 X 是一个连通拓扑空间，且 $\pi : E \to X$ 是秩为 n 、纤维上带有厄米度量的平凡复向量丛。假设紧李群 K 通过忠实表示 $\rho : K \to \mathrm{U}(n)$ 在 E 上逐纤维作用，使得 K 固定零截面 $X \hookrightarrow E$，并在每个纤维 $\pi^{-1}(x)$ 上按 $k \cdot v = \rho(k)v$ 作用。那么， E 的 K-等变欧拉类为

$$e_K = 1 \otimes \rho^*(c_n) \in H^*_K(X) \cong H^*(X) \otimes H^*(BK),$$

其中，1 表示 $H^0(X) \cong \mathbb{C}$ 中的单位元，投影 $BK \to \mathrm{BU}(n)$ 诱导出 $\rho^* : H^*(\mathrm{BU}(n)) \to H^*(BK)$，而 c_n 是多项式环 $\mathbb{C}[c_1, \dots, c_n] \cong H^*(\mathrm{BU}(n))$ 的次数为 $2n$ 的生成元。

现在我们可以将这一结果应用于命题 2.29 中的管状邻域。

推论 2.31. 在命题 2.29 的设定下，圆盘 $V \to \mathcal{F}^u_\ell$ 包含管状邻域 $D \to \mathcal{F}^u,\ \ell^0_0$，作为一个子丛，其商丛 T是平凡的。对于从 $K_{\mathbf{v}}$ 到 $K_{\mathbf{v_u}} \times K_{\mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e_k}}$的结构群约化，子群 $K_{\mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v_u}-\mathbf{e}_{\mathbf{k}}} = K_{\mathbf{e}_k} \times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$通过忠实表示 ρ作用于商丛 T的纤维 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k)$ 上，且等变欧拉类为 $e_K = \rho^*(c_n)$，其中 $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\ell, \mathbf{e}_k)$，而 c_n 是多项式环 $\mathbb{C}[c_1, \dots, c_n] \cong H^*(\mathrm{BU}(n))$ 的 $2n$次生成元。

这一结果将在第 6 节中使用；届时构造莫尔斯复形上的微分和杯积时，需要用商丛 T的欧拉类来补偿横截性的失效（参见 (6.5) 和 (6.6)）。

3. Reduction of structure group and restricted quiver representations

第9节的结果使用了将 Hecke对应嵌入环境光滑流形上的负切片丛这一方法（参见推论 9.2）；等价地，根据 [29]，也可以将相邻临界集之间的流线空间嵌入其中。为了描述这一嵌入的托姆类，有必要发展与该问题相关的变形理论，这正是本节的目标（参见引理 3.5 和 3.12）。这套理论不仅适用于中岛箭图的情形，本节的大部分内容都用于为箭图及其关系定义一些适用该理论的一般条件，并通过例子加以说明。只对 Nakajima 箭图簇感兴趣的读者可以直接跳到下一节。

首先，我们描述一种一般性构造：通过分解每个顶点处的向量空间，并从新的箭图表示中删去一些边，来约化箭图表示的结构群。这种构造的例子包括：手锯箭图（参见 [22] 和例3.7）、模空间上圆群作用的不动点（参见 [21], [10] 和例3.8），以及与之关联的箭图

负切片（参见下文例 3.11）。这里的目标是证明引理3.5和引理3.12。这两个一般性结果表明，以这种方式约化结构群后，原表示的某些性质以及关系映射的导数的某些性质仍会保留。

以下构造是为证明这些结果适用于一般的箭图类所必需的。全文中，读者可参阅例3.7和例3.8，它们阐释了这一理论。

给定一个箭图 $Q = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$，考虑一个顶点有限集 $\mathcal{I}'$ 及一个满射映射 $v : \mathcal{I}' \to \mathcal{I}$。由此可导出一组边 $\tilde{\mathcal{E}}'$，构造如下。对于每个 $a \in \mathcal{E}$ 以及每个 $t_i \in v^{-1}(t(a))$，$h_j \in v^{-1}(h(a))$，定义一条边 $a_{ij} \in \tilde{\mathcal{E}}'$，使得 $t(a_{ij}) = t(a)$ 且 $h(a_{ij}) = h(a)$。注意，$\tilde{\mathcal{E}}'$构造确定了一个满射映射 $e : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$。这些数据定义了一个新的箭图 $Q' := (\mathcal{I}', \mathcal{E}')$，我们称之为 Q的扩张。

给定 Q 的维数向量 $\mathbf{v}$，以及向量空间 $\{V_k\}_{k\in\mathcal{I}}$，将每个 $V_k \cong V_{k_1} \oplus \cdots \oplus V_{k_{m_k}}$ 分解，其中 $m_k = \#(v^{-1}(k))$，并且每个 V_{k_i} 都具有正维数。注意，最后这个条件限制了 $v^{-1}(k)$ 中顶点的数量；特别是，若 $\dim_{\mathbb{C}} V_k = 1$，则 $\#(v^{-1}(k)) = 1$。这些数据定义了箭图 Q' 的维数向量 $\mathbf{v}'$。作用于 $\mathsf{Rep}(Q, \mathbf{v}')$ 的群 $K_{\mathbf{v}'}$，是原先作用于 $\mathsf{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 的群 $K_{\mathbf{v}}$ 的结构群约化。

表示 $x' \in \mathsf{Rep}(Q', \mathbf{v}')$ 通过直和 $V_k \cong V_{k_1} \oplus \cdots \oplus V_{k_{m_k}}$ 诱导出一个表示 $x \in \mathsf{Rep}(Q, \mathbf{v})$，反之亦然，因为边集 $\mathcal{E}'$ 包含了映射到每个 $a \in \mathcal{E}$ 的所有可能边 a_{ij}。因此存在一个同构

$$\mathrm{Rep}(\tilde{Q}', \mathbf{v}') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}) \tag{3.1}$$

以及结构群 $\mathsf{Hom}^0(\tilde{Q}', \mathbf{v}') \hookrightarrow \mathsf{Hom}^0(Q, \mathbf{v})$ 的李代数的一个包含映射。

现在选取一个子集 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$，并定义一个新的箭图 $Q' = (\mathcal{I}', \mathcal{E}')$，我们称之为 Q' 的限制。给定如上所述的维数向量 $\mathbf{v}'$，存在一个同构 $\mathsf{Hom}^0(Q', \mathbf{v}') \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}^0(\tilde{Q}', \mathbf{v}')$ 以及一个单同态

$$S : \mathrm{Rep}(Q', \mathbf{v}') \hookrightarrow \mathrm{Rep}(\tilde{Q}', \mathbf{v}') \cong \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}). \tag{3.2}$$

原箭图 Q 的一组关系 $\mathcal{R}$ 随后会导出 Q' 的一组关系 $\mathcal{R}'$。为了证明引理3.5，我们需要对这一过程作出精确描述，具体如下。

对于原箭图 Q 中的每条路径 $p = a_n \cdots a_1$，在扩张$\tilde{Q}'$中都有一组路径 $\mathcal{P}'$，由 $p_{i_1,\ldots,i_n} = a^{(i_n)}_n \cdots a^{(i_1)}_1$ 沿着边 $a^{(i_k)}_k \in e^{-1}(a_k)$ 给出，其中每个 $k = 1$ 对应一条路径，...，n。注意，限制 Q' 包含一组路径 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}'$，这组路径仅由边属于 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$的路径构成，因此 $\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}'$由至少含有一条属于 $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$ 的边的所有路径组成。我们滥用记号，用 e 同时表示两个投影 $e : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ 和 $e : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$。

因此，Q的关系 $\mathcal{R}$ 确定了一组新的关系 $\mathcal{R}'$，对应于 Q'，如下所示。对于每个关系

$$r = \sum_{p \in \mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p p \in \mathcal{R}$$

其头和尾分别为 $h(r)$ $t(r) \in \mathcal{I}$，并且对于每个选择 $h(r') \in v^{-1}(h(r))$ 和 $t(r') \in v^{-1}(t(r))$，都有一个关系 r' 定义如下

$$r' = \sum_{p' \in \tilde{\mathcal{P}}'_{t(r'),h(r')}} \lambda_{v(p')} p'.$$

~ ~将 $\mathcal{R}'$ 定义为所有此类关系的集合。对于限制 Q'，我们考虑 $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}'$ 中的~关系所构成的子集，其中所有路径均位于边 $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$的子集中。等价地，我们通过从 $\mathcal{R}'$中移除路径来构造 $\mathcal{R}'$

~ ~：当且仅当某条路径 $r' \in \mathcal{R}'$ 中非平凡地出现的路径包含 $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$中的至少一条边时，才将其移除~。这一构造在例3.7和例3.8中进行了说明。

给定一个表示空间 $x' \in$表示$(Q', \mathbf{v}', \mathcal{R}')$，如上所述映射到 $x = S(x') \in$表示$(Q, \mathbf{v}\ \mathcal{R})$，那么 x' 的一个子表示会诱导出 x的一个子表示。注意，反过来不一定成立，因为 x 的子表示可能与每个 $V_k \cong V_{k_1} \oplus \cdots \oplus V_{k_{m_k}}$ 的分解不相容。

对 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})$ 的稳定性参数 α通过拉回 $\alpha' = \alpha \circ v$诱导出对 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}')$ 的参数 α'。注意，如果顶点 $\infty \in \mathcal{I}$ 相对于 $\mathbf{v}$ 的维数为一，那么 $v^{-1}(\infty)$ 由单个顶点组成，该顶点相对于 $\mathbf{v}'$ 的维数为一。因此，定义2.12中关于（$Q, \mathbf{v}$）的典范稳定参数会诱导出关于（$Q', \mathbf{v}'$）的典范稳定参数。

特别地，如果 $x' \in \mathrm{Rep}(Q', \mathbf{v}')$ 诱导出一个稳定表示 $x = S(x') \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})^{\alpha - st}$，那么 x 的每个子表示都必须包含顶点 ∞。由于 x' 的任意子表示都会诱导出 x 的一个子表示，因此 x' 的每个子表示也必须包含顶点 $v^{-1}(\infty)$，从而 x' 是 α'-稳定的。因此，我们证明了如下结论

引理3.1。如果 α 是定义2.12中关于（$Q, \mathbf{v}$）的稳定性参数，且 α' 是诱导在（$Q', \mathbf{v}'$）上的稳定性参数，那么 $S(x') \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}\ \mathcal{R})^{\alpha - st}$ 意味着 $x' \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}', \mathcal{R}')^{\alpha' - st}$。

引理3.5的证明需要对箭图的限制附加一个条件，即当且仅当路径~在 $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$中包含至少两条边时，才将其移除。

定义 3.2. 设 $Q' = (\mathcal{I}', \mathcal{E}')$ 是对 $Q = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$ 的扩张的限制，且 $\mathcal{R}$ 是一个二次关系集合。那么，所诱导的关系集合 $\mathcal{R}'$ 当且仅当对于每个关系$r = \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p p \in \mathcal{R}$ 以及每条满足 $p' \in \mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}'\ ) \neq 0$ 的路径 $p' \in \mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}'$， $p'^{\sim}$ 中至少有两条边包含于 $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$ 时，称为完全受限。

注 3.3. 上述定义的要点在于限制关系映射的导数 (2.9) 的像中可能出现的同态。如果 $r' \in \mathcal{R}'$ 中的一个关系对应于同态$V_{t(r')} \to V_{h(r')}$，那么完全受限的关系集合意味着：如果 δx 是沿着 $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$ 中各条边的同态之和~，则 $d\nu_x(\delta x)$ 必须为零。这将在下文引理3.5的证明中使用。

由于关系 $\mathcal{R}'$ 是由 $\mathcal{R}$ 诱导的，因此存在一个表示的诱导同态

$$S : \mathrm{Rep}(Q', \mathbf{v}', \mathcal{R}') \hookrightarrow \mathrm{Rep}(\tilde{Q}', \mathbf{v}', \tilde{\mathcal{R}}') \cong \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}, \mathcal{R}) \tag{3.3}$$

由 (3.2) 给出，Hom^0, Hom^1 和 Rel 空间也同样如此。此外，由于关系的诱导映射是单射，因此存在一个满射分裂同态

$$\mathrm{Rel}(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\mathcal{R}') \underset{q}{\overset{}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rel}(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\tilde{\mathcal{R}}')$$

其 $\ker(q)$ 由所有同态 $\mathrm{Hom}(V_{t(r')}, V_{h(r')}) \subset \mathrm{Rel}(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\mathcal{R}')$ 组成，并满足 $r' \in \mathcal{R}' \setminus \mathcal{R}'$。

于是，$(Q',\mathcal{R}')$ 和 $(Q',\mathcal{R}')$ 的变形复形 (2.10) 之间的关系为

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}^0(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}') & \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{S(x')}} & \mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}') & \xrightarrow{d\nu_{S(x')}} & \mathrm{Rel}(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\tilde{\mathcal{R}}') \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\downarrow q \\ \mathrm{Hom}^0(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}') & \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x'}} & \mathrm{Hom}^1(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}') & \xrightarrow{d\nu_{x'}} & \mathrm{Rel}(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\mathcal{R}') \end{array} \tag{3.4}$$

注 3.4。由于群 $K_{\mathbf{v}}$ 包含由恒等映射的数量倍数组成的一参数子群，该子群在 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 上平凡作用，因此 $x \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v})^{\alpha-st}$ 仅意味着 $\rho^{\mathbb{C}}_x\colon \mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}) \to \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})$ 在 $\mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v})$ 的无迹部分上是单射。同样地，给定一组 $\mathcal{R}$ 关系，映射 $d\nu_x\colon \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}\ \mathcal{R})$ 只能满射到无迹部分（仅当存在关系 $r \in \mathcal{R}$ 且满足 $t(r) = h(r)$ 时，该部分才非平凡）。这已足以应用标准的变形理论证明模空间是光滑的。为强调这一点，我们将无迹部分记为

$$\mathrm{Hom}^0_0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}) \subset \mathrm{Hom}^0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Rel}_0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v},\mathcal{R}) \subset \mathrm{Rel}(Q,\mathbf{v},\mathbf{v},\mathcal{R}).$$

引理3.5. 假设 Q' 如上所述通过 Q 的扩张和限制定义，关系$\mathcal{R}'$是完全受限的，并且 $x = S(x') \in \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}\ \mathcal{R})$ 是由 $x' \in \mathrm{Rep}(Q',\mathbf{v}',\mathcal{R}')$ 诱导的。假设 $d\nu_x\colon \mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}) \to \mathrm{Rel}_0(Q,\mathbf{v},\mathbf{v}\ \mathcal{R})$ 是满射。那么

$$d\nu_{x'} : \mathrm{Hom}^1(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}') \to \mathrm{Rel}_0(Q,\mathbf{v}',\mathbf{v}',\mathcal{R}')$$

也是满射。

证明。若 $d\nu_x$ 是满射，则对于扩展箭图 $d\nu_x$，相同的映射 $\mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}') \to \mathrm{Rel}_0(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\mathcal{R}')$ 也是满射，因此 $q \circ d\nu_x$ 是满射。

存在典范分解，使得

$$\mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}') \cong \mathrm{Hom}^1(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}') \oplus \mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}')/\mathrm{Hom}^1(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}'),$$

其中商空间由所有切向量 $\delta x \in \mathrm{Hom}(V_{t(a)}, V_{h(a)}) \subset \mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}')$ 组成，适用于边 $a \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$。

关系 $\mathcal{R}'$ 完全受限这一条件意味着，所有此类切向量都属于 $q \circ d\nu_{S(x')}$ 的核。因此， $d\nu_{x'}$ 的像等于复合的像

$$\mathrm{Hom}^1(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}') \hookrightarrow \mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}') \xrightarrow{d\nu_{S(x')}} \mathrm{Rel}_0(\tilde{Q}',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\tilde{\mathcal{R}}') \xrightarrow{q} \mathrm{Rel}_0(Q',\mathbf{v}',\mathbf{v}',\mathcal{R}').$$

因此， q 和 $d\nu_{S(x')}$ 的满射性意味着 $d\nu_{x'}$是满射的。 □

推论 3.6. 设 Q 为一个维数向量为 v 的箭图，并假设对于所有 $x \in \mathrm{Rep}(Q, \mathrm{v})^{\alpha-st}$，映射 $d\nu_x$: $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathrm{v}, \mathrm{v}) \to \mathrm{Rel}_0(Q, \mathrm{v}, \mathrm{v}\ \mathcal{R})$ 都是满射。则如果 Q' 由 Q 的扩张与限制定义，且关系 $\mathcal{R}'$ 是完全受限的，那么模空间 $\mathcal{M}_{\alpha'}(Q', \mathrm{v}\ \mathcal{R}')$ 是光滑的。

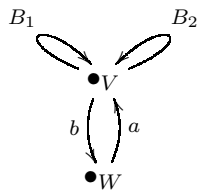
证明。引理3.1表明，若 $x' \in$ 表示空间(Q', v') 稳定，则 $S(x')$ 稳定，因此根据引理3.5， $d\nu_{x'}$ 是满射。将标准变形理论应用于复形，即可得到结论

$$\mathrm{Hom}^0(Q', \mathbf{v}', \mathbf{v}') \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{x'}} \mathrm{Hom}^1(Q', \mathbf{v}', \mathbf{v}') \xrightarrow{d\nu_{x'}} \mathrm{Rel}_0(Q', \mathbf{v}', \mathbf{v}', \mathcal{R}'). \qquad \square$$

主要关注的例子是 Nakajima 箭图簇的完全受限扩张。回忆一下，对于 Nakajima 箭图簇，hyperk¨ahler 结构在变形复形 (2.10) 上诱导出一种对偶性，使得 $\rho^{\mathbb{C}}_x$ 是单射当且仅当 $d\nu_x$ 是满射（参见 [10], [19, 引理3.10]）。特别地，若 x 是稳定表示，则 $\rho^{\mathbb{C}}_x$ 是单射，因此稳定表示的模空间是光滑的（参见 [19, 推论3.12]）。引理3.1和3.5表明，Nakajima 箭图簇的完全受限扩张的表示 $x' \in$ 表示空间$(Q', \mathrm{v}\ \mathcal{R}')$ 对应于模空间中的一个光滑点，当且仅当它在原 Nakajima 箭图上诱导出一个稳定表示 $x = S(x') \in$ 表示空间$(Q, \mathrm{v}\ \mathcal{R})$。

以下例子展示了上述所有构造。

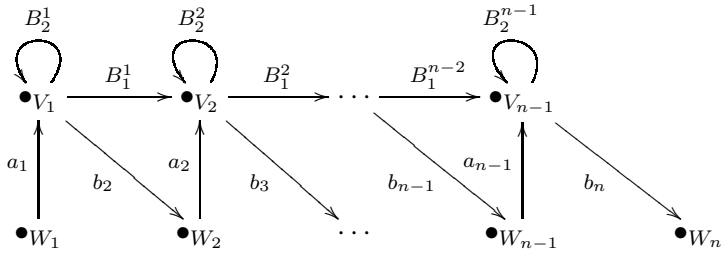
例3.7（由ADHM箭图得到手锯箭图）。考虑一个给定维数向量的ADHM箭图。



为便于记号，令 k 表示向量空间为 V 的顶点，令 ℓ 表示向量空间为W的顶点。定义 $\mathcal{I}' = \{k_1, \ldots, k_{n-1}, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$，其中 $v\colon\ \mathcal{I}' \to \mathcal{I}$ 定义为 $v(k_i) = k$，且 $v(\ell_i) = \ell$。现在分解 $V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$ 和 $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$。从所有可能的边中，选取一个子集 $\mathcal{E}'$，使得

- B_1 分解为分量 $B_1^k\colon\ V_k \to V_{k+1}$，其中 $k = 1,$ ....., $n-2,$
- B_2 分解为分量 $B_2^k\colon\ V_k \to V_k$，其中 $k = 1,$ ....., $n,$
- a 分解为分量 $a_k\colon\ W_k \to V_k$ 对于 $k = 1,$ ....., $n-1,$ 以及
- b 分解为分量 $b_k\colon\ V_{k-1} \to W_k$ 对于 $k = 2,$ ....., n。

于是，上述 ADHM 箭图展开为手锯箭图 (2.12)，而关系 (2.11) 分解为手锯箭图的关系 (2.13)。



请注意，对于每个 $k = 1, \dots, n-2$，都有一个手锯关系 $V_k \to V_{k+1}$（参见 (2.13)）。在原始的 ADHM 箭图中，给定 $V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$ 和 $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$，存在许多具有非平凡 ADHM 关系、且映射 $V_k \to V_{k+1}$ 的路径（例如，对于 $\ell \neq k+1$，$V_k \to V_\ell$ 后接 $V_\ell \to V_{k+1}$）；不过我们看到，所有边都位于手锯箭图中的此类路径，只有那些出现在手锯关系中的路径。

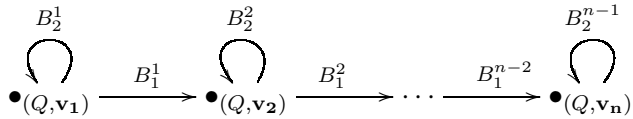
此外，手锯关系 (2.13) 是 ADHM 关系的完整限制，因为扩展的 ADHM 箭图的关系中所有未出现在手锯关系中的路径，都必须包含两条不属于手锯箭图的边集合 $\mathcal{E}'$ 的边。

例3.8（中岛箭图的圆群作用的不动点）。回顾一下，对于边的分解记为 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{0,1} \cup \mathcal{E}^{0,1}$ 的中岛箭图，在表示空间上有一个研究得很透彻的圆群作用（参见 [21], [10]）。

$$e^{i\theta} \cdot ((x_a, x_{\bar{a}}))_{a \in \mathcal{E}^{0,1}} = \Big((x_a, e^{i\theta} x_{\bar{a}}) \Big)_{a \in \mathcal{E}^{0,1}}.$$

此作用与 $G_{\mathbf{v}}$ 的作用相交换，因此下降到模空间。若等价类 $[x]$ 是圆群作用的不动点，则表示 $\mathrm{Vect}(Q,\mathbf{v})$ 分解为权空间，这些权空间按序排列为 $\mathrm{Vect}(Q, \mathbf{v_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(Q, \mathbf{v_n})$。由此可见，不动点决定了箭图的一种扩张。

为使记号与前一个例子保持一致，我们用 $B_2 \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})^{0,1}$ 表示与边 $a \in \mathcal{E}^{0,1}$ 对应的所有同态之和，用 $B_1 \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v})^{1,0}$ 表示与 $a \in \mathcal{E}^{0,1}$中的边对应的所有同态之和。于是，不动点条件（参见 [10] 和 [21]）蕴含 B_1 可分解为 $B_1^j \in \mathrm{Rep}(\overline{Q}, \mathbf{v_j})^{1,0}$ 之和，而 B_2 可分解为$B_2^j \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_j}, \mathbf{v_{j+1}})^{0,1}$之和。下图给出了这一表示。为简单起见，我们用单条边表示每个表示 $B_1^j \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_j})^{1,0}$ 和 $B_2^j \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_j}, \mathbf{v_{j+1}})^{0,1}$。



因此，我们看到该不动点也决定了上述扩张的一个限制。出于与前一个例子相同的原因，这些关系构成了原始超凯勒箭图关系的一个完整限制。

我们还希望将上述理论应用于负切片；在推论 9.2 中，我们将利用这一点来描述某个射影

丛中 Hecke对应的法丛的托姆类。例 3.11 表明，负切片可以写成受限箭图的表示空间；然而，该限制不满足引理3.5的条件。如果箭图没有环，那么恢复引理3.5的结论相当容易；而如果箭图确实含有环，则需要添加如下额外条件。

定义 3.9. 给定一组 $\mathcal{R}$ 二次关系，对于每个环 $a \in \mathcal{E}$ ，若 $t(a) = h(a) = t(r)$对某个关系 r 成立，则对于所有满足 $\lambda_p(r) \neq 0$ 的路径 $p = ba$ ，存在唯一的环 $a' \in \mathcal{E}$ 使得$t(a') = h(a') = h(r)$，以及一条路径 $p' = a'b$ 使得 $\lambda_{p'}(r) \neq 0$。

注 3.10. 这是一个一般性条件，在一些有用的例子中都满足。对于 ADHM箭图，由于（采用例3.7中的记号）关系

$$r = B_1B_2 - B_2B_1 + ab$$

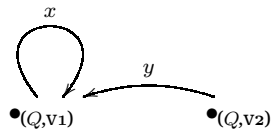
包含两个环 B_1、 B_2。我们有 $t(B_1) = t(r)$，且存在一条路径 $p = B_2B_1$ 使得 $\lambda_p(r) = -1 \neq 0$。存在唯一的环（此处再次为 B_1 ），使得 $h(B_1) = h(r)$，以及一条路径 $p' = B_1B_2$使得 $\lambda_{p'}(r) = 1 \neq 0$。同样的思路也适用于环 B_2。

类似地，对于手锯箭图，每个环 B_2^k 都是某个关系的尾

$$r_k = B_1^kB_2^k - B_2^{k+1}B_1^k + a_{k+1}b_{k+1}$$

对应于 $k = 1, \ldots, n-2$。令 $p = B_1^kB_2^k$ 为以 B_2^k 为尾的路径，并注意存在唯一的环 B_2^{k+1}，使得 $p' = -B_2^{k+1}B_1^k$ 与 $\lambda_{p'}(r_k) = -1 \neq 0$。

例 3.11（负切片作为受限箭图）。给定一个维数向量为 $\mathbf{v}$ 的带框箭图 Q ，考虑对应于 $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ 的结构群约化，其限制如下



其中 $x \in$ 表示空间 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_1})$，且 $y \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})$，这里用单个箭头表示表示 x 和 y ，以简化上述交换图。当 $y \in \ker(\rho_x^{\mathbb{C}})^*$ 非零时，这些表示出现在负切片 (2.36) 中。若 $y \notin \ker(\rho_x^{\mathbb{C}})^*$，则 [29, 引理 3.26] 表明存在 $g \in G_{\mathbf{v}}$ ，使得 $g \cdot y$ 也在负切片中。

关系映射 ν：表示空间$(Q, \mathbf{v}) \to \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v}\ \mathcal{R})$ 分解为

$$\nu_1 \oplus \nu_2 : \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_1}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) \to \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \oplus \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}),$$

其中， ν_1 是对 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_1})$ 的 ν 。为定义 ν_2，首先注意到，由于 y 是幂零的，因此每条路径 $p = a_n \cdots a_1$ 都映射为同态

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_1}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) &\to \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \\ (x, y) &\mapsto (x, y)_p := x_{a_n} \cdots x_{a_2} y_{a_1}. \end{aligned}$$

等价地，令 $p' = a_n \cdots a_2$ 为从 p 中移除 a_1 后得到的截断路径，并注意到 $(x,y)_p = x_{p'} y_{a_1}$。给定 $(\delta x, \delta y) \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1})$，每条路径的导数 (2.6) 为

$$dp_{(x,y)}(\delta x, \delta y) = dp'_x(\delta x) y_{a_1} + x_{p'}(\delta y)_{a_1}.$$

现在定义

$$\nu_2(x,y) = \bigoplus_{r \in \mathcal{R}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r)\,(x,y)_p$$

and

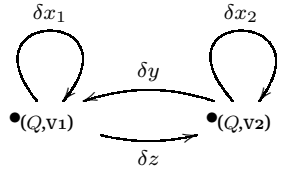
$$\begin{aligned}(d\nu_2)_{(x,y)}(\delta x, \delta y) &= \bigoplus_{r \in \mathcal{R}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r)\, dp_{(x,y)}(\delta x, \delta y) \\ &= \bigoplus_{r \in \mathcal{R}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r)\, dp'_x(\delta x) y_{a_1} + \bigoplus_{r \in \mathcal{R}} \sum_{p \in \mathcal{P}_{t(r),h(r)}} \lambda_p(r)\, x_{p'}(\delta y)_{a_1} \\ &=: (d\nu_2)_y(\delta x) + (d\nu_2)_x(\delta y),\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中，上述内容被用作 $(d\nu_2)_y(\delta x)$ 和 $(d\nu_2)_x(\delta y)$ 的定义。现在，关系映射的导数是

$$\begin{aligned}(d\nu_1 \oplus d\nu_2)_{(x,y)} : \mathrm{Hom}(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}) &\to \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \oplus \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \\ (\delta x, \delta y) &\mapsto \left((d\nu_1)_x(\delta x), (d\nu_2)_y(\delta x) + (d\nu_2)_x(\delta y)\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

这个具体例子以及 ν 的导数记号将在第9节中使用。我们希望将引理3.5的变形理论应用于这个负切片箭图，从而应用于 Hecke对应，然而遗憾的是，负切片箭图并不是原箭图 Q 的完整限制，因为 $\mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}', \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$ 中一个如下形式的变形

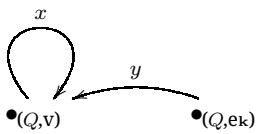
(3.7)



可能包含与路径相关的关系，其导数含有诸如 $y(\delta z)$ 和 $y(\delta x_2)$ 这样的项，这两者在 $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}'$ 中都恰好包含一条边。下一个引理表明，第一类路径并不妨碍证明 $d\nu_{(x+y)}$ 是满射的，而第二类路径可以利用定义 3.9 的条件加以处理。

引理3.12. 设 $Q = (\mathcal{E}, \mathcal{I})$是一个带关系 $\mathcal{R}$ 的带框箭图，其典范稳定参数由定义2.12给出。假设对于任意维数向量 $\mathbf{v}$，x 稳定蕴含 $d\nu_x$ 是满射。

取一个维数向量 $\mathbf{v}$ 和顶点 $k \in \mathcal{I}$，并考虑由负切片箭图给出的结构群约化所关联的限制箭图



设 $x \in \mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v})^{\alpha-st}$ 且假设 $y \in S_x^-$ 非零。那么 $d\nu'_{(x+y)}$ 到 $\mathbf{Rel}_0(Q, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}) \oplus \mathbf{Rel}(Q,\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R})$ 是满射。

证明。由于 x 稳定且 $y \in S_x^-$，负梯度流 (2.26) 将 $x+y$ 带到 $\mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v}+\mathbf{e_k}, \mathcal{R})$ [29] 上 $\|\mu-\alpha\|^2$ 的一个较低临界点。由于 x 处于 $\mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v}+\mathbf{e_k}, \mathcal{R})$ 中 $\|\mu-\alpha\|^2$ 的最低非极小临界层，因此这个较低临界点必定是 $\|\mu-\alpha\|^2$ 的极小值点，故 $x+y$ 稳定。特别地，这意味着ƙəa

$$\mathrm{Hom}^1(\tilde{Q}', \mathbf{v}+\mathbf{e_k}, \mathbf{v}+\mathbf{e_k}) \xrightarrow{d\nu_{(x+y)}} \mathrm{Rel}_0(\tilde{Q}', \mathbf{v}+\mathbf{e_k}, \mathbf{v}+\mathbf{e_k}, \tilde{\mathcal{R}}') \tag{3.8}$$

˜对于无约束箭图 Q' 是满射。为了完成证明，我们需要说明这意味着诱导同态

$$\mathrm{Hom}^1(Q', \mathbf{v}, \mathbf{v}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q', \mathbf{e_k}, \mathbf{v}) \xrightarrow{d\nu'_{(x+y)}} \mathrm{Rel}_0(Q', \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathcal{R}') \oplus \mathrm{Rel}(Q', \mathbf{e_k}, \mathbf{v}, \mathcal{R}') \tag{3.9}$$

(3.4) 中的映射是满射。

参照 (3.7) 中变形的记号，首先注意到 $d\nu_x(\delta x_1)$ 定义了一个到第一分量 $\mathbf{Rel}_0(Q', \mathbf{v}, \mathbf{v}\ \mathcal{R}')$ 上的满射，因为 x 是稳定的。因此， $d\nu'(\delta x_1)$ 也˜定义了一个满射。等价地，这说明来自 Q' 上关系的项 $d\nu_y(\delta z)$ 不会影响 $d\nu'$ 到第一分量上的满射性。

$d\nu'_{(x+y)}$ 映射到 $\mathbf{Rep}(Q', \mathbf{e_k}, \mathbf{v}\ \mathcal{R}')$ 的第二分量是 (3.5) 中的 $(d\nu_y)(\delta x_1) + (d\nu_x)(\delta y)$。如果顶点 $k \in \mathcal{I}$ 处没有环，那么 (3.7) 中的变形 δx_2 为零，因此 $d\nu'_{(x+y)}$ 的第二分量由较大的箭图诱导而来，从而是满射。

若顶点 $k \in \mathcal{I}$ 处有一个标量为 $\delta x_2 \in \mathbb{C}$ 的环，那么定义 3.9 意味着，任何形如 $y(\delta x_2) \in \mathbf{Rel}(\tilde{Q}', \mathbf{e_k}, \mathbf{v_1}, \tilde{\mathcal{R}}')$ 的关系，都可以通过在相应的关系 $(\delta x_1')y$ 中取 $\delta x_1' = {}^{\lambda_{p_{(r)}}\lambda_{p'(r)}\delta x_2 \cdot \mathbf{id}}$ 来消去。该关系出现在 $\mathbf{Rel}(Q', \mathbf{e_k}, \mathbf{v_1}, \mathcal{R}')$ 中，并且根据定义 3.9 中的条件，它存在且唯一。对每个环都可以这样做，因此 (3.8) 中 $d\nu_{(x+y)}$ 的满射性蕴含 (3.9) 中 $d\nu'_{(x+y)}$ 的满射性，证毕。□

推论 3.13. 在满足与引理3.12相同的条件下，与负切片箭图相关联的模空间是光滑的。

证明。引理3.12表明 $d\nu'_{(x+y)}$ 是满射，随后利用与推论 3.6相同的方法，根据模空间的标准变形理论可知其光滑。□

4. The Morse spectral sequence

本节回顾与拓扑空间的莫尔斯滤过相关的谱序列上的微分和杯积的一些基本事实。

4.1. 莫尔斯分层。给定一个拓扑空间 M 和一个滤过 $\emptyset = M_{-1} \subset M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$，可以写出一个谱序列，其第一页上的项为

$$E_1^{p,q} = H^p(M_{q-p}, M_{q-p-1}).$$

因此，目标是计算这些项 $E^{p,\infty}{}^q$它们对应于 M 的分次上同调。当M 是一个流形时，莫尔斯理论视角是利用满足某些条件（我们将在下文精确定义）的光滑函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$，导出 M 的莫尔斯滤过，并通过分析 f 在临界点附近的行为来进行谱序列计算。

假设对所有 $x \in M$，以 x 为初始条件的 f 的负梯度流（记作 $\varphi_t(x)$）对所有 $t \in [0, \infty)$ 都有定义，且 $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x)$ 存在。例如，Łojasiewicz 不等式方法[15], [25] 表明，当函数为解析函数且流满足紧致性条件时，上述结论成立；仿射簇上动量映射的范数平方就满足这一条件（参见 [26, 引理 4.10]）。在这种情况下，可以构造一个由 f 的临界点集的连通分量确定的滤过 $\emptyset = M_{-1} \subset M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$。

如果函数在临界集附近也具有良好性质（例如它是莫尔斯函数、莫尔斯–博特函数 [5]或最小退化函数 [12]），那么对于每个标记为 $j = 1$、.....、n 的临界集 C_j，都存在一个负法丛 $V_j \to C_j$，其纤维对应于每个临界点处海森矩阵的负特征空间。令 $V_{j,\,0} = V_j \setminus C_j$，并令 $\lambda_j := \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V_j$ 为指标。莫尔斯理论主定理表明，谱序列第一页上的项可以用局部化在临界集附近的相对上同调群来表示

$$H^*(M_j, M_{j-1}) \cong H^*(V_j, V_{j,0}),$$

而托姆同构表明，这些相对上同调群可以用莫尔斯数据（临界集及其莫尔斯指标）来表示

$$H^*(V_j, V_{j,0}) \cong H^{*-\lambda_j}(C_j).$$

接下来需要计算谱序列中的微分。如果函数的梯度流还具有进一步的良好性质，即稳定流形与不稳定流形横截相交（例如该函数是 Morse-Smale 或 Morse-Bott-Smale），那么这些微分便可以用流线空间上的拉回/推前同态来表示；相关内容在 [4] 中利用德拉姆上同调作了详细推导。

Ther因此，如果函数的性质足够良好，那么莫尔斯理论便可确定

(1) 一个典范的莫尔斯滤过（这要求流具有良好的紧致性），(2) 用临界点数据描述谱序列第一页的项（这要求函数在临界集附近具有良好的性质），以及

(3) 用流线数据描述谱序列的微分（这要求满足横截性条件）。

更一般地，可以用流 φ 保持不变的（可能是奇异的）子集 Z 替代流形 M，也就是说，如果初始条件为 $x_0 \in Z$，那么对于所有使 $\varphi_t(x_0)$有定义的 t，都有 $\varphi_t(x_0) \in Z$。在某些附加条件下（这些条件已在 [30] 中详细说明，下面我们会回顾），仍然存在莫尔斯滤过 $\emptyset = Z_{-1} \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_n = Z$，并且谱序列第一页上的各项仍可写成局部化在临界集周围的相对上同调群。

令 M 为实解析的，令 $f\colon\ M \to \mathbb{R}$，并令 $\varphi_t(x)$ 表示 f 的时间 t 向下梯度流，其初始条件为 $x \in M$。令 Z 为在 f 的梯度流下保持不变的子集，即 $x \in Z$ 蕴含对于所有满足 $\varphi_t(x)$ 存在的 t，有 $\varphi_t(x) \in Z$。于是，我们可以将临界点定义为该流的不动点。如上所述，对于 $j = 0$、.....、n，将临界集标记为 C_j，并定义

$$W_j^- := \left\{ x \in Z \mid \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) \in C_j \right\}, \quad W_{j,0}^- := W_j^- \setminus C_j.$$

[30] 的主要结果是：若满足某些条件，则莫尔斯理论主定理的以下类比对f 成立：$Z \to \mathbb{R}$。

定理 4.1（[30, 定理 1.1 和 1.3]）。若对（$Z \subset M$，$f\colon\ M \to \mathbb{R}$）满足 [30], 的条件（1）–（5），则存在一个莫尔斯滤过 $\emptyset = Z_{-1} \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_n = Z$，并且对任意实数 $a < b$，以下结论成立。

- 若 $[a, b]$ 中没有临界值，则 $Z_b \simeq Z_a$。
- 若 a 和 b 都不是临界值，且存在一个临界值 $c \in$ （a，b），其对应的临界集为 C_j，则 $Z_j \simeq Z_{j-1} \cup W_j^-$。

此外，若 K 是作用于 Z 的紧李群，且 f 是 K不变的，则上述同伦等价可以选为 K等变的。

应用切除可得如下 K-等变上同调中的同构

$$H_K^*(Z_j, Z_{j-1}) \cong H_K^*(W_j^-, W_{j,0}^-). \tag{4.1}$$

因此，滤过 $\emptyset = Z_{-1} \subset Z_0 \subset$的谱序列第一页上的项 $\cdots \subset Z_n = Z$ 可以用根据临界集周围局部数据定义的相对上同调群来表示。

[30] 的结果还表明，上述定理对于仿射簇上的矩映射的范数平方也成立（另见 [28]，其中给出了更简洁的证明）。特别地，我们可以将此定理应用于具有有限关系集的箭图表示的一般情形。

4.2. Thom 同态。现在考虑如下情形：环境流形 M 上的函数 $f\colon\ M \to \mathbb{R}$ 按 Kirwan [12] 的意义是最小退化的，并且 f 在 $Z \subset M$ 上的限制满足条件（1）–（5）[30]。一个典型例子是 M 为.....的表示空间

箭图表示的空间， $f\colon M\to\mathbb{R}$ 是第2.3节中的动量映射的范数平方，而 Z 是满足箭图上有限关系集的子簇。

由于 f 在 M 上是最小退化的，因此临界集 C_j 的不稳定集 V_j 是一个向量丛。令 $\lambda_j:=$ ，其秩为 $_{\mathbb{R}}V_j$。那么，托姆同构表明，关于 M 的谱序列第一页上的项可写为 $H_K^p(M_j,M_{j-1})\cong H_K^{p-\lambda_j}(C_j)$，它们构成如下交换图

$$
\begin{array}{ccc}
H_K^p(M_j,M_{j-1}) & \longrightarrow & H_K^p(M_j) \\
\cong\uparrow\downarrow \text{Thm. 4.1} & & \downarrow restriction \\
H_K^p(V_j,V_{j,0}) & \longrightarrow & H_K(V_j) \\
\cong\uparrow\downarrow Thom & & \downarrow restriction \\
H_K^{p-\lambda_j}(C_j) & \xrightarrow{\smile e} & H_K^p(C_j)
\end{array}
\tag{4.2}
$$

其中，同构 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j)\cong H_K^{p-\lambda_j}(V_j)\to H_K^p(V_j,V_{j,\,0})$ 由拉回后再与托姆类 $\tau\in H_K^{\lambda_j}(V_j,V_{j,\,0})$ 作杯积给出。

令 $i\colon C_j\cap Z\hookrightarrow C_j$ 表示包含映射。下文中，我们用 W_j 表示将 f 限制到 Z 后， $C_j\cap Z$ 的不稳定集；用 $V_j^Z:=i^*V_j$ 表示从环境流形 M 拉回的负法丛。丛 $V_j^Z\to C_j\cap Z$ 的欧拉类记为 $e_Z=i^*e$。注意， $W_j\subset V_j^Z$。

将我们限制到子空间 Z上时，上述交换图的下半部分变为

$$
\begin{array}{ccc}
H_K^p(W_j,W_{j,0}) & \longrightarrow & H_K^p(W_j) \\
restriction\uparrow & & \cong\uparrow\downarrow \\
H_K^p(V_j^Z,V_{j,0}^Z) & \longrightarrow & H_K^p(V_j^Z) \\
Thom\uparrow\downarrow\cong & & \cong\uparrow\downarrow \\
H_K^{p-\lambda_j}(C_j\cap Z) & \xrightarrow{\smile e_Z} & H_K^p(C_j\cap Z)
\end{array}
$$

因此，我们看到，与欧拉类 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j\cap Z)\xrightarrow{\smile e_Z}H_K^p(C_j\cap Z)$ 作杯积可经由同态 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j\cap Z)\to H_K^p(W_j,W_{j,\,0})$ 分解，也就是说，下面的交换图是交换的。

$$
\begin{array}{ccc}
H_K^p(W_j,W_{j,0}) & \longrightarrow & H_K^p(W_j) \\
\uparrow & & \cong\uparrow\downarrow \\
H_K^{p-\lambda_j}(C_j\cap Z) & \xrightarrow{\smile e_Z} & H_K^p(C_j\cap Z)
\end{array}
$$

特别地，如果映射 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j\cap Z)\xrightarrow{\smile e_Z}H_K^p(C_j\cap Z)$ 是单射，那么同态$H_K^{p-\lambda_j}(C_j\cap Z)\to H_K^p(W_j,W_{j,\,0})$ 也是单射。

上述构造概括如下。

引理 4.2. 设 $\pi\colon V \to B$ 是一个秩为 $\lambda = \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} V$、欧拉类为 $e \in H_K^{\lambda}(B)$、托姆类为 $\tau \in H_K^p(V, V \setminus B)$ 的向量丛。考虑子空间 $i\colon W \hookrightarrow V$，使得 $K \cdot i(W) = i(W)$，且零截面 $B \hookrightarrow V$ 包含于 $i(W)$。定义 $V_0 := V \setminus B$ 和 $W_0 := W \setminus B$。那么存在一个同态

$$H_K^{p-\lambda}(B) \xrightarrow{i^*\pi^*(\cdot)\smile i^*\tau} H_K^p(W, W_0) \tag{4.3}$$

此外，如果 $H_K^{p-\lambda}(B) \xrightarrow{\smile e} H_K^p(B)$ 是单射，那么同态 (4.3) 也是单射。

因此，将交换图 (4.2) 限制到子空间 Z，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc}
H_K^p(Z_j, Z_{j-1}) & \longrightarrow & H_K^p(Z_j) \\
\cong\uparrow\downarrow \text{Thm. 4.1} & & \downarrow \mathit{restriction} \\
H_K^p(W_j, W_{j,0}) & \longrightarrow & H_K(W_j) \\
\uparrow \text{Lem. 4.2} & & \cong\uparrow\downarrow \mathit{restriction} \\
H_K^{p-\lambda_j}(C_j \cap Z) & \xrightarrow{\smile e_Z} & H_K^p(C_j \cap Z)
\end{array}$$

由此我们看到，尽管滤过 $\emptyset \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_n = Z$ 的谱序列第一页上的项可能不同构于项 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j \cap Z)$，但我们仍有同态 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j \cap Z) \to H_K^p(Z_j, Z_{j-1})$。如果 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j \cap Z) \xrightarrow{\smile e_Z} H_K^p(C_j \cap Z)$ 是单射，那么 $H_K^{p-\lambda_j}(C_j \cap Z) \to H_K^p(Z_j, Z_{j-1})$ 也是单射。

最后，我们有以下引理，它将在第 6 节中发挥作用。

引理 4.3. 设 $E \cong E_1 \oplus E_2 \to B$ 是向量丛的直和，并且 le t

$$\nu_1 = \operatorname{rank} E_1, \quad \nu_2 = \operatorname{rank} E_2, \quad \lambda = \nu_1 + \nu_2 = \operatorname{rank} E.$$

那么以下交换图成立，其中顶行的同态由包含映射诱导，左列是丛 $E \to B$ 的托姆同构，中间列是丛 $E \to E_1$ 的托姆同构，右列是 E_2 的托姆同构，底行则是与 E_1 的欧拉类作杯积。

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(E, E_0) & \longrightarrow & H^p(E, E \setminus E_1) & \xrightarrow[\mathit{homotopy}]{\cong} & H^p(E_2, E_{2,0}) \\
\mathit{Thom}\uparrow\downarrow\cong & & \mathit{Thom}\uparrow\downarrow\cong & & \mathit{Thom}\uparrow\downarrow\cong \\
H^{p-\lambda}(B) & \xrightarrow{\smile e_1} & H^{p-\nu_2}(B) & \xrightarrow{=} & H^{p-\nu_2}(B)
\end{array}$$

证明。由欧拉类的惠特尼和公式 $e = e_1 \smile e_2$ 以及上述交换图中的同伦等价可得证明。□

4.3. 一个分裂引理。考虑三元组（Z_{j+1}、Z_j、Z_{j-1}），令 C_{j+1} 和 C_j 分别表示 $Z_{j+1}\setminus Z_j$ 和 $Z_j\setminus Z_{j-1}$ 中相应的临界集，并令 $\mathcal{F}^{j+1}_{j\,0}$、表示下临界集 C_j 与上临界集 C_{j+1} 之间的流线空间。下文中杯积的构造取决于对不同三元组（Z_{j+1}、Z_j、Z_{j-1}）、（W_{j+1}、$W_{j+1,\,0}$、$W_{j+1,\,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1}_{0\,j}$、）和（$W_{j+1}$、$W_{j+1,\,0}$、$\emptyset$）的长正合序列所作的分裂选择。本节证明下面的引理，说明这些选择可以彼此相容；这将用于证明，在命题 5.3 中用于定义杯积的不同分裂可以选择为彼此相容，从而使交换图（5.4）交换。该引理及其证明虽然是初等的，但我们未能在文献中找到所需的精确表述，因此在此给出全部细节，以使本文的论述自成一体。

引理 4.4. 考虑　　如下阿贝尔群短正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow r & & \downarrow t & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{j'} & B' & \xrightarrow{k'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并假设所有群都是可除阿贝尔群，因此所有短正合列都分裂。那么，给定一个分裂同态 $i'\colon C'\to B'$，存在一个分裂同态 $i\colon C\to B$，使得 $r\circ i = i'\circ t$。

证明。选择一个分裂同态 $s\colon \operatorname{im} r\to B$，使得 $r\circ s=\mathrm{id}$，并注意到 $r\circ j = j'$意味着 $\operatorname{im} j'\subset \operatorname{im} r$，因此 s 定义在 $\operatorname{im} j'$ 上。

首先我们断言，对于所有 $c\in C$，$i'\circ t(c)\in \operatorname{im} r$。为此，请注意，

$$\begin{aligned} k'\circ i'\circ t(c) = t(c) = t\circ k(b) = k'\circ r(b) \quad &\text{for some } b\in B \text{ defined up to } \operatorname{im} j \\ \Rightarrow\quad i'\circ t(c) - r(b)\in \ker k' = \operatorname{im} j' = \operatorname{im} r\circ j \\ \Rightarrow\quad i'\circ t(c) = r(b+j(a)) \quad &\text{for some } a\in A. \end{aligned}$$

因此，$s\circ i'\circ t$ 是良定义的，我们可以构造一个分裂同态 $i := s\circ i'\circ t : C/\ker t\to B$，使得 $r\circ i = i'\circ t$。现在只需在$\ker t$上定义 i。

任取一个分裂同态 $i''\colon C\to B$，使得 $k\circ i''=\mathrm{id}$。若 $c\in\ker t$，则有

$$\begin{aligned} & t\circ k\circ i''(c) = 0 \\ \Rightarrow\quad & k'\circ r\circ i''(c) = 0 \\ \Rightarrow\quad & r\circ i''(c)\in\ker k' = \operatorname{im} j' = \operatorname{im} r\circ j. \end{aligned}$$

因此，存在 $a\in A$ 使得 $r(i''(c)+j(a)) = 0$，且 a 的选取是唯一的，因为 $r\circ j = j'$ 是单射。现在定义 $i\colon \ker t\to\ker r$，令 $i(c) := i''(c)+j(a)\in\ker r$，显然它满足 $r\circ i = i'\circ t$。容易验证 i 是一个同态。结合上文定义的 $i\colon C/\ker t\to B$，由于 C 是一个可除阿贝尔群，因此这确定了满足引理条件的 $i : C\to B$。□

4.4. 谱序列的微分。谱序列第一页上的每个微分都是以下两个同态的复合

$$H^p(Z_j, Z_{j-1}) \xrightarrow{\quad d \quad} H^p(Z_j) \longrightarrow H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j), \tag{4.4}$$

其中，第一个同态来自对 (Z_j, Z_{j-1}) 的长正合序列，第二个同态则是对 (Z_{j+1}, Z_j) 的长正合序列中的连接同态。

第 4.2 节的构造表明，存在从临界集的移位上同调出发的同态，使其纳入下列交换图中

$$\begin{array}{ccc}
H^p(Z_j, Z_{j-1}) & \xrightarrow{\quad d \quad} & H^p(Z_j) \longrightarrow H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j) \\
\text{Thm. 4.1}\uparrow\downarrow\cong & & \text{Thm. 4.1}\uparrow\downarrow\cong \\
H^p(W_j, W_{j,0}) & & H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) \\
\text{Lem. 4.2}\uparrow & & \text{Lem. 4.2}\uparrow \\
H^{p-\lambda_j}(C_j) & & H^{p-\lambda_{j+1}+1}(C_{j+1})
\end{array}$$

于是自然会提出以下问题。

(i) 微分 d：$H^p(Z_j, Z_{j-1}) \to H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j)$ 是否将上述交换图左列的像 $H^{p-\lambda_j}(C_j) \to H^p(Z_j, Z_{j-1})$ 映到右列的像 $H^{p-\lambda_{j+1}+1}(C_{j+1}) \to H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j)$？(ii) 如果是，能否构造一个诱导映射 $H^{p-\lambda_j}(C_j) \to H^{p-\lambda_{j+1}+1}(C_{j+1})$？(iii) 如果上述问题的答案都是肯定的，那么诱导映射 $H^{p-\lambda_j}(C_j) \to H^{p-\lambda_{j+1}+1}(C_{j+1})$ 是否具有任何拓扑意义？

对于光滑空间上的 Morse-Bott-Smale 函数，微分可以用涉及流线空间的拉回／推前同态来表示（例如参见 [4]）。第 8.1 节的主要结果是，这种做法也适用于箭图表示空间；所诱导映射的拓扑意义在于，它可以通过流线空间用拉回／推前同态表示，或者等价地（利用 [29] 的结果）通过Hecke对应表示。

4.5. 相邻分层的谱序列上的杯积。本节描述当微分全为零时，谱序列的 E_1 页上的杯积，它由 Z 全空间上的杯积诱导而来。本节内容纯属代数，旨在为后续章节奠定基础；在后续章节中，我们将利用 [29] 的解析结果和第 2.6 节证明

(i) 定理 4.1 可用于将杯积同态约化为局部化在临界集和流线空间附近的上同调群（第 5.2 节），并且

(ii) 可利用一种修正后的横截性条件，证明杯积同态可以由临界集与连接这些临界集的流线空间之间的拉回与推前同态构造而成（第 8.2 节）。

备注 4.5. 目前我们聚焦于相邻分层之间的杯积同态。将本节的结果推广到非相邻分层很容易，但要推广后续各节的结果，则需要将流线空间紧化，这将留待后续论文处理。

- 为简化论述，在本节余下部分，我们假设该滤过是完美的，即每个对 (Z_j, Z_{j-1}) 对应的长正合序列都分裂为短正合列，或者等价地说，谱序列中的微分全为零。

- 作为记号约定，上同调群记作 H^*，其系数取为可除阿贝尔群，以确保短正合列分裂；不过，所有构造对于关于保持每个分层的群 K 的等变上同调 H_K^* $S_j = Z_j \setminus Z_{j-1}$ 也以相同方式成立。

给定一个三元组 (Z, Z_j, Z_{j-1})，分层的完美性表明以下序列是正合的

$$0 \longrightarrow H^*(Z, Z_j) \longrightarrow H^*(Z, Z_{j-1}) \longrightarrow H^*(Z_j, Z_{j-1}) \longrightarrow 0.$$

给定 $\omega \in H^m(Z)$，上述正合序列中的各项上诱导出一个杯积同态，可表示如下。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^p(Z, Z_j) & \xrightarrow{j} & H^p(Z, Z_{j-1}) & \xrightarrow{k} & H^p(Z_j, Z_{j-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \smile\omega & & \downarrow \smile\omega & & \downarrow \smile\omega_j & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{p+m}(Z, Z_j) & \xrightarrow{j} & H^{p+m}(Z, Z_{j-1}) & \xrightarrow{k} & H^{p+m}(Z_j, Z_{j-1}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.5}$$

其中，$\omega_j \in H^m(Z_j)$ 表示 ω到 Z_j的限制。

利用关于系数的假设，上述正合序列分裂，因此杯积诱导出一个同态

$$H^p(Z, Z_j) \oplus H^p(Z_j, Z_{j-1}) \xrightarrow{\smile\omega} H^{p+m}(Z, Z_j) \oplus H^{p+m}(Z_j, Z_{j-1}). \tag{4.6}$$

对于第 8 节中的莫尔斯理论卷积，我们将重点关注上述同态的非对角分量，记为

$$H^p(Z_j, Z_{j-1}) \xrightarrow{c_\omega} H^{p+m}(Z, Z_j) \tag{4.7}$$

其构造如下。首先注意，在写出 (4.6) 时，我们已隐式地选定了正合序列 (4.5) 的一个分裂，其中存在一个包含映射 $i\colon H^p(Z_j, Z_{j-1}) \to H^p(Z, Z_{j-1})$，使得$k \circ i = \mathrm{id}$，以及一个投影 $\pi\colon H^{p+m}(Z, Z_{j-1}) \to H^{p+m}(Z, Z_j)$，使得 $\pi \circ j = \mathrm{id}$。

令 $\eta \in H^p(Z_j, Z_{j-1})$，并定义 $\zeta = i(\eta)$。则 $\zeta \smile \omega \in H^{p+m}(Z, Z_{j-1}) \cong H^{p+m}(Z, Z_j) \oplus H^{p+m}(Z_j, Z_{j-1})$，随后我们将其投影到 $\pi(\zeta \smile \omega) \in H^{p+m}(Z, Z_j)$。

引理 4.6。关于上述定义的分裂同态 i, π，由全空间 $\smile \omega$ 上的杯积诱导出的杯积同态（4.7）：$H^p(Z) \to H^{p+m}(Z)$ 由下式给出

$$c_\omega(\eta) = \pi(i(\eta) \smile \omega).$$

注 4.7. 若 $\eta \smile \omega_j = 0 \in H^{p+m}(Z_j, Z_{j-1})$，则这是杯积

$$H^p(Z_j, Z_{j-1}) \hookrightarrow H^p(Z, Z_{j-1}) \xrightarrow{\smile \omega} H^{p+m}(Z, Z_j).$$

5. Using the main theorem to localise the differentials and cup product

上一节中微分和杯积的构造适用于拓扑空间 Z 的滤过 $\emptyset = Z_{-1} \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_n = Z$。当该滤过由环境流形 M 上的莫尔斯滤过诱导时（参见定理 4.1 的假设），便可根据临界集附近的局部数据以及流线空间来解释这些同态。[30] 的条件足以定义莫尔斯滤过，并证明定理 4.1 中的同构。本节旨在说明，这些条件也足以证明命题 5.1 和 5.3，从而用临界集附近的局部数据描述微分和杯积。

5.1. 将微分局部化到临界集和流线空间附近。设 c_j, c_{j+1} 表示与临界集 C_j, C_{j+1} 相关联的临界值。对于每个分层 Z_{j+1}，考虑子空间 $N_j := Z_j \cup W_{j+1}$。注意，流诱导出同伦等价 $N_j \simeq f^{-1}(-\infty, c_{j+1}] \simeq Z_{j+1}$ 和 $N_j \setminus C_{j+1} \simeq f^{-1}(-\infty, c_j] \simeq Z_j$（这需要满足 [30] 的条件 (1)–(3)；参见 [30, 命题 2.4]）。应用这些同伦等价可知，微分（对应于下图的顶行）可以构造为下图第二行中各同态的复合。第二行与第三行之间的竖直同态由对 W_{j+1} 的限制诱导，而定理 4.1 随即表明，这在右侧列中诱导出一个同构 $H^{p+1}(N_j, N_j \setminus C_{j+1}) \cong H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0})$。注意，$\mathcal{F}_j^{j+1}$ 用来表示流向 C_{j+1} 并从 C_j 流下的点空间与上、下临界集的并，而 $\mathcal{F}^{j+1}{}_{,j\,0}{}^{0}{}_{,}$ 则是不包含上、下临界集的子集。

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(Z_j, Z_{j-1}) & \longrightarrow & H^p(Z_j) & \longrightarrow & H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
H^p(N_j \setminus C_{j+1}, N_j \setminus \mathcal{F}_j^{j+1}) & \longrightarrow & H^p(N_j \setminus C_{j+1}) & \longrightarrow & H^{p+1}(N_j, N_j \setminus C_{j+1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong \\
H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \longrightarrow & H^p(W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0})
\end{array}$$

因此（除上述交换图右侧一列中的同构外），由定理 4.1 可知，谱序列中的微分可分解为经过底行中的同态，而这些同态可用局部化于临界集及流线空间附近的上同调群来表示。

命题 5.1. 设 Z 和 $f\colon Z \to \mathbb{R}$ 满足 [30]，的条件（1）–（5），使得存在莫尔斯滤过 $\emptyset = Z_{-1} \subset Z_0 \subset \cdots \subset Z_n = Z$，且定理 4.1 适用。则微分 $H^p(Z_j, Z_{j-1}) \xrightarrow{d} H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j)$ 可分解为经过下图底行中的同态的复合。

$$
\begin{array}{ccc}
H^p(Z_j, Z_{j-1}) & \xrightarrow{\qquad\qquad d \qquad\qquad} & H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j) \\
\big\downarrow{\scriptstyle restriction} & & \cong\big\downarrow{\scriptstyle Thm.\ 4.1} \\
H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \longrightarrow H^p(W_{j+1,0}) & \longrightarrow H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0})
\end{array}
\tag{5.1}
$$

在第 8.1 节中，我们将说明，在附加横截性假设下，可以进一步利用流线空间来改进上述构造，这与光滑流形上莫尔斯–博特–Smale 函数的著名理论类似（例如参见 [4, 第 3] 节）。

5.2. 在临界集和流线空间周围局部化杯积。借助与命题 5.1 中关于微分的证明类似的技巧，我们可以利用莫尔斯理论主定理，将谱序列上的杯积表示为局部化在临界集和流线空间周围的上同调群。图（4.5）中的各项与下图中的对应项同构。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^p(N_j, N_j \setminus C_{j+1}) & \longrightarrow & H^p(N_j, N_j \setminus \mathcal{F}_j^{j+1}) & \longrightarrow & H^p(N_j \setminus C_{j+1}, N_j \setminus \mathcal{F}_j^{j+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \smile\omega_{j+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \smile\omega_{j+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \smile\omega_j} & & \\
0 & \to & H^{p+m}(N_j, N_j \setminus C_{j+1}) & \to & H^{p+m}(N_j \setminus C_{j+1}, N_j \setminus \mathcal{F}_j^{j+1}) & \to & H^{p+m}(N_j \setminus C_{j+1}, N_j \setminus \mathcal{F}_j^{j+1}) & \to & 0
\end{array}
$$

在上图以及下文中，我们将沿用这一记号，并用 ω_j、ω_{j+1} 分别表示 ω 在 Z_j、Z_{j+1} 的子空间上的限制。将上述所有空间限制到与 W_{j+1} 的交集上，便得到从上图各项到下图对应项的同态；下图中的各项是利用局部化在临界集和流线空间周围的空间定义的。

(5.2)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^p(W_{j+1}, W_{j+1,0}) & \xrightarrow{j} & H^p(W_{j+1}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \xrightarrow{k} & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \smile\omega_{j+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \smile\omega_{j+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \smile\omega_j} & & \\
0 & \to & H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) & \xrightarrow{j} & H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \xrightarrow{k} & H^{p+m}(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \to & 0
\end{array}
$$

上方交换图中的水平行是三元组 $(W_{j+1}, W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{0,j}^{j+1,0})$ 的上同调长正合列。根据关于系数的假设，存在分裂同态

$$
\begin{aligned}
& i : H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) \to H^p(W_{j+1}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) \\
\text{and} \quad & \pi : H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) \to H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0})
\end{aligned}
$$

使得杯积 $\smile\omega$：$H^p(W_{j+1},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1}_{0,j}{}^{0},)\to H^{p+m}(W_{j+1},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1}_{0,j}{}^{0},)$ 诱导出一个同态

$$H^p(W_{j+1},W_{j+1,0})\oplus H^p(W_{j+1,0},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0})$$
$$\xrightarrow{\smile\omega_{j+1}} H^{p+m}(W_{j+1},W_{j+1,0})\oplus H^{p+m}(W_{j+1,0},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}).$$

于是，杯积的非对角分量

$$H^p(W_{j+1,0},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0})\xrightarrow{c_\omega}H^{p+m}(W_{j+1},W_{j+1,0}) \tag{5.3}$$

可以用分裂同态表示如下。

引理 5.2. 给定 $\omega\in H^m(Z)$、$\eta\in H^p(W_{j+1,\,0}、W_{j+1,\,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1}_{0,\,j}{}^{0},)$ 以及如上定义的分裂同态，杯积 $\smile\omega$：$H^*(Z)\to H^*(Z)$ 诱导出如下同态（5.3）：

$$c_\omega(\eta)=\pi(i(\eta)\smile\omega_{j+1}).$$

交换图（4.5）和（5.2）中的所有同态，要么由限制到子空间诱导，要么由与固定类 $\omega\in H^m(Z)$ 或其到子空间的限制作杯积诱导。因此，这些同态与限制交换，从而下面这个由三元组 $(W_{j+1},W_{j+1,\,0}、W_{j+1,\,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1}_{0,\,j}{}^{0},)\hookrightarrow(Z_{j+1},Z_j,Z_{j-1})$ 的包含映射诱导的交换图成立。等价地，引理 5.2 中的杯积过程关于三元组的限制是自然的。

(5.4)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^p(Z_{j+1},Z_{j-1}) & \longrightarrow & H^p(Z_j,Z_{j-1}) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\smile\omega_{j+1}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & H^{p+m}(Z_{j+1},Z_j) & \longrightarrow & H^{p+m}(Z_{j+1},Z_{j-1}) & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle\cong\ \text{Thm. 4.1}} & & & & \downarrow\\
 & & H^p(W_{j+1},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(W_{j+1,0},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\smile\omega_{j+1}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & H^{p+m}(W_{j+1},W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H^{p+m}(W_{j+1},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & &
\end{array}$$

引理 4.4 表明，我们可以为上述交换图中的正合序列选取分裂，使该交换图仍然可交换。因此，定理 4.1 表明，引理 4.6 的杯积构造（在同构意义下）可通过以下方式给出：首先将 $H^p(Z_j,Z_{j-1})\to H^p(W_{j+1,\,0},\ W_{j+1,\,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1}_{0,\,j}{}^{0},\ )$ 限制到一个局部化在上临界集和流线空间附近的对上，然后应用引理 5.2 的局部化杯积构造。

这可总结为以下命题。

命题 5.3. 设 $f:Z\to\mathbb{R}$ 满足 [30]，的条件（1）–（5），因此存在一个莫尔斯滤过 $\emptyset=Z_{-1}\subset Z_0\subset\cdots\subset Z_n=Z$，且定理 4.1 适用。利用引理 4.4，为 (5.4) 中每一行选择相容的分裂，并令 $\omega\in H^m(Z)$，且令 ω_j 为到 $H^m(Z_j)$ 的限制。那么 the

引理 4.6 的杯积同态 $c(\omega)\colon H^p(Z_j, Z_{j-1}) \to H^{p+m}(Z_{j+1}, Z_j)$ 经由下方交换图中的底行分解。

$$
\begin{array}{ccccc}
H^p(Z_j, Z_{j-1}) & & \xrightarrow{\quad c_\omega \text{ (Lem. 4.6)} \quad} & & H^{p+m}(Z_{j+1}, Z_j) \\
{\scriptstyle \text{Thm. 4.1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \cong} & \searrow^{\text{restriction}} & & & {\scriptstyle \text{Thm. 4.1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \cong} \\
H^p(W_j, W_{j,0}) & & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \xrightarrow{c_\omega \text{ (Lem. 5.2)}} & H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0})
\end{array}
\tag{5.5}
$$

因此我们看到，莫尔斯理论主定理（定理 4.1）使我们能够通过上方交换图底行中的映射来诠释杯积同态。等价地，这将杯积构造表述为临界集附近局部化的空间以及流线空间的上同调群。

特别地，在定理 4.1 给出的同构意义下，$H^*(Z)$ 中的杯积对应于沿上方交换图底行的一个同态

$$
H^p(W_j, W_{j,0}) \to H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) \to H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0}). \tag{5.6}
$$

注 5.4。有时，考虑不一定属于限制 $H^m(Z) \to H^m(W_{j+1})$ 的像中的类 $\omega \in H^m(W_{j+1})$ 会很有用。在这种情况下，我们有如下交换图

$$
\begin{array}{ccccc}
H^p(Z_j, Z_{j-1}) & & \dashrightarrow & & H^{p+m}(Z_{j+1}, Z_j) \\
{\scriptstyle \text{Thm. 4.1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \cong} & \searrow^{\text{restriction}} & & & {\scriptstyle \text{Thm. 4.1}}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \cong} \\
H^p(W_j, W_{j,0}) & & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \xrightarrow{c_\omega \text{ (Lem. 5.2)}} & H^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0})
\end{array}
\tag{5.7}
$$

对于该图，存在一个诱导同态 $H^p(Z_j, Z_{j-1}) \to H^{p+m}(Z_{j+1}, Z_j)$，它未必来自 $H^*(Z)$ 中的杯积。第 9.4 节中的卷积同态便属于这种情况；在此处，我们可以将该同态诠释为乘积空间 $Z \times \mathrm{Gr}$ 上的杯积，并将上方交换图中的虚线箭头诠释为到该空间的拉回。

6. A modified version of transversality

前两节中杯积和微分的构造，对于环境流形 M 内满足定理 4.1 条件的空间 Z（可能是奇异的）同样成立。接下来需要根据临界集及其间的流线空间，阐释同态 (5.1) 和 (5.6) 的拓扑意义。在 Morse-Bott 情形下，这需要额外满足 Morse-Bott-Smale 横截性条件（参见 [4]）。

本节中，我们回到光滑空间 M，并在命题 6.2 中证明，可以放宽这一横截性条件，使得 (5.1) 和 (5.6) 中的第一个同态同构于从下临界集 C_ℓ 到流线空间 $\mathcal{F}^{j+1,\,j\,0}{}^{0}$，的拉回，随后与某个欧拉类作杯积

（参见交换图 (6.5) 和 (6.6)）。我们感兴趣的主要例子是箭图的表示空间；对于该空间，可以利用推论 2.31 计算这个欧拉类。

接下来需要解释（5.1）和（5.6）中的第二个同态，这是第 8 节的主要结果。在该节中，我们将证明，它可以表示为从流线空间到上临界集的推前同态。

6.1. 修正后的横截性条件。首先回顾函数为 Morse-Smale 或 Morse-Bott-Smale 时的基本思路。Thom、Smale、 [27], Witten [31] 等多位作者（参见 [6] 了解概述）发展了这些思路，而 Austin 和 Braam [4]则详细阐述了由此得到的莫尔斯复形。

由于函数是莫尔斯函数或莫尔斯–博特函数，谱序列的第一页由以下项组成

$$H^p(M_j, M_{j-1}) \cong H^{p-\lambda_j}(C_j).$$

相邻临界集 C_j 和 C_{j+1} 之间流线上的点所构成的空间记为 $\mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,j\,0}$，而对流的 $\mathbb{R}$-作用取商所得的空间记为 $\tilde{\mathcal{F}}^{j+1}{}^{0}_{,j\,0}$，相应的上、下投影映射为 $\pi_\ell\colon \mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,j\,,0} \to C_j$、$\pi_u\colon \mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,j\,,0} \to C_{j+1}$ 以及 $\tilde{\pi}_\ell\colon \tilde{\mathcal{F}}^{j+1}{}^{0}_{,j\,,0} \to C_j$、$\tilde{\pi}_u\colon \tilde{\mathcal{F}}^{j+1}{}^{0}_{,j\,,0} \to C_{j+1}$。谱序列第一页上的微分于是由 [4, 定理 3.1]给出。

$$\begin{aligned} d_1 : H^{p-\lambda_j}(C_j) &\to H^{p-\lambda_{j+1}+1}(C_{j+1}) \\ \eta &\mapsto (\tilde{\pi}_u)_* \tilde{\pi}_\ell^*(\eta) \end{aligned}$$

与 $\omega \in H^m(M)$ 的杯积由 [4, 定理 3.11], 给出，它有一个分量映射$H^*(C_j)$ 到 $H^*(C_{j+1})$，该映射由以下内容确定：

$$\begin{aligned} c(\omega) : H^{p-\lambda_j}(C_j) &\to H^{p-\lambda_{j+1}+m}(C_{j+1}) \\ \eta &\mapsto (\pi_u)_*(\omega \smile \pi_\ell^*(\eta)). \end{aligned}$$

[4] 中给出的证明使用德拉姆上同调；然而，下面的构造将使用奇异上同调，因为在定理 9.8 中将其拉回到奇异空间时，奇异上同调具有良好的性质。

上述整个过程之所以可行，是因为稳定流形与不稳定流形横截相交；然而（正如我们在命题 2.29 中所见），对于箭图表示空间上的动量映射的范数平方，这一条件并不成立，因此我们必须修改横截性条件以适应这一情况。

回想一下，如果稳定流形与不稳定流形横截相交，那么分层 S_j 在环境流形 M 中的法丛限制后即为 $\mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,\,j\,,\,0} = S_j \cap W_{j+1,\,0}$ 在 $W_{j+1,\,0}$ 中的法丛。本节将证明：如果满足较弱形式的横截性，即 $\mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,\,j\,0}$，在 $W_{j+1,\,0}$ 中的法丛仅是 S_j 的法丛限制到流线空间后的一个子丛，那么上述微分与杯积构造的修正版仍然成立。

定义 6.1. 设 M 为黎曼流形，$f\colon M \to \mathbb{R}$ 为满足 [30] 的条件（1）–（5）的光滑函数。若满足以下条件，则流线空间满足弱横截性。

(T1) 流线空间 $\mathcal{F}^{j+1,\ j\,0\ \ \ 0}$，在 $W_{j+1,\ 0}$中有一个管状邻域，记为 $D_j \to \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0}$，。(T2) 分层 W_j^+在 M中有一个管状邻域，记为 $\tilde{V}_j \to W_j^+$，它限制为一个圆盘丛 $V_j \to \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0}$，使得 D_j 是 V_j的子丛。

当然，只有当这些条件对一类有趣的例子成立时，这个定义才有用。引理 2.28 和命题 2.29 表明，对于箭图表示空间上 $\|\mu-\alpha\|^2$ 的莫尔斯滤过，确实如此。

6.2. 横截性条件的推论。横截性条件 (T1) 和 (T2) 使我们能够进行如下构造；在接下来的两节中，我们将用它把谱序列中的微分和杯积分别局部化到流线空间上。

首先考虑这一对 (M_j, M_{j-1})。向上流的收敛确定了两个子对 $(W_j, W_j, 0)$ 和 $(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0},)$。先验地，这两个对并无关联；事实上，它们甚至没有交集。然而，莫尔斯理论主定理确实确定了一个同态$H^p(W_j, W_j, 0) \to H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,j\ \ \ 0}_{0},)$，它由同构 $H^p(W_j, W_j, 0) \cong H^p(M_j, M_{j-1})$ 与限制同态 $H^p(M_j, M_{j-1}) \to H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,j\ \ \ 0}_{0},)$ 的复合定义。

(6.1)
$$\begin{array}{ccc} & H^p(M_j, M_{j-1}) & \\ \overset{\text{定理 4.1}}{\underset{\cong}{\nwarrow}} & & \searrow \\ H^p(W_j, W_{j,\ 0}) & & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0},) \end{array}$$

如果我们还施加 Kirwan 最小退化条件 [12]，，那么托姆同构表明 $H^p(W_j, W_{j,\ 0}) \cong H^{p-\lambda_j}(C_j)$。第一个横截性条件 (T1) 表明，还存在一个托姆同构 $H^p(W_{j+1,\ 0}, W_{j+1,\ 0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0},) \cong H^p(D_j, D_j \setminus \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0},) \cong H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,\ j\,0\ \ \ 0}_{\ \ \ 0},)$，其中 ν_j 是 $\mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{\ \ \ 0,\ \ 0} \subset V_{j+1,\ 0}$ 的余维。这些映射共同构成下列交换图，其中底行的虚线箭头由交换图其余部分中的映射诱导。

(6.2)
$$\begin{array}{ccc} & H^p(M_j, M_{j-1}) & \\ \overset{\text{定理 4.1}}{\underset{\cong}{\nwarrow}} & & \overset{restriction}{\searrow} \\ H^p(W_j, W_{j,\ 0}) & & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,\ j\ \ \ 0}_{0},) \\ Thom \uparrow \downarrow \cong & & Thom \uparrow \downarrow \cong \\ H^{p-\lambda_j}(C_j) & \dashrightarrow & H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,\ j\,0\ \ \ 0}_{\ \ \ 0},) \end{array}$$

现在剩下的问题是理解与虚线箭头对应的同态的拓扑意义，这正是下文命题 6.2 的内容。

极小退化条件意味着这些分层具有法丛，且其在临界集上的限制为负法丛，因此我们可以使用托姆同构 $H^p(W_j, W_{j,\ 0}) \cong$

$H^{p-\lambda_j}(C_j)$。此外，在光滑仿射簇或射影簇上，这个负法丛可以延拓

$\tilde{}$ $\tilde{}$为整个分层上的丛 $V_j \to S_j$（参见 [12,第 4] 节），使得 $H^p(W_j, W_{j,0}) \cong H^p(V_j, V_{j,0})$。由于流线空间包含在分层 $\mathcal{F}^{j+1}_{j,0}$ 中，因此 $\tilde{V}_j \to S_j$ 限制为流线空间上的一个丛，我们将其记作 $V_j \to \mathcal{F}^{j+1}_{j,0}$。

$$\begin{array}{ccccc} H^p(W_j, W_{j,0}) & \xleftarrow{\cong} & H^p(\tilde{V}_j, \tilde{V}_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(V_j, V_{j,0}) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} & & \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} & & \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} \\ H^{p-\lambda_j}(C_j) & \xleftarrow{\cong} & H^{p-\lambda_j}(S_j) & \xrightarrow{restriction} & H^{p-\lambda_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) \end{array}$$

$$H^{p-\lambda_j}(C_j) \xrightarrow{pullback} H^{p-\lambda_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0})$$

现在，若横截性条件 (T2) 得到满足，则 $\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}$ 内的 $W_{j+1,0}$ 的管状邻域是一个圆盘丛 $D \to \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}$，它是 V_j 的子丛。然后，引理 4.3 表明，我们可以用一个同态扩充交换图 (6.2)，该同态对应于与 $D \subset V_j$ 的法丛的欧拉类作杯积。

(6.3)
$$\begin{array}{ccccccc} & & H^p(M_j, M_{j-1}) & & & \xrightarrow{\quad restriction \quad} & \\ & \overset{\text{Thm. 4.1}}{\swarrow} & \cong & \searrow^{restriction} & & & \\ H^p(W_j, W_{j,0}) & \xleftarrow{\cong} & H^p(\tilde{V}_j, \tilde{V}_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(V_j, V_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} & & \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} & & \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} & & \Big\uparrow{\scriptstyle Thom}_{\cong} \\ H^{p-\lambda_j}(C_j) & \xleftarrow{\cong} & H^{p-\lambda_j}(S_j) & \xrightarrow{restriction} & H^{p-\lambda_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \xrightarrow{\smile e} & H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) \end{array}$$

因此我们看到，忽略同构 $H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) \cong H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0})$ 和 $H^{p-\lambda_j}(C_j) \cong H^p(W_j, W_{j,0})$（即上图的左右两列），同态的复合

$$H^p(W_j, W_{j,0}) \xrightarrow{\cong} H^p(M_j, M_{j-1}) \to H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}),$$

它出现在命题 5.1 中微分的构造以及命题 5.3 中杯积的构造中，并经由同态的复合分解

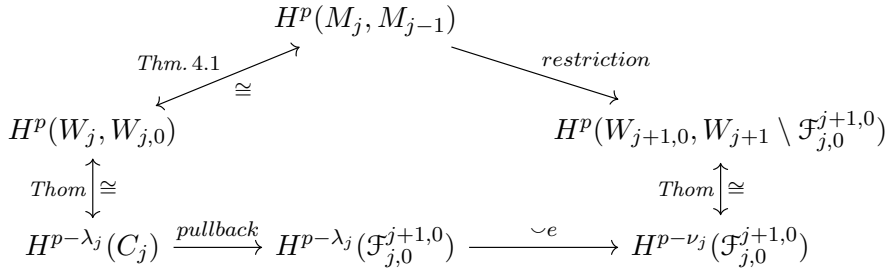
$$H^{p-\lambda_j}(C_j) \xrightarrow{pullback} H^{p-\lambda_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) \xrightarrow{\smile e} H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0})$$

来自交换图 (6.3) 的底行。上述结果总结为以下命题。

命题 6.2. 设 M 是一个流形，$f : M \to \mathbb{R}$ 是一个满足 [30] 的条件（1）–（5）以及横截性条件 (T1) 和 (T2) 的最小退化光滑函数，并设 $\emptyset = M_{-1} \subset M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$ 是相应的莫尔斯滤过。那么下列交换图

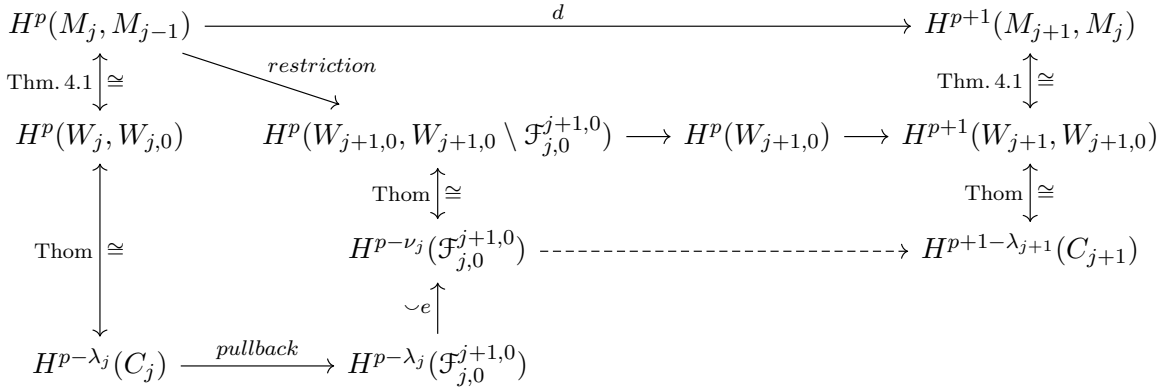
可交换。

(6.4)



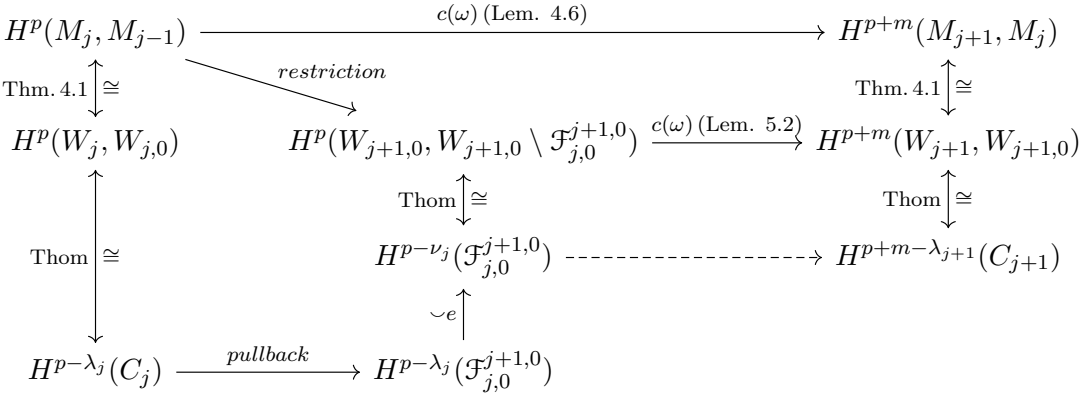
因此，微分的交换图（5.1）可以增添一行，对应于临界集和流线空间

(6.5)



而杯积的交换图（5.5）也可以进行类似的扩展

(6.6)



注 6.3. 引理 2.30 和推论 2.31 表明，上述交换图中的欧拉类可以根据临界点数据显式计算。

7. Relationship with convolution in Borel-Moore homology

现在还需解释图表 (6.5) 和 (6.6) 中虚线箭头的拓扑意义。本节旨在说明这与博雷尔-摩尔同调中的推前有何关系。分为两种情形。

• 球面丛上的推前（引理 7.3），这将对应于交换图 (6.5) 中关于微分（命题 8.1）的虚线箭头，并且
• 射影丛上的推前（引理 7.4），这将对应于交换图 (6.6) 中的虚线箭头（命题 8.3）。

7.1. 博雷尔-摩尔同调中的拉回与推前。设 M_1、M_2 分别为维数为 d_1、d_2 的流形，且设 $N \subset M_1 \times M_2$ 为余维为 d 的嵌入子流形，并且投影 $N \overset{i}{\hookrightarrow} M_1 \times M_2 \xrightarrow{p_2} M_2$ 是适当的。那么，按照 [8, 第 2.7], 节，存在一个博雷尔-摩尔同调中的拉回映射

$$\begin{aligned} H_p^{BM}(M_2) &\to H_{p+d_1-d}^{BM}(N) \\ c &\mapsto [N] \cap ([M_1] \boxtimes c) \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中，$\cap\colon H_*^{BM}(M_1 \times M_2) \to H_{*-d}^{BM}(N)$ 表示带支撑的限制（参见 [8, 第 2.6 节21]），$\boxtimes$表示 K¨unneth 同构 $H_*^{BM}(M_1) \otimes H_*^{BM}(M_2) \to H_*^{BM}(M_1 \times M_2)$。

首先注意，由 $c \mapsto [M_1] \boxtimes c$ 给出的同态 $H_p^{BM}(M_2) \to H_{p+d_1}^{BM}(M_1 \times M_2)$ 是上同调中拉回 $H^{d_2-p}(M_2) \to H^{d_2-p}(M_1 \times M_2)$ 的庞加莱对偶。根据定义（参见 [8,第 2.6 节21]），到子流形 $H_k^{BM}(M_1 \times M_2) \to H_{k-d}^{BM}(N)$ 的带支撑限制是上同调中限制的庞加莱对偶，因此，博雷尔-摩尔同调中这两个同态的复合 (7.1) 是这两个拉回同态复合的庞加莱对偶。以下引理对此作了总结。

引理 7.1. 下列交换图是交换的，其中上行是拉回同态 (7.1)，下行是普通上同调中的拉回，竖直箭头由庞加莱对偶性给出。

$$\begin{array}{ccc} H_p^{BM}(M_2) & \longrightarrow & H_{p+d_1-d}^{BM}(N) \\ {\scriptstyle P.D.}\downarrow\cong & & {\scriptstyle P.D.}\downarrow\cong \\ H^{d_2-p}(M_2) & \longrightarrow & H^{d_2-p}(N) \end{array} \tag{7.2}$$

为了将博雷尔-摩尔同调中推前的庞加莱对偶与后续各节中的莫尔斯理论构造联系起来，我们需要以下引理。证明使用了该理论中的一些著名结果，但由于这些结论是下一节中建立与莫尔斯理论联系所必需的，因此为了完备性，我们在此陈述并证明所有内容。第一个引理讨论的是子流形经包含映射的推前。

引理 7.2. 设 M 是维数为 n 的流形，$i\colon N \hookrightarrow M$ 是维数为 s 且具有管状邻域 U 的子流形。那么推前 $i_*\colon H_p^{BM}(N) \to H_p^{BM}(M)$ 是以下同态复合的庞加莱对偶。

$$H^s(N) \xrightarrow{\cong} H^n(U, U \setminus N) \xrightarrow{\cong} H^n(M, M \setminus N) \to H^n(M),$$

其中，第一个同构是托姆同构，第二个同构来自切除，最后一个同态来自对 $(M, M \setminus N)$ 的长正合序列。

证明。这是三元组 $N \hookrightarrow M \hookleftarrow M \setminus N$ 的博雷尔-摩尔同调长正合序列所给出的推前的一个特例，该推前是利用庞加莱对偶性定义的（参见 [8, 第 2.6 节9]）。□

下一个引理适用于与向量丛相关联的球面丛。

引理 7.3. 设 B 是一个维数为 n 的流形，设 $V \to B$ 是一个秩为 r 的实向量丛，定义 $V_0 = V \setminus B$，并令 $\pi\colon S \to B$ 表示相应的球面丛。那么推前 $\pi_*\colon H_p^{BM}(S) \to H_p^{BM}(B)$ 是以下同态复合的庞加莱对偶。

$$H^{n+r-1-p}(S) \xrightarrow{\cong} H^{n+r-1-p}(V_0) \to H^{n+r-p}(V, V_0) \xrightarrow{\cong} H^{n-p}(B)$$

其中，第一个同态是同伦等价，第二个是对 (V, V_0) 的长正合序列中的连接同态，第三个是由托姆同构得到的推前。

证明。由以下事实可得：在光滑流形上，Thom-Gysin 长正合列中的推前由沿纤维积分给出（参见 [7, Prop. 14.33]），而这与博雷尔-摩尔同调中的推前互为 Poincar´e 对偶。□

设 B 是维数为 $\dim_{\mathbb{R}} B = n$ 的流形，且 $\pi\colon E \to B$ 是一个光滑纤维丛，其纤维光滑、紧致，且与 F 微分同胚，其中 $\dim_{\mathbb{R}} F = r$。假设满足 Leray-Hirsch 定理的条件，因此存在类 $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in H^*(E)$，使得对任意纤维 $i\colon F \hookrightarrow E$，类 $i^*(\zeta_1) \dots, i^*(\zeta_m)$ 作为一个群生成 $H^*(F)$。下文中，我们选择排序，使得 $i^*(\zeta_m)$ 生成最高维上同调 $H^r(F)$。例如，当 E 是复向量丛的射影化时，这些条件便得到满足；此时，类 $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ 是 E 上典范线丛的陈类的幂。

下面的引理描述了这一情形下的推前映射。

引理 7.4。博雷尔-摩尔同调中的推前 $\pi_* : H_p^{BM}(E) \to H_p^{BM}(B)$ 是通过纤维积分进行的推前的庞加莱对偶。

$$\begin{aligned} &\pi_* : H^{n+r-p}(E) \to H^{n-p}(B) \\ &\pi_*\left(\pi^*(\beta) \smile \zeta_k\right) = \begin{cases} \beta & \text{if } k = m \\ 0 & \text{if } 0 \le k < m \end{cases} \end{aligned} \tag{7.3}$$

证明。令 $b \in H_p^{BM}(B)$ 为 $\beta \in H^{n-p}(B)$ 的庞加莱对偶，并令 $c_k \in H_{n+r-\ell}^{BM}(E)$ 为 $\zeta_k \in H^\ell(E)$ 的庞加莱对偶，其中 $k = 1, \dots, m$。

由于 E 和 B 是流形，且 $\pi\colon E \to B$ 的纤维是紧流形，因此在博雷尔-摩尔同调中的纤维丛拉回与普通上同调中的拉回互为庞加莱对偶（参见 [8,p102]），并且因此

$$\pi^*(b) \in H_{p+r}^{BM}(E) \quad \text{is Poincaré dual to} \quad \pi^*(\beta) \in H^{n-p}(E).$$

博雷尔-摩尔同调中的交配对与上同调中的杯积构成庞加莱对偶（参见[8,第 2.6 节15]），因此

$$\pi^*(b) \frown c_k \quad \text{is Poincaré dual to} \quad \pi^*(\beta) \smile \zeta_k \quad \text{for all } k = 1, \dots, m.$$

博雷尔-摩尔同调中投影公式的以下特殊情形

$$\pi_*(\pi^*(b) \frown c_k) = b \frown \pi_*(c_k) \quad \text{where } b \in H_*^{BM}(B) \text{ and } c_k \in H_*^{BM}(E),$$

当 E 和 B 是流形时成立（参见 [8, (2.6.29)]）。

如果对于 $k < m$有 $\zeta_k \in H^\ell(E)$，那么 $\ell < r$ （因为纤维 F 是光滑且紧的）。于是，Poincar´e 对偶$c_k \in H^{BM}_{n+r-\ell}(E)$满足 $\pi_*(c_k) = 0$ ，基于维数原因，因此 $\pi_*(\pi^*(b) \frown c_k) = b \frown \pi_*(c_k) = 0$。

如果 $k = m$，那么 $\pi^*(\beta) \smile \zeta_m \in H^{n+r-p}(E)$ 是 $\pi^*(b) \frown c_m \in H_p^{BM}(E)$ 的 Poincar´e 对偶，因此投影公式表明推前为 $\pi_*(\pi^*(b) \frown c_m) = b \frown \pi_*(c_m) \in H_p^{BM}(B)$。

因此，只需证明 $\pi_*(c_m) = [B]$；为此，我们将证明 $\pi_*(c_m)$ 在每个平凡化 $\pi^{-1}(U) \to U$ 上的限制都是基本类。首先回顾一下，博雷尔-摩尔同调中对开子集的限制由普通相对同调中的推前诱导（参见 [8,第 2.6.9] 节），它在下列交换图中表现为水平同态

$$\begin{array}{ccc} H_*^{BM}(E) \cong H_*(\overline{E}, \overline{E} \setminus E) & \xrightarrow{j_*} & H_*(\overline{E}, \overline{E} \setminus \pi^{-1}(U)) \cong H_*^{BM}(\pi^{-1}(U)) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ H_*^{BM}(B) \cong H_*(\overline{B}, \overline{B} \setminus B) & \xrightarrow{j_*} & H_*(\overline{B}, \overline{B} \setminus U) \cong H_*^{BM}(U) \end{array} \tag{7.4}$$

其中， j 既表示包含映射 $(\bar{E}, \bar{E} \setminus E) \hookrightarrow (\bar{E}, \bar{E} \setminus \pi^{-1}(U))$，也表示包含映射 $(\bar{B}, \bar{B} \setminus B) \hookrightarrow (B, B \setminus U)$。每个同态都由对的连续映射诱导，因此该交换图是交换的。

博雷尔-摩尔同调中的限制也可以通过庞加莱对偶性来定义，这是构造博雷尔-摩尔同调长正合序列的一部分（参见 [8, 第 2.6.9] 节）。由于所有空间 E、 B、 $\pi^{-1}(U)$ 和 U 都是流形，因此上面交换图的顶行和底行是由上同调中的拉回诱导的

$$H_*^{BM}(E) \cong H^{n+r-*}(E) \xrightarrow{j^*} H^{n+r-*}(\pi^{-1}(U)) \cong H_*^{BM}(\pi^{-1}(U))$$

$$H_*^{BM}(B) \cong H^{n-*}(B) \xrightarrow{j^*} H^{n-*}(U) \cong H_*^{BM}(U)$$

特别地，类 $\zeta_k \in H^{n+r-*}(E)$ 限制为类 $\xi_k \in H^{n+r-*}(\pi^{-1}(U))$，而 Leray-Hirsch性质意味着它们限制为每个纤维上同调的生成元。由于$\pi^{-1}(U) \cong U \times F \to U$ 是平凡的，Borel-Moore 同调中的推前便有一个显式描述，它将 ξ_m 的 Poincaré 对偶映射到基本类 $[U]$。因此，在交换图 (7.4) 中，我们有 $\pi_* \circ j_*(c_m) = [U]$。(7.4) 的交换性进而意味着 $[U] = j_* \circ \pi_*(c_m)$，因此 $\pi_*(c_m)$ 限制为每个平凡化的基本类 $[U]$ 。这是基本类 $[B]$ 的定义性质，因此它必定等于 $\pi_*(c_m)$。因此

$$\pi_*(\pi^*(b) \frown c_m) = b \frown [B] = b$$

是庞加莱对偶于使用（7.3）定义的 $\beta = \pi_*(\pi^*(\beta) \smile \zeta_m)$，由此完成证明。 □

现在我们考虑上述构造的一个特殊情形，即纤维丛是复向量丛的射影化。在此情形下，我们将证明，推前由一种构造给出，该构造类似于第 4.5 节和第 5.2 节中由杯积给出的构造。

设 B 为一个流形，设 $V \to B$ 为复秩为 r 的复向量丛，并令 V_0 表示去掉零截面的向量丛。假设 S^1 在 V 上有一个固定零截面的作用，使得投影 $\pi\colon V \to B$ 是 S^1-等变的，并且每个纤维上的作用具有权一。于是，阿蒂亚–博特引理表明，下列交换图的水平行是正合的

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^p_{S^1}(V, V_0) & \longrightarrow & H^p_{S^1}(V) & \longrightarrow & H^p_{S^1}(V_0) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{p-2r}_{S^1}(B) & \xrightarrow{\smile e} & H^p_{S^1}(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(\mathbb{P}V) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{7.5}$$

其中，e 表示 V 的 S^1-等变欧拉类。由于 $e \in H^{2r}_{S^1}(B)$，由上述交换图底行的正合性可知，对于所有 $p < 2r-1$，$H^p_{S^1}(B) \cong H^p(\mathbb{P}V)$。

令 $\xi \in H^2(\mathbb{P}V) \cong H^2_{S^1}(V_0)$ 表示射影丛 $\pi\colon \mathbb{P}V \to B$ 的第一陈类。对于每个 $k = 0, \dots, r-1$，将 ξ^k 限制到任意纤维 $\mathbb{P}^{r-1} \cong \mathbb{P}V_x$ 上，所得元素都是 $H^{2k}(\mathbb{P}^{r-1})$ 的生成元。于是，Leray–Hirsch 定理确定了一个群同构

$$\begin{aligned} \sum_{\ell+2k=m} H^\ell(B) \otimes H^{2k}(\mathbb{P}^{r-1}) &\to H^m(\mathbb{P}V) \\ \sum \beta \otimes i^*(\xi^k) &\mapsto \pi^*(\beta) \smile \xi^k. \end{aligned} \tag{7.6}$$

对于 $k = 1, \dots, r$，定义 $\gamma_k := \pi^* c_k(V) \in H^{2k}(\mathbb{P}V)$。回想一下，由于 S^1 的作用固定零截面，并以权一在纤维上自由作用，因此 $H^*_{S^1}(B) \cong H^*(B)[\xi]$ 且 $H^*_{S^1}(V_0) \cong H^*(\mathbb{P}V) \cong H^*(B)[\xi]/\sim$，满足关系

$$\xi^r + c_1(V) \smile \xi^{r-1} + \cdots + c_r(V) \sim 0, \tag{7.7}$$

其中，同构由拉回 $H^*_{S^1}(B) \to H^*_{S^1}(V_0) \cong H^*(\mathbb{P}V)$ 给出（参见 [1, 第 VII 章]）。

因此，在正合序列（7.5）中，我们看到等变欧拉类是

$$e(V) = \pm\left(\xi^r + c_1(V)\xi^{r-1} + \cdots + c_r(V)\right) \in H^*_{S^1}(B) \cong H^*(B)[\xi].$$

这个欧拉类和 Leray-Hirsch 定理可用于构造（7.5）式底行的一个显式分裂，具体如下。在分次上同调环中，存在一个保持群结构的分裂。

$$i : H^*(\mathbb{P}V) \cong H^*(B)[\xi]/\sim \longrightarrow H^*_{S^1}(B) \cong H^*(B)[\xi] \tag{7.8}$$

先使用 Leray-Hirsch 同构，然后定义一个群同态

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{P}V) \cong H^*(B) \otimes H^*(\mathbb{P}^{r-1}) &\to H^*_{S^1}(B) \cong H^*(B) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1)) \\ i(\pi^*(\beta) \smile \xi^k) &= \beta \otimes \xi^k. \end{aligned}$$

现在我们来定义式 (7.5) 中映射 $\smile e$ 的分裂同态

$$pr : H^p_{S^1}(B) \to H^{p-2r}_{S^1}(B) \tag{7.9}$$

通过与欧拉类进行收缩，如下所示。给定 $\eta = \beta \otimes \xi^k \in H^*_{S^1}(B) \cong H^*(B) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1))$，如果$k \geq r$，那么我们可以改写为

$$\eta = (\beta \otimes \xi^{k-r}) \otimes \xi^r = (\beta \otimes \xi^{k-r}) \smile e + \text{lower order terms}$$

其中，“低阶项”是指 ξ 的幂小于 k。重复这一过程，我们得到 $\eta = \eta' \smile e + \eta''$，其中 η'' 是形如 $\beta'' \otimes \xi^k$ 的项之和，且 $k \leq r-1$。现在定义

$$pr(\eta) = \eta'$$

并注意到 $pr \circ i = 0$，因此这是序列 (7.5) 的一个良定义的分裂。

由引理 7.4，与博雷尔-摩尔同调中的推前相伴的庞加莱对偶推前 $H^*(\mathbb{P}V) \to H^*(B)$ 随后由下式给出。

$$\pi_*(\pi^*(\beta) \smile \xi^k) \mapsto \beta \smile \pi_*(\xi^k) = \begin{cases} \beta & k = r-1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.10}$$

下面的引理表明，这可以用上述杯积构造来解释。

引理 7.5. 在与上述相同的记号和条件下，推前 $H^p(\mathbb{P}V) \to H^{p-2r}(B)$由下式给出

$$\pi_*(\eta) = pr(i(\eta) \otimes \xi), \tag{7.11}$$

其中， pr 和 i是上述正合序列 (7.5) 定义的分裂同态。

证明. 由 (7.10) 可知，当且仅当 $\eta = \pi^*(\beta) \smile \xi^{r-1}$时，推前非零；此时 $\pi_*(\eta) = \beta$且 $i(\eta) \otimes \xi = \beta \otimes \xi^r \in H^*_{S^1}(B)$。因此，上述分裂 pr 的构造表明，$pr(i(\eta) \otimes \xi) = pr(\beta \otimes \xi^r) = \beta = \pi_*(\eta)$。

若 $\eta = \pi^*(\beta) \smile \xi^k$ 且 $k < r-1$，则 $\pi_*(\eta) = 0$ 且 $pr(\beta \otimes \xi^{k+1}) = 0$。 □

注记 7.6。因此，我们看到推前由一个类似于引理 5.2 中杯积构造的过程给出。下文的命题 8.3 将对此作出精确说明，并证明莫尔斯复形上的杯积可经由此推前分解。在命题 8.3 的证明中，我们将在以下箭图表示的背景下使用上述一般构造。

考虑两个相邻临界集 C_ℓ （下）和 C_u （上），其关联的维数向量为 $\mathbf{v}_\ell$ 和 $\mathbf{v_u}$，来自 [29, 命题 3.13]，并令 W_u^-为 C_u 的不稳定丛（等价地，使用定理 2.11 的同胚，在下文中用负切片丛 S_u^-替换 W_u^-）。此外，假设 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\ell$，使得 C_ℓ在 $\|\mu - \alpha\|^2 \colon \mathsf{Rep}(Q, \mathbf{v}) \to \mathbb{R}$上取最小值。那么，根据推论 2.19，$C_\ell / K_{\mathbf{v}_\ell} \cong \mathcal{M}(Q, \mathbf{v}_\ell)$，且 $C_u / K_{\mathbf{v_u}}$ 与 $\mathcal{M}(Q, \mathbf{v_u})$ 同伦等价。在等变上同调中，我们有

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_\ell) \cong H^*(\mathcal{M}(Q, \mathbf{v}_\ell)) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1)) \quad \text{and} \quad H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_u) \cong H^*(\mathcal{M}(Q, \mathbf{v_u})) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1))^{\otimes 2}$$

因为 $K_{\mathbf{v}_\ell}$ 中恒等变换的标量倍数在 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)$ 上平凡作用，并且每个上临界点都确定了从 $K_{\mathbf{v}_\ell}$ 到 $K_{\mathbf{v_u}}\times\mathsf{U}(1)$ 的结构群约化。

$\mathsf{U}(1)$ 的这个第二因子在 $S^-_{u,0}$ 上自由作用，并且投影 $S^-_{u,0}\to C_u$ 是 $K_{\mathbf{v}_\ell}$-等变的，因此这个丛下降到由 $K_{\mathbf{v}_\ell}$ 给出的商空间上

$$S^-_{u,0}/K_{\mathbf{v}_\ell}\to\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}),$$

并诱导出一个上同调映射

$$H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}))\otimes H^*(\mathsf{BU}(1))\to H^*(S^-_{u,0}/K_{\mathbf{v}_\ell}).$$

引理 8.2 和命题 8.3 使用射影丛 $\xi\in H^2(S^-_{u,0}/K_{\mathbf{v}_\ell})$ 的第一陈类。

注 7.7. 原则上，推前属于 $H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_u)\cong H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}))\otimes H^*(\mathsf{BU}(1))$，然而从上述构造可见，(7.10) 的像属于 $H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}))$。这将在 (9.9) 的卷积构造的最后一步中发挥重要作用，此时卷积的像属于$H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}))$。

8. The differential and cup product as convolution operators

本节旨在将上一节的博雷尔-摩尔同调中的卷积与第 6 节的微分和杯积联系起来。具体而言，我们将证明，交换图 (6.5) 和 (6.6) 中的虚线箭头与博雷尔-摩尔同调中的推前互为庞加莱对偶。结合 (6.5) 和 (6.6) 中的拉回同态，这将表明微分和杯积与博雷尔-摩尔同调中的卷积互为庞加莱对偶。

8.1. 用拉回与推前同态表示微分。现在我们聚焦于交换图 (6.5) 的以下部分，并从博雷尔-摩尔同调中推前的角度解释虚线箭头。

$$\begin{array}{ccccc} H^p(W_{j+1,0},W_{j+1,0}\setminus\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H^{p+1}(W_{j+1},W_{j+1,0}) \\ {\scriptstyle Thom}\uparrow\downarrow\cong & & & & {\scriptstyle Thom}\uparrow\downarrow\cong \\ H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & & \dashrightarrow & & H^{p+1-\lambda_{j+1}}(C_{j+1}) \end{array} \tag{8.1}$$

沿用 [4], 的记号，令 $\tilde{\mathcal{F}}^{j+1}{}^{0}_{,j\quad,0}=\mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,j\quad,0}/\mathbb{R}$ 表示对流的 $\mathbb{R}$-作用取商空间，并注意到这是一个同伦等价，因此 $H^*(\mathcal{F}^{j+1}{}^{0}_{,j\,0})\cong H^*(\tilde{\mathcal{F}}^{j+1}{}^{0}_{,j\,0})$。

命题 8.1. 考虑一个满足定理 4.1 中条件及定义 6.1 中弱横截条件的最小退化莫尔斯函数。那么，(8.1) 中虚线箭头所对应的同态，是与博雷尔-摩尔同调中由真投影映射 $\tilde{\mathcal{F}}^{j+1}{}^{0}_{,j\quad,0}\to C_{j+1}$ 所关联的推前相对偶的庞加莱对偶；该映射将流线上的一点映至向上流的极限所对应的临界点。

证明. 利用流定义一个与球面丛的同伦 $W_{j+1,0} \simeq W_{j+1,0}/\mathbb{R}$ 之后，引理 7.2 表明，复合

$$H^{p-\nu_j}(\tilde{\mathcal{F}}^{j+1,0}_{j,0}) \to H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \tilde{\mathcal{F}}^{j+1,0}_{j,0}) \to H^p(W_{j+1,0})$$

是包含映射 $\tilde{\mathcal{F}}^{j+1,\ 0}_{j,\ 0} \hookrightarrow W_{j+1,\ 0}$在博雷尔-摩尔同调中推前的庞加莱对偶。引理 7.3 随后表明，复合

$$H^p(W_{j+1,0}) \to H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) \to H^{p+1-\lambda_{j+1}}(C_{j+1})$$

是球面丛 $W_{j+1,\ 0} \to C_{j+1}$ 的投影推前的庞加莱对偶。因此，图表 (8.1) 变为

$$\begin{array}{ccccc} H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) \\ \text{Thom}\uparrow\downarrow\cong & \nearrow_{pushforward} & & \searrow_{pushforward} & \text{Thom}\uparrow\downarrow\cong \\ H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \dashrightarrow & & \dashrightarrow & H^{p+1-\lambda_{j+1}}(C_{j+1}) \end{array}$$

因此，虚线箭头是若干同态的复合，这些同态是博雷尔-摩尔同调中推前的庞加莱对偶。该复合便是与投影 $\tilde{\mathcal{F}}^{j+1,\ 0}_{j,\ 0} \to C_{j+1}$ 相关的推前，它将流线上的一点映射到相应的上临界点。□

因此，相邻临界集之间的谱序列微分（在莫尔斯理论主定理和托姆同构给出的同构意义下）由同态 $H^{p-\lambda_j}(C_j) \to H^{p+1-\lambda_{j+1}}(C_{j+1})$ 给出，该同态是以下映射的复合：拉回到流线空间，与推论 2.31 中的等变欧拉类作杯积，以及推前到上临界集。

(8.2)
$$\begin{array}{ccccccc} H^p(Z_j, Z_{j-1}) & & \xrightarrow{\qquad\qquad d \qquad\qquad} & & & & H^{p+1}(Z_{j+1}, Z_j) \\ \text{Thm. 4.1}\uparrow\downarrow\cong & \searrow_{restriction} & & & & & \text{Thm. 4.1}\uparrow\downarrow\cong \\ H^p(W_j, W_{j,0}) & & H^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \longrightarrow & H^p(W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H^{p+1}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) \\ & & Thom\uparrow\downarrow\cong & & & & Thom\uparrow\downarrow\cong \\ Thom\uparrow\downarrow\cong & & H^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & & \xrightarrow{\qquad pushforward \qquad} & & H^{p+1-\lambda_{j+1}}(C_{j+1}) \\ & & \smile i^*e\uparrow & & & & \\ H^{p-\lambda_j}(C_j) & \xrightarrow{pullback} & H^{p-\lambda_j}(\mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & & & & \end{array}$$

8.2. 用拉回与推前同态表示杯积。本节针对 W_{j+1} 上满足阿蒂亚–博特引理 [2, 命题 13.4], 条件的圆群作用使用等变上同调，即该作用在 $W_{j+1,\ 0}$ 上自由，并固定零截面 C_{j+1}。我们还假设该作用来自一个作用于全空间 M 并保持滤过 $M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$ 的紧群的圆子群。这些

假设在以下应用中得到满足： M 是一个带有哈密顿群作用和矩映射 μ 的辛流形，并且相应的滤过由 $\|\mu\|^2$ 的梯度流确定（参见 [12]）。

首先回顾交换图（6.6）。在本节余下部分中，我们将重点关注以下子交换图，并将虚线箭头的拓扑意义解释为先进行杯积运算，再在博雷尔-摩尔同调中进行推前运算。

$$
\begin{array}{ccc}
H_K^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0}\setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \xrightarrow{c_\omega\,(\text{Lem. } 5.2)} & H_K^{p+m}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) \\
\text{Thom}\uparrow\downarrow\cong & & \text{Thom}\uparrow\downarrow\cong \\
H_K^{p-\nu_j}(\mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \dashrightarrow & H_K^{p+m-\lambda_{j+1}}(C_{j+1})
\end{array}
\tag{8.3}
$$

第一个结果表明，在（8.3）的顶行中，我们取与来自注记 7.6 的类 ξ 对应的杯积c_ξ 时，（8.3）中的虚线箭头与底行中博雷尔-摩尔同调中的推前庞加莱对偶。

引理 8.2. 在与命题 8.1 相同的假设下，设 $\xi \in H^2(\mathbb{P}W_{j+1})$ 表示射影丛 $\mathbb{P}W_{j+1} \to C_{j+1}$ 的第一陈类。那么，与真投影映射 $\tilde{\mathcal{F}}^{j+1,\,j\;\;0}_{\;\;,\,0}/S^1 \to C_{j+1}$ 相关联的博雷尔-摩尔同调中的推前，将一个 S^1 轨道映射到由向上流确定的临界点，该推前是 (8.3) 中对应于虚线箭头的同态在 $\omega = \xi$ 情形下的庞加莱对偶。

证明。引理 7.2（另见注记 7.6）表明，该同态

$$
H_K^{p-\nu_j}(\mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) \to H_K^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0}\setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) \to H_K^p(W_{j+1,0})
$$

是与子流形 $\mathcal{F}^{j+1,\,j\;\;0}_{\;\;,\,0} \hookrightarrow W_{j+1,\,0}$ 的包含映射相对应的博雷尔-摩尔同调中推前的庞加莱对偶。因此，接下来只需推前到临界集 C_{j+1}。

引理 7.5 表明，与对 $(W_{j+1}, W_{j+1,\,0})$ 相关的短正合列存在规范的分裂同态 (7.8) 和 (7.9)，使得推前由同态 (7.11) 给出。

给定陈类 $\xi \in H^2(\mathbb{P}W_{j+1})$，引理 5.2 中的杯积映射 c_ξ 源自交换图 (5.4)，该图可通过再添加一个限制同态扩充为下方交换图底行中关于对 $(W_{j+1}, W_{j+1,\,0})$ 的短正合列

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & H_K^p(W_{j+1}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \longrightarrow & H_K^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \smile\xi} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H_K^{p+2}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H_K^{p+2}(W_{j+1}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{j,0}^{j+1,0}) & & & & \\
 & & \updownarrow{\scriptstyle =} & & & & & & \\
 & & & & H_K^p(W_{j+1}) & \longrightarrow & H_K^p(W_{j+1,0}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \smile\xi} & & & & \\
0 & \longrightarrow & H_K^{p+2}(W_{j+1}, W_{j+1,0}) & \longrightarrow & H_K^{p+2}(W_{j+1}) & & & &
\end{array}$$

回顾引理 4.4，对于上述交换图的每一行，都可以选取与关于对 $(W_{j+1}, W_{j+1,\ 0})$ 的短正合列所对应的典范分裂同态相容的分裂同态。特别地，引理 5.2 中的杯积同态限制为引理 7.5 中的推前同态 (7.11)。因此，(8.3) 中的虚线箭头对应于推前同态的复合。

$$\begin{array}{ccccc}
H_K^p(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}_{0,j}^{j+1\ \ 0}) & \longrightarrow & H_K^p(W_{j+1,0}) & \xrightarrow{c_\xi(\text{引理 7.5})} & H_K^{p+2}(W_{j+1}, W_{j+1,\ 0}) \\
\text{Thom}\updownarrow\cong & \nearrow{\scriptstyle pushforward} & & \searrow{\scriptstyle pushforward} & \text{Thom}\updownarrow\cong \\
H_K^{p-\nu_j}(\mathcal{F}^{j+1}{}_{,j\,0}{}^{0}) & \dashrightarrow & & & H_K^{p+2-\lambda_{j+1}}\ C_{j+1}(\ )
\end{array}$$

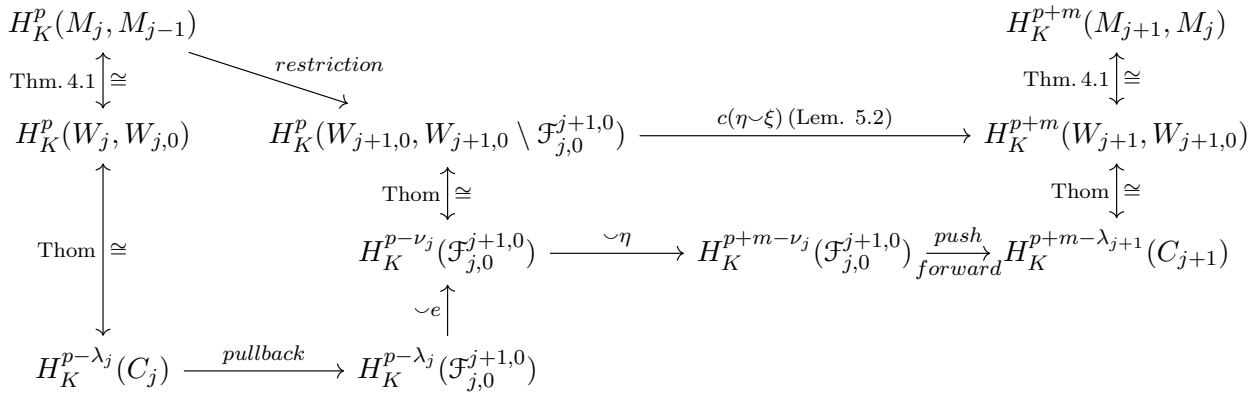
因此，在情形 $\omega = \xi$ 中，命题 5.3 中三元组 $(W_{j+1}, W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus_{\mathcal{F}^{j+1,j\,0}}{}^{0})$ 对应的杯积同态限制为由 (7.11) 给出的推前。□

更一般地，对于任意的 $\eta \in H_K^{m-2}(Z)$，都可以与 $\omega = \eta \smile \xi$ 作杯积。

命题 8.3。在与引理 8.2 相同的假设下，莫尔斯复形上与类 $\omega = \eta \smile \xi \in H_K^*(W_{j+1})$ 的杯积由以下操作诱导：先将其从下临界集拉回到流线空间，再与推论 2.31 中的欧拉类作杯积，然后与类 η 作杯积，最后推前到上临界集。

因此，交换图（6.6）中的虚线箭头可以如下补全

(8.4)



由上可知，类 $\xi \in H_K^2(W_{j+1})$ 可用于将命题 5.3 中的莫尔斯论杯积转化为推前（引理 8.2），或者更一般地，转化为先取杯积再推前（命题 8.3）。现在还剩下两个问题。首先，当我们将范围限制在满足给定一组关系的箭图表示的子集时，会发生什么？其次，交换图 (8.4) 中诱导同态 $H_K^p(M_j, M_{j-1}) \to H_K^{p+m}(M_{j+1}, M_j)$ 的拓扑意义是什么？

下一节将回答这些问题。我们将证明，在 (8.4) 中与适当选择的类 η 作杯积，会拉回为一个与博雷尔-摩尔同调中的卷积对偶的庞加莱同态（定理 9.8）；并且，我们可以在莫尔斯谱序列中对此作出解释：从 M 拉回到乘积 $M \times \mathrm{Gr}$，再应用这个乘积空间的莫尔斯谱序列中的杯积（交换图 (9.9)）。

9. Convolution in Borel-Moore homology is determined by the cup product

现在我们回到这样的情形：箭图表示满足完全二次关系（定义 2.2），并且由中岛箭图的关系完全受限（定义 3.2）。若存在环，我们还施加定义 3.9 中的条件。由这些条件可知，稳定表示构成的子集是光滑的（推论 3.6），相邻临界集之间的流线空间也是光滑的（推论 3.13）。这些条件并不过于严格，因为这一框架涵盖了无环的中岛箭图（例 2.3）、ADHM箭图（注 3.10）和手锯箭图（例 2.4 和 3.7），但并不限于这些例子。

本节的目标是证明定理 9.8。该定理利用莫尔斯复形上的杯积，说明 [18, Sec. 2(i)] 和 [8, (2.7.14)] 在博雷尔-摩尔同调中的卷积同态，可以通过先在环境光滑空间 $M = \mathrm{Rep}(Q, \mathrm{v})$ 与一个格拉斯曼流形的乘积的莫尔斯复形上取杯积，再限制到奇异子集 $\nu^{-1}(0)$ 来构造。关键是要与恰当的类取杯积；在此情形下，这个类是 $Q\mathrm{Rep}(, \mathrm{v})$ 中流线空间里某个子流形的托姆类。

在本节余下部分，固定两个相邻临界集 C_u (upper) 和 C_ℓ (lower)，它们分别对应分层 $M_{j+1}\setminus M_j$ 和 $M_j\setminus M_{j-1}$，关联的维数向量为 $\mathbf{v_u}$ 和 $\mathbf{v}_\ell=\mathbf{v_u}+\mathbf{e_k}$。使用推论 2.20 的同伦等价，使得 $C_u/K_{\mathbf{v_u}}\cong \mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u})\times\{0\}$ 和 $C_\ell/K_{\mathbf{v}_\ell}\cong \mathcal{M}(Q,\mathbf{v}_\ell)\times\{0\}$。

在莫尔斯复形上构造杯积时，第 6.2 节的结果表明，只需考虑 C_ℓ 是 $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v})$ 上 $\|\mu-\alpha\|^2$ 的极小值的情形，此时 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_\ell$。如果 $\mathbf{v}>\mathbf{v}_\ell$，使得 C_ℓ 不是极小值，那么构造便遵循交换图 (6.6)，其中包含额外的一步：与推论 2.31 的欧拉类取杯积。因此，本节余下部分我们固定 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_\ell=\mathbf{v_u}+\mathbf{e_k}$。

首先注意到，下临界集 C_ℓ 确定了从 $K_{\mathbf{v}}$ 到 $K_{\mathbf{v}_\ell}\times K_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_\ell}$ 的结构群约化；相对于该约化（模掉 $K_{\mathbf{v}}$ 后），一个临界表示可以写成 $x_\ell=x_\ell^{(1)}+x_\ell^{(2)}$。推论 2.20 表明，存在一个 $K_{\mathbf{v}_\ell}$-等变同伦等价，映射到满足 $x_\ell^{(2)}=0$ 的表示子集。

现在回顾一下，上临界集确定了结构群的约化（推论 2.19），从而

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_u)\cong H^*_{K_{\mathbf{v_u}}}(C_u)\otimes H^*(BK_{\mathbf{e_k}})$$

其中 $C_u/K_{\mathbf{v_u}}\cong\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u})\times\{0\}$ 以及 $K_{\mathbf{e_k}}\cong\mathrm{U}(1)$。圆子群 $\{\mathrm{id}\}\times\mathrm{U}(1)\subset K_{\mathbf{v_u}}\times\mathrm{U}(1)$ 随后在 $\mathcal{F}^u_{\ell^0}$ 上自由作用。

现在我们已经固定了下临界集和上临界集，于是从流线空间中删去这一记号，并使用 $\mathcal{F}=\mathcal{F}^u_{\ell^0}$。

9.1. 托姆类的构造。给定上临界集 C_u 的这一选择，回顾负切片丛 π_u 的定义：$S_u^-\to C_u$ (2.32)，以及不稳定丛（2.29），我们将其记为 W_u^-。定理 2.11 确定了对的一个同胚

$$(S_u^-,S_{u,0}^-)\xrightarrow{\cong}(W_u^-,W_{u,0}^-).$$

流线空间 $\mathcal{F}\subset W_{u,0}^-$ 随后映射到负切片丛中，并且我们滥用记号，也使用 $\mathcal{F}\subset S_{u,0}^-$ 表示其像。上述同胚随后延拓为三元组的一个同胚

$$(S_u^-,S_{u,0}^-,S_{u,0}^-\setminus\mathcal{F})\xrightarrow{\cong}(W_u^-,W_{u,0}^-,W_{u,0}^-\setminus\mathcal{F}).$$

负切片丛是不稳定集的线性化，它简化了下文定义的子集 $\mathcal{B}$、N 和 T 所关联的变形理论。我们可以在负切片内构造法丛，然后利用上述同胚将这些法丛映射到不稳定集 W_u^- 中。该同胚保证这些像也具有定义良好的法丛。

定义

$$\mathcal{B}=\mathcal{F}\cap\nu^{-1}(0)\subset S_u^-.$$

由于 $\nu^{-1}(0)$ 是闭集且在流作用下保持不变，因此 $\mathcal{B}$ 中的任意流线，其上极限和下极限都属于 $\nu^{-1}(0)$。反过来，如果下极限属于 $\nu^{-1}(0)$，那么引理 2.23 表明所有点

流线中的对象同构于下极限，因此属于 $\nu^{-1}(0)$。 [29, 定理 4.35]的结果表明，$\mathcal{B}/K_{\mathbf{v}_\ell}$是箭图簇 $\mathcal{M}(Q, \mathbf{v}_\ell, \mathcal{R})$ 和 $\mathcal{M}(Q, \mathbf{v}_u, \mathcal{R})$ 的 Hecke对应。

现在定义

$$T = \pi_u^{-1}(\nu^{-1}(0) \cap C_u) \cap \mathcal{F} \subset S_u^-$$

and

$$N = \{x \in \mathcal{F} \mid \nu(x) = \nu(\pi_u(x))\} \subset S_u^-.$$

注意

$$T \cap N = \{x \in \mathcal{F} \mid \nu(x) = \nu(\pi_u(x)) = 0\} = \mathcal{F} \cap \nu^{-1}(0) = \mathcal{B}.$$

引理 9.1. $\mathcal{F}$ 和 T 是流形，而 $N \subset \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{B} \subset T$ 是余维相同的子流形 d。

证明。回想一下， $\mathcal{F}$ 的纤维由（2.49）的余核确定。上临界集$C_{\mathbf{v_u}}$ 在$K_{\mathbf{v_u}}$ 的作用下保持不变，并且（在分层 $\mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v_u})^{st}$内）临界集的法丛的纤维由$i\mathfrak{k}_{\mathbf{v_u}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbf{v_u}}$的无穷小作用给出。因此，描述 $\mathcal{F}$ 切空间的变形复形为

$$i\mathfrak{k}_{\mathbf{v_u}} \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{(x_u+y)}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_u}, \mathbf{v_u}).$$

x_u 的稳定性意味着（除去$\mathfrak{k}_{\mathbf{v_u}}$中恒等变换的标量倍数）此同态是单射。 N 中的一个点由一对 $x_u + y \in S_u^-$给出，其中 $x_u \in C_u$ 和 $\nu\left(x_u + y\right) = \nu\left(x_u\right)$ 。因此，引理 2.1 表明， $x_u + y \in N$ 当且仅当$d\nu_{x_u}\left(y\right) = 0$ ，于是此条件的导数定义了 N的切丛，它由下列复形的中间上同调给出

$$i\mathfrak{k}_{\mathbf{v_u}} \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{(x_u+y)}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_u}, \mathbf{v_u}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \xrightarrow{d\nu_{x_u}+d\nu_y} \mathrm{Rel}_0(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R}),$$

其中（使用例 3.11 中（3.6）的记号）

$$(d\nu_{x_u} + d\nu_y)(\delta x, \delta y) = d\nu_{x_u}(\delta y) + d\nu_y(\delta x). \tag{9.1}$$

现在，由引理 2.23 可知 $x_u + y \in \mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)$ 是稳定的，因此引理 3.12 表明 $d\nu_{(x_u+y)}$ 的伴随是单射。注意，上述同态的伴随是 $d\nu^*_{(x_u+y)}$ 在 $\mathbf{Rel}(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R})$ 上的限制，因此也必定是单射。因此， $N \subset \mathcal{F}$ 是光滑的，其法丛由上述变形复形中 (9.1) 的伴随的像确定。

对于 $\mathcal{B}$，也有类似的构造。对于超k¨ahler 箭图和手锯箭图，中岛已经利用$\mathcal{M}(Q, \mathbf{v_u}) \times \mathcal{M}(Q, \mathbf{v_u} + \mathbf{e_k})$内部的变形理论证明了 $\mathcal{B}$ 是光滑的（参见 [19, 第 5] 节和 [22, 第 5]节）。不过，这里我们的目标是关联 $\mathcal{B} \subset N$和 $T \subset \mathcal{F}$的法丛，因此我们改用 $\mathcal{B} \subset N \subset \mathcal{F}$的变形理论。相应的变形复形为

$$i\mathfrak{k}_{\mathbf{v_u}} \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{(x+y)}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_u}, \mathbf{v_u}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \xrightarrow{d\nu_{(x_u+y)}} \mathrm{Rel}_0(Q, \mathbf{v_u}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R}) \oplus \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R})$$

其中，额外条件 $x_u \in \nu^{-1}(0)$ 相较于上面的 (9.1) 在导数中确定了一个额外项

$$d\nu_{(x_u+y)}(\delta x, \delta y) = (d\nu_{x_u}(\delta x), d\nu_{x_u}(\delta y) + d\nu_y(\delta x))\,.$$

再次，由于 $x_u + y$ 是稳定的，根据引理3.12，$d\nu_{(x_u+y)}$ 的伴随是单射的（模恒等变换的标量倍数），因此 $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ 的法丛由$d\nu^*_{(x_u+y)}$的像确定。

为了确定 $\mathcal{B} \subset T$ 的法丛，定义 $T = \pi_u^{-1}(\nu^{-1}(0) \cap C_u) \cap \mathcal{F}$确定了一个额外的先验条件 $d\nu_{x_u}(\delta x_u) = 0$，施加于切空间上，并由此得到以下变形复形

$$i\mathfrak{k}_{\mathbf{v_u}} \xrightarrow{\rho^{\mathbb{C}}_{(x_u+y)}} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_u}, \mathbf{v_u}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \xrightarrow{d\nu_{x_u}+d\nu_y} \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R}).$$

出于与之前相同的原因，这个同态是满射的，而 $\mathcal{B} \subset T$ 的法丛的纤维由伴随 $(d\nu_{x_u} + d\nu_y)^*$ 的像给出。该映射是单射，因此其维数与 (9.1) 的伴随的像相同，而后者对应于 $N \subset \mathcal{F}$ □的法丛的纤维。

令 $\tau_{\mathcal{B}} \in H^d(T, T \setminus \mathcal{B})$ 和 $\tau_N \in H^d(\mathcal{F}, \mathcal{F} \setminus N)$ 为分别与包含映射 $\mathcal{B} \hookrightarrow T$ 和 $N \hookrightarrow \mathcal{F}$ 相关联的托姆类。将对的包含映射记为 $i_1 : (T, T \setminus \mathcal{B}) \hookrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{F} \setminus N)$。

推论 9.2. 托姆类满足 $\tau_{\mathcal{B}} = i_1^* \tau_N$。

证明。这由前一个证明可知，注意到 $\mathcal{B} \subset T$ 的法丛是.....的像。

$$\mathrm{Rel}(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R}) \xrightarrow{(d\nu_{x_u}+d\nu_y)^*} \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v_u}, \mathbf{v_u}) \oplus \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

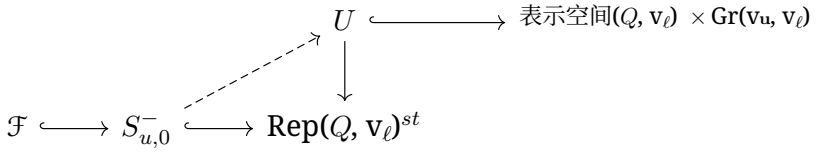
其中 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v})$ 是 $\mathcal{B} \subset T \subset \mathcal{F}$ 上全局定义的平凡丛。因此，$\mathcal{B} \subset T$ 的法丛是通过包含映射 $\mathcal{B} \hookrightarrow N$ 拉回 $N \subset \mathcal{F}$ 的法丛，这意味着托姆类上的关系 $\tau_{\mathcal{B}} = i^* \tau_N$。□

现在令 $\mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)$ 表示 $\mathbf{v_u}$ 维子空间在 $\mathbf{v}_\ell$中的格拉斯曼流形，或者等价地，表示单射同态 $\mathrm{Vect}(Q, \mathbf{v_u}) \hookrightarrow \mathrm{Vect}(Q, \mathbf{v}_\ell)$ 对 $G_{\mathbf{v_u}}$ 取商。考虑乘积 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$，以及诱导的群作用 $K_{\mathbf{v}_\ell}$ 在 $\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$ 上。利用 Hermitian结构，$\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$中的一个子空间对应于一个正交投影 $\Pi : \mathrm{Vect}(Q, \mathbf{v}_\ell) \to \mathrm{Vect}(Q, \mathbf{v}_u)$。因此存在一个连续投影

$$\begin{aligned} p_u : \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell) &\to \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_u) \\ (x, \Pi) &\mapsto \Pi x \Pi. \end{aligned}$$

将开子集 $U \subset \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)^{st}$ 定义为在此投影下，$\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_u)^{st}$ 的原像。存在一个连续映射 $U \to \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st}$，由投影到第一个因子给出。注意，每个 $x \in S^-_{u,0}$ 都自带一个 $\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$ 的典范元素，该元素由

在上临界点处对结构群作约化而确定，因此包含映射 $\mathcal{F} \hookrightarrow S_{u,0} \hookrightarrow \mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st}$ 可提升如下：

(9.2)


还有一个到 $\mathbf{Hom}^1(Q, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_u)$ 的投影，由 $\Pi x \Pi^\perp$ 给出。对于每个 $(x, \Pi) \in U$，将与这些投影相关联的表示记为 $x_u := \Pi x \Pi \in$ 表示空间$(Q,\mathbf{v}_u)^{st}$ 和 $y := \Pi x \Pi^\perp \in \mathbf{Hom}^1(Q,\mathbf{e}_k, \mathbf{v}_u)$。

投影 Π 也确定了子群 $K_{\mathbf{v_u}} \subset K_{\mathbf{v}_\ell}$，并且相对于 $G_{\mathbf{v_u}}$ 对 x 的作用，存在一个正交分解

$$\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e}_k, \mathbf{v_u}) \cong \mathrm{im}\, \rho^{\mathbb{C}}_{x_u} \oplus \ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^*.$$

给定如上的 $y = \Pi x \Pi^\perp$，令 y_h 表示相对于上述分解取在 $\mathbf{ker}(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^*$ 中的分量。$x + y$ 的稳定性于是意味着 $y_h \neq 0$，因为否则可以构造一个 x 与某个在 $\mathbf{Hom}^1(Q, \mathbf{e}_k, \mathbf{v_u})$ 中分量为零的表示之间的同构，而该表示显然是不稳定的。现在定义

$$\tilde{N} := \{(x, \Pi) \in U \mid \nu(x_u) = \nu(x_u + y_h)\}. \tag{9.3}$$

˜引理 9.3. N 是 U的子流形。关于来自 (9.2) 的典范提升 $\mathcal{F} \hookrightarrow U$，˜交集 $N \cap \mathcal{F}$ 在 U 中是横截的，并且对的包含映射

$$(T, T \setminus \mathcal{B}) \overset{i_1}{\hookrightarrow} (\mathcal{F}, \mathcal{F} \setminus N) \overset{i_2}{\hookrightarrow} (U, U \setminus \tilde{N})$$

满足

$$\tau_{\mathcal{B}} = (i_2 \circ i_1)^* \tau_{\tilde{N}} \quad and \quad \tau_N = i_2^* \tau_{\tilde{N}}, \tag{9.4}$$

˜其中 $\tau_{\tilde{N}}$ 是 $N \hookrightarrow U$的托姆类。

证明。条件 $\nu(x_u) = \nu(x_u + y_h)$ 的导数为

$$T_{(x,\Pi)} \left(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell) \right) \xrightarrow{d\nu_{x_u} + d\nu_y} \mathrm{Rel}(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}, \mathcal{R})$$

再次，x_u 的稳定性意味着它是满射，因此其伴随是单射。特别地，˜我们看到，$N \subset U$ 的法丛的纤维由伴随映射的像给出，而这些纤维在 $T_{(x,\Pi)} \left(\mathbf{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{st} \times \mathbf{Gr(v_u, v}_\ell) \right)$ 中的像限制为前一个证明中定义的 $N \subset \mathcal{F}$ 的法丛的纤维。

因此，同上所用的论证表明，$N \subset \mathcal{F}$ 的法丛是通过包含映射 $N \hookrightarrow N$ 拉回的
˜ ˜ $N \subset U$ 的法丛，这意味着托姆类之间满足关系 (9.4)。□

9.2. 托姆类的全局生成元。现在考虑托姆类 $\tau_N \in H_K^d(\mathcal{F}, \mathcal{F}\setminus N)$ 在同态 $H_K^d(\mathcal{F},\mathcal{F}\setminus N)\to H_K^d(\mathcal{F})$ 下的像。下文将此像记为 τ_N'，本节的目标是证明推论 9.5，它表明 τ_N'由 $H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}$(表示空间$(Q, \mathbf{v}_\ell)\times$ Gr$(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$) 中的一个全局类生成。

现在我们证明，包含映射 $U\hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)^{st}\times\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell)$ 在上同调中诱导满射。结合众所周知的满射

$$H^*(BK_{\mathbf{v}_\ell}\times BK_{\mathbf{v}_\ell})\twoheadrightarrow H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)^{st}\times\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell))$$

（使用 Kirwan [12] 的方法），这意味着托姆类 $\tau_{\tilde N}$ 在包含映射$H^*(U,U\setminus N)\to H^*(U)$ 下的像由 $H^*(BK_{\mathbf{v}_\ell}\times BK_{\mathbf{v}_\ell})$ 中的一个类生成。

引理9.4. 包含映射 $U\hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)\times\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell)$ 在 $K_{\mathbf{v}_\ell}$-等变上同调中诱导满射。

证明。取一个固定的 $\Pi\in\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell)$。我们有

$$\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_\mathbf{u},\mathbf{v}_\ell)\cong K_{\mathbf{v}_\ell}/\left(K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)\right)$$

因此

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}\left(\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)\times\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell)\right)\cong H^*_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}(\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)),$$

其中 $K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times$ U(1) 通过选取 $\Pi\in\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell)$ 来作用。等价地，存在一个典范分解

$$\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell)\cong\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u})\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{v}_\mathbf{u})\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u},\mathbf{e}_\mathbf{k})\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{e}_\mathbf{k}).$$

且 $K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times$ U(1) 通过显然的诱导作用来作用。于是，Kirwan 关于 [12] Rep$(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u})$ 的方法表明存在一个满射

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}(\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\ell))\\ \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}\left(\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u})^{\alpha-st}\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{v}_\mathbf{u})\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u},\mathbf{e}_\mathbf{k})\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{e}_\mathbf{k})\right).$$

剩下的工作是将范围限制到 $x_\ell\in$Rep$(Q,\mathbf{v}_\ell)$ 稳定的子集。相对于上述 $\Pi\in$Gr$(\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_\ell)$ 的选取，我们将其记为 U_Π，并注意到$U\cong K_{\mathbf{v}_\ell}\times_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}U_\Pi$。当分量 $x_u\in$ Rep$(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u})$ 稳定时，x_ℓ 稳定当且仅当 $\ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^*\subset$Hom$^1(Q,\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{v}_\mathbf{u})$ 中的分量非零。因此，上述投影同伦等价于 Rep$(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u})^{\alpha-st}$ 上的一个向量丛，其纤维为 $\ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^*$；该同伦等价保持 x_ℓ 稳定的子集不变，并且子群 $\{\mathrm{id}\}\times$ U(1) $\subset K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times$ U(1) 固定底空间，并在非零纤维上自由作用。因此，阿蒂亚–博特引理表明

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}\left(\text{表示空间}(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u})^{\alpha-st}\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{v}_\mathbf{u},\mathbf{e}_\mathbf{k})\oplus\mathrm{Hom}^1(Q,\mathbf{e}_\mathbf{k},\mathbf{e}_\mathbf{k})\right)\\ \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}(U_\Pi)$$

是满射。因此得到该结果。

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\mathbf{u}}\times\mathsf{U}(1)}(U_\Pi)\cong H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U).$$

□

推论 9.5. 存在一个类 $\tilde{\tau} \in H_K^*$(表示空间$(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)$)，使得由 (9.2) 中的包含映射$i\colon \mathcal{F} \hookrightarrow$表示空间$(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)$ 所定义的拉回满足 $i^*\tilde{\tau} = \tau'_N$。

˜证明。前一个引理表明，托姆类 $\tau_{\tilde{N}} \in H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U, U \setminus N) \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U)$ 的像属于由包含映射 $U \hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)$ 的拉回之像。结合引理 9.3，交换图

$$\begin{array}{ccc} & & H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)) \\ & & \downarrow \\ H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U, U \setminus \tilde{N}) & \longrightarrow & H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \setminus N) & \longrightarrow & H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}) \end{array}$$

表明 τ'_N 属于拉回同态 $H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)) \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F})$ 的像。□

以下结果将用于引理 9.7 的证明。

推论 9.6。包含映射 $U \hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{\alpha-st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$ 在 $K_{\mathbf{v}_\ell}$-等变上同调中诱导一个满射。

证明。存在一列包含映射

$$U \hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{\alpha-st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell) \hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$$

结合前一个引理可知，诱导同态

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}\left(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)\right) \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U)$$

是满射。因此

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}\left(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell)^{\alpha-st} \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)\right) \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U)$$

也为满射。 □

9.3. 负切片丛第一陈类的整体生成。现在我们证明，引理 8.2 中使用的陈类 $\xi \in H^2_{\mathrm{U}(1)}(W_u^-, 0) \cong H^2_{\mathrm{U}(1)}(S_u^-, 0) \cong H^2(\mathbb{P}S_u^-)$ 由 $H^2_K(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$ 中的一个类生成。

引理 9.7. 存在 $\tilde{\xi} \in H^2_K(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell))$，使得 $i^*\tilde{\xi} = \xi$，其中 $i\colon S_u^-, 0 \hookrightarrow \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell))$ 是 (9.2) 中的包含映射，而 ξ 是注记 7.6 和引理 8.2 中的陈类。

˜证明。回顾从 (9.3) 构造子流形 $N \subset U$ 的过程可知，对于 $(x, \Pi) \in U$，投影 Π诱导出表示。

$$x_u := \Pi x \Pi \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v_u})^{\alpha-st} \quad \text{and} \quad y = \Pi x \Pi^\perp \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}).$$

分解 $\mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \cong \ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^* \oplus \mathrm{im}\ \rho^{\mathbb{C}}_x$进而确定了一个良定义的向量丛$\tilde{S}$，其底空间为 U，纤维为 $\ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^* \subset \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u}) \subset \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{v}, \mathbf{v})$。此外， $y \in \mathrm{Hom}^1(Q, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_u})$ 确定了一个典范的非零 $y_h \in \ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^*$，进而确定了 $\ker(\rho^{\mathbb{C}}_{x_u})^*$ 中的一条直线，从而得到一个~ ~线子丛 $L \subset S$。

~在负切片 $S^-_{u,\,0} \hookrightarrow U$ 的像上，这个线丛 L 拉回为线丛 $\tilde{L}$，它是 $\mathbb{P}S^-_u$ 的典范丛，因此 L 的第一陈类限制为 L 的第一陈类，也就是引理 8.2 中使用的类 ξ。

结合推论 9.6 中的满射性，这就证明了存在 $\tilde{\xi} \in H^2_K(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}) \times \tilde{}\,\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell))$ 使得 $i^*\xi = \xi$。 □

9.4. 莫尔斯复形上与托姆类的杯积。现在我们可以描述莫尔斯复形上与托姆类的杯积，并利用上述结果给出一种在博雷尔-摩尔同调中构造卷积的莫尔斯理论方法。为简化下文的记号，我们用 Gr 代替 $\mathrm{Gr}(\mathbf{v}_u, \mathbf{v}_\ell)$。

引理 9.3 表明，托姆类 τ_N 属于 $\tau_{\tilde{N}} \in H^d_K(U, U \setminus \tilde{N})$ 的像。根据推论 9.6，像 $\tau'_{\tilde{N}} \in H^d_K(U)$ 属于从 $H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\text{表示空间}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)) \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(U)$ 出发的拉回同态的像，因此 τ'_N 属于拉回的像

$$H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{v}_\ell) \times \mathrm{Gr}(\mathbf{v_u}, \mathbf{v}_\ell)) \to H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}).$$

因此，杯积

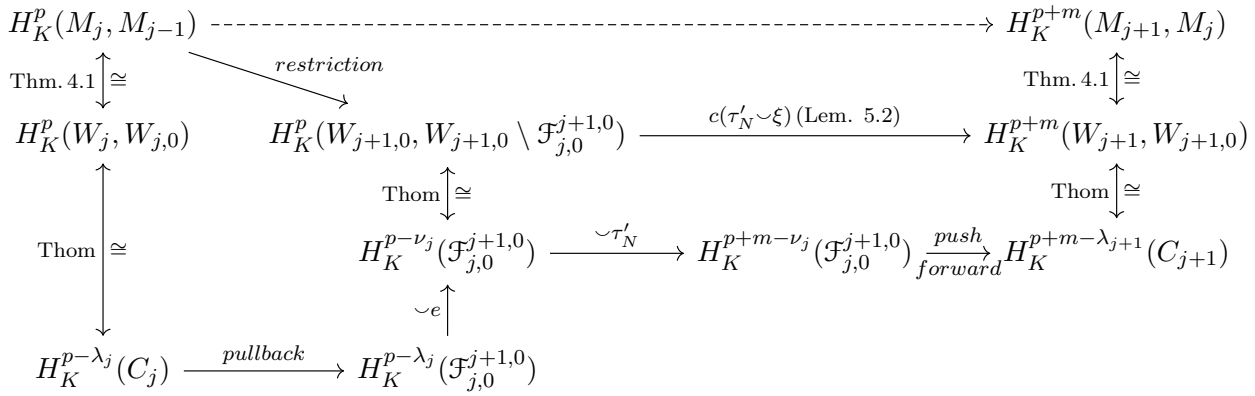
$$\begin{aligned} H^k_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(W_u, W_u \setminus \mathcal{F}^{u,0}_{\ell,0}) \times H^d_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(W_u) &\to H^{k+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(W_u, W_u \setminus \mathcal{F}^{u,0}_{\ell,0}) \\ (\omega, \tau'_N) &\mapsto \omega \smile \tau'_N \end{aligned}$$

是杯积的限制

$$\begin{aligned} H^k_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(M_{j+1} \times \mathrm{Gr}, M_{j-1} \times \mathrm{Gr}) \times H^d_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(M_{j+1} \times \mathrm{Gr}) &\to H^{k+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(M_{j+1} \times \mathrm{Gr}, M_{j-1} \times \mathrm{Gr}) \\ (\tilde{\omega}, \tilde{\tau}) &\mapsto \tilde{\omega} \smile \tilde{\tau}. \end{aligned}$$

考虑注记 7.6 中的陈类 ξ。由命题 8.3 可知，在流线空间上与$\tau'_N \smile \xi$作杯积，会在莫尔斯谱序列第一页的项之间诱导出同态 $H^p_K(M_j, M_{j-1}) \to H^{p+m}_K(M_{j+1}, M_j)$。

(9.5)

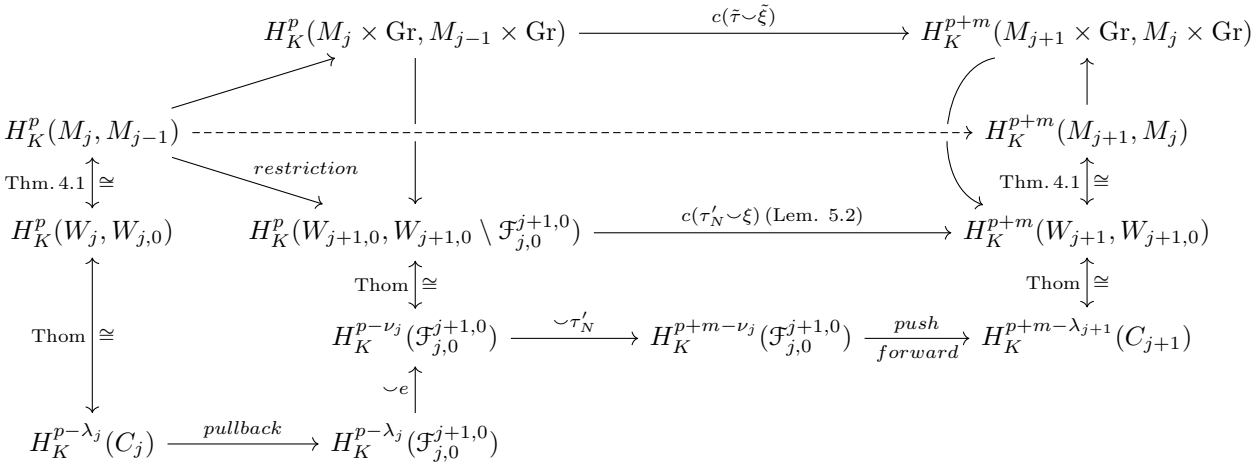


现在我们可以解释这个诱导同态的拓扑意义。上述结果表明，杯积同态 $c(\tau'_N \smile \xi)$ 是 $M \times \mathbf{Gr}$ 上相应同态˜的限制，因为类 τ'_N 和 ξ 是通过包含映射 $S_u \hookrightarrow M \times \mathbf{Gr}$ 拉回相应的类 $\tilde{\tau}$ 和 ξ 所得（推论 9.5 和引理 9.7）。因此，引理 5.2 中杯积过程的自然性意味着下图交换。

$$\begin{array}{ccc} H^p_K(M_j \times \mathrm{Gr}, M_{j-1} \times \mathrm{Gr}) & \xrightarrow{c(\tilde{\tau} \smile \tilde{\xi})\,(\text{Lem. } 5.2)} & H^{p+m}_K(M_{j+1} \times \mathrm{Gr}, M_j \times \mathrm{Gr}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p_K(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,0}_{j,0}) & \xrightarrow{c(\tau'_N \smile \xi)\,(\text{Lem. } 5.2)} & H^{p+m}_K(W_{j+1}, W_{j+1,0}) \end{array}$$

因此，杯积的自然性表明，限制 $H^p_K(M_j, M_{j-1}) \to H^p_K(W_{j+1,0}, W_{j+1,0} \setminus \mathcal{F}^{j+1,j\,0}{}^{0},)$ 可通过投影 $M \times \mathbf{Gr} \to M$ 拉回到乘积 $H^p_K(M_j, M_{j-1}) \to H^p_K(M_j \times \mathbf{Gr}\ M_{j-1} \times \mathbf{Gr})$。因此，交换图 (9.5) 可以扩充如下

(9.6)



因此我们看到，诱导同态 $H_K^p(M_j \times \mathrm{Gr}\ M_{j-1} \times \mathrm{Gr}) \to H_K^{p+m}(M_{j+1} \times \mathrm{Gr}\ M_j \times \mathrm{Gr})$ 拉回后，得到 $M \times \mathrm{Gr}$ 的谱序列第一页上的杯积同态。

现在回顾博雷尔-摩尔同调中的卷积构造 [18, 第 2(i) 节] 和 [8, (2.7.14)] 。引理 7.1 和 7.4 表明，通过庞加莱对偶性，这对应于上同调中以下同态的复合。

$$H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_\ell \cap \nu^{-1}(0)) \xrightarrow{\pi_\ell^*} H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{B}) \xrightarrow{(\pi_u)_*} H^{p+d-\lambda}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_u \cap \nu^{-1}(0)). \tag{9.7}$$

（回想一下，根据 [29] ，Hecke对应是 $\mathcal{B}/K_{\mathbf{v}_\ell}$。）

由于推前 $H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{B}) \to H^{p+d-\lambda_u}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_u \cap \nu^{-1}(0))$ 经由包含映射 $\mathcal{B} \hookrightarrow T$ 分解，因此卷积由以下同态的复合给出。

$$H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_\ell \cap \nu^{-1}(0)) \xrightarrow{\pi_\ell^*} H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{B}) \xrightarrow{i_*} H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T) \xrightarrow{(\pi_u)_*} H^{p+d-\lambda}_{K_{\mathbf{v_u}}}(C_u \cap \nu^{-1}(0)). \tag{9.8}$$

请注意推前的像

$$H^{*+\lambda}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T) \xrightarrow{(\pi_u)_*} H^*_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_u \cap \nu^{-1}(0)) \cong H^*(\mathcal{M}(Q, \mathbf{v_u}) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1)).$$

属于 $H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}) \hookrightarrow H^*(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u}) \otimes H^*(\mathsf{BU}(1))$（见注 7.7）。因此，我们在上述交换图的最后一项使用 $K_{\mathbf{v_u}}$-等变上同调。

推论 9.2 表明，与托姆类作杯积运算和限制可交换

$$\begin{array}{ccc}
H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i^*} & H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T) \\
\downarrow \smile \tau_N & & \downarrow \smile \tau_{\mathcal{B}} \\
H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \setminus N) & \xrightarrow{i^*} & H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T, T \setminus \mathcal{B}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i^*} & H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T)
\end{array}$$

卷积 (9.8) 是下图的中间列。对 $K_{\mathbf{v}_\ell}$ 取商可得到右列中的同态；该列在 Poincar´e 对偶意义下对应于中岛 [18, 第 2(i) 节] 以及克里斯与金茨堡 [8, (2.7.14)] 所使用的卷积。左列是图 (9.6) 的底行，因此在 C_ℓ 是 $\|\mu - \alpha\|^2$ 的全局极小值的情况下，它对应于莫尔斯复形上的杯积。

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_\ell) & \xrightarrow{\quad i^*\quad} & H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(C_\ell\cap\nu^{-1}(0)) & \xleftarrow{\ \cong\ } & H^p(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v}_\ell,\mathcal{R})) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_\ell^*} & \swarrow{\scriptstyle \pi_\ell^*} & \downarrow{\scriptstyle \pi_\ell^*} & & \downarrow{\scriptstyle pullback} & & \\
H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{i^*} & H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T) & \xrightarrow{i^*} & H^p_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{B}) & \xleftarrow{\ \cong\ } & H^p(\mathcal{B}/K_{\mathbf{v}_\ell}) \\
\downarrow{\scriptstyle \smile\tau_N} & & & \searrow{\scriptstyle \smile\tau_{\mathcal{B}}} & \downarrow{\scriptstyle Thom}\cong & & \\
H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F},\mathcal{F}\setminus N) & \xrightarrow{\quad i^*\quad} & H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T,T\setminus\mathcal{B}) & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad i^*\quad} & H^{p+d}_{K_{\mathbf{v}_\ell}}(T) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle (\pi_u)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_u)_*} & & & & \\
H^{p+d-\lambda_u}_{K_{\mathbf{v_u}}}(C_u) & \xrightarrow{\quad i^*\quad} & H^{p+d-\lambda_u}_{K_{\mathbf{v_u}}}(C_u\cap\nu^{-1}(0)) & \xleftarrow{\ \cong\ } & H^{p+d-\lambda_u}(\mathcal{M}(Q,\mathbf{v_u},\mathcal{R})) & &
\end{array}
\tag{9.9}
$$

当 $\mathbf{v}_\ell < \mathbf{v}$ 时，还需要额外与推论 2.31 的欧拉类进行一次杯积，这将上述构造与 (9.6) 的杯积联系起来。

Co结合上一节的结果，我们证明了如下 .

定理 9.8. 莫尔斯复形 $M \times \mathrm{Gr}$ 上的杯积 $H^p_K(M_j \times \mathrm{Gr}\ M_{j-1} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\ \smile(\tilde{\tau}\smile\xi)\ } H^{p+d}_K(M_{\ell+1} \times \mathrm{Gr}\ M_\ell \times \mathrm{Gr})$ 限制为莫尔斯复形中与 $\tau'_N \smile \xi$ 对应的局部杯积M （即 (9.9) 的左列）。将其限制到 $\nu^{-1}(0)$ 后，便确定了 (9.9) 的中列，而这等价于卷积 (9.8)。

References

[1] E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris。《 *Geometry of algebraic curves. Vol. I*》，*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*第267卷。Springer-Verlag，纽约，1985年。[2] M. F. Atiyah 和 R. Bott。黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。《 *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.* 》，*A* 308 1505 523 615, 1983

( ): –。[3] M. F. Atiyah 和 R. Bott。矩映射与等变上同调。《 *Topology*》，23(1):1–28，1984年。[4] D. M. Austin 和 P. J. Braam。莫尔斯–博特理论与等变上同调。载于《 *The Floer memorial volume*》， *Progr. Math.*第133卷，第123–183页。Birkhäuser，巴塞尔，1995年。[5] Raoul Bott。非退化临界流形。《 *Ann. of Math. (2)*》，60:248–261，1954年。[6] Raoul Bott。不可征服的莫尔斯理论。《 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*》，(68):99–114 (1989)，1988年。[7] Raoul Bott 和 Loring W. Tu。《 *Differential forms in algebraic topology*》， *Graduate Texts in Mathematics*第82卷。Springer-Verlag，纽约—柏林，1982年。[8] Neil Chriss 和 Victor Ginzburg。《 *Representation theory and complex geometry*》。Birkhäuser Boston Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1997年。[9] William Crawley-Boevey。箭图表示的矩映射几何。《 *Compositio Math.*》，126(3):257–293，2001年。[10] N. J. Hitchin。黎曼曲面上的自对偶方程。《 *Proc. London Math. Soc. (3)*》，55(1):59–126，1987年。[11] A. D. King。有限维代数的表示模空间。《 *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*》，45(180):515–530，1994年。[12] Frances Clare Kirwan。《 *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry* 31 *Mathematical Notes* 1984 》，{ }卷，{ }。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，{ }。[13] P. B. Kronheimer。将ALE空间构造为超凯勒商空间。《 *J. Differential Geom.*》，( ): –。

[14] Peter B. Kronheimer 和 Hiraku Nakajima。ALE引力瞬子上的杨–米尔斯瞬子。《 *Math. Ann.*》，288(2):263–307，1990年。[15] S. Lojasiewicz。解析函数的梯度轨迹。载于《 *Geometry seminars 1982–1983*》，{ }，第–页。博洛尼亚 *(Bologna, 1982/1983)* 115 117 1984 大学出版社，博洛尼亚，{ }。[16] Kevin McGerty 和 Thomas Nevins。箭图簇的Kirwan满射性。《 *Invent. Math.*》，212(1):161–187，2018年。[17] Hiraku Nakajima。ALE空间上的瞬子、箭图簇与Kac-Moody代数。《 *Duke Math. J.*》，76(2):365–416，1994年。[18] Hiraku Nakajima。海森堡代数与射影曲面上点的希尔伯特概形。《 *Ann. of Math. (2)*》，145(2):379–388，1997年。[19] Hiraku Nakajima。箭图簇与Kac-Moody代数。《 *Duke Math. J.*》，91(3):515–560，1998年。[20] Hiraku Nakajima。箭图簇与量子仿射代数的有限维表示。《 *J. Amer. Math.*》，( ): – *Soc.* 14 1 145 238 2001 （电子版），{ }。[21] Hiraku Nakajima。箭图簇与量子仿射代数的 t类 q特征。《 *Ann. of Math. (2)*》，160(3):1057–1097，2004年。[22] Hiraku Nakajima。手锯箭图簇与有限 W代数。《 *Mosc. Math. J.*》，12(3):633–666，669–670，2012年。[23] Markus J. Pflaum 和 Graeme Wilkin。等变控制数据与邻域变形收缩。《 *Methods Appl. Anal.* 26 1 13 36, 2019 》，( ): –。[24] Markus Reineke。量子群中的Harder–Narasimhan系统与箭图模空间的上同调。《 *Invent.*》，( ): –。[25] Leon *Math.* 152 2 349 368, 2003 Simon。一类非线性演化方程的渐近行为及其在几何问题中的应用。《 *Ann.*》，( ): –。[26] Reyer *of Math. (2)* 118 3 525 571, 1983 Sjamaar。重新审视矩映射的凸性。《 *Adv. Math.*》，138(1):46–91，1998年。[27] Stephen Smale。动力系统的莫尔斯不等式。《 *Bull. Amer. Math. Soc.*》，66:43–49，1960年。[28] Graeme Wilkin。临界点不稳定集附近解析函数梯度流的局部行为。可见 https://arxiv.org/abs/1904.08045。[29] Graeme Wilkin。箭图的矩映射流与Hecke对应。《 *Adv. Math.*》，320:730–794，2017年。[30] Graeme Wilkin。簇上动量映射范数平方的等变莫尔斯理论。《 *Int. Math. Res. Not.*》，( ): –。[31] Ed *IMRN* 15 4730 4763, 2019 ward Witten。超对称性与莫尔斯理论。《 *J. Differential Geometry*》，17(4):661–692 (1983)，1982年。

Department of Mathematics, University of York, York YO10 5DD, United Kingdom
Email address: graeme.wilkin@york.ac.uk