arXiv:2305.05550v1 [math.RT] 9 May 2023

拟约化李超代数的 Whittaker 范畴与主有限 W-超代数

CHIH-WHI CHEN 和 SHUN-JEN CHENG

Abstract. 我们研究李超代数 $\mathfrak{g}$ 的 Whittaker 范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$，其中 ζ 是与 $\mathfrak{g}$ 的三角分解相关联的幂零根的偶子代数上的任意特征。我们证明，从 BGG 范畴的整数子范畴或任意强典型分块到 Whittaker 范畴的 Backelin 函子，会将不可约模映为不可约模或零。范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 为研究与偶主幂零元相关联的有限 W-超代数提供了合适的框架。对于佩里普莱克蒂克李超代数 $\mathfrak{p}(n)$，我们构造主有限 W-超代数 W_ζ，并建立 Skryabin型等价。对于基本经典李超代数和 $strange$ 李超代数，我们证明，给定主有限 W-超代数 W_ζ 上的有限维模范畴，在非奇异特征 ζ 下与 Skryabin等价下的 $\mathcal{N}(\zeta)$ 等价。因此，我们为从整数 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 到 W_ζ 上有限维模范畴的某个 Whittaker 函子，给出了 Soergel《Struktursatz》的超类比。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 8 3. $\mathcal{N}(\zeta)$ 中的块与简单对象 10 4. 基本经典李超代数的主有限 W-超代数 15 5. 佩里普莱克蒂克李超代数 $\mathfrak{p}(n)$ 的主有限 W-超代数 23 6. 函子 $\mathrm{Wh}_\zeta \circ \Gamma_\zeta(-)$ 的超 Soergel 结构定理 29 附录A. queer 李超代数的 Whittaker 范畴 33 附录B. 范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的等价 34 参考文献 36

MSC 2010：17B10 17B55
关键词：李代数与超代数、Whittaker 模、Whittaker 范畴、Backelin 函子、主有限 W-超代数、Skryabin等价。

1. 引言

1.1. 设定。

1.1.1. 李超代数。本文主要关注以下来自 Kac 列表 [K1] 的李超代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{C}$：

（基本经典） $\mathfrak{gl}(m|n)$ $\mathfrak{sl}(m|n)$ $\mathfrak{psl}(n|n)$ $\mathfrak{osp}(m|2n)$ $D(2,1;\alpha)$ $G(3)$ $F(4)$,
（奇异型）$\mathfrak{p}(n)$ $[\mathfrak{p}(n)\ \mathfrak{p}(n)]$, $\mathfrak{q}(n)$ $\mathfrak{sq}(n)$ $\mathfrak{pq}(n)$以及 $\mathfrak{psq}(n)$。

特别地， $\mathfrak{g}$是拟约化的，即$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 是约化李代数，而$\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 作为$\mathrm{ad}\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模是半单的。固定$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$的一个 Cartan 子代数$\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ 。于是我们有根空间分解 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in\Phi\amalg\{0\}}\mathfrak{g}^{\alpha}$，其中 $\mathfrak{g}^{\alpha}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,[h,X]=\alpha(h)X,\quad\forall h\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}\}$，而 $\Phi\subseteq\mathfrak{h}_{\bar{0}}^{*}$ 是根的集合。在本文中，我们固定一个三角分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}^{-}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n} \tag{1.1}$$

按照 [M 第 2.4] 节的定义（另见 [CCC 第 1.4] 节），其中 $\mathfrak{h}:=\mathfrak{g}^{0}=\bigoplus_{\mathrm{Re}\alpha(H)=0}\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathfrak{n}:=\bigoplus_{\mathrm{Re}\alpha(H)>0}\mathfrak{g}^{\alpha}$，以及 $\mathfrak{n}^{-}:=\bigoplus_{\mathrm{Re}\alpha(H)<0}\mathfrak{g}^{\alpha}$，其中某个 $H\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}$。我们定义 Borel 子代数 $\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$；另见 [Mu 第 3.2 节、第 3.3] 节。子代数 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数。注意，$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{\bar{0}}$，除非$\mathfrak{g}$ 是怪型。我们注意到，$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的每个 Borel 子代数都是 $\mathfrak{g}$的某个 Borel 子代数的底层偶子代数。

1.1.2. 简单 Whittaker 模。有限生成的 $\mathfrak{g}$-模 M 若在 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 上局部有限且满足 $U(\mathfrak{n})$，则称为 Whittaker 模。$\mathfrak{n}_{\bar{0}}$ 的特征 ζ 若对任意（偶）简单根 α均有 $\zeta(\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\alpha})\neq 0$，则称为非奇异特征。在李代数的情形下，Kostant 于 [Ko2], 开创了 Whittaker 模的研究，其中考察了与非奇异特征 ζ 相关的 Whittaker 模。此后，关于约化李代数的 Whittaker 模研究取得了长足进展；例如参见[Ly, Mc1, Mc2, MS1, Ba, BM, ChM, Br, R, AB]。

用 $\mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}:=(\mathfrak{n}_{\bar{0}}/[\mathfrak{n}_{\bar{0}},\mathfrak{n}_{\bar{0}}])^{*}$ 表示 $\mathfrak{n}_{\bar{0}}$上的特征集合。固定一个特征 $\zeta\in\mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}$。我们定义集合 $\Pi_{\zeta}:=\{\alpha\in\Phi_{\bar{0}}^{+}|\zeta(\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\alpha})\neq 0\}$，其中 $\Phi_{\bar{0}}^{+}$表示正偶根集合。对于 $\alpha\in\Pi_{\zeta}$，在由 $\mathfrak{h}$和 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\pm\alpha}$ 生成的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$的抛物子代数 $\mathfrak{p}$中定义 Levi 子代数 $\mathfrak{l}_{\zeta}$。 $\mathfrak{l}_{\zeta}$的 Weyl 群记作 $W(\mathfrak{l}_{\zeta})$。遵循 Milič ić 和 Soergel [MS1], ，我们考虑 Whittaker 模范畴 $\mathcal{N}$。对于任意 $x\in\mathfrak{n}_{\bar{0}}$， $\mathcal{N}$可分解为 Whittaker 模的全子范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的直和，在这些子范畴上， $x-\zeta(x)$ 局部幂零作用。

当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 是约化李代数时，我们回顾 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中的标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta)$（$\lambda\in\mathfrak{h}^{*}$）：

$$M(\lambda,\zeta):=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}Y_{\zeta}(\lambda,\zeta). \tag{1.2}$$

这里， $Y_{\zeta}(\lambda,\zeta):=U(\mathfrak{l}_{\zeta})/(\mathrm{Ker}\chi_{\lambda}^{\mathfrak{l}_{\zeta}})U(\mathfrak{l}_{\zeta})\otimes_{U(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{l}_{\zeta})}\mathbb{C}_{\zeta}$表示 Kostant 在 [Ko1], 中给出的简单 Whittaker 模，其中 $\chi_{\lambda}^{\mathfrak{l}_{\zeta}}$ 是与 λ 相关联的 $\mathfrak{l}_{\zeta}$ 的中心特征，而 $\mathbb{C}_{\zeta}$ 是由特征$\zeta|_{\mathfrak{n}\cap\mathfrak{l}_{\zeta}}$诱导的 $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{l}_{\zeta}$一维模。除同构外，它们由特征 ζ以及 Weyl 群在点作用下对 $W(\mathfrak{l}_{\zeta})$的陪集代表元参数化。标准 Whittaker 模的研究可追溯至 McDowell [Mc1, Mc2] 和 Milič ić-Soergel [MS1]的工作。在 $\mathcal{N}(\zeta)$的表示理论中，它们发挥着类似 Verma 模的作用；例如， $\mathcal{N}(\zeta)$中的简单对象由标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta)$的顶确定。

近年来，关于李超代数上的 Whittaker 模范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$的诸多方面已得到研究（例如参见 [BCW, Ch1, Ch2, CCM, CC1]）。特别是，当 $\mathfrak{l}_\zeta$ 是 $\mathfrak{g}$的 Levi 子代数时，标准 Whittaker 模的构造可推广至超代数情形；参见 [Ch1，第 3 节。1]（另见 [CC1]），其中包括 I 型李超代数（另见 (2.3) 中的列表）。在这种情况下，许多基于标准 Whittaker 模的方法已推广到李超代数。然而，当 $\mathfrak{l}_\zeta$ 不是 $\mathfrak{g}$的 Levi 子代数时，则无法纳入这一框架。

与李代数情形相同（参见 [MS1，定理 2.6]），$\mathcal{N}(\zeta)$ 中的每个对象都具有有限长度。对于李代数，Backelin 在 [Ba] 中完整解决了标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta)$ 的合成重数问题，并用 Kazhdan-Lusztig 多项式给出了答案；关于整权的情形 λ，另见 [MS1]。特别地，他为约化李代数引入了一个正合函子 Γ_ζ，将 Bernstein-Gelfand-Gelfand 范畴 $\mathcal{O}$ 映到 $\mathcal{N}(\zeta)$，把 Verma 模变为标准 Whittaker 模或零，并把简单模变为简单模或零。对于李超代数，在 [Ch1，CC1] 中，作者使用 Backelin 函子的某种超类比，将标准 Whittaker 模的重数问题化约为范畴 $\mathcal{O}$ 中 Verma 模的重数问题。由此，Backelin 函子进一步被实现为某种 Serre 商函子，并由此得到量子群及 ι-量子群 [CCM，CC1] 上 q-对称化子在 q-对称化 Fock 空间上的作用，以及 q-对称化映射的若干范畴化图景。

1.1.3. 有限 W-超代数的有限维模。有限 W-代数是由二元组 $(\mathfrak{g},e)$ 构造的一类结合代数，其中 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数，$e\in\mathfrak{g}$ 是幂零元。自 Premet 的工作 [Pr1]，以来，人们一直在深入研究有限 W-代数的表示理论（例如参见[BGK, GG, Lo1, Lo2, Lo3, Pr1, Pr2, Pr3, Pr4]）。尤其是，这些代数的有限维模受到了广泛关注。这主要是由于它们与 $U(\mathfrak{g})$的本原理想之间存在联系（例如参见 [Gi, Lo2, Lo3, Pr2, Pr3, Pr4]）。

有限 W-代数的构造自然地推广到超代数情形。人们已尝试研究与基本经典李超代数及 queer 李超代数中的正则偶幂零轨道相关联的有限W-超代数的表示理论，我们称之为主有限 W-超代数。

在 [BBG 中，定理 7.2、7.3], Brown、Brundan 和 Goodwin 描述了所有主有限 W- 超代数上的单模，其中 $\mathfrak{gl}(m|n)$。特别地，这些单模都是有限维的。Serganova 和 Poletaeva 在 [PS2、PS4] 中研究了与 queer 李超代数 $\mathfrak{q}(n)$ 相关的主有限 W-超代数。特别地，[PS4 中的定理 4.7、命题 4.13] 对这些单模进行了分类。因此，所有单模都被证明是有限维的。这由此导出了与 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 相关的移位 Yangian $Y(\mathfrak{gl}(1|1))$ 的不可约有限维模分类（参见 [BBG，定理 4.5]），以及与 $\mathfrak{q}(1)$ 相关的超 Yangian $YQ(1)$ 的不可约有限维模分类（参见 [PS2，定理 5.13]）。Peng 在 [Pe1、Pe2] 中研究了有限 W-超代数与超 Yangian 之间的联系。

在 [Ko2], 中，Kostant 建立了带有非奇异 ζ 的范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 与相应主有限 W-代数上的有限维模范畴之间的等价（另见 [MS2]）。在这种情况下，后者同构于 $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 的中心 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$。Skryabin 在 [Sk1] 中将 Kostant 的结果推广到了任意有限 W-代数；另见 [GG] 和引理 14。Losev 在 [Lo1] 中建立了 Skryabin 等价的一种推广，涉及有限 W-代数的范畴 $\mathcal{O}$。

Skryabin 等价的一个类似结果也适用于基本经典李超代数和 queer 李超代数；例如，参见 [Zh, Remarks 3.9-3.10], [ZS,Theorem 2.17] and [SW, Theorem 4.1]。然而，文献中似乎尚未阐明李超代数的范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 与主有限 W-超代数上的有限维模范畴之间的精确联系。

1.1.4. 目标。本文旨在研究 Whittaker 范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的若干方面。具体而言，本文尝试对任意特征 ζ 在 $\mathfrak{n}_{\bar{0}}$ 上的 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的积分块或任意强典型块中的简单 Whittaker 模进行分类，并为任意非奇异 $\zeta \in \mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}$，建立主有限 W-超代数上的有限维模范畴与范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 之间的 Skryabin型等价。

1.2. 主要结果。为更详细地说明本文内容，我们先回顾 Backelin 函子 $\Gamma_\zeta(-): \mathcal{O} \to \mathcal{N}(\zeta)$ 的超类比，该函子来自 [Ch1, 第 5 节。2], 它是 Backelin 原始函子的自然推广，原始函子见 [Ba] ，适用于约化李代数。给定一个模 $M \in \mathcal{O}$，令 $\overline{M}$ 表示M关于其权空间 $\overline{M} := \Pi_{\lambda\in\mathfrak{h}^*_{\bar{0}}} M_\lambda$ 的完备化。于是，$\Gamma_\zeta(M)$ 定义为$\mathfrak{g}$ $\overline{M}$的子模，由 M中所有满足以下条件的向量组成：对所有 $x \in \mathfrak{n}_{\bar{0}}$，$x - \zeta(x)$ 的作用都是幂零的。

假设 $\mathfrak{g}$ 是一个基本经典李超代数。我们的第一个主要结果是对 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中两类子范畴里的简单 Whittaker 模进行分类，下面对此作出说明。首先，我们考虑范畴 $\mathcal{N}(\zeta)_{\chi_\lambda}$，它由所有被强典型中心特征 χ_λ 的核的某个幂所湮灭的 Whittaker 模 $M \in \mathcal{N}(\zeta)$ 构成；这里的强典型中心特征取自 [Gor1] 的定义。接下来，对于给定的权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，我们考虑由 $\Gamma_\zeta(L(\mu))$ 的合成因子生成的 $\mathcal{N}(\zeta)_{\lambda+\Lambda}$ 的 Serre 子范畴（分别为 $\mathcal{N}$ 的 Serre 子范畴 $\mathcal{O}_{\lambda+\Lambda}$），其中 $L(\mu)$ 对应于 $\mu \in \lambda + \Lambda$（另见命题 8）；这里 $\Lambda \subseteq \mathfrak{h}^*$ 表示整权集合。

1.2.1. 简单 Whittaker 模的分类。对于任意 $\mu \in \mathfrak{h}^*$，我们将最高权为 μ 的 Verma 模记为 $M(\mu)$，并将其唯一的简单商记为 $L(\mu)$。$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群 W（它也是 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的 Weyl 群）通过两种点作用 $\cdot$ 和 $\circ$ 自然作用于 $\mathfrak{h}^*$；参见 (2.1)–(2.2)。我们的第一个主要结果如下。

定理 A（命题 5，定理 10）。设 $\mathfrak{g}$ 为任意基本经典李超代数。我们有

(1) 假设 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 是强典型的。那么集合 $\{\Gamma_\zeta(L(w \circ \lambda)) | \ w \in W\}$ 中的同构类构成了 $\mathcal{N}(\zeta)_{\chi_\lambda}$ 中简单模的完整列表。(2) 假设 $\nu \in \mathfrak{h}^*$ 满足：ν 关于 W 的点作用 $\cdot$ 是支配的，且其稳定子子群与 $W(\mathfrak{l}_\zeta)$ 重合。那么 Backelin 函子

$\Gamma_\zeta(-): \mathcal{O}_{\nu+\Lambda} \to \mathcal{N}(\zeta)_{\nu+\Lambda}$ 将简单模变为简单模或零。此外，集合

$$\{\Gamma_\zeta(L(\mu)) |\ \mu \in \Lambda(\nu)\}, \tag{1.3}$$

是 $\mathcal{N}(\zeta)_{\nu+\Lambda}$ 中一份穷尽的、两两不同构的简单 Whittaker 模列表。这里，$\Lambda(\nu)$ 表示权 $\mu \in \nu + \Lambda$ 的集合，其中每个非零根向量在任意简单根 α 对应的 $\mathfrak{l}_\zeta$ 中，都在 $L(\mu)$ 上自由作用。

我们指出，$\Lambda(\nu)$ 中权的显式描述可见于 [CCC，第 4 节。3]。定理 A 的第（2）部分将 $\mathfrak{g}$ 为 I 型的情形推广到了包括 $\mathfrak{p}(n)$ 在内的情况，参见 [Ch1，定理 20]；也将 $\mathfrak{l}_\zeta$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 [中的 Levi 子代数的情形推广到了 [CC1，定理 1]。不过，引文中这些情形下的结果适用于更一般的权。

在 [FM]，中，$\mathcal{O}$ Frisk 和 Mazorchuk 研究了 queer 李超代数 $\mathfrak{q}(n)$ 的范畴 $\mathcal{O}$ 中的正则强典型块，并证明这类块与 $\mathfrak{gl}(n)$ 对应的范畴 $\mathcal{O}$ 的块等价。借助这一等价，我们可以证明定理 A 第（2）部分针对 $\mathfrak{q}(n)$ 的类似版本；见附录 A。

1.2.2. Skryabin型等价。如上所述，与基本经典李超代数和 queer 李超代数相关的有限 W-超代数已得到研究。然而，据我们所知，文献中尚未研究与佩里普莱克蒂克李超代数 $\mathfrak{p}(n)$ 相关的有限 W-超代数版本。本文依照 Premet 的思路，构造与 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 中的幂零元 e 相关的主有限 W-超代数 W_ζ。随后，我们为佩里普莱克蒂克李超代数建立 Skryabin型等价。

为了更详细地阐述下一个主要结果，我们先回顾主有限 W-超代数的构造。设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典李超代数或奇异李超代数，即 $\mathfrak{p}(n)$ 或 $\mathfrak{q}(n)$，并给定一个主幂零元 $e \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，它属于一个 $\mathfrak{sl}(2)$-三元组 $\langle e, f, h\rangle$。由此得到 $\mathfrak{g}$ 中 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 内的幂零子代数 $\mathfrak{m}$，以及特征 $\zeta : \mathfrak{m} \to \mathbb{C}$；该特征定义了一个一维$\mathfrak{m}$-模 $\mathbb{C}_\zeta$，详见第 4.1、5.1 和 5.2 节。主有限 W-超代数 W_ζ 定义为广义 Gelfand-Graev 模 $Q_\zeta := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\zeta$ 的反向 $\mathfrak{g}$-自同态代数。令 Wh$\zeta(-)$ 表示取 Whittaker 向量的函子，即对于任意 $x \in \mathfrak{m}$，Wh$\zeta(M)$ 表示向量子空间，其中 $x - \zeta(x)$ 的作用平凡。根据 Skryabin 等价，这给出 $Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} -$ 和 Wh$\zeta(-)$ 之间的互逆等价，分别对应于 W_ζ-模范畴与 $\mathfrak{g}$-模范畴；在后者中，对于任意 $x \in \mathfrak{m}$，$x - \zeta(x)$ 的作用局部幂零。令W_ζ-fdmod 表示有限维 W_ζ-模范畴。我们的第二个主要结果如下。

定理 B（定理 16、22 和 25）。设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典李超代数或奇异型李超代数，并且 ζ 的定义如上。则 Whittaker 函子 Wh$\zeta(-)$ 限制后给出从 $\mathcal{N}(\zeta)$ 到 W_ζ-fdmod 的等价，其拟逆为$Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} (-)$。特别地，所有单的 W_ζ-模都是有限维的。

作为示例，考虑 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}(n)$，并令 $M(\lambda,\zeta)$ 表示 $\mathfrak{p}(n)$ 的标准 Whittaker 模。那么由定理 B 可得以下集合

$$\{\mathrm{Wh}_\zeta(M(\lambda,\zeta))|\ \lambda\in\mathfrak{h}^*\text{ is anti-dominant}\},$$

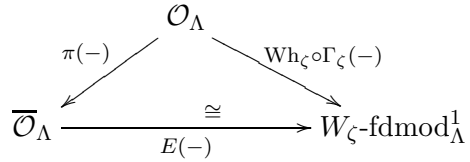
是 W_ζ 上两两不同构的单模的完整列表。特别地，它们都是有限维的。

我们指出，对于不同的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 和非奇异特征 η，Whittaker 范畴 $\mathcal{N}(\eta)$ 彼此等价；参见附录B。这使得我们可以将它们实现为 W_ζ 上有限维模的范畴 W_ζ-fdmod。

1.2.3. 从 $\mathcal{O}_\Lambda$ 到 W_ζ-fdmod 的 Whittaker 函子。Brundan 和 Goodwin [BGo] 为一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 构造了一个 Whittaker 余不变量函子 H_0，它是从 $\mathcal{O}_\Lambda$ 到 W_ζ-fdmod 的正合函子。这个函子具有与 Soergel 的组合函子 $\mathbb{V}$ 类似的性质，后者用于半单李代数的范畴 $\mathcal{O}$。此外，函子 $H_0:\ \mathcal{O}_\Lambda\to H_0(\mathcal{O}_\Lambda)$ 是 [Ga] 意义下某个 Serre 商函子的实现；参见 [BGo，定理 4.8]。Mazorchuk 和作者在 [CCM，注 46、推论 47] 中研究了一个更一般的版本，适用于 I 型李超代数。我们的第三个主要结果是进一步推广这一结果，将所有基本经典李超代数和奇异李超代数 $\mathfrak{p}(n)$ 及 $\mathfrak{q}(n)$ 纳入其中。

为更详细地说明这一点，令 $\nu\in\mathfrak{h}_{\bar0}^*$ 为一个整数权，使得 Weyl 群的点作用平凡。令 $M_0(\nu,\zeta)$ 表示由 (1.2) 给出的、相应的 $\mathfrak{g}_{\bar0}$ 上的标准 Whittaker 模。我们引入 W_ζ-fdmod 的全子范畴 W_ζ-fdmod$^1_\Lambda$，其定义为由 $\mathrm{Wh}_\zeta(\mathrm{Ind}(E\otimes M_0(\nu,\zeta)))$ 的子商模构成的 W_ζ-模范畴，其中 $\mathfrak{g}_{\bar0}$ 为任意有限维 $\mathfrak{g}_{\bar0}$-模。或者，W_ζ-fdmod$^1_\Lambda$ 等于 $\mathrm{Wh}_\zeta(\Gamma_\zeta(\mathcal{O}_\Lambda))$。令 $\overline{\mathcal{O}}_\Lambda$ 表示 $\mathcal{O}_\Lambda$ 的 Serre 商范畴（参见 [Ga，第 III 章]），其中的 Serre 子范畴由所有这样的单模 $L(\lambda)$ 生成：它们在 $\mathcal{O}_\Lambda$ 中的投射覆盖 $P(\lambda)$ 不是内射的。令 $\pi:\ \mathcal{O}_\Lambda\to\overline{\mathcal{O}}_\Lambda$ 为相应的 Serre 商函子（另见 [CCM，第 4 节.2]）。下述定理为从 $\mathcal{O}_\Lambda$ 到 W_ζ-fdmod$_\Lambda$ 的函子复合 $\mathrm{Wh}_\zeta\circ\Gamma_\zeta(-)$ 建立了一个类似 Soergel 结构定理的结果。

定理 C。函子 $\mathrm{Wh}_\zeta\circ\Gamma_\zeta(-):\ \mathcal{O}_\Lambda\to W_\zeta$-fdmod$^1_\Lambda$ 满足 $\mathcal{O}_\Lambda$ 关于由简单模 $L(\lambda)$ 生成的 Serre 子范畴的 Serre 商范畴的泛性质，其中这些简单模的投射覆盖不是内射的。这诱导出一个等价 E，使下图交换：



此外，$\mathrm{Wh}_\zeta\circ\Gamma_\zeta(-)$ 在 $\mathcal{O}_\Lambda$ 中的投射模上是满且忠实的。

定理 C 将 [CCM，注 46，推论 47]，的结论推广到所有基本经典和奇异李

超代数。$\mathcal{O}_\Lambda$ 中投射内射模的分类已由 [CCC，第 4 节。3] 给出。

值得指出的是，函子 $\mathrm{Wh}_\zeta \circ \Gamma_\zeta(-)$ 与 Soergel 在约化李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的范畴 $\mathcal{O}$ 中定义的组合函子 $\mathbb{V}$ from [So] 之间存在联系。后者在李代数表示理论中发挥着重要作用，是一个正合函子 $\mathbb{V}(-) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(\lambda)\ -)$，它将 $\mathcal{O}_\Lambda$ 中包含 $L(\lambda)$ 的块映到 W_ζ-fdmod。Backelin 在 [Ba, Corollary 5.4] 中首次证明，$\mathrm{Wh}_\zeta \circ \Gamma_\zeta(-)$ 与 $\mathbb{V}(-)$ 一致；另见 [AB, Proposition 2]。Arakawa 在 [A, Theorem 2.6.1] 中描述了这些函子之间的一个自然同构，并给出了这一结果的另一种证明。Mazorchuk 与作者独立地在 [CCM, Section 7.4.3, Section 9.2] 中发展了 Soergel 函子的超类比 $\mathbb{V}^{sup}$ $\mathbb{V}$，并证明它满足定理 C 中所述的相同泛性质。其中的论证可以推广到任意拟约化李超代数，包括约化李代数。因此，对于本文所研究的任意李超代数，函子 $\mathrm{Wh}_\zeta \circ \Gamma_\zeta(-)$ 都可以通过其目标范畴之间的一个等价，与超 Soergel 函子 $\mathbb{V}^{sup}$ 相对应。

1.3. 论文结构。本文安排如下。第 2 节介绍李超代数的一些背景知识。特别地，我们回顾 BGG 范畴 $\mathcal{O}$、Gorelik 关于强典型块的范畴等价，以及具有完整投射函子的范畴这一概念。第 3 节致力于证明定理 A。我们在第 3.2 节证明定理 A 的第 (1) 部分。第 3.3 节介绍 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的块分解。第 3.4 节汇集了范畴 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 与 $\mathcal{N}(\zeta)$ 之间联系所需的预备知识，并据此证明定理 A 的第 (2) 部分。

第 4 节介绍基本经典李超代数的有限 W-超代数。针对这一情形的定理 B 在定理 16 中得到证明。我们在第 5 节给出 $\mathfrak{p}(n)$ 的主有限 W-超代数的定义。定理 B 针对 $\mathfrak{q}(n)$ 和 $\mathfrak{p}(n)$ 的证明分别见第 5.1.1 节和第 5.2.2 节。第 6.1 节介绍 W_ζ-fdmod 的块分解。第 6 节讨论定理 B 的一些推论，并给出定理 C 的证明。在附录 A 中，我们为 $\mathfrak{q}(n)$ 建立了定理 A 第 (2) 部分的类似结论，并以此完成该情形下定理 C 的证明。最后，我们在附录 B 中证明，针对不同 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$和特征 $\zeta \in \mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}$，$\mathcal{N}(\zeta)$ 的 Whittaker 范畴之间存在等价。由此，我们可以将范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 实现为任意非奇异特征 $\zeta \in \mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}$ 下 $\mathfrak{g}$ 的主有限 W-超代数上的有限维模范畴。

致谢。作者的部分研究经费来自中华民国国家科学及技术委员会的补助，并谨此感谢国家理论科学研究中心的支持。我们感谢 Yang Zeng 提供宝贵的讨论意见。

2. Preliminaries

2.1. Weyl 群与权。我们分别用 Φ^+ 和 Φ^- 表示对应于 $\mathfrak{b}$ 的正根集和负根集。偶根集和奇根集分别记为 $\Phi_{\bar{0}}$ 和 $\Phi_{\bar{1}}$；类似地，偶正根、偶负根、奇正根和奇负根分别记为 $\Phi_{\bar{0}}^{\pm}$、$\Phi_{\bar{1}}^{\pm}$。Φ 和 $\Phi_{\bar{0}}$ 中的单正根子集分别记为 Π 和 $\Pi_{\bar{0}}$。一般而言，我们有 $\Pi_{\bar{0}} \neq \Pi \cap \Phi_{\bar{0}}$。

W 的 Weyl 群定义为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群，并赋予其在 $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$上的定义作用。我们将 W 在 $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 上的两种点作用定义如下。

$$w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho_{\bar{0}}) - \rho_{\bar{0}}, \tag{2.1}$$

$$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho, \tag{2.2}$$

对于任意 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$。其中 $\rho_{\bar{0}} := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi_{\bar{0}}^+}\alpha$，$\rho := \frac{1}{2}(\sum_{\alpha\in\Phi_{\bar{0}}^+}\alpha - \sum_{\beta\in\Phi_{\bar{1}}^+}\beta)$。

在全文中，我们固定 $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 上的一个非退化 W-不变双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，并假设若 $\mathfrak{g}$ 上存在偶非退化不变超对称双线性型，则该形式由其诱导。对于给定的 $\alpha \in \Phi_{\bar{0}}^+$，令 $\alpha^\vee = 2\alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$。

$\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 中的一个权称为整、正则、支配或反支配权，当且仅当它作为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-权时分别是整、正则、支配或反支配的。用 Λ 表示所有整权的集合。

2.2. 表示范畴。

2.2.1. 中心块、诱导与限制函子。我们用 $U(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$的泛包络代数，用 $Z(\mathfrak{g})$ 表示 $U(\mathfrak{g})$ 的中心。令 $\mathfrak{g}$-Mod 和 $\mathfrak{g}$-mod 分别表示所有 $\mathfrak{g}$-模和有限生成 $\mathfrak{g}$-模所成的范畴。用 $\mathfrak{g}$-mod$^{Z(\mathfrak{g})}$ 表示 $\mathfrak{g}$-mod 的全子范畴，其中 $Z(\mathfrak{g})$ 的作用是局部有限的。对于中心特征 $\chi: Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ 和 $\chi^0: Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \to \mathbb{C}$，我们用 $\mathfrak{g}$-mod$_\chi$ 和$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-mod$_{\chi^0}$ 表示 $\mathfrak{g}$-mod$^{Z(\mathfrak{g})}$ 和 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-mod$^{Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})}$中被 ker($\chi$) 和 ker($\chi^0$) 的某些幂湮灭的对象所成的全子范畴。函子 (–)$_\chi$ 作用于 $\mathfrak{g}$-mod$^{Z(\mathfrak{g})}$，定义为取块 $\mathfrak{g}$-mod$_\chi$中的最大直和项。对于给定的权 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$，我们用 χ_λ（分别用 χ_λ^0）表示与λ相关联的 $\mathfrak{g}$（分别为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$）的中心特征。

对于子代数 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$，我们用 Res$_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}}$ 表示从 $\mathfrak{g}$-mod 到 $\mathfrak{s}$-mod 的限制函子。它有一个左伴随函子 Ind$_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{s})} (–) : \mathfrak{s}$-mod $\to \mathfrak{g}$-mod。若 $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{s}$，则 Ind$_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}}$ 也是 Res$_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}}$ 的右伴随，差别仅在于张量积一个一维 $\mathfrak{s}$-模；例如参见 [BF，定理 2.2] 和 [Gor2，第 2.3.5] 节。最后，我们定义 Ind := Ind$_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}$ 和 Res := Res$_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}^{\mathfrak{g}}$。

若有限维李超代数 $\mathfrak{g}$ 具有形如 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 的 $\mathbb{Z}_2$-相容 $\mathbb{Z}$-分次，且满足 $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$，则称其为 I 型。这包括约化李代数，并且

$$\mathfrak{gl}(m|n),\ \mathfrak{sl}(m|n),\ \mathfrak{psl}(n|n),\ \mathfrak{osp}(m|2n),\ \mathfrak{p}(n). \tag{2.3}$$

在此情况下，对于任意 $N \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模，我们都可以将 N 平凡地扩张为 $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$-模，并定义 Kac $\mathfrak{g}$-模 $K(M) :=$ 诱导$_{\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1}^{\mathfrak{g}}(M)$。这定义了正合的 Kac 函子$K(–)$: $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模 $\to \mathfrak{g}$-模。

2.2.2. Gorelik 等价。假设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典的。若一个权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 满足：对于任意各向同性根 $\beta \in \Phi_{\bar{1}}^+$，都有 $\langle \lambda+\rho, \beta\rangle \neq 0$，则称其为典型权；否则称为非典型权。若一个权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 满足：对于任意奇根 $\beta \in \Phi_{\bar{1}}^+$，都有 $\langle \lambda+\rho, \beta\rangle \neq 0$，则称其为强典型权（见 [Gor1]）。若 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{osp}(2n+1|2m)$ $G(3)$，则典型权与强典型权相同。

对于给定的中心特征 $\chi: Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$，相应的分块 $\mathfrak{g}\text{-mod}_\chi$ 称为强典型的，如果对于某个强典型权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，有 $\chi = \chi_\lambda$。Gorelik 在 [Gor1] 中证明，每个强典型分块 $\mathfrak{g}\text{-mod}_\chi$ 都等价于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-mod 中的一个分块。更准确地说，对于给定的强典型中心特征 $\chi: Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$，存在一个 [Gor1], 意义下的完美伴侣，即一个中心特征 $\chi^0: Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \to \mathbb{C}$，使得 $\mathfrak{g}\text{-mod}_\chi$ 与 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-mod}_{\chi^0}$ 等价。

引理 1（Gorelik）。设 χ 为具有完美伴侣 χ^0 的强典型中心特征。以下函子

$$\mathrm{Res}(-)_{\chi^0},\ \mathrm{Ind}(-)_\chi, \tag{2.4}$$

give 得到中心块 $\mathfrak{g}\text{-mod}_\chi$ 与 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-mod}_{\chi^0}$ 之间的互逆等价 .

假设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典型或 queer 型。按照 [MM 第 5 节，3], 若权 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 满足：λ 是强典型的，并且相对于 W 的点作用是正则且支配的；此外，Res $M(\lambda)$ 是 Verma 模的直和，且 Res $M(\lambda)$ 中对应于不同中心特征的直和项两两不同构，则称权 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 为一般权。

2.2.3. BGG 范畴 $\mathcal{O}$。与 (1.1) 中的三角分解相关联的范畴 $\mathcal{O}$ 定义为 $\mathfrak{g}$-模的全子范畴，它由所有有限生成的 $\mathfrak{g}$-模构成；在这些模上，$\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ 半单作用，而 $\mathfrak{b}$ 局部有限作用。

设 $M(\lambda)$ 为相对于三角分解 (1.1) 的最高权为 λ 的 Verma 模，$L(\lambda)$ 为其唯一的简单商。$L(\lambda)$ 在 $\mathcal{O}$ 中的不可分解投射覆盖记作 $P(\lambda)$。我们将 $\mathcal{O}^{\bar{0}}$ 记为按 [BGG] 意义下的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的 BGG 范畴。类似地，最高权为 λ 的 Verma 模、其简单商及投射覆盖分别记作 $M_0(\lambda)$、$L_0(\lambda)$ 和 $P_0(\lambda)$。

我们将 $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}$ 的有限维模的全子范畴定义为 $\mathcal{F}$。在 $\mathfrak{g}$-模$^{Z(\mathfrak{g})}$ 上，一个投射函子是指形如 $V \otimes -$的函子的直和项，其中 $V \in \mathcal{F}$。我们将投射函子范畴记为 $\mathcal{P}roj$。对于半单李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$的情形，Bernstein 和 Gelfand [BG]研究了投射函子。

令 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 为一个一般权；参见第 2.2.2 节。回忆一下，$\mathcal{O}_{\lambda+\Lambda}$ 表示由权属于 $\lambda+\Lambda$. 的模所组成的 $\mathcal{O}$ 的块。根据 [MM，定理 5.1]，三元组（$\mathcal{O}_{\lambda+\Lambda}$、$M(\lambda)$、$\mathcal{P}roj$）构成一个具有完备投射函子的范畴，其意义见 [Kh，定义 1]；另见 [MM，第 3] 节。

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathfrak{g}\text{-mod}^{Z(\mathfrak{g})}$ 的一个在投射函子作用下保持不变的满阿贝尔子范畴。按照 [MM 第 3.3], 节，若对每个 $T \in \mathcal{P}roj$，都存在一个同构 $\kappa_T: T \circ F \to F \circ T$，使得对于任意投射函子之间的自然变换 $\gamma: T \to T'$，函子 $F: \mathcal{O}_{\lambda+\Lambda} \to \mathcal{C}$ 都称为与投射函子函子性地交换

如下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc} T\circ F & \xrightarrow{\gamma_F} & T'\circ F \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_T} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{T'}} \\ F\circ T & \xrightarrow{F(\gamma)} & F\circ T' \end{array}$$

下面这个取自 [CCM] 的引理是 [Kh，命题的推论 4].

引理 2。（[CCM，引理 1]）设 λ 和 $\mathcal{C}$ 如上。假设 F_1、F_2：$\mathcal{O}_{\lambda+\Lambda}\to\mathcal{C}$ 是两个与投射函子自然交换的正合函子。那么当且仅当 $F_1\cong F_2$ $F_1(M(\lambda))\cong F_2(M(\lambda))$。

3. Blocks and simple objects in $\mathcal{N}(\zeta)$

本节中，除非另有说明，我们假设 $\mathfrak{g}$ 要么是基本经典型，要么是奇异型。对于 $\mathfrak{g}$ 的给定中心特征 χ，我们将 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中对应于 χ 的中心块记为 $\mathcal{N}(\zeta)_\chi$，也就是说，它是 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的 Serre 子范畴，由被 $\ker(\chi)$ 的某个幂湮灭的对象组成。我们将 $\mathcal{N}_0$ 和 $\mathcal{N}_0(\zeta)$ 记为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模的相应 Whittaker 范畴。类似地，对于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的给定中心特征 χ^0，我们在 $\mathcal{N}_0(\zeta)$ 中定义中心块 $\mathcal{N}_0(\zeta)_{\chi^0}$。

3.1. $\Gamma_\zeta(L(\mu))$ 的模。对于任意 $\lambda\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$，回顾一下，我们将 (1.2) 中 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 上的标准 Whittaker 模记为 $M_0(\lambda,\zeta)$，将 $M_0(\lambda,\zeta)$ 的单顶记为 $L_0(\lambda,\zeta)$。回顾一下，Π_ζ 表示 $\mathfrak{l}_\zeta$ 中简单根的集合。令 $\Gamma_\zeta^0(-):\mathcal{O}^{\bar{0}}\to\mathcal{N}_0(\zeta)$ 表示从 [Ba] 到 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$- 模范畴的 Backelin 函子。由 [Ba，命题 6.9], ，我们有

$$\Gamma_\zeta^0(M_0(w\cdot\lambda))=M_0(\lambda,\zeta),\ \text{for any } w\in W(\mathfrak{l}_\zeta);$$
$$\Gamma_\zeta^0(L_0(\lambda))=\begin{cases} L_0(\lambda,\zeta), & \text{if } \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{for any } \alpha\in\Pi_\zeta;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Backelin 结果向李超代数的推广可见于 [Ch1，定理20] 和 [CC1，命题 4，定理 6]。

根据定义以及 [AB，命题 3], 的证明，我们有

$$\mathrm{Res}(\Gamma_\zeta(M))\cong\Gamma_\zeta^0(\mathrm{Res}(M)),$$
$$\mathrm{Ind}(\Gamma_\zeta^0(N))\cong\Gamma_\zeta(\mathrm{Ind}(N)),$$

对于任意 $M\in\mathcal{O}$ 和 $N\in\mathcal{O}^{\bar{0}}$；另见 [Ch1，定理 20] 的证明。

若对于每个 $\alpha\in\Pi_\zeta$，$\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{-\alpha}$ 的每个非零向量都在 $L(\lambda)$ 上自由作用，则称单模 $L(\lambda)$ 是 Π_ζ- 自由的。对于整权，Π_ζ- 自由单模的分类见 [CCC，第 4 节 .2]。由 [Ba，命题 6.9] 可得

$$\Gamma_\zeta(L(\lambda))\neq 0\Leftrightarrow\Gamma_\zeta^{\bar{0}}(\mathrm{Res}\,L(\lambda))\neq 0\Leftrightarrow\ L(\lambda)\text{ is }\Pi_\zeta\text{-free.}$$

引理 3. 设 χ 是 $\mathfrak{g}$ 的中心特征。设 S 是 $\mathcal{N}(\zeta)_\chi$ 中的单模。则对于某个 Π_ζ-自由权 $\lambda\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$，满足 $\chi_\lambda=\chi$，S 是 $\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 的商模。

证明。由于 Res $S \in \mathcal{N}_0(\zeta)$，可知 Res S 中存在一个 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-子模，同构于 $L_0(\mu,\zeta)$，其中 $\mu \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$。由伴随性，$S$ 是 Ind $L_0(\mu,\zeta)$ 的商模，后者同构于 Γ_ζ(Ind $L_0(\mu)$)。由于 $\Gamma_\zeta\colon \mathcal{O} \to \mathcal{N}(\zeta)$ 是正合的，因此对于 Ind $L_0(\mu)$ 的某个合成因子 $L(\lambda)$，S 是 $\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 的商模。□

设 $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ 为 Π_ζ-自由。自然会问，$\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 是否总是单的。以下列出一些已知结果：

- 根据 [Ba 命题 6.9] 和 [Ch1 定理 20]，只要 $\mathfrak{g}$ 是 I 型的，$\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 就总是单的。在这种情况下，$\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 同构于标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta)$ 的顶端：$= K(M_0(\lambda,\zeta))$，我们将其记为 $L(\lambda,\zeta)$。
- 根据 [CC1 定理 6]，若 $\mathfrak{l}_\zeta$ 按照 [M] 的意义是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数，则 $\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 是单的。关于 $\mathfrak{l}_\zeta$ 不是 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数时的情形，参见 [Ch1 第 3.3] 节。本例中类似地，$\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 同构于标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta)$ 的顶端 $L(\lambda,\zeta)$，该模的定义方式与 (1.2) 类似。

在上述两种情况下，权 $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ 是 Π_ζ-自由的，当且仅当 λ 限制到 $[\mathfrak{l}_\zeta,\mathfrak{l}_\zeta]$上时是反主导权。此外，我们有

$$L(\lambda,\zeta) \cong L(\mu,\zeta) \Leftrightarrow M(\lambda,\zeta) \cong M(\mu,\zeta) \Leftrightarrow W(\mathfrak{l}_\zeta)\cdot\lambda = W(\mathfrak{l}_\zeta)\cdot\mu.$$

更多细节请参阅 [Ch1，定理 6] 。

3.2. $\mathcal{N}(\zeta)$ 的强典型块。在本小节中，我们假设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典的。

命题 4. 假设 $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ 是一个具有完美伴侣 χ^0 的强典型中心特征。函子

$$\mathrm{Res}(-)_{\chi^0},\ \mathrm{Ind}(-)_{\chi}, \tag{3.1}$$

引理 1 中给出的限制为中心块$\mathcal{N}(\zeta)_\chi$与 $\mathcal{N}_0(\zeta)_{\chi^0}$之间的互逆等价。

证明。由于函子 Res(–)、Ind(–)、(–)$_{\chi^0}$ 和 (–)$_\chi$ 是 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{N}_0$ 之间定义良好的函子（参见 [Ch1，引理 3]），结论由引理 1 得出。□

命题 5. 假设 λ 是强典型且支配的，并且 $\chi := \chi_\lambda$。那么，集合 $\{\Gamma_\zeta(L(w\circ\lambda)) \mid w \in W\}$ 中的同构类构成 $\mathcal{N}(\zeta)_\chi$ 中简单模的一个完备列表。

此外，若令 $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$ 满足 $\chi^0 = \chi^0_{\lambda'}$ 是 χ 的完美伴侣，且 $M_0(\lambda')$ =限制$(M(\lambda))_{\chi^0}$，那么对于任意 $\mu = w\circ\lambda$、$\mu' = w'\circ\lambda \in W\circ\lambda$，我们有

$$\Gamma_\zeta(L(\mu)) \cong \Gamma_\zeta(L(\mu')) \Leftrightarrow W(\mathfrak{l}_\zeta)w\cdot\lambda' = W(\mathfrak{l}_\zeta)w'\cdot\lambda'.$$

证明. 引理 1 中的等价关系 限制(–)$_{\chi^0}$、诱导(–)$_\chi$，在 $\mathfrak{g}$-模$_\chi$ 与 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模$_{\chi^0}$ 之间，由命题 4 可限制为 $\mathcal{N}(\zeta)_\chi$ 与 $\mathcal{N}_0(\zeta)_{\chi^0}$ 之间的等价关系。我们计算

$$\Gamma_\zeta(L(w\circ\lambda)) \cong \Gamma_\zeta(\mathrm{Ind}\, L_0(w\cdot\lambda')_\chi) \cong \left(\mathrm{Ind}\,\Gamma^0_\zeta L_0(w\cdot\lambda')\right)_\chi,$$

对于某个 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-权 $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$，使得 $M_0(\lambda')$ = 限制$(M(\lambda))_{\chi^0}$，其中 $\chi^0 = \chi^0_{\lambda'}$（参见 [Co，引理 3.1]）。由于 $\Gamma^0_\zeta(L_0(w\cdot\lambda'))$ 是 $\mathcal{N}_0(\zeta)_{\chi^0}$ 中的一个简单对象，我们由引理

1 得出，$\left(\text{诱导 } \Gamma_\zeta^0 L_0(w\cdot\lambda')\right)_\chi$ 是单的，因此 $\Gamma_\zeta(L(w\circ\lambda))$ 是单的。最后，令 $\mu = w\circ\lambda, \mu' = w'\circ\lambda$，其中 $w, w'\in W$。由于 $L(\mu)\cong$诱导$(L_0(w\cdot\lambda'))_\chi$，$L(\mu')\cong$诱导$(L_0(w'\cdot\lambda'))_\chi$（例如参见 [Co，引理 3.1]），可得

$$\Gamma_\zeta(L(\mu))\cong\Gamma_\zeta(L(\mu'))\Leftrightarrow\Gamma_\zeta^0(L_0(w\cdot\lambda'))\cong\Gamma_\zeta^0(L_0(w'\cdot\lambda')),$$

这等价于 $W(\mathfrak{l}_\zeta)w\cdot\lambda' = W(\mathfrak{l}_\zeta)w'\cdot\lambda'$根据 [MS1, 命题 2.1]。 □

例 6. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(m|n)$ 或 $\mathfrak{osp}(2|2n)$，且具有典型权 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$。则有$K(L_0(\lambda)) = L(\lambda)$。在这种情况下，$K(L_0(\lambda,\zeta))\cong\Gamma_\zeta(L(\lambda))$，因为 $\Gamma_\zeta(-)$ 与$K(-)$交换。

3.3. $\mathcal{N}(\zeta)$的分解。本节致力于对$\mathcal{N}$进行块分解，其中$\mathcal{N}$对应任意拟约化李超代数。下面的引理是[Mc1, 命题 1.9]的推论；另见 [MS1, 第 5] 节以及 [Br, 命题 2.2.2]。

Lemma 7. 设 $M\in\mathcal{N}(\zeta)$。则 M在 $Z(\mathfrak{l}_\zeta)$上局部有限。特别地，我们有

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{l}_\zeta} M=\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*} M_{\chi_\lambda^{\mathfrak{l}_\zeta}},$$

其中，$M_{\chi_\lambda^{\mathfrak{l}_\zeta}}$ 被 $\lambda\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 的某个 $\chi_\lambda^{\mathfrak{l}_\zeta}$ 的幂所湮灭。

Let $\mathbb{Z}\Phi$ 表示 $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$中 Φ 的 $\mathbb{Z}$-张成空间。我们在 $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 上定义等价关系 $\sim$，其定义为

$$\lambda\sim\mu\ \Leftrightarrow\ \lambda-w\cdot\mu\in\mathbb{Z}\Phi,\ \text{for some } w\in W(\mathfrak{l}_\zeta). \tag{3.2}$$

此外，我们有

命题 8. 设 $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$。设 S_λ 和 S_μ 分别为 $\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 和 $\Gamma_\zeta(L(\mu))$ 的简单商。若 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{N}(\zeta)}(S_\lambda,S_\mu)\neq 0$，则有 $\lambda\sim\mu$。

证明。令

$$0\to S_\mu\to E\to S_\lambda\to 0,$$

是 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中一个非平凡的短正合列。设 $L_0(\lambda',\zeta)$ 和 $L_0(\mu',\zeta)$ 分别是限制 S_λ 和限制 S_μ 的单子模。则 $\mu'\sim\mu$, $\lambda'\sim\lambda$。

根据引理 7，E 分解为 $E=\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*} E_{\chi_\lambda^{\mathfrak{l}_\zeta}}$。因此，我们有 $E_{\chi_{\lambda'}^{\mathfrak{l}_\zeta}}$，$E_{\chi_{\mu'}^{\mathfrak{l}_\zeta}}\neq 0$，因为 $L_0(\lambda',\zeta)$ 和 $L_0(\mu',\zeta)$ 分别是 $M_0(\lambda',\zeta)$ 和 $M_0(\mu',\zeta)$ 的商模。

根据我们的假设，我们有

$$(U(\mathfrak{g})E_{\chi_{\mu'}^{\mathfrak{l}_\zeta}})\cap(U(\mathfrak{g})E_{\chi_{\lambda'}^{\mathfrak{l}_\zeta}})\neq 0.$$

现在，我们回顾 Kostant [Ko1] 的一个结果：对于任意有限维 $\mathfrak{l}_\zeta$-模 V，我们有

$$V\otimes E_{\chi_{\mu'}^{\mathfrak{l}_\zeta}}\subseteq\bigoplus_\gamma E_{\chi_{\mu'+\gamma}^{\mathfrak{l}_\zeta}},$$

其中 γ 遍历 V 的所有权。由于 $U(\mathfrak{g})$ 在伴随作用下是有限维$\mathfrak{l}_\zeta$-模的直和，我们有

$$U(\mathfrak{g})E_{\chi_{\mu'}^{\mathfrak{l}_\zeta}}\subseteq\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}\Phi} E_{\chi_{\mu'+\gamma}^{\mathfrak{l}_\zeta}}.$$

类似地，我们有 $U(\mathfrak{g})E^{\mathfrak{l}_\zeta}_{\chi_{\lambda'}} \subseteq \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}\Phi} E^{\mathfrak{l}_\zeta}_{\chi_{\lambda'+\gamma}}$.这意味着对于某个 $w \in W(\mathfrak{l}_\zeta)$，有 $\lambda' - w\mu' \in \mathbb{Z}\Phi$。因此，我们有 $\lambda \sim \mu$。□

我们有 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的如下块分解：

$$\mathcal{N}(\zeta) = \bigoplus_{\Upsilon\in\mathfrak{h}_0^*/\sim} \mathcal{N}(\Upsilon,\zeta), \tag{3.3}$$

其中， $\mathcal{N}(\Upsilon,\zeta)$ 是由形如 $\Gamma_\zeta(L(\lambda))$ 的模的合成因子生成的 Serre 子范畴，其中某个 $\lambda \in \Upsilon$.

对于给定的中心特征 $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$，回忆一下， $\mathcal{N}(\zeta)_\chi$ 表示相应的中心块。因此我们有如下分解

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{\zeta}\mathcal{N}(\zeta) = \bigoplus_{\zeta,\chi}\mathcal{N}(\zeta)_\chi = \bigoplus_{\zeta,\chi,\Upsilon}\mathcal{N}(\Upsilon,\zeta)_\chi, \tag{3.4}$$

其中 $\mathcal{N}(\Upsilon,\zeta)_\chi := \mathcal{N}(\Upsilon,\zeta) \cap \mathcal{N}(\zeta)_\chi$· 在下面的命题 32 中，我们将证明，当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m|n)$ 时，式 (3.4) 中的所有直和项都是不可分解的，对任意 $\Upsilon \in \mathfrak{h}^*/\sim$。

3.4. 余核范畴 $\mathcal{O}^{\nu\text{-pres}}_{\nu+\Lambda}$ 和 $\mathcal{W}(\zeta)$。本节中，我们固定一个占优权 $\nu \in \mathfrak{h}_0^*$，使得

$$W(\mathfrak{l}_\zeta) = \{w \in W |\ w\cdot\nu = \nu\}.$$

回忆一下， $\Lambda(\nu)$表示满足以下条件的权集： $\mu \in \nu+\Lambda$，使得 $L(\mu)$ 是 Π_ζ-自由的。回忆一下， $\mathcal{N}(\zeta)_{\nu+\Lambda}$ 表示由 $\Gamma_\zeta(L(\mu))$ 的合成因子生成的 $\mathcal{N}$ 的 Serre 子范畴，其中 $\mu \in \nu+\Lambda$。由 (3.3) 可得 $\mathcal{N}(\zeta)_{\nu+\Lambda} = \bigoplus_{\Upsilon\in\nu+\Lambda/\sim}\mathcal{N}(\Upsilon,\zeta)$。

给定一个 $\mathfrak{g}$-模 M，我们用 $\mathrm{coker}(\mathcal{F}\otimes M)$ 表示 M 的余核范畴，也就是说，$\mathrm{coker}(\mathcal{F}\otimes M)$ 是所有具有如下形式表示的 $\mathfrak{g}$-模 N 所构成范畴的全子范畴

$$X \to Y \to N \to 0,$$

其中， X 和 Y同构于某个有限维权 $\mathfrak{g}$-模 E 的直和项 $E\otimes M$；参见例如 [ChM，第 7.1] 节。

我们如下定义 $\mathfrak{g}$-模的两个余核范畴。首先，我们定义

$$\mathcal{O}^{\nu\text{-pres}}_{\nu+\Lambda} := \mathrm{coker}(\mathcal{F}\otimes \mathrm{Ind}\, M_0(\nu)).$$

更多细节请参见 [Ch2，引理 20] 和 [CCM，第 4] 节。特别地，$\mathcal{O}^{\nu\text{-pres}}_{\nu+\Lambda}$ 是由满足如下形式的两步表示 $P_2 \to P_1 \to M \to 0$ 的模 M 组成的 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 的全子范畴，其中 P_1、P_2 是$\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 中的投射模，并且 P_1 或 P_2 的任意简单商都具有形式 $L(\mu)$，其中 $\mu \in \Lambda(\nu)$。此外，根据 [Ga 第 III 章],的定义，通过与 Serre 商范畴 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}/\mathcal{I}_\nu$ 的等价，$\mathcal{O}^{\nu\text{-pres}}_{\nu+\Lambda}$ 具有阿贝尔范畴的结构，其中 $\mathcal{I}_\nu$ 是由所有满足 $\mu \in \nu+\Lambda$ 且 $\mu \notin \Lambda(\nu)$ 的简单模 $L(\mu)$ 生成的 Serre 子范畴；参见[CCM，引理 12]。

沿用 [CCM 第 4.4 节的做法，3], 我们定义 $\mathcal{W}_\nu(\zeta)$ 为 $\mathcal{N}(\zeta)_{\nu+\Lambda}$ 的一个全子范畴，如下：

$$\mathcal{W}_\nu(\zeta) := \mathrm{coker}(\mathcal{F}\otimes \mathrm{Ind}\, M_0(\nu,\zeta)).$$

我们指出， $\mathcal{W}_\nu(\zeta)$ 有一个内在定义，详见 [Ch1 第 4 节1]。

定义函子 $F_\nu(-):\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}\to\mathcal{N}(\zeta)$ 如下

$$F_\nu(-):=\mathcal{L}(M_0(\nu),-)\otimes_{U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})}M_0(\nu,\zeta):\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}\to\mathcal{N}(\zeta), \tag{3.5}$$

其中 $\mathcal{L}(M_0(\nu)\ X)\ (X\in\mathcal{O}_{\nu+\Lambda})$ 是（$\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{\bar{0}}$）-双模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_0(\nu)\ X)$ 的极大（$\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{\bar{0}}$）-子模，它是有限维 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模关于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的伴随作用的直和；例如参见 [CCM，第 4.3] 节。于是，$F_\nu(-)$ 是一个正合函子，并且根据 [Ch2，定理 26]，它与投射函子函子性地交换。另见 [CCM，第 7.3.1]，节，其中讨论了 I 型李超代数的情形。以下命题引自 [Ch2，定理 19, 26]（另见 [CC1，第 7.1] 节）：

命题 9. 对于任意拟约化李超代数 $\mathfrak{g}$，函子 $F_\nu(-)$ 限制后给出一个保消灭子的等价，将 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}^{\nu\text{-pres}}$ 映至 $\mathcal{W}_\nu(\zeta)$。特别地，有以下结论：

(1) 对于任意 $\mu\in\nu+\Lambda$，有

$$F_\nu(L(\mu))\ is\ simple\ \Leftrightarrow F_\nu(L(\mu))\neq 0\Leftrightarrow\mu\in\Lambda(\nu). \tag{3.6}$$

(2) 对于任意 μ， $\mu'\in\Lambda(\nu)$，有

$$F_\nu(L(\mu))\cong F_\nu(L(\mu'))\Leftrightarrow\mu=\mu' \tag{3.7}$$

范畴 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}^{\nu\text{-pres}}$ 等价于 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}/\mathcal{I}_\nu$ （参见 [CCM，引理 12]）。根据 [CCM，定理 37],，函子 $F_\nu(-):\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}\to\mathcal{N}(\zeta)$ 满足 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 关于 $\mathcal{I}_\nu$ 的 Serre 商范畴的泛性质，其中 $\mathcal{I}_\nu$ 是 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 的 Serre 子范畴；此处的意义参见 [Ga，推论 III.1.2 和 III 1.3],，并且目标范畴 $\mathcal{W}_\nu(\zeta)=F_\nu(\mathcal{O}_{\nu+\Lambda})$ 与 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}/\mathcal{I}_\nu$ 之间存在等价。也就是说，若 $E(-):\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}\to\mathcal{N}(\zeta)$ 是一个正合函子，且对于任意 $\mu\notin\Lambda(\nu)$，都有 $E(L(\mu))=0$，那么存在唯一的正合函子 $E':\mathcal{W}_\nu(\zeta)\to\mathcal{N}(\zeta)$，使得 $E=E'\circ F_\nu$。以下是本小节的主要结果。

定理 10. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个基本经典李超代数。函子 $\Gamma_\zeta(-)\ \ F_\nu(-):\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}\to\mathcal{N}(\zeta)$ 同构，并满足 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 对 Serre 子范畴 $\mathcal{I}_\nu$的 Serre 商范畴的泛性质，差一个 $\mathcal{W}_\nu(\zeta)$ 与$\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}/\mathcal{I}_\nu$ 之间的等价。特别地，对于任意 $\mu\in\nu+\Lambda$ ，我们有

$$\Gamma_\zeta(L(\mu))\ is\ simple\ \Leftrightarrow\Gamma_\zeta(L(\mu))\neq 0\Leftrightarrow\mu\in\Lambda(\nu).$$

此外，集合

$$\{\Gamma_\zeta(L(\mu))|\ \mu\in\Lambda(\nu)\}$$

是一个穷尽列表,其中包含 $\mathcal{N}(\zeta)_{\nu+\Lambda}$中的两两不同构的简单 Whittaker 模。

证明. 我们将改编 [CCM，推论 38] 和 [CC1，推论29] 中所用的论证，以证明 $\Gamma_\zeta(-)\ \ F_\nu(-):\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}\to\mathcal{N}(\zeta)$ 同构。

首先，令 $\lambda\in\nu+\Lambda$ 为一般权；参见第 2.2.2 节。特别地，相应的中心特征 χ_λ 是强典型的，并且存在某个占优权 λ'，使其具有完美伴侣 $\chi_{\lambda'}^0$。由引理 5 和 [Co，引理 3.1]，可得

诱导 $M_0(\lambda')_{\chi_\lambda} = M(\lambda)$。因此，我们有

$$\Gamma_\zeta(M(\lambda)) \cong \Gamma_\zeta(\operatorname{Ind} M_0(\lambda'))\chi \cong \operatorname{Ind}\Gamma_\zeta^0(M_0(\lambda'))_\chi \cong$$
$$\operatorname{Ind} F_\nu^0(M_0(\lambda'))_\chi \cong F_\nu(\operatorname{Ind} M_0(\lambda'))_\chi \cong F_\nu(M(\lambda)).$$

这里， F_ν^0表示（3.5）中连接相应的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模范畴的函子。由于 $\Gamma_\zeta(-)$ 和 $F_\nu(-)$ 都与投射函子函子性地交换，根据引理 2，我们有作为从 $\mathcal{O}_{\lambda+\Lambda} = \mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$到 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的函子。现在由命题 9 即可得到该定理。□

3.5. 扩张满性。令 $\iota: \mathcal{N} \to \mathfrak{g}$-Mod 为自然嵌入函子。则$\iota$ 诱导一个扩张群同态。

$$\iota^d_{M,N}: \operatorname{Ext}^d_{\mathcal{N}}(M,N) \to \operatorname{Ext}^d_{\mathfrak{g}\text{-Mod}}(M,N), \tag{3.8}$$

对每个 M、$N \in \mathcal{N}$ 和 $d \geq 0$ 都成立。以下引理取自 [CoM，定理 2]。

引理 11（Coulembier-Mazorchuk）。假设 $\mathfrak{g}$ 是约化李代数。那么对于任意 M、$N \in \mathcal{N}$ 和 $d \geq 0$, $\iota^d_{M,\ N}$ 是同构。特别地， $\mathcal{N}$ 是 $\mathfrak{g}$-Mod 的 Serre 子范畴。

设 M 是一个 $\mathfrak{g}$-模。根据定义，当且仅当 $\operatorname{Res} M \in \mathcal{N}_0$ 时， $M \in \mathcal{N}$。我们有以下有用的推论。

引理 12。对于任意拟约化李超代数 $\mathfrak{g}$， $\mathcal{N}$ 是 $\mathfrak{g}$-Mod 的 Serre 子范畴。

尽管范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 通常没有足够的投射模，下面的推论推广了引理 11，并表明可以在 $\mathfrak{g}$-Mod 中计算 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的扩张群。

C推论 13。对于任意拟约化李超代数 $\mathfrak{g}$，我们有同构 s

$$\operatorname{Ext}^d_{\mathcal{N}}(M,N) \cong \operatorname{Ext}^d_{\mathfrak{g}\text{-Mod}}(M,N),$$

对于 $\mathcal{N}$ 中任意 Whittaker 模 M、N 以及任意整数 $d \geq 0$。

证明。我们将证明，对于任意 M、$N \in \mathcal{N}$ 和 $d \geq 0$, (3.8) 中的同态 $\iota^d_{M,N}$ 是一个同构。注意，每个 $M \in \mathcal{N}$ 都是 Ind Res M 的一个商模，其中 Res $M \in \mathcal{N}_0$。根据引理 12， $\mathcal{N}$ 是 $\mathfrak{g}$- 模的一个 Serre 子范畴，因此我们可以对 $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$- 模应用 [CoM 命题 1]，其中 $\mathcal{B} = \mathcal{N}$ 和 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{B}$ 的全子范畴，由所有与 Ind V 同构的模组成，其中 $V \in \mathcal{N}_0$。

对于任意 $V \in \mathcal{N}_0$、 $M \in \mathcal{N}$ 和 $d \geq 0$，有

$$\operatorname{Ext}^d_{\mathcal{N}}(\operatorname{Ind} V, M) \cong \operatorname{Ext}^d_{\mathcal{N}_0}(V, \operatorname{Res} M) \cong \operatorname{Ext}^d_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-Mod}}(V, \operatorname{Res} M) \cong \operatorname{Ext}^d_{\mathfrak{g}\text{-Mod}}(\operatorname{Ind} V, M).$$

现在应用 [CoM 命题 1] 即得该推论。 □

4. Principal finite W-superalgebras for basic classical Lie superalgebras

在本节中，我们假设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典的。本节的目标是为基本经典李超代数给出定理 B 的证明。

4.1. 定义。半单李代数的有限 W-代数的一般定义由 Premet 在 [Pr1], 中提出，并自然地扩展到了基本李超代数。我们回顾有限 W-超代数的基本概念；另见，例如，[BR、BBG、Po1、PS1、Po2、Zh、ZS、W、PS2]。

回顾一下， $\mathfrak{g}$ 具有一个偶非退化不变超对称双线性型 $(\cdot|\cdot)$。设$e \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 是一个偶幂零元。定义 $\chi \in \mathfrak{g}^*$ ，令 $\chi(x) := (e|x)$，其中 $x \in \mathfrak{g}$任意。根据 Jacobson-Morozov 定理， e 可以包含在一个 $\mathfrak{sl}(2)$-三元组$\langle e、\ h、\ f\rangle \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$中。由 h 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用定义的线性算子 $\mathrm{ad}(h)$ 给出一个 Dynkin $\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$，其中 $\mathfrak{g}(i) := \{x \in \mathfrak{g}|\ [h, x] = ix\}$。根据 [EK] 的意义，Dynkin 分次是 e 的一个良好分次（另见 [Ho]）。

映射 $\chi([\cdot,\cdot]) := (e|[\cdot,\cdot])$: $\mathfrak{g}(-1) \times \mathfrak{g}(-1) \to \mathbb{C}$ 在 $\mathfrak{g}(-1)$上定义了一个非退化双线性形式。设 $\mathfrak{l}$ 是关于此形式的一个拉格朗日子空间，即 $\mathfrak{g}(-1)$的一个极大迷向子空间。按照 [Pr1], ，我们定义如下幂零子代数

$$\mathfrak{m} := \bigoplus_{i\leq -2} \mathfrak{g}(i) \oplus \mathfrak{l}.$$

我们用 ζ : $\mathfrak{m} \to \mathbb{C}$ χ 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制表示该一维表示 $\mathbb{C}_\zeta$ ，它是 $\mathfrak{m}$ 的一维表示。我们定义广义 Gelfand–Graev 模

$$Q_\zeta := U(\mathfrak{g})/I_\zeta \cong U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\zeta,$$

其中 I_ζ 是由形如 $x - \zeta(x)$ 的元素生成的左理想，对任意 $x \in \mathfrak{m}$ 都成立。该模在 [PS2] 中也称为广义 Whittaker 模。与幂零元 e 相关联的有限 W-超代数 W_ζ 定义如下:

$$W_\zeta := \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(Q_\zeta)^{op}.$$

我们用 W_ζ^0 表示与偶部 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 及来自 [Pr1] 的幂零元 e 相关联的有限 W-代数。

令 pr : $U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})/I_\zeta$ 表示自然投影。与李代数情形一样，W_ζ 可识别为

$$W_\zeta = \{\mathrm{pr}(y) \in Q_\zeta|\ [x, y] \in I_\zeta, \text{for all } x \in \mathfrak{m}\}. \tag{4.1}$$

W_ζ 上的代数结构由 $\mathrm{pr}(y_1)\ \mathrm{pr}(y_2)\ = \mathrm{pr}(y_1y_2)$ 给出，其中任意 $y_1, y_2 \in U(\mathfrak{g})$ 满足 $[x, y_1], [x, y_2] \in I_\zeta$ 对所有 $x \in \mathfrak{m}$ 都成立。

4.2. 范畴的等价。在本文接下来的部分中，我们假设 $e \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 是一个主幂零元，即 $\mathrm{ad}e$ 在 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 上的核具有最小维数（该维数等于 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的秩）。在这种情况下，$\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的一个 Borel 子代数的幂零根，因此 ζ 确定了偶幂零根的一个特征。我们分别用 $\mathcal{N}(\zeta)$ 表示 $\mathfrak{g}$- 模对应的 Whittaker 范畴，用 $\mathcal{N}_0(\zeta)$ 表示 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$- 模对应的 Whittaker 范畴。

4.2.1. Skryabin等价。记 W_ζ-Mod 为所有 W_ζ-模构成的范畴。令 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 为 $\mathfrak{g}$-Mod 的全子范畴，由满足以下条件的 $\mathfrak{g}$-模组成：对任意 $x \in \mathfrak{m}$， $x - \zeta(x)$ 均局部幂零。

$\mathfrak{g}$-模 M 中的 Whittaker 向量是满足 $xv = \zeta(x)v$ 的向量 $v \in M$，其中 $x \in \mathfrak{m}$ 任意。我们将 $\mathfrak{g}$-模 M 中 Whittaker 向量构成的子空间记为

$$\mathrm{Wh}_\zeta(M) := \{m \in M |\ xm = \zeta(x)m, \text{ for all } x \in \mathfrak{m}\}.$$

Whζ 定义了一个从 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 到 W_ζ-Mod 的函子，我们称之为 Whittaker 函子。我们还定义了主有限 W-代数 W_ζ^0的 Whittaker 函子，定义如下

$$\mathrm{Wh}_\zeta^0(-) : \mathfrak{g}_{\bar{0}}\text{-Wmod}^\zeta \to W_\zeta^0\text{-Mod},$$

其中，对于所有 $x \in \mathfrak{m}_{\bar{0}}\}$.，$\mathrm{Wh}_\zeta^0(M) := \{m \in M |\ xm = \zeta(x)m$

引理 14（Skryabin等价）。Whittaker 函子

$$\mathrm{Wh}_\zeta(-) : \mathfrak{g}\text{-Wmod}^\zeta \to W_\zeta\text{-Mod}$$

是一个等价，其拟逆为 $Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} (-)$。

正如 [Zh, Remarks 3.10-3.11], 中所指出的，[Sk1] 中给出的引理 14 的证明可推广到基本经典李超代数；另见 [ZS, Theorem 2.17], [SW, Theorem 4.1]。我们在定理 22 中表述了一个版本，它也适用于佩里普莱克蒂克李超代数。

4.2.2. $\mathcal{N}(\zeta)$ 与 W_ζ-fdmod 的等价性。回顾一下，W_ζ-fdmod 表示 W_ζ-Mod 的全子范畴，由 W_ζ 的有限维模组成。本小节的目标是证明，Skryabin等价给出了 $\mathcal{N}(\zeta)$ 与 W_ζ-fdmod 之间的等价。

我们注意到，向量空间的包含关系

$$\mathrm{Wh}_\zeta(\Gamma_\zeta(L(\lambda))) \subseteq \mathrm{Wh}_\zeta^0(\mathrm{Res}\,\Gamma_\zeta(L(\lambda)))$$

表明前者总是有限维的，因为 Γ_ζ^0(限制 $L(\lambda)$) 作为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模具有有限长度。下面的引理表明，单的 W_ζ-模是有限维的。我们指出，这一事实早已通过不同的方法得到证明；例如，参见 [BBG, Theorem 7.2], [PS2, Proposition 3.7] 和 [SW, Corollary 3.12]。

引理 15. 范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 是 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 的全子范畴。此外，它包含 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 中的所有简单对象。特别地，具有 Π_ζ-自由权 λ 的 W_ζ-模 $\varsigma(\Gamma_\zeta(L(\lambda)))$ 的简单商构成了 W_ζ 的所有简单模。

证明. 首先，我们证明 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中的每个对象 M 都属于 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$。设 $y \in \mathfrak{m}_{\bar{1}}$。注意，$\zeta(y) = 0$，因为 ζ 定义了 $\mathfrak{m}$ 的一个一维模。由于 $[y, y] \in \mathfrak{m}_{\bar{0}}$，可知 $[y, y] - \zeta([y, y])$ 在 M 上局部幂零地作用。注意，$\zeta([y, y]) = 2\zeta(y)\zeta(y) = 0$。因此，$y^2 = \frac{1}{2}[y, y]$ 在 M 上局部幂零地作用。这证明了 M 是 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 中的一个对象。

设 S 是 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 中的一个简单对象。根据 [Ch1，命题 1], 可知，S 在 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 上局部有限。因此，S 是 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的一个对象。

最后，设 V 是 W_ζ的不可约表示。根据 Skryabin 等价，$V \cong \mathrm{Wh}_\zeta(S)$，其中 S 是 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 中的某个简单对象。由引理 3，S 同构于 $\Gamma_\zeta(L(\lambda))$的一个商模，其中 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$是某个 Π_ζ-自由权。这就完成了证明。□

以下定理是本小节的主要结果。

定理 16。Whς(–) Whittaker 函子将 $\mathcal{N}(\zeta)$ 限制为到 W_ζ-fdmod 的一个等价，其逆函子为 $Q_\zeta \otimes_{W_\zeta}$ (–)。

证明。令 $\mathcal{N}(\zeta)'$ 表示 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\varsigma$ 的全子范畴，其中包含满足以下条件的有限长度模 M： M 的每个合成因子都属于 $\mathcal{N}(\zeta)$。根据引理 14 和 15，Whittaker 函子 Whς(–) 限制为 $\mathcal{N}(\zeta)'$ 与 W_ζ-fdmod 之间的一个等价。为了证明 $\mathcal{N}(\zeta)' = \mathcal{N}(\zeta)$，只需证明每个对象 $\mathcal{N}(\zeta)'$ 都属于 $\mathcal{N}(\zeta)$。

设 M 是 $\mathcal{N}(\zeta)'$ 中的一个对象。我们将对 M 的长度进行归纳。若M 是单的，则由引理 15 可得结论。设我们有一个 $\mathfrak{g}$-模中的短正合列

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0, \tag{4.2}$$

其中 M_1、M_2 均非零。因此，根据归纳法， M_1、M_2 是 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中的对象。由引理 12 可得结论。□

注 17. 在有限 W-超代数的定义中出现的子代数 $\mathfrak{m}$ 原则上取决于良好的 $\mathbb{Z}$分次和拉格朗日子空间 $\mathfrak{l}$ 的选择。然而，已证明当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$[GG] 时，这些代数均同构。对于基本型和 queer 李超代数，已知在 $\mathfrak{g}(-1)_{\bar{1}}$ 的维数为偶数的假设下，此结论的类似命题成立；参见 [Zh，注 3.11]。

在我们的设定中， e 是基本经典李超代数 $\mathfrak{g}$中的偶主幂零元，子代数$\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 是$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$的一个 Borel 子代数的幂零根。我们说明，关于 W_ζ 的表示范畴这一记法没有歧义，也就是说，范畴 W_ζ-fdmod 和 W_ζ-Mod 不依赖于偶主幂零元、良好的 $\mathbb{Z}$-分次以及拉格朗日子空间 $\mathfrak{l}$的选择，除去由 Whittaker 函子、其拟逆以及 $\mathfrak{g}$的内自同构所给出的等价。

令 $\zeta\colon\ \mathfrak{m} \to \mathbb{C}$ 为第 4.1 节中定义的特征。对于另一个偶主幂零元 e' 及其关联子代数 $\mathfrak{m}'$ 和特征 $\zeta'\colon\ \mathfrak{m}' \to \mathbb{C}$，存在 $\mathfrak{g}$ 的一个内自同构，将 $\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 与 $\mathfrak{m}'_{\bar{0}}$ 互换。令 $W'_{\zeta'}$ 为对应于 $\mathfrak{m}'$ 和 ζ' 的有限 W- 超代数。由定理 16 和命题 36 可得 W_ζ-fdmod $\cong \mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta) \cong \mathcal{N}^{\mathfrak{b}'}(\zeta') \cong W'_{\zeta'}$-fdmod，其中 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)$ 和 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}'}(\zeta')$ 分别是相对于 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{b}'$ 的 Whittaker 范畴，使得 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 和 $\mathfrak{b}'_{\bar{0}}$ 的根基分别为 $\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 和 $\mathfrak{m}'_{\bar{0}}$。通过类似的论证，对于 W_ζ-Mod 也有类似的结论。

根据定理 16， W_ζ-fdmod 中的扩张群可以在范畴$\mathcal{N}(\zeta)$ 中计算。以下推论根据 $\mathfrak{g}$-mod 中的 Whittaker 模计算 W_ζ-fdmod 中模之间的扩张群。

推论 18. 设 E, F 是两个有限维 W_ζ-模。那么我们有

$$\mathrm{Ext}^d_{\mathrm{W}_\zeta\text{-fdmod}}(E,F) \cong \mathrm{Ext}^d_{\mathfrak{g}\text{-Mod}}(Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} E, Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} F),\ \textit{for } d \geq 0.$$

4.3. 例子. 在本小节中，我们通过计算单的 Whittaker 模中的 Whittaker 向量子空间，确定 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1|2)$、$\mathfrak{osp}(1|2)$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2)$ 的单的 W_ζ-模。

对于给定的正整数 m, n，回忆一下一般线性李超代数$\mathfrak{gl}(m|n)$可实现为 $(m+n) \times (m+n)$ 复矩阵空间

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

其中 A, B, C和 D分别是 $m \times m, m \times n, n \times m, n \times n$矩阵。 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的括号由超交换子给出。令 E_{ij} 表示 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 中的初等矩阵，其中 $1 \leq i, j \leq m+n$，其 (i, j) 元等于 1，其余元素均为 0。令 $\mathrm{str} : \mathfrak{gl}(m|n) \to \mathbb{C}$ 表示超迹型。

在以下每个例子中，我们将选取一个 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 及其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$，并令 $\mathcal{O}$ 为关于 $\mathfrak{b}$的 BGG 范畴。对于任意给定的 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，回忆一下， $L_0(\lambda, \zeta)$ 和 $M_0(\lambda, \zeta)$ 分别表示来自 [Ko2] 的 Kostant 单 Whittaker $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$- 模，以及来自 [MS1] 的标准 Whittaker $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模。由于我们将特征 ζ 设为非奇异，因此对于任意 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$，都有 $M_0(\lambda, \zeta) = L_0(\lambda, \zeta)$。此外，回忆一下， $M(\lambda)$ 和 $L(\lambda)$ 分别表示 Verma 模及其简单商。

4.3.1. 示例： $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1|2)$。

示例 19. 假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(1|2)$，其中 $\zeta \neq 0$。令 $\mathfrak{h}$ 为由 E_{ii} 张成的标准 Cartan 子代数，其中 $1 \leq i \leq 3$。设 $\mathfrak{b}$ 为由 E_{ij} 张成的标准 Borel 子代数，其中 $1 \leq i \leq j \leq 3$。

考虑由 $\langle e, h, f \rangle$ 给出的 $\mathfrak{sl}(2)$-三元组

$$e := E_{32}, \ h := -E_{22} + E_{33}, \text{ and } f := E_{23},$$

考虑由 $(x|y) := \mathrm{str}(xy)$ 确定的偶非退化不变超对称双线性型 $(\cdot|\cdot)$，其中 $x, y \in \mathfrak{g}$ 任意。利用由 h 的伴随作用诱导的 $\mathbb{Z}$-分次，我们看到 $\mathfrak{g}(-1) = \mathbb{C}E_{21} + \mathbb{C}E_{13}$。我们选择 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}E_{13}$，使得子代数 $\mathfrak{m} = \mathbb{C}E_{23} + \mathbb{C}E_{13}$。注意，$\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 是 $\mathfrak{b}_{\bar{0}}$ 的幂零根。 $\mathfrak{m}$ 上的特征 ζ 由 $\zeta(E_{23}) = 1$ 和 $\zeta(E_{13}) = 0$. 确定

我们回顾 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中简单 Whittaker 模的显式构造，参见 [Ch1，第 5 节3]。标准 Whittaker 模定义为 $M(\lambda, \zeta) := K(M_0(\lambda, \zeta)) = $诱导$_{\mathfrak{g}_{\geq 0}}^{\mathfrak{g}} M_0(\lambda, \zeta)$，其中 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 任意。根据 [Ch1，定理 9],， $\mathcal{N}(\zeta)$ 中的每个单模都是 $M(\lambda, \zeta)$ 的商模，我们将其记为 $L(\lambda, \zeta)$。于是 $M_0(\lambda, \zeta) = L_0(\lambda, \zeta)$ 可视为 Res $M(\lambda, \zeta)$ 的子模。设 $v \in \mathrm{Wh}_\zeta(M_0(\lambda, \zeta))$ 是一个非零 Whittaker 向量。集合

$$\{v_1 := v, \ v_2 := E_{21}v, \ v_3 := E_{21}E_{31}v, \ v_4 := 2E_{31}v - E_{21}hv\},$$

根据 [BCW 引理 5.6]，构成 Wh_ζ^0(限制 $M(\lambda, \zeta)$) 的一组基。将对偶基$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \subset \mathfrak{h}^*$ 定义为 $\epsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij}$。记 $\lambda = \lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3$。令 $c := \lambda_1 + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$，并定义

$$w = \begin{cases} v_2 + \frac{1}{2(1-c)}v_4, & \text{for } c \neq 1; \\ v_4, & \text{for } c = 1; \end{cases}$$

通过直接计算，集合 $\{v_1, w\}$ 构成 $\mathrm{Wh}_\zeta(M(\lambda,\zeta))$ 的一组基。根据 [Ch1 命题 22], , 我们有

$$\mathrm{Wh}_\zeta(L(\lambda,\zeta)) = \begin{cases} \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}w, & \text{for } \lambda \text{ typical;} \\ \mathbb{C}v \oplus \mathbb{C}w/\mathbb{C}w, & \text{for } \lambda \text{ atypical.} \end{cases}$$

我们指出，对于一般的 $\mathfrak{gl}(m|n)$，简单对象 $\mathrm{Wh}_\zeta(L(\lambda,\zeta))$ 的构造已在 [BBG 第 7] 节中研究过，其方法是利用由 A 型移位 Yangian 导出的 W_ζ 的三角分解。

4.3.2. 例： $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2)$。回想一下， $\mathfrak{osp}(1|2) \subseteq \mathfrak{gl}(1|2)$ 具有以下生成元

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑 $\langle e, h, f\rangle \cong \mathfrak{sl}(2)$ 中的主幂零元 e。那么由 h 诱导的 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{-2\le k\le 2} \mathfrak{g}(i)$ 为

$$\mathfrak{g}(-2) = \mathbb{C}f,\ \mathfrak{g}(-1) = \mathbb{C}F,\ \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{h} := \mathbb{C}h,\ \mathfrak{g}(1) = \mathbb{C}E,\ \mathfrak{g}(2) = \mathbb{C}e.$$

考虑由 $(x|y) := -\mathrm{str}(xy)$（对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$）确定的偶非退化不变超对称双线性型 $(\cdot|\cdot)$。那么相应的拉格朗日子空间为零。我们有 $\mathfrak{m} = \mathbb{C}f$，其特征为 $\zeta : \mathfrak{m} \to \mathbb{C}$ 由 $\zeta(f) = 1$ 确定。这给出了相应的主有限 W- 超代数 W_ζ；另见 [Po2 第 3.1] 节。

考虑 Borel 子代数 $\mathfrak{b} := \mathbb{C}f + \mathbb{C}F + \mathfrak{h}$。令 $\{\delta\}$ 为由 $\delta(h) = 1$ 确定的 $\mathfrak{h}^*$ 的对偶基。对任意 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$., 定义 $L(\lambda,\zeta) := \Gamma_\zeta(L(\lambda))$, 其中 $L(\lambda)$ 属于 $\mathcal{N}(\zeta)$

我们有

$$L(\lambda,\zeta) \neq 0 \Leftrightarrow L(\lambda) \text{ is a } U(e)\text{-free module} \Leftrightarrow \lambda(h) \notin \mathbb{Z}_{\le 0}.$$

在这种情况下，我们有 $M(\lambda) = L(\lambda)$，因此根据定义， $L(\lambda,\zeta)$ 是完备化 $M(\lambda)$ 的一个 $\mathfrak{g}$-子模。注意，作为向量空间， $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})v \oplus E(U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})v)$，其中 $v \in M(\lambda)$ 是一个非零最高权向量。对于 $c_{st} \in \mathbb{C}$，我们用记号 $\sum_{t\ge 0,\ s=0,\ \ldots,\ t} c_{s,\ t} E^s e^t v$ 表示 $M(\lambda)$ 的元素。

设 $L(\lambda,\zeta) \neq 0$ （即 $\lambda(h) \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$）。我们将按如下方式构造 $L(\lambda,\zeta)$。令

$$w := \sum_{k\ge 0} a_k e^k v \in \overline{M(\lambda)},$$

其中 $a_0 := 1$ 和 a_1、a_2、.....由归纳法确定。

$$a_{k+1} := \frac{-a_k}{(k+1)(k+\lambda(h))}, \text{ for } k \ge 0.$$

推论 20. 以下集合

$$\{L(\lambda,\zeta) |\ \lambda(h) \notin \mathbb{Z}_{\le 0}\}$$

是 $\mathcal{N}(\zeta)$ 中彼此非同构的简单对象的完备列表。此外，我们有这些简单模中 Whittaker向量 的如下描述

$$\mathrm{Wh}_\zeta(L(\lambda,\zeta)) = \mathbb{C}w \oplus \mathbb{C}Fw. \tag{4.4}$$

特别地，$L(\lambda,\zeta)$由 w, Fw生成。

证明。令 $X := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* |\ \lambda(h) \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$。我们先证明，对于任意$\lambda \in X$，$L(\lambda,\zeta)$是单的。为此，注意到 Res $L(\lambda,\zeta)$ =Res $\Gamma_\zeta M(\lambda)$有一个长度为二的合成序列。若 $L(\lambda,\zeta)$不是单的，则它包含一个单子模 L，使得 Res L 是$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$上的单 Whittaker 模。因此，h 在 L 上内射地作用，且 $EL = FL = 0$，这意味着 $[E,F]L = hL = 0$，矛盾。由此证明了 $L(\lambda,\zeta)$的单性。

回忆一下，对于任意不同的 $\lambda, \mu \in X$，$L_0(\lambda,\zeta) \ncong L_0(\mu,\zeta)$。由于对于任意 $\lambda \in X$，Res $L(\lambda,\zeta)$ 的合成因子为 $\{L_0(\lambda,\zeta)\ L_0(\lambda+\delta,\zeta)\}$，因此对于满足 $\lambda \neq \mu$的任意 $\lambda, \mu \in X$，有 $L(\lambda,\zeta) \ncong L(\mu,\zeta)$。

注意到 dim Wh$\zeta(L(\lambda,\zeta))$ =dim Wh$^0_\zeta$(Res $L(\lambda,\zeta)$) $= 2$。我们计算

$$fw = \sum_{k\geq 0} a_k [f, e^k]v = \sum_{k\geq 0} -a_{k+1}(k+1)e^k(k+h)v = \sum_{k\geq 0} a_k e^k v = w,$$
$$fFw = Ffw = Fw.$$

因此，$w, Fw \in$Wh$\zeta(L(\lambda,\zeta))$。接下来要证明 w, Fw 线性无关。为此，只需证明 $Fw \neq 0$。但如果 $Fw = 0$，那么$2w = 2fw = F^2 w = 0$，这就产生了矛盾。由此完成了 (4.4) 的证明。□

4.3.3. 例：$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|2)$。在本例中，我们为 $\mathfrak{g} := \mathfrak{osp}(2|2) \cong \mathfrak{sl}(1|2)$ 构造简单 Whittaker 模的 Whittaker 向量子空间，其中 ζ 非奇异。正交辛李超代数 $\mathfrak{osp}(2|2)$ 在 $\mathfrak{gl}(2|2)$ 中的矩阵实现为

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 & x & y \\ 0 & -d & v & u \\ u & y & a & b \\ -v & -x & c & -a \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x,y,v,u \in \mathbb{C}; \\ a,b,c,d \in \mathbb{C}; \end{array} \right\}. \tag{4.5}$$

我们引入以下 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的生成元

$$e := E_{34},\ h := E_{33} - E_{44},\ f := E_{43},\ \text{and } h' := E_{11} - E_{22}.$$

此外，我们设定 $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 的以下生成元

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意， $\mathfrak{g}$ 是I型的，并且 $\mathfrak{g}$ 有如下 $\mathbb{Z}$ 分次： $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_{+1}$，其中 $\mathfrak{g}_{-1}=\mathbb{C}X\oplus\mathbb{C}Y$、$\mathfrak{g}_0=\mathbb{C}e\oplus\mathbb{C}f\oplus\mathbb{C}h\oplus\mathbb{C}h'$ 和 $\mathfrak{g}_{+1}=\mathbb{C}U\oplus\mathbb{C}V$。设 $\mathfrak{g}_{\leq 0}:=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_{-1}$。

考虑由 $(x|y)$ 确定的偶非退化不变超对称双线性型 $(\cdot|\cdot):=-\mathrm{str}(xy)$，其中 x、$y\in\mathfrak{g}$ 任意。考虑 $\langle e$ 内的偶主幂零元 e， $h,f\rangle\cong\mathfrak{sl}(2)$。那么，由 h 的伴随作用诱导的 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{-2\leq k\leq 2}\mathfrak{g}(i)$ 如下：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{g}(-2)=\mathbb{C}f,\ \mathfrak{g}(-1)=\mathbb{C}X\oplus\mathbb{C}V,\\&\mathfrak{g}(0)=\mathfrak{h}:=\mathbb{C}h'\oplus\mathbb{C}h,\\&\mathfrak{g}(2)=\mathbb{C}e,\ \mathfrak{g}(1)=\mathbb{C}Y\oplus\mathbb{C}U.\end{aligned}$$

按照 [Po2 第 3.3]，节，我们选取拉格朗日子空间 $\mathfrak{l}=\mathbb{C}X\subseteq\mathfrak{g}(-1)$，因此 $\mathfrak{m}=\mathbb{C}f\oplus\mathbb{C}X$。相应的特征 $\zeta:\ \mathfrak{m}\to\mathbb{C}$ 由 $\zeta(f)=1$、$\zeta(X)=0$. 确定。令 W_ζ 表示相应的主有限 W-超代数。

考虑 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}:=\mathbb{C}f+\mathfrak{h}+\mathfrak{g}_{-1}$。令 $\{\epsilon,\delta\}$ 为相对于 $\mathfrak{h}$ 的有序基 $\{h',h\}$ 而言的 $\mathfrak{h}^*$ 的对偶基。给定权 $\lambda=\lambda_1\epsilon+\lambda_2\delta\in\mathfrak{h}^*$，定义 $L(\lambda,\zeta):=\Gamma_\zeta(L(\lambda))\in\mathcal{N}(\zeta)$；只要它非零，这就是标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta):=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_{\leq 0}}^{\mathfrak{g}}L_0(\lambda,\zeta)$ 的简单商，见 [Ch1，定理 20]。将 $L_0(\lambda,\zeta)$ 视为 Res $M(\lambda,\zeta)$ 的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-子模。注意，Casimir 算子 $h^2+2h+4fe=h^2-2h+4ef$ 在 $L_0(\lambda,\zeta)$ 上的作用为标量 $\gamma:=(\lambda_2-1)^2-1$。

令 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ \mathfrak{h}^*\times\mathfrak{h}^*\to\mathbb{C}$ 为由 $\langle\epsilon,\epsilon\rangle=1=-\langle\delta,\delta\rangle$ 和 $\langle\delta,\epsilon\rangle=0$确定的对称双线性形式。那么，当且仅当 λ 关于 $\mathfrak{b}$ 是典型的

$$\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle\neq 0,\quad\text{for all roots }\alpha=\pm\epsilon\pm\delta,$$

其中 $\rho=-\epsilon-\delta$ 是相应的 Weyl 向量。等价地，当且仅当 $(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)\neq 0$时，$\lambda$ 是典型的。由 [ChM，推论6.8], 可得

$$M(\lambda,\zeta)=L(\lambda,\zeta)\Leftrightarrow\ \lambda\text{ is typical.}\tag{4.6}$$

或者，也可以通过应用 Backelin 函子 Γ_ζ从 [Ch1] 推出(4.6)。下面给出 W_ζ 在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(2|2)$下的不可约表示分类：

推论21. 设 v 是 $L_0(\lambda,\zeta)$的一个非零 Whittaker 向量，并定义 w in$M(\lambda,\zeta)=\wedge(\mathfrak{g}_{+1})\otimes L_0(\lambda,\zeta)$ 为

$$w:=(\lambda_1-2)Vv+2Uv+Vhv.$$

那么， $\{v,w\}$ 构成 Wh$\zeta(M(\lambda,\zeta))$ 的一组基。此外， W_ζ 的单模完整列表如下：

$$\mathrm{Wh}_\zeta(L(\lambda,\zeta))=\begin{cases}\mathbb{C}v\oplus\mathbb{C}w, & \textit{for }\lambda\textit{ typical,}\\ \mathbb{C}v\oplus\mathbb{C}w/\mathbb{C}w, & \textit{for }\lambda\textit{ atypical,}\end{cases}$$

其中 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 遍历所有反占优权。

证明。我们如下计算 Wh$\zeta(M(\lambda,\zeta))$ 的基。根据 [Mc2，引理 2],，限制 Res $M(\lambda,\zeta)\cong\Lambda(\mathfrak{g}_{+1})\otimes L_0(\lambda,\zeta)$ 有一个基

$$\{V^iU^jh^kv|\ i,j=0,1,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

根据 [Ko1，定理 4.6]（另见 [MS1，引理 5.12]），我们有 $\dim(\mathrm{Wh}^0_\zeta(M(\lambda,\zeta))) = 4$. 通过直接计算，以下集合构成 $\mathrm{Wh}^0_\zeta(M(\lambda,\zeta))$ 的一个基：

$$\{v,\ Vv,\ VUv,\ 2Uv + Vhv\}.$$

我们来计算 X 对这些向量的作用：

$$\begin{aligned} &Xv = 0,\\ &XVv = -2v,\\ &XVUv = 2Vv - 2Uv - Vhv - \lambda_1 Vv,\\ &X(2Uv + Vhv) = 2\lambda_1 v - 4v. \end{aligned}$$

由此可知，$\mathrm{Wh}_\zeta(M(\lambda,\zeta))$ 的一组基为 $\{v, (\lambda_1 - 2)Vv + 2Uv + Vhv\}$。

根据 (4.6)，只需考虑非典型权 λ 的情形。在这种情况下，$\mathrm{Wh}_\zeta(L(\lambda,\zeta))$ 是 W_ζ 上一个长度为二的不可分解模。我们计算

$$YVv = (h - h')v,\ YUv = \frac{1}{2}(\gamma - h^2 + 2h)w,\ YVhw = (h - h')hw.$$

由此可得 $Yw = ((2-\lambda_1)\lambda_1 + \gamma)v = ((2-\lambda_1)\lambda_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 2))v = 0$，因为 λ 是非典型的。因此，我们有 $\mathfrak{g}_{-1}w = 0$。

回忆一下，h' 在 $L_0(\lambda,\zeta)$ 上的作用为标量 λ_1。由于 $h'w = (\lambda_1 + 1)w$ 且 $U(\mathfrak{g})w = U(\mathfrak{g}_{\geq 0})w$，可得 $U(\mathfrak{g})w$ 是 $M(\lambda,\zeta)$ 的真子模。将 $\mathrm{Wh}_\zeta(-)$ 应用于下面的短正合列

$$0 \to U(\mathfrak{g})w \to M(\lambda,\zeta) \to M(\lambda,\zeta)/U(\mathfrak{g})w = L(\lambda,\zeta) \to 0,$$

结论由此得出。 □

5. Principal finite W-superalgebra of periplectic Lie superalgebra $\mathfrak{p}(n)$

5.1. Skryabin 型等价。本节的目标是为由一个偶 $\mathbb{Z}$-分次导出的主有限 W-超代数表述一种 Skryabin 型等价。为说明这一结果，设 $\mathfrak{g}$ 是任意拟约化李超代数，具有一个 $\mathfrak{sl}(2)$-三元组 $\langle e,h,f\rangle \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，使得 e 在 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 中是主的。假设 h 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用产生一个偶 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(k)$。定义如下幂零子代数 $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{m} := \bigoplus_{k\leq -2} \mathfrak{g}(k).$$

设 $(\cdot|\cdot)_0$ 是 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的非退化不变对称双线性形式。假设由 $\zeta(x) := (x|e)_0$，对 $x \in \mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 确定的非奇异特征 $\zeta : \mathfrak{m}_{\bar{0}} \to \mathbb{C}$ 可扩张为 $\mathfrak{m}$ 的一个特征。类似地，我们定义相应的主有限 W-超代数 W_ζ，即

$$W_\zeta := \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(Q_\zeta)^{\mathrm{op}}, \tag{5.1}$$

其中 $Q_\zeta := U(\mathfrak{g})/I_\zeta$ 是 Gelfand-Graev 型模，其左理想 I_ζ 是 $U(\mathfrak{g})$ 中由元素 $x - \zeta(x)$（$x \in \mathfrak{m}$）生成的左理想。

我们保留前几节中使用的记号。具体而言，$\mathfrak{g}\text{-Wmod}^\zeta$ 表示所有满足以下条件的 $\mathfrak{g}$-模所构成的范畴：对于所有 $x \in$，$x - \zeta(x)$ 均以局部幂零的方式作用。

$\mathfrak{m}$. 此外， W_ζ-模和 W_ζ-有限维模分别表示所有 W_ζ-模和有限维 W_ζ-模所构成的范畴。同样，我们定义 Whittaker 函子 Whζ(–)，从 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 到 W_ζ-模，定义为

$$\mathrm{Wh}_\zeta(M) := \{v \in M |\ xv = \zeta(x)v, \text{ for all } x \in \mathfrak{m}\},$$

对于 $M \in \mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$。由于 $\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数的底层偶子代数的幂零根，我们可以定义相应的 Whittaker 范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 和 BGG 范畴 $\mathcal{O}$。

5.1.1. 一个充要条件。本小节中，固定 $0 \le m' \le m$ ，并令

$$\{u_1, \dots, u_{m'}\} \subseteq \mathfrak{m}_{\bar{0}},\ \{u_{m'+1}, \dots, u_m\} \subseteq \mathfrak{m}_{\bar{1}}, \tag{5.2}$$

$$\{x_1, \dots, x_{m'}\} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}},\ \{x_{m'+1}, \dots, x_m\} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \tag{5.3}$$

设其为关于 $\mathbb{Z}_2$- 和 $\mathbb{Z}$-分次的齐次元素，使得 $x_s \in \mathfrak{g}(-2 + d_s)$，其中 $d_s > 0$，对任意 $1 \le s \le m$ 均成立。定义 X 中元素 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ 以及 $U(\mathfrak{g})$ 中元素的如下记号：令

$$|\mathbf{a}| = \sum_s a_s,\ \mathrm{wt}\,\mathbf{a} = \sum_s d_s a_s,$$
$$x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m},$$
$$u^{\mathbf{a}} = (u_1 - \zeta(u_1))^{a_1} (u_2 - \zeta(u_2))^{a_2} \cdots (u_{m'} - \zeta(u_{m'}))^{a_{m'}} u_{m'+1}^{a_{m'+1}} \cdots u_m^{a_m}.$$

考虑 X 上任意满足以下条件的线性序 $<$

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \text{ whenever either } \mathrm{wt}\,\mathbf{a} < \mathrm{wt}\,\mathbf{b} \text{ or } \mathrm{wt}\,\mathbf{a} = \mathrm{wt}\,\mathbf{b}, |\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|.$$

以下是本小节的主要结果。

定理 22。沿用上述记号。假设满足以下条件:

(1) $\{u_i |\ 1 \le i \le m\}$ 是 $\mathfrak{m}$的一组基。(2) 对任意 i，有 $[u_i, x_i] \in \mathfrak{g}(-2) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 且 $\zeta([u_i, x_i]) = 1$。(3) 对任意 $i \ne j$。若 $[u_i, x_j] \in \mathfrak{g}(-2)$，则 $\zeta([u_i, x_j]) = 0$。

那么，对任意带有 $v \in$ Wh$\zeta(M)$的 $M \in \mathfrak{g}$-模，我们有

$$u^{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}} v = cv,\ \textit{for some non-zero scalar } c; \tag{5.4}$$

$$u^{\mathbf{a}} x^{\mathbf{b}} v = 0,\ \textit{when } \mathbf{a} > \mathbf{b}. \tag{5.5}$$

此外， $\{x^{\mathbf{a}} 1_\zeta |\ \mathbf{a} \in X\}$ 构成 Q_ζ 的一组基，使其成为自由右 W_ζ-模，其中$1_\zeta =$pr$(1_{U(\mathfrak{g})})$是 $1_{U(\mathfrak{g})} \in U(\mathfrak{g})$在 Q_ζ中的像。在此情形下，Whittaker 函子 Whζ(–)是从 $\mathfrak{g}$-Wmod$^\zeta$ 到 W_ζ-Mod的一个等价，其逆为 $Q_\zeta \otimes_{W_\zeta}$ (–)。Whζ(–)作用于 $\mathcal{N}(\zeta)$所得的目标范畴是 W_ζ-fdmod。

在给出证明之前，我们通过一些示例说明定理 22 的条件 (1)–(3)。

例 23. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个基本经典李超代数，其代数为 $\mathfrak{m}$ ，特征 ζ 来自第 4.1 节，且满足 $\mathfrak{m} = \bigoplus_{k \le -2} \mathfrak{g}(k)$。固定一个齐次基 $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathfrak{m}$ ，如 (5.2) 所示。回顾第 4.1 节中的偶非退化不变超对称双线性型

$(\cdot|\cdot)$ 定义在 $\mathfrak{g}$ 上。对于任意 i、$j \in \mathbb{Z}$，我们可以注意到，$(\cdot|\cdot)$ 在 $\mathfrak{g}(i)$、$\mathfrak{g}(-i)$ 与 $(\mathfrak{g}(i)|\mathfrak{g}(j)) = 0$ 之间构成非退化配对，除非 $j = -i$。由于元素 $\{[u_i, e]\}_{i=1}^m$ 线性无关，存在齐次元素 x_1、x_2、……、x_m，属于 $\mathfrak{g}$，使得

$$(x_j|[u_i, e]) = ([x_j, u_i]|e) = \delta_{ij}, \text{ for any } i, j,$$

以及 $[x_j, u_j] \in \mathfrak{g}(-2)$，对于任意 $1 \le j \le m$。

例 24. 回顾式 (4.3) 中 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 的矩阵实现。怪李超代数 $\mathfrak{q}(n)$ 可实现为 $\mathfrak{gl}(n|n)$ 的如下子代数：

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{q}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \right\},$$

其中 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。$\mathfrak{q}(n)$ 的主有限 W-超代数已在 [Zh 第 3] 节中通过一个奇退化不变超对称双线性形式定义。我们将用此例说明定理 22。我们指出，对于此例，$\mathrm{Wh}^{\zeta}(-) : \mathfrak{g}\text{-Wmod}^{\zeta} \to W_{\zeta}\text{-Mod}$ 是一个等价，这一事实已在 [Zh 的定理 3.9] 中确立。

对于 $1 \le a$、$b \le n$，回忆一下，我们将 $E_{ab} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 定义为在 (a, b) 位置为 1、其余位置为 0 的初等矩阵。定义 $\mathfrak{g}$ 的以下基元素：

$$e_{ab} := \begin{pmatrix} E_{ab} & 0 \\ 0 & E_{ab} \end{pmatrix}, \quad f_{ab} := \begin{pmatrix} 0 & E_{ab} \\ E_{ab} & 0 \end{pmatrix}, \text{ for } 1 \le a, b \le n.$$

按照 [PS2],，我们考虑由 $\deg(e_{ab}) = \deg(f_{ab}) := 2(a-b)$ 确定的 $\mathfrak{g}$ 的偶 $\mathbb{Z}$-分次。于是，幂零子代数 $\mathfrak{m}$ 由 e_{ab}, f_{ab}（$1 \le a < b \le n$）生成，其特征 ζ 由 $\zeta(e_{a,\ a+1}) = 1$ 以及 $\zeta(f_{a,\ a+1}) = 0$（$1 \le a \le n-1$）确定。令 $\{u_i\}_{i=1}^{m'} := \{e_{ab} | \ 1 \le a < b \le n\}$, $\{u_i\}_{i=m'+1}^{m} := \{f_{cd} | \ 1 \le c < d \le n\}$ 并

$$x_i := \sum_{k\ge 0} e_{b+k,a+k+1}, \text{ for } u_i = e_{ab},$$
$$x_i := \sum_{k\ge 0} (-1)^k f_{b+k,a+k+1}, \text{ for } u_i = f_{ab}.$$

通过直接计算，$\{u_i\}_{i=1}^m$ 和 $\{x_i\}_{i=1}^m$ 满足定理 22 中的条件 (1)–(3)。因此，$\mathfrak{q}$（n）情形下的定理 B 可由定理 22 推出。

定理 22 的证明。利用与引理 15 和定理 16 中相同的论证，我们只需证明 Whittaker 函子 $\mathrm{Wh}^{\zeta}(-) : \mathfrak{g}\text{-Wmod}^{\zeta} \to W_{\zeta}\text{-Mod}$ 是一个等价。证明遵循 [Sk1]，中李代数情形所采用的相同策略，但做了少量修改。接下来，我们的目标是确立断言 (5.4)、(5.5)，同时省略与李代数情形类似的部分；有关这些部分的详细信息，请参阅前引文献。我们将调整 [Sk2 中定理 1.3] 的证明中的论证；另请参阅 [WZ 中命题 4.2] 的证明。

首先，我们定义由所有满足 $r_1 r_2 \cdots r_\ell v$ 且具有 $v \in \mathrm{Wh}^{\zeta}(M)$ 的元素 $r_1 r_2 \cdots r_\ell v$ 张成的子空间 $M_{i,j} \subseteq M$

$$\ell \ge j,\ r_1 \in \mathfrak{g}(-2+i_1), r_2 \in \mathfrak{g}(-2+i_2), \ldots, r_\ell \in \mathfrak{g}(-2+i_\ell), \tag{5.6}$$
$$\text{where } i_1, i_2, \ldots, i_\ell > 0 \text{ such that } i_1 + i_2 + \cdots i_\ell \le i. \tag{5.7}$$

定义 $M_{i,\ j}=M_{i,\ 0}$ 对于任意 $i\geq 0$ 和 $j<0$。此外，对于任意 $i<0$，令 $M_{i,\ j}=0$.

于是根据定义，对于任意$i\leq i'$、 $j\geq j'$ 和 $c>0$，我们有$M_{i,j}\subseteq M_{i',j'}$和 $\mathfrak{g}(-2+c)M_{i,j}\subseteq M_{i+c,\ j+1}$。

在下文中，我们用 $|u|$ 表示齐次元素 $u\in U(\mathfrak{g})$的奇偶性。设 $y\in\mathfrak{g}(-d)$满足 $d\geq 2$ 和$y\in\mathfrak{m}_{\bar{0}}\cup\mathfrak{m}_{\bar{1}}$。设 r_1、 . . . 、 $r_\ell\in\mathfrak{g}$ 是相对于 $\mathfrak{g}$的 $\mathbb{Z}_2$-分次和 $\mathbb{Z}$-分次均为齐次的元素。若 $v\in\mathrm{Wh}_\zeta(M)$和 r_1、 . . . 、 r_ℓ满足条件（5.6）和（5.7），则我们得到证明 [Sk2, 定理 1.3]中的断言3的如下超类比：存在一个元素$R\in M_{i-d,j}+M_{i-d-1,0}$（依赖于 y、 $r_1\ldots$、 r_ℓ、 v），使得

$$(y-\zeta(y))r_1r_2\cdots r_\ell v=[y,r_1r_2\cdots r_\ell]v=\sum_{1\leq s\leq\ell,\ i_s=d}c_sr_1\cdots\widehat{r_s}\cdots r_\ell[y,r_s]v+R, \tag{5.8}$$

$$(y-\zeta(y))r_1r_2\cdots r_\ell v\in M_{i-d,j-1}+M_{i-d-1,0}, \tag{5.9}$$

其中，符号 $\widehat{r_s}$ 按照惯例表示省略 r_s，并且

$$c_s=(-1)^{|y|(|r_1|+\cdots+|r_{s-1}|+|r_{s+1}|+\cdots+|r_\ell|)+|r_s|(|r_{s+1}|+\cdots+|r_\ell|)}.$$

我们注意到 $[y,r_s]\in\mathfrak{g}(-2+i_s-d)$。因此，若 $i_s<d$，则 $[y,r_s]v=0$。此外，若$i_s=d$，则 $[y,r_s]v\in\mathrm{Wh}_\zeta(M)$。我们注意到，（5.8）中的第一个恒等式由 $(y-\zeta(y))r_1r_2\cdots r_\ell v=(y-(-1)^{|y|(|r_1|+\cdots+|r_\ell|)}\zeta(y))r_1r_2\cdots r_\ell v=[y,r_1r_2\cdots r_\ell]v$得出，因为$\zeta(\mathfrak{m}_{\bar{1}})=0$。由于方程（5.8）—（5.9）可通过类似于证明 [Sk2, Thoerem 1.3], 时所用的方法证明，我们省略证明。

假设 $\mathrm{wt}\,\mathsf{b}=i$ 和 $|\mathsf{b}|=j$，则有 $x^{\mathbf{b}}v\in M_{i,\ j}$。由方程（5.8）—（5.9），并采用与 [Sk2 中命题 4 的证明相同的论证，我们有$u^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}v=0$，只要 $\mathrm{wt}\,\mathsf{a}>\mathrm{wt}\,\mathsf{b}$ 或 $\mathrm{wt}\,\mathsf{a}=\mathrm{wt}\,\mathsf{b}$，且 $|\mathsf{a}|<|\mathsf{b}|$。

最后，令 $\mathrm{wt}\,\mathsf{a}=\mathrm{wt}\,\mathsf{b}=i$ 且 $|\mathsf{a}|=|\mathsf{b}|=j$。还需证明，对于 $\mathsf{a}\neq\mathsf{b}$ 和 $u^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{a}}v=cv$，存在某个非零的 $c\in\mathbb{C}$，使得 $u^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}v=0$。按照 [Sk2 定理 1.3], 中命题 6 证明的思路，我们对 j作归纳法。假设 $j>0$，且对更小的 j，这些断言均成立。定义 p，使得 $a_p\neq 0$，并且对任意 $p<s\leq m$，都有$a_s=0$。记 e_p 为一个 m 元组，其第 p 个位置为 1，其余位置均为 0。于是有 $u^{\mathbf{a}}=u^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}(u_p-\zeta(u_p))$。由方程（5.8）—（5.9）以及以下事实：$u^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}M_{i-d_p,\ j}=u^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}M_{i-d_p-1,\ 0}=0$，可得

$$u^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}v=\sum_{b_s>0,\ d_s=d_p}q_su^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_p}[u_p,x_s]v=\sum_{b_s>0,\ d_s=d_p}q_su^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_p}\zeta([u_p,x_s])v, \tag{5.10}$$

对某些标量 q_s。由于上述求和中有 $[u_p,x_s]\in\mathfrak{g}(-2)$，我们得到 $u^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}v=0$，前提是 $b_p=0$。此外，根据假设，只要$[u_p,x_s]\in\mathfrak{g}(-2)$ 且 $p\neq s$、$[u_p,x_p]\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}$，就有 $\zeta([u_p,x_s])=0$。因此，若 $b_p>0$，则有

$$u^{\mathbf{a}}x^{\mathbf{b}}v=c_p'b_pu^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_p}\zeta([u_p,x_p])v=c_p'b_pu^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_p}v, \tag{5.11}$$

其中 $c_p'=\pm 1$ 取决于 $|x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_{p-1}^{b_{p-1}}|$ 和 $|u_p|$ 的奇偶性，如方程（5.8）—（5.9）所述。根据归纳假设，方程（5.5）得证。如果 $\mathsf{a}=\mathsf{b}$，那么再次根据归纳假设，我们得到一个非零向量 $u^{\mathbf{a}-\mathbf{e}_p}x^{\mathbf{b}-\mathbf{e}_p}v\in\mathbb{C}v$。(5.4)中的结论也随之成立。证明完毕。□

5.2. 佩里普莱克蒂克李超代数 $\mathfrak{p}(n)$。本节的目的是定义与佩里普莱克蒂克李超代数 $\mathfrak{p}(n)$ 相关联的主有限 W-超代数，并建立 Skryabin 型等价。

5.2.1. $\mathfrak{p}(n)$ 的主有限 W-超代数。回顾 $\mathfrak{p}(n) \subseteq \mathfrak{gl}(n|n)$ 的如下矩阵实现：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \right\},$$

其中 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, B 为对称的， C 为斜对称的。对于 $1 \le a, b \le n$，定义齐次元素 e_{ab}, s_{ab} 和 y_{ab} 如下：

$$e_{ab} = \begin{pmatrix} E_{ab} & 0 \\ 0 & -E_{ba} \end{pmatrix}, \quad \text{for any } 1 \le a, b \le n;$$

$$s_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ab} + E_{ba} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for any } 1 \le a < b \le n;$$

$$s_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & E_{aa} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for any } 1 \le a \le n;$$

$$y_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ab} - E_{ba} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{for any } 1 \le a < b \le n.$$

最后，当 a, b 不满足 $1 \le a \le b \le n$ 时，我们令 $s_{ab} = 0$。类似地，当 a, b 不满足 $1 \le a < b \le n$ 时，我们令 $y_{ab} = 0$。佩里普莱克蒂克李超代数是 I 型的，也就是说，存在一个相容的 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$，由下式确定

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \ \mathfrak{g}_1 = \sum_{a\le b} \mathbb{C} s_{ab}, \text{ and } \mathfrak{g}_{-1} = \sum_{a<b} \mathbb{C} y_{ab}.$$

Let

$$f := \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a) e_{a,a+1}, \ h := \sum_{a=1}^{n} (2a - 1 - n) e_{aa}, \ e := \sum_{a=1}^{n-1} e_{a+1,a}.$$

那么， e 是 $\mathfrak{sl}$ 二元组 $\langle e、 f、 h\rangle$ 中的一个主幂零元。这产生了一个由 k(
$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} \mathfrak{g}$) 确定的偶 $\mathbb{Z}$-分次，即
(1) $\deg(e_{ab}) = 2(a-b)$ 。(2) $\deg($
$s_{ab}) = 2(a+b) - 2n - 2$。(3) $\deg($
$y_{ab}) = 2n + 2 - 2(a+b)$】【。
此处我们使用 $\deg(x)$ 表示齐次元素 x 相对于 $\mathbb{Z}$ 分次的次数，即，若且唯若 $x \in \mathfrak{g}(k)$，则 $\deg(x) = k$。因此，我们有

$$\deg(e_{ab}) = \deg(e_{cd}) \Leftrightarrow (a, b) = (c - \ell, d - \ell), \text{ for some } \ell \in \mathbb{Z}.$$

$\deg(s_{ab}) = \deg(s_{cd}) \Leftrightarrow \deg(y_{ab}) = \deg(y_{cd}) \Leftrightarrow (a, b) = (c - \ell, d + \ell)$, 对于某个 $\ell \in \mathbb{Z}$。
我们定义 $\mathfrak{m} = \bigoplus_{k\le -2} \mathfrak{g}(k)$。将 $(\cdot|\cdot)_0$ 定义为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 上的迹型，即对于任意 x、 $y \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，有 $(x|y)_0 :=\mathrm{tr}(xy)$。然后， $\mathfrak{m}_{\bar{0}}$ 的特征 $(\cdot|e) : \mathfrak{m}_{\bar{0}} \to \mathbb{C}$ 延拓为 $\mathfrak{m}$ 的以下特征：

$$\zeta(e_{a,a+1}) = 1, \text{ for any } 1 \le a \le n-1,$$

$$\zeta(e_{a,b}) = 0, \text{ for } b-a>1,$$

以及 $\zeta(\mathfrak{m}_{\bar{1}}) = 0$。按照（5.1）中的定义，定义 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}(n)$ 的主有限 W-超代数 W_ζ。

5.2.2. $\mathfrak{p}(n)$ 的定理 B 证明。对于 $\mathfrak{p}(n)$ 的情形，定理 B 的结论可由下述定理推出。

定理 25. 保留上述记号。存在 $\mathfrak{m}$ 的一个齐次基 $\{u_i\}$ 以及 $\mathfrak{g}$ 中的一组齐次元素 $\{x_i\}$，使得定理 22 中的条件 (1)–(3) 得以满足。特别地，对于任意非奇异$\eta \in \mathrm{ch}\mathfrak{m}_{\bar{0}}$，$\mathcal{N}(\eta)$ 与 W_ζ-fdmod 等价。

在给出定理 25 的证明之前，我们需要以下几个有用的引理。

引理 26. 对于任意满足 $[s_{ab}, y_{cd}] \in \mathfrak{m}$ 的 $1 \le a \le b \le n$ 和 $1 \le c < d \le n$，有

$$\zeta([s_{ab}, y_{cd}]) = \begin{cases} 1, & for\ (c,d) = (a, b+1); \\ -1, & for\ (c,d) = (a+1, b); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

证明。由于这可以通过直接计算证明，我们省略证明。 □

对于任意的 $1 \le a \le b \le n$ 和 $1 \le c < d \le n$，我们定义

$$\overline{s}_{ab} := \sum_{k\ge 0} y_{a-k,b+k+1},\ \overline{y}_{cd} := \sum_{k\ge 0} s_{c+k,d-k-1}. \tag{5.12}$$

注意到 $[s_{ab}, \overline{s}_{ab}]$, $[y_{cd}, \overline{y}_{cd}] \in \mathfrak{g}(-2)$。

引理 27. 我们有

$$\zeta([s_{ab}, \overline{s}_{ab}]) = 1, \tag{5.13}$$

$$\zeta([s_{a+\ell,b-\ell}, \overline{s}_{ab}]) = 0,\ for\ any\ \ell \neq 0, \tag{5.14}$$

$$\zeta([y_{cd}, \overline{y}_{cd}]) = 1, \tag{5.15}$$

$$\zeta([y_{c+\ell,d-\ell}, \overline{y}_{cd}]) = 0,\ for\ any\ \ell \neq 0. \tag{5.16}$$

证明. 由引理 26，我们有 $\zeta([s_{ab}, \overline{s}_{ab}]) = \zeta([s_{ab}, y_{a,b+1}]) = 1$ 和 $\zeta([s_{a+\ell,b-\ell}, \overline{s}_{ab}]) = 0$，对任意的 $\ell > 0$。当 $\ell < 0$ 时，由引理 26 可得

$$\zeta([s_{a+\ell,b-\ell}, \overline{s}_{ab}]) = \zeta([s_{a+\ell,b-\ell}, y_{a+\ell,b-\ell+1}]) + \zeta([s_{a+\ell,b-\ell}, y_{a+\ell+1,b-\ell}]) = 0.$$

方程 (5.15)、(5.16) 可用类似的方法证明。证明完毕。 □

定理 25 的证明. 由于根据命题 36 有 $\mathcal{N}(\eta) \cong \mathcal{N}(\zeta)$，我们不妨设 $\eta = \zeta$。令 $m := \dim \mathfrak{m}$ 并定义

$$\{u_i\}_{i=1}^m := \{e_{ab} |\ \deg(e_{ab}) < 0\} \cup \{s_{ab} |\ \deg(s_{ab}) < 0\} \cup \{y_{cd} |\ \deg(y_{cd}) < 0\}.$$

因此，$\{u_i\}_{i=1}^m$ 构成 $\mathfrak{m}$的一组齐次基。

对于任意 $1 \le a < b \le n$，定义

$$\overline{e}_{ab} := \sum_{k\ge 0} e_{b+k,a+k+1}$$

使得 $[e_{ab},\overline{e}_{ab}]\in\mathfrak{g}(-2)$ 和 $\zeta([e_{ab},\overline{e}_{ab}])=1$ 且 $\zeta([e_{ab},\overline{e}_{cd}])=0$，只要 $[e_{ab},\overline{e}_{cd}]\in\mathfrak{g}(-2)$ 且 e_{ab}、e_{cd} 不同。我们将验证，对于 $x_i:=\overline{u}_i$，条件 (1)–(3) 满足定理 22，其中 $1\le i\le m$。根据引理 27，接下来只需证明：只要 $[u_i,\overline{u}_j]\in\mathfrak{g}(-2)$ 且 $i\neq j$，就有$\zeta([u_i,\overline{u}_j])=0$。

若 $[u_i,\overline{u}_j]\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$，则结论成立，因为 $\zeta(\mathfrak{m}_{\bar{1}})=0$。因此，剩下只需考虑情形 $u_i,u_j\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$。若对某个 $k=\pm1$ 有 $u_i\in\mathfrak{g}_k,u_j\in\mathfrak{g}_{-k}$，则 $\overline{u}_j\in\mathfrak{g}_k$，因此 $[u_i,\overline{u}_j]=0$。若 $u_i=s_{ab}$ 且 $u_j=s_{cd}$，则由假设可得

$$\deg(s_{ab})+\deg(\overline{s}_{cd})=-2=\deg(s_{ab})+\deg(\overline{s}_{ab}).$$

这意味着 $\deg(\overline{s}_{cd})=\deg(\overline{s}_{ab})$，因此对于某个整数 $\ell\neq0$，有 $(a,b)=(c+\ell,d-\ell)$。由此，根据引理 27 中的 (5.14)，$\zeta([s_{ab},\overline{s}_{cd}])=0$。情形 $u_i=y_{ab}$ 且 $u_j=y_{cd}$ 的结论可用类似方法证明。结论由定理 22 得出。□

回顾标准 Whittaker 模

$$M(\lambda,\zeta):=K(M_0(\lambda,\zeta))=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1}^{\mathfrak{g}}(M_0(\lambda,\zeta))$$

来自 [Ch1，第 3.2]节。我们对单的 W_ζ-模有如下分类:

推论 28。集合

$$\{\mathrm{Wh}_\zeta(M(\lambda,\zeta))|\ \lambda\in\mathfrak{h}^*\ \textit{is anti-dominant}\}$$

是 W_ζ 的两两不同构简单模的完备集合。特别地，任意单的 W_ζ-模都是有限维的。

例 29。我们说明 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}(2)$ 的单的 W_ζ-模的例子。在此情形下，我们有 $\mathfrak{m}=\mathbb{C}e_{12}+\mathbb{C}s_{11}$ 和 $\zeta(e_{12})=1$，$\zeta(s_{11})=0$。我们将 $M_0(\lambda,\zeta)$ 视为 $M(\lambda,\zeta)$ 的一个 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-子模。设 $v_\lambda\in\mathrm{Wh}_\zeta^0(M_0(\lambda,\zeta))$ 是一个非零 Whittaker 向量。由于 Res $M(\lambda,\zeta)\cong\Lambda(\mathfrak{g}_{-1})\otimes M_0(\lambda,\zeta)$，由 [Ko2，定理 4.6]，有 $\mathrm{Wh}_\zeta^0(\mathrm{Res}\ M(\lambda,\zeta))=\mathbb{C}v_\lambda+\mathbb{C}y_{12}v_\lambda$；另见 [Ch1，例 32]。我们计算

$$s_{11}y_{12}v_\lambda=e_{12}v_\lambda\neq0.$$

因此，任意单的 W_ζ-模都具有 $\mathrm{Wh}\zeta(M(\lambda,\zeta))=\mathbb{C}v_\lambda$ 的形式。我们指出，这个子空间与 $\mathrm{Wh}_\zeta^0(M(\lambda,\zeta))\cap\{m\in M(\lambda,\zeta)|\ \mathfrak{g}_1m=0\}$ 相同；参见 Ch1，例 32], ，其中考虑了 Whittaker 向量的另一种定义。

6. Super Soergel Struktursatz for functor $\mathrm{Wh}_\zeta\circ\Gamma_\zeta(-)$

本节中，我们令 $\mathfrak{g}$ 为基本经典李超代数或奇异型李超代数。令 W_ζ 表示第 4 节和第 5 节中考虑的主有限 W-超代数。对于给定的子集 $\Upsilon\subseteq\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$，令 W_ζ-fdmod$_\Upsilon$ 为 W_ζ-fdmod 的 Serre 子范畴，它由模 $\mathrm{Wh}\zeta(\Gamma_\zeta(L(\lambda)))$（其中 $\lambda\in\Upsilon$）的合成因子生成。

6.1. W_ζ-fdmod 的块分解。本小节中，我们考虑基本经典李超代数 $\mathfrak{g}$。

6.1.1. 中心块。回顾一下，pr : $U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})/I_\zeta$ 表示自然投影。注意，pr$(Z(\mathfrak{g}))$ 是包含在 W_ζ 中心内的一个子代数。根据定理

16，每个单的 W_ζ-模都具有 pr($Z(\mathfrak{g})$) 的一个特征。因此，范畴W_ζ-fdmod 具有中心块分解

$$W_\zeta\text{-fdmod} = \bigoplus_{\chi} W_\zeta\text{-fdmod}_\chi,$$

根据 $\mathfrak{g}(Z)$ 的特征 χ。这里， W_ζ-fdmod$_\chi$ 是 W_ζ-fdmod 的全子范畴，由 W_ζ-模构成；对于任意 $x \in Z(\mathfrak{g})$，pr(x)$-\chi(x)$ 均局部幂零。根据定理 16， W_ζ-fdmod$_\chi$ 是由 Wh$\zeta(\Gamma_\zeta(L(\lambda)))$ 的合成因子（其中 $\chi_\lambda = \chi$）生成的 W_ζ-fdmod$_\chi$ 的 Serre 子范畴。

我们将给出一个更细致的分解。设 χ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个中心特征，并定义 W_ζ-fdmod$_{\Upsilon,\ \chi}$: $= W_\zeta$-fdmod$_\Upsilon \cap W_\zeta$-fdmod$_\chi$。于是，我们有

$$W_\zeta\text{-fdmod}_\chi = \bigoplus_{\Upsilon \in \mathfrak{h}^*/\sim} W_\zeta\text{-fdmod}_{\Upsilon,\chi},$$

其中 W_ζ-fdmod$_{\Upsilon,\ \chi} \cong \mathcal{N}(\Upsilon, \zeta)_\chi$，且 $\mathfrak{h}^*$ 上的等价关系 $\sim$ 由（3.2）给出。以下是第 1 节中定理 A 和定理 B 的推论。

推论 30. 设 $\Upsilon \subseteq \Lambda$ 在 $\sim$ 下封闭。则以下结论成立。

(1) 集合 $\{\text{Wh}\zeta(\Gamma_\zeta(L(\lambda)))|\ \lambda \in \Upsilon \text{ is } \Pi_\zeta\text{-free } \chi_\lambda = \chi\}$ 是 Wζ-fdmod$_{\Upsilon,\ \chi}$ 中所有两两非同构单模的完备列表。(2) 假设 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 是强典型的。那么 Wh$\zeta(\Gamma_\zeta(L(\lambda)))$ 是 W_ζ-fdmod$_{\chi_\lambda}$ 中唯一的单模。在这种情况下， W_ζ-fdmod$_{\chi_\lambda}$ 等价于 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 上有限维模范畴的一个不可分解块。

注 31. 将广义 Gelfand-Graev 模 Q_ζ 限制为一个 ($Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ W_ζ)-双模后，函子 $Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} -$ 定义了一个从 W_ζ-fdmod 到局部有限 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$- 模范畴的正合函子。对于给定的单 W_ζ-模 S，以下条件等价

(1) $S \cong \text{Wh}\zeta(\Gamma_\zeta(L(\lambda)))$, 对某个 $\lambda \in \Lambda$。(2) $Q_\zeta \otimes_{W_\zeta} S$ 包含一个一维的 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$-模，它由与一个整数权相关联的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的中心特征诱导而来。

6.1.2. $\mathfrak{gl}(m|n)$ 的不可分解块。本小节中，我们令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m|n)$。我们给出 W_ζ-fdmod 中任意不可分解块内简单对象的组合描述。为更详细地说明这一点，回顾 (4.3) 中 $\mathfrak{g}$ 的矩阵实现里的初等矩阵 E_{ij}。令 $\mathfrak{h}$ 为由 E_{ii} 张成的 Cartan 子代数，其中 $1 \le i \le m+n$ 的对偶基 $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ 由 $\epsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij}$ 确定，对 $1 \le i, j \le m+n$。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$ 为由超迹 str 诱导的非退化双线性形式，即，对于 $1 \le i \le m+n$， ϵ_i 两两正交，并且 $\langle \epsilon_j, \epsilon_j \rangle = 1, \langle \epsilon_k, \epsilon_k \rangle = -1$，对于 $1 \le j \le m$ 和 $m+1 \le k \le m+n$。令 $\mathcal{O}$ 为相对于由 E_{ij} 张成的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 的 BGG 范畴，其中$1 \le i \le j \le m+n$。

定义 $\mathfrak{h}^*$ 上的等价关系 $\approx$，规定

$$\lambda \approx \mu, \text{ for } \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*,$$

若存在两两正交的奇根 $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$、整数 $c_1,\dots,c_\ell$ 以及一个元素 $w\in W$，使得

$$\mu+\rho=w(\lambda+\rho-\sum_{i=1}^{\ell}c_i\alpha_i),\ \langle\lambda+\rho,\alpha_i\rangle=0,\ 1\le i\le\ell.$$

回顾 (3.2) 中的关系 $\sim$，我们注意到 $\approx$ 比 $\sim$更精细，即 $\lambda\approx\mu$ 蕴含 $\lambda\sim\mu$，因为 $W(\mathfrak{l}_\zeta)=W$。回顾第 3.1 节中的简单 Whittaker 模 $L(\lambda,\zeta)\cong\Gamma_\zeta(L(\lambda))$，其中 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$。下面的命题用 $\approx$描述了 W_ζ-fdmod 中的联系原理。

命题 32。对于每个 $\Upsilon\in\mathfrak{h}^*/\sim$，子范畴 $\mathcal{N}(\Upsilon,\zeta)_x$ 和 W_ζ-fdmod$_{\Upsilon,\chi}$ 都是不可分解的。此外，若 $\lambda\in\Upsilon$ 满足 $\chi_\lambda=\chi$，则以下集合

$$\{\mathrm{Wh}_\zeta(L(\mu,\zeta))|\ \mu\approx\lambda\},$$

是 W_ζ-fdmod$_{\Upsilon,\chi}$ 中简单对象的完全集。

证明。设 $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$。我们将证明以下两个条件等价：

(1) $\lambda\approx\mu$。(2) $\lambda\sim\mu$ 和 $\chi_\lambda=\chi_\mu$。

为证明 (1) 与 (2) 的等价性，我们首先回顾 [CW, 第 2.2 节6], 中关于中心特征的描述；该描述是对$Z(\mathfrak{g})$的描述的推论；另见 [K2, Se]。也就是说，$\chi_\lambda=\chi_\mu$ 当且仅当存在两两正交的奇根 $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$、复数 $b_1,\dots,b_\ell$ 以及 $w\in W$，使得$\mu+\rho=w($$\lambda+\rho-\sum_{i=1}^{\ell}b_i\alpha_i)$，并且 $\langle\lambda+\rho,\alpha_i\rangle=0$ 对 $1\le i\le\ell.$ 成立。这就证明了蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2)。

反过来，假设 $\lambda\sim\mu$ 且 $\chi_\lambda=\chi_\mu$。也就是说，对于某个 $w\in W$，我们有 $\lambda-w\cdot\mu\in\mathbb{Z}\Phi$ 且$\chi_\lambda=\chi_\mu=\chi_{w\cdot\mu}$。根据证明[CMW, 命题 3.3], 中所用的相同论证，可得 $\lambda\approx w\cdot\mu\approx\mu$。这就证明了 (1) 与 (2) 等价。

根据定理 16，只需证明 $L(\lambda,\zeta)$ 和 $L(\mu,\zeta)$ 属于 $\mathcal{N}(\zeta)$ 的同一个不可分解块，当且仅当 $\lambda\approx\mu$。如果 $L(\lambda,\zeta)$ 和 $L(\mu,\zeta)$ 属于同一个不可分解块，那么根据命题 8，$\chi_\lambda=\chi_\mu$ 和 $\lambda\sim\mu$，这意味着$\lambda\approx\mu$。

假设 $\lambda\approx\mu$ 满足 $\mu=w\cdot(\lambda-\sum_{i=1}^{\ell}c_i\alpha_i)$，其中 $w\in W$ 为某个元素，c_1，...，c_ℓ 为某些整数，且 α_1，...，α_ℓ 为两两正交的奇根，并满足 $\langle\lambda+\rho$、$\alpha_i\rangle=0$，其中 $1\le i\le\ell$。不失一般性，我们可以假设 $\ell=1$，并令 $\alpha:=\alpha_1$；这是因为一般情形可通过对 ℓ 作归纳法证明。此外，我们可以假设 w 是 W 的单位元，因为 $L(\mu,\zeta)\cong L(\lambda-\sum_{i=1}^{\ell}c_i\alpha_i,\zeta)$。若 α 是单根，即 $\alpha=\epsilon_m-\epsilon_{m+1}$，那么 Verma 模 $M(\lambda)$ 以 $L(\lambda-\alpha)$ 为合成因子；例如参见 CMW 定理 3.12] 的证明。这意味着标准 Whittaker 模 $M(\lambda,\zeta)$ 以 $L(\lambda-\alpha,\zeta)$ 为合成因子。由于 $M(\lambda,\zeta)$ 不可分解，因此 $L(\lambda,\zeta)$ 和 $L(\lambda-\alpha,\zeta)$ 属于同一个不可分解块。若 $-\alpha$ 是单的，我们交换 λ 和 $\lambda-\alpha$ 的角色，并得出相同结论。最后，假设 $\alpha\ne\epsilon_m-\epsilon_{m+1}$。我们选取满足 $x\alpha=\epsilon_m-\epsilon_{m+1}$ 的 $x\in W$。我们

可以观察到

$$L(\lambda-\alpha,\zeta)\cong L(x\cdot(\lambda-\alpha),\zeta)=L(x\cdot\lambda-x\alpha,\zeta).$$

由于 $L(x\cdot\lambda-x\alpha,\zeta)$ 和 $L(x\cdot\lambda,\zeta)\cong L(\lambda,\zeta)$ 属于同一个不可分解块，结论得证。证明完毕。□

我们指出，在 $\Upsilon\subseteq\Lambda$ 的情形下，命题 32 也可由定理 16 和 [Ch2, 定理 C] 推出。

6.2. 范畴 W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$。在本小节中，我们令 $\mathfrak{g}$ 为基本经典李超代数或奇异型李超代数。回顾第 1.1.2 节，$\mathfrak{p}=\mathfrak{l}_\zeta+\mathfrak{n}_{\bar{0}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的一个抛物子代数，且包含 $\mathfrak{l}_\zeta$ 作为 Levi 子代数。对于正整数 n 和权 $\lambda\in\mathfrak{h}^*_{\bar{0}}$，我们定义 $M^n_0(\lambda,\zeta):=U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})\otimes_{U(\mathfrak{p})}Y^n_\zeta(\lambda,\zeta)\in\mathcal{N}_0(\zeta)$，其中$Y^n_\zeta(\lambda,\zeta):=U(\mathfrak{l}_\zeta)/(\mathrm{Ker}\chi^{\mathfrak{l}_\zeta}_\lambda)^nU(\mathfrak{l}_\zeta)\otimes_{U(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{l}_\zeta)}\mathbb{C}_\zeta$；参见 [MS1, 第 5] 节。我们注意到$M^1_0(\lambda,\zeta)=M_0(\lambda,\zeta)$。

我们考虑 W_ζ-fdmod$_\Lambda$ 这一 W_ζ-fdmod 的全子范畴。令 $\nu\in\Lambda$ 在 W的点作用下保持不变。对于任意正整数 n，我们将 W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$ 定义为 Wh$_\zeta(E\otimes$Ind $M^n_0(\nu,\zeta))$ 的子商所构成的全子范畴，其中 E是任意有限维$\mathfrak{g}$-模。

设 $\Theta:\mathfrak{g}$-mod $\to\mathfrak{g}$-mod 是一个投射函子，则我们可以定义相应的投射函子 $\Theta^\zeta:=\mathrm{Wh}_\zeta\circ\Theta\circ Q_\zeta\otimes_{W_\zeta}-:W_\zeta$-fdmod $\to W_\zeta$-fdmod。这些函子在 $\mathfrak{g}$ 为约化的情形下已在文献中得到研究；例如参见[BK, 第 8], [节 Go]。我们将在下面的引理中总结 W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$ 的一些基本性质。

引理 33. 对于任意 $n\geq1$，我们有

(1) W_ζ-fdmod$_\Lambda=\bigcup_{k\geq1}W_\zeta$-fdmod$^k_\Lambda$。(2) W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$ 具有足够多的投射模。(3) W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$ 在施加投射函子后保持不变。(4) W_ζ-模 Θ^ζ(Wh$_\zeta$(诱导 $M^n_0(\nu,\zeta)$)) 是 W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$ 中的投射模。此外，对于投射函子 $\Theta:\mathfrak{g}$-模 $\to\mathfrak{g}$-模，$\Theta^\zeta($Wh$_\zeta$(诱导 $M^n_0(\nu,\zeta)$)) 的所有直和项构成了 W_ζ-fdmod$^n_\Lambda$中的全部投射模。

证明。利用定理 16，结论由 [Ch1、定理 16] 和 [Ch1、引理 14]推出。□

现在，我们将前几节中的结果汇总起来，给出定理 C 的证明如下。

定理 C 的证明。由定理10和定理34，$\Gamma_\zeta(-)$ $F_\nu(-)$ 与 $\mathcal{O}_\Lambda\to\mathcal{N}(\zeta)$ 同构，并满足 Serre 商函子 $\mathcal{O}_\Lambda\to\mathcal{O}_\Lambda/\mathcal{I}_\nu$ 的泛性质。由命题 9 可知，$\Gamma_\zeta(\mathcal{O}_\Lambda)=\mathcal{W}_\nu(\zeta)$，因此 W_ζ-fdmod$^1_\Lambda=$ Wh$_\zeta(\Gamma_\zeta(\mathcal{O}_\Lambda))$。第一个结论由定理 B 得出。最后，回顾在 [CCM, 第 7.4 节.3] 和 [CCM, 第 9] 节中定义的 Soergel 函子的超版本 $\mathbb{V}^{sup}$。由于函子 Wh$_\zeta\circ\Gamma_\zeta(-)$ 在等价意义下与 $\mathbb{V}^{sup}$ 同构，根据 [CCM, 推论 54], ，结合 [AM, 定理 7.2] ，我们得出它在投射模上是全忠实的。□

Appendix A. Whittaker categories of queer Lie superalgebras

本节的目标是证明第 1 节中定理 A 第 (2) 部分关于 queer 李超代数 $\mathfrak{g}:=\mathfrak{q}(n)$ 的一个类似结论。

回忆例 24 中 $1 \le i,j \le n$ 的生成元 e_{ij} 和 f_{ij}。令 $\mathfrak{b}$ 为由 $\{e_{ij}, f_{ij} | \ 1 \le i \le j \le n\}$ 张成的 Borel 子代数，其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 分别由 e_{ii}, f_{ii} （对于 $1 \le i \le n$）张成。令 $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 的对偶基 $\{\epsilon_i | 1 \le i \le n\}$ 满足 $\epsilon_j(e_{ii}) = \delta_{ij}$。我们用 $\mathcal{O}$ 表示相对于 $\mathfrak{b}$ 的 BGG 范畴。

若权 $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 满足以下条件，则称其为 [FM] 意义下的正则占优强典型：

(1) 对于整 Weyl 群 λ 中的任意元素 w， $\lambda - w\lambda$ 都是正根的非零和。(2) 对任意 $1 \le i \ne j \le n$， $\lambda_i + \lambda_j \ne 0$ 和 $\lambda_i \ne 0$。

Frisk 和 Mazorchuk 在 [FM] 中证明，对于这样的权 λ，存在一个正整数 k，使得 Ind(–)$_\chi$ 和 Res(–)$_{\chi^0}$ 分别分解为某些函子 F_1 和 G_1 的 k 个副本的直和，这些函子分别是 $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ 与 $\mathcal{O}^{\bar{0}}_{\chi_\lambda^0}$ 之间的函子。此外， F_1 和 G_1 产生互逆等价，使得 Ind M_0 $(\lambda)_{\chi_\lambda} = M(\lambda)^{\oplus k}$；另见 [FM，定理 1] 和 [FM，命题 2]。

令 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{b}$ 的幂零根。固定 $\mathfrak{n}_{\bar{0}}$ 的一个特征 ζ。设 $\nu \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ 为一个支配权，在 W 的点作用下，其稳定子子群为 $W(\iota_\zeta)$。那么存在一个一般权 $\lambda \in \nu + \Lambda$，使得 Ind M_0 $(\lambda)_{\chi_\lambda} = M(\lambda)^{\oplus k}$，其中 k 为某个正整数。我们有以下推论。

定理 34. 存在同构函子

$$\Gamma_\zeta(-) \cong F_\nu(-) : \mathcal{O}_{\nu+\Lambda} \to \mathcal{N}(\zeta),$$

并且它们满足从 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 到由 Serre 子范畴 $\mathcal{I}_\nu$确定的商范畴的商函子的泛性质，至多相差 $\mathcal{W}_\nu(\zeta)$ 与 $\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}/\mathcal{I}_\nu$ 之间的一个等价。因此，集合 $\{\Gamma_\zeta(L(\mu))| \ \mu \in \Lambda(\nu)\}$ 是 $\mathcal{N}$ $(\zeta)_{\nu+\Lambda}$ 中两两不同构的简单 Whittaker 模的一个完备列表。

证明. 本定理可仿照证明定理 10 时采用的策略来证明。我们的目标是证明从$\mathcal{O}_{\nu+\Lambda}$ 到 $\mathcal{N}(\zeta)$的两个函子 $\Gamma_\zeta(–)$ 和 $F_\nu(–)$ 同构。如上所述，存在一个权 $\lambda \in \nu + \Lambda$，使得 Ind $M_0(\lambda)_{\chi_\lambda} = M(\lambda)^{\oplus k}$，其中 k 为某个正整数。我们计算得

$$\Gamma_\zeta(M(\lambda)^{\oplus k}) \cong \Gamma_\zeta(\operatorname{Ind} M_0(\lambda))_{\chi\lambda} \cong \operatorname{Ind} M_0(\lambda,\zeta)_{\chi\lambda} \cong F_\nu(\operatorname{Ind} M_0(\lambda))_{\chi\lambda} \cong F_\nu(M(\lambda)^{\oplus k}).$$

根据 Krull–Schmidt 定理，我们有 $\Gamma_\zeta(M(\lambda)) \cong F_\nu(M(\lambda))$。现在，利用引理 2，按照定理 10 中的类似论证即可得出结论。□

关于简单 Whittaker 模的湮灭子思想的研究可追溯至 [Ko2, Theorem 3.9]。以下推论是 $\mathfrak{q}(n)$ 的 [CC1, Corollary 35] 的类似结果。

推论 35. 设 $\mu \in \Lambda(\nu)$。那么 $\Gamma_\zeta(L(\mu))$ 和 $L(\mu)$ 的湮灭子理想相同。

Appendix B. Equivalence of the categories $\mathcal{N}(\zeta)$

设 $\mathfrak{g}$ 为一个基本经典李超代数或奇异李超代数。本节的目标是建立关于不同 Borel 子代数和特征 ζ 的范畴 $\mathcal{N}(\zeta)$ 之间的若干等价关系。为了加以区分，对于给定的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$，我们用 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}$ 表示关于 $\mathfrak{b}$ 的 $\mathfrak{g}$ Whittaker 模范畴。类似地，对于一个特征 $\zeta\in\mathfrak{n}_{\bar{0}}$，我们将 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)$ 定义为 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}$ 的全子范畴，其中包含的模满足：对于任意 $x\in\mathfrak{n}_{\bar{0}}$，$x-\zeta(x)$ 的作用都是局部幂零的。

下面的命题是本节的主要结果。

命题 36. 设 $\mathfrak{b}$和 $\mathfrak{b}'$ 是 $\mathfrak{g}$的两个 Borel子代数。那么 Whittaker 范畴 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}$ 和 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}'}$ 等价。此外，若 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{b}$ 和ζ的幂零根，且$\eta\in\mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}$满足 $\mathfrak{l}_\zeta=\mathfrak{l}_\eta$。那么， $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)$ 与 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\eta)$ 等价。

在证明定理 10 之前，对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}(n)$ $\mathfrak{q}(n)$ 的情形，我们需要以下两个预备引理。回顾第 5.2 节中 $\mathfrak{p}(n)$ 的生成元 e_{ij}、s_{ij}、y_{ij}，以及例 24 中 $\mathfrak{q}(n)$ 的生成元 e_{ij} 和 f_{ij}。

引理 37. 假设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}(n)$。设 $\mathbf{a}:=(a_1,\dots,a_{n-1})$ 是一个由非零复数组成的序列。我们定义以下复数

$$a_{ij}:=a_ia_{i+1}\cdots a_{j-1},\quad a_{ji}:=a_{ij}^{-1}=a_{j-1}^{-1}a_{j-2}^{-1}\cdots a_i^{-1},\quad a_{kk}:=1, \tag{B.1}$$

对于任意 $1\le i<j\le n$ 和 $1\le k\le n$。令 $\phi:=\phi_{\mathbf{a}}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为由.....确定的线性映射。

$$\phi:\ e_{ij}\mapsto a_{ij}e_{ij}, \tag{B.2}$$

$$s_{ii}\mapsto s_{ii},\ s_{pq}\mapsto a_{pn}a_{qn}s_{pq}, \tag{B.3}$$

$$y_{pq}\mapsto a_{pn}^{-1}a_{qn}^{-1}y_{pq}, \tag{B.4}$$

对于任意的 $1\le i$、j、$k\le n$ 和 $1\le p<q\le n$。那么， ϕ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构。

证明。通过直接计算，我们得到。

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}, \tag{B.5}$$

对任意 $1\le i$、j、$k\le n$。这意味着 ϕ限制为 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}=\mathfrak{gl}(n)$ 上的自同构；（另见 [Mu，引理 5.5.9]）。

令 $1\le i$、j、$k\le n$ 和 $1\le p<q\le n$。我们将推导出，对于任意 x、$y=e_{ij}$、s_{ii}、s_{pq}、y_{pq}，有 $\phi([x,y])=[\phi(x)\ \phi(y)]$,。利用 (B.5)，我们计算得出

$$[\phi(e_{ij}),\phi(s_{pq})]=a_{ij}a_{pn}a_{qn}[e_{ij},s_{pq}]=\begin{cases}a_{in}a_{qn}s_{iq}, & \text{for } j=p \text{ and } i\le q;\\ a_{in}a_{qn}s_{qi}, & \text{for } j=p \text{ and } q\le i;\\ a_{in}a_{pn}s_{ip}, & \text{for } j=q \text{ and } i\le p;\\ a_{in}a_{pn}s_{pi}, & \text{for } j=q \text{ and } p\le i;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这等于 $\phi([e_{ij},s_{pq}])$。此外，我们有 $[\phi(e_{ij})\ \phi(s_{kk})]=\phi([e_{ij},s_{kk}])$。

接下来，利用 (B.5) 可得

$$[\phi(e_{ij}),\phi(y_{pq})]=a_{ij}a_{pn}^{-1}a_{qn}^{-1}[e_{ij},y_{pq}]=\begin{cases}-a_{jn}^{-1}a_{qn}^{-1}y_{jq}, & \text{for } i=p \text{ and } j<q;\\ a_{jn}^{-1}a_{qn}^{-1}y_{qj}, & \text{for } i=p \text{ and } j>q;\\ a_{jn}^{-1}a_{pn}^{-1}y_{jp}, & \text{for } i=q \text{ and } j<p;\\ -a_{jn}^{-1}a_{pn}^{-1}y_{jp}, & \text{for } i=q \text{ and } j>p;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这等于 $\phi([e_{ij},y_{pq}])$。

同理，我们可以计算得出

$$[\phi(s_{ij}),\phi(y_{pq})]=a_{in}a_{jn}a_{pn}^{-1}a_{qn}^{-1}[s_{ij},y_{pq}]=a_{in}a_{jn}a_{np}a_{nq}[s_{ij},y_{pq}]=\phi([s_{ij},y_{pq}]).$$

证明至此完成。 □

下述引理可直接验证为引理 37。

引理 38. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{q}(n)$。设 $\mathbf{a}:=(a_1,\dots,a_{n-1})$ 是一个由非零复数组成的序列。对任意 $1\le i,j\le n$，如 (B.1) 中所示，定义复数 a_{ij}。令 $\phi:=\phi_{\mathbf{a}}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为由下式确定的线性映射

$$\phi:\ e_{ij}\mapsto a_{ij}e_{ij},\ f_{ij}\mapsto a_{ij}f_{ij}, \tag{B.6}$$

对任意 $1\le i,j\le n$。则 ϕ 是 $\mathfrak{g}$的一个自同构。

命题 36 的证明. 首先，通过扩展 W的作用，Borel 子代数 $\mathfrak{b}$与一个以 $\mathfrak{b}'_{\bar{0}}$ 为底层偶子代数的 Borel 子代数共轭，参见例如[Mu, Chaper 3] 或 [CCC, 第 1 节.3]。由此可得 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}\cong\mathcal{N}^{\mathfrak{b}'}$。

接下来，假设 $\mathfrak{g}$ 是基本经典的。则 $\mathfrak{g}$ 是反对偶的，并由 Chevalley 生成元 h_i,e_i,f_i生成，其中 $1\le i\le\ell$。固定一个由非零复数组成的序列 $\mathbf{a}:=(a_1,a_2,\dots,a_\ell)$。根据 [K1, 第 2 节.5]，下式定义了 $\mathfrak{g}$的一个自同构 $\phi_{\mathbf{a}}$：

$$\phi_{\mathbf{a}}:\ h_i\mapsto h_i,\ e_i\mapsto a_ie_i,\ f_i\mapsto a_i^{-1}f_i,$$

对任意 $1\le i\le\ell$。根据上述论证，不失一般性，我们可以假设 $\mathfrak{n}$ 由 e_i生成，其中 $1\le i\le\ell$。

定义一个特征 $\hat{\zeta}\in\mathrm{ch}\mathfrak{n}_{\bar{0}}$，定义为 $\hat{\zeta}(e_i)\neq0\Leftrightarrow\hat{}$

$\zeta(e_i)=1\Leftrightarrow\zeta(e_i)\neq0$. 只需证明 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)\cong\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\hat{}\zeta)$。定义以下非零复数:

$$a_i:=\begin{cases}\zeta(e_i)^{-1}, & \text{if } \zeta(e_i)\neq0,\\ 1, & \text{if } \zeta(e_i)=0.\end{cases}$$

设 $\mathbf{a}:=(a_1,a_2,\dots,a_\ell)$。将上述所述的 $\mathfrak{g}$的自同构记为 $\phi_{\mathbf{a}}$。这诱导出 $\mathfrak{g}$-模上的一个自等价 $T:=T_\zeta$。我们将证明 T: $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)\xrightarrow{\cong}\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\hat{}\zeta)$ 是一个等价。设 $M\in\mathfrak{g}$-模，则 $T(M)$ 与 M具有相同的底层子空间；若用星号记号 $*$表示 $T(M)$ 上的 $\mathfrak{g}$-作用，则 $\mathfrak{g}$-模结构如下:

$$x*m:=\phi_{\mathbf{a}}(x)m,$$

对任意 $x\in\mathfrak{g}$ 和 $m\in T(M)$。我们注意到，当且仅当 M 是有限生成的时，$T(M)$ 也是有限生成的。接下来，当且仅当 M 也是局部有限的时，$T(M)$ 在 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 上是局部有限的,

这也成立，因为 $\phi_{\mathbf{a}}$ 在 $Z(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ 上限制为一个自同构。最后，我们将证明 $T(\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)) = \mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\hat{}\zeta)$。设 $M \in \mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\zeta)$。那么 M 由一组关于 ζ 的 Whittaker 向量 v_1、v_2、.....、v_q 生成，即对于任意 $x \in \mathfrak{n}_{\bar{0}}$ 和 $1 \leq k \leq q$，$xv_k = \zeta(x)\, v_k$。这意味着每个子空间 $\mathbb{C}v_k$ 都是 $\hat{}T(M)$ 的一个一维 $\mathfrak{n}_{\bar{0}}$-子模，并且对于任意 $1 \leq k \leq \ell$，$e_i * v_k = \phi(e_i)\, v_k = a_i\zeta(e_i)\, v_k = \zeta(e_i)\, v_k$。因此，$\hat{}T(M)$ 由一组关于特征 ζ 的 Whittaker 向量生成。由此可得，$T(M)$ 属于 $\mathcal{N}^{\mathfrak{b}}(\hat{}\zeta)$。

假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}(n)$。根据上述论证，不失一般性，我们可以假设 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 由 e_{ij} 和 s_{ij}生成，其中 $1 \leq i \leq j \leq n$。利用引理 37，可以按照前面所示的方法证明该命题。证明至此完成。

最后，利用引理 38，可以类似地证明 $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}(n)$ 的情形。证明至此完成。□

References

[A] T. Arakawa, *Representation theory of W-algebras*, 《数学发明》, 169（2007）, 219–320。[AB] J.C. Arias 和 E. Backelin *Projective and Whittaker functors on category $\mathcal{O}$*。《代数杂志》, 574（2021）: 154–171。[AM] H. Andersen 和 V. Mazorchuk。 *Category $\mathcal{O}$ for quantum groups*。《欧洲数学会杂志》（JEMS）17（2015）, 第2期, 405–431。[Ba] E. Backelin。 *Representation of the category $\mathcal{O}$ in Whittaker categories*。《国际数学研究通知》, 4（1997）, 153–172。[Br] A. Brown。 *Arakawa-Suzuki functors for Whittaker modules.*。《代数杂志》, 538（2019）: 261–289。[BF] A. Bell 和 R. Farnsteiner, *On the theory of Frobenius extensions and its application to Lie superalgebras* **335** 1993 407 424 。《美国数学会汇刊》（）–。[BG] J. N. Bernstein 和 S. I. Gelfand, *Tensor products of finite- and infinite-dimensional representations of semisimple Lie algebras* 41 1980 2, 245 285 。《组合数学》杂志（）, 第–期。[BGo] J. Brundan 和 S.M. Goodwin。 *Whittaker coinvariants for GL（$m|n$）*。《数学进展》, 347（2019）, 第 273 339 –页 BK J. Brundan 和 A. Kleshchev, *Representations of shifted yangians and finite w-algebras.*。《美国数学会回忆录》196（2008）。[BM] P. Batra 和 Volodymyr Mazorchuk。 *Blocks and modules for Whittaker pairs.*《纯粹与应用代数杂志》215.7（2011）: 1552–1568。[BR] C. Briot 和 E. Ragoucy, *W-superalgebras as truncations of super-Yangians*。《物理学杂志 A》36（2003）, 第4期, 1057–1081。[BBG] J. Brown、J. Brundan 和 S. Goodwin。 *Principal W-algebras for GL（$m|n$）*。《代数数论》7（2013）, 1849–1882。[BCW] I. Bagci、K. Christodoulopoulou 和 E. Wiesner, *Whittaker Categories and Whittaker modules for Lie superalgebras* **42** 2014 11, 4932 4947 。《代数通讯》（）, 第–期。[BGG] I.N. Bernˇstein、I.M Gel'fand 和 S.I Gel'fand, 某类 $\mathfrak{g}$-模。《功能分析及其应用》10（1976）, 第2期, 1–8。[BGK] J. Brundan、S. Goodwin 和 A. Kleshchev。 *Highest weight theory for finite W-algebras*。《国际数学研究通知》（IMRN）15（2008）, 文章编号 rnn051。[Ch1] C.-W. Chen。 *Whittaker modules for classical Lie superalgebras*。《数学物理通讯》388（2021）, 351–383。[Ch2] C.-W. Chen, *Annihilator ideals and blocks of Whittaker modules over quasireductive Lie superalgebras* 2108 07532 。预印本 https://arxiv.org/abs/。[Co] K. Coulembier。 *The primitive spectrum of a basic classical Lie superalgebra.*。《数学物理通讯》348（2016）, 第2期, 579–602。

[CC1] C.-W. Chen 和 S.-J. Cheng。*Whittaker categories of quasireductive Lie superalgebras and quantum symmetric pairs.* 2208 08778 预印本
https://arxiv.org/abs/ 。[ChM] C.-W. Chen 和 V. Mazorchuk。 *Simple supermodules over Lie superalgebras*。《美国数学会汇刊》 **374** 2021 899 921 （ ），- CoM K. Coulembier 和 V. Mazorchuk。
[ ]
Extension fullness of the categories of Gelfand–Zeitlin and Whittaker modules. SIGMA《对称性、可积性、几何方法及其应用》（ ），论文编号016。[CW] S.-J. Cheng 和 W. Wang。 **11** 2015
Dualities and representations of Lie superalgebras。Graduate Studies in Mathematics 144。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。[CCC] C.-W. Chen、S.-J. Cheng 和 K. Coulembier。
Tilting modules for classical Lie superalgebras。《伦敦数学会杂志》（
2 **103** 2021 870 900 ）（ ），– CCM C.-W. Chen、S.-J. Cheng 和 V.
[ ]
Mazorchuk。 *Whittaker categories properly stratified categories , and Fock space categorification for Lie superalgebras.* 《数学物理通讯》，即将发表。[CMW] S.-J. Cheng、V. Mazorchuk 和 W. Wang。 *Equivalence of blocks for the general linear Lie superalgebra* **103**, 1313 1327 2013 。《数学物理快报》–（ ）。[EK] A.G. Elashvili 和 V.G. Kac。 *Classification of Good Gradings of Simple Lie Algebras*。《李群与不变理论》。《美国数学会译丛》（第2辑）第213卷（2005），84–104。[FM] A. Frisk 和 V. Mazorchuk。 *Regular Strongly Typical Blocks of $\mathcal{O}^q$*。《数学物理通讯》291，533–542（2009）。[Ga] P. Gabriel。《阿贝尔范畴》。法国数学会通报90（1962），323–448。[Gi] V. Ginzburg。 *Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices*。《表示论》13（2009），236–271。[Go] S. Goodwin， *Translation for finite W-algebras*。《表示论》15（2011），307–346。[Gor1] M. Gorelik。 *Strongly typical representations of the basic classical Lie superalgebras*。《美国数学会杂志》15（2002），第1期，167–184。[Gor2] M. Gorelik。 *Annihilation theorem and separation theorem for basic classical Lie superalgebras*。《美国数学会杂志》15（2002），第1期，113–165。[GG] W.L. Gan 和 V. Ginzburg。 *Quantization of Slodowy slices*。《国际数学研究通知》（IMRN），5（2002），243–255。[Ho] C. Hoyt。 *Good gradings of basic Lie superalgebras*。《以色列数学杂志》192（2012），251–280。[K1] V. Kac。 *Lie superalgebras*。《数学进展》16（1977），8–96。[K2] V. Kac。 *Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions*。《美国国家科学院院刊》81（1984），645–647。[Kh] O. Khomenko。 *Categories with projective functors*。《伦敦数学会会刊》（第3辑）90（2005），711–737。[Ko1] B. Kostant。 *On the tensor product of a finite and an infinite dimensional representation*。《泛函分析杂志》第20卷第4期，1975年12月，257–285页。[Ko2] B. Kostant。 *On Whittaker vectors and representation theory*。《数学发明》48.2（1978）： 101–184。[Lo1] I. Losev。 *On the structure of the category $\mathcal{O}$ for W-algebras*。《研讨会论文集》24（2012），351–368。[Lo2] I. Losev。 *Quantized symplectic actions and W-algebras*。《美国数学会杂志》23（2010），35–59。[Lo3] I. Losev。 *Finite dimensional representations of W-algebras*。《杜克数学杂志》159(1)：99–143（2011）[Ly] T.E. Lynch。 *Generalized Whittaker vectors and representation theory.* 学位论文，麻省理工学院，1979。[M] V. Mazorchuk。 *Parabolic category $\mathcal{O}$ for classical Lie superalgebras*。《李超代数论进展》。Springer International Publishing，2014，149–166。[Mc1] E. McDowell。 *On modules induced from Whittaker modules*。《代数杂志》96（1985），161–177。[Mc2] E. McDowell。 *A module induced from a Whittaker module*。《美国数学会会刊》118（1993），第2期，349–354。[Mo] C. Moeglin。 *Modèles de Whittaker et idèaux primitifs complètement premiers dans les alg'ebres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples complexes II* 63 1988 5 35 。《斯堪的纳维亚数学杂志》（ ），–。[Mu] I.M. Musson。《李超代数与包络代数》。Graduate Studies in Mathematics，131。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。[MM] V. Mazorchuk 和 V. Miemietz。 *Serre functors for Lie algebras and superalgebras*。《傅里叶研究所年刊》62（2012），第1期，47–75。

[MS1] D. Miliˇci´c 和 W. Soergel。 *The composition series of modules induced from Whittaker modules*。《评论数学赫尔维蒂卡》72.(1997)，第4期，503–520。[MS2] D. Miliˇci´c 和 W. Soergel。 *Twisted Harish–Chandra sheaves and Whittaker modules.* 载于：《局部化李理论的发展与回顾：几何与解析方法》，第37卷，第183–196页（2014）。[Pe1] Y. Peng。 *On shifted super Yangians and a class of finite W-superalgebras*，《代数杂志》422（2015），520–562。[Pe2] Y. Peng。 *Finite W-superalgebras via super Yangians*，《数学进展》377（2021），107459。[Po1] E. Poletaeva。 *On finite W-algebras for Lie algebras and superalgebras.*《圣保罗数学科学杂志》（2013），1–32。[Po2] E. Poletaeva。 *On principal finite W-algebras for certain orthosymplectic Lie superalgebras and* $F(4)$. 2014 343 356 （）《李理论及其在物理学中的应用》。Springer，东京，。–。[Pr1] A. Premet。 *Special transverse slices and their enveloping algebras*，《数学进展》170（2002）1–55。[Pr2] A. Premet。 *Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal*。《欧洲数学会杂志》9（2007），第3期，487–543。[Pr3] A. Premet。 *Primitive ideals, non-restricted representations and finite W-algebras*。《莫斯科数学杂志》7（2007），743–762。[Pr4] A. Premet。 *Commutative quotients of finite W-algebras*，《数学进展》225（2010）269–306。[PS1] E. Poletaeva 和 V. Serganova。 *On finite W-algebras for Lie superalgebras in the regular case.*《李理论及其在物理学中的应用》。Springer，东京，2013。487–497。[PS2] E. Poletaeva 和 V. Serganova。 *On Kostant's theorem for the Lie superalgebra* $Q(n)$。《数学进展》300（2016）：320–359。[PS4] E. Poletaeva 和 V. Serganova。 *Representations of principal W-algebra for the superalgebra* $Q(n)$ *and the super Yangian* $YQ(1)$. **570** 15 2021 140 163 （）（）《代数杂志》（）（），–。[R] A. Romanov。 *A Kazhdan-Lusztig Algorithm for Whittaker Modules.*《代数与表示论》24，81–133（2021）。[Se] A. Sergeev。 *The invariant polynomials of simple Lie superalgebras*，《表示理论》3（1999），250–280。[So] W. Soergel。 *Kategorie* $\mathcal{O}$ *perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weyl-*，。《美国数学会杂志》（），第–期。[Sk1] S. Skryabin。 *A category equivalence*，附录见 [Pr1]。[Sk2] S. Skryabin。 *Representations of the Poisson algebra in prime characteristic*，《数学杂志》243（2003），563–597。[SW] B. Shu 和 H. Xiao。 *Super formal Darboux-Weinstein theorem and finite W superalgebras*，《代数杂志》550（2020），242–265。[W] W. Wang。 *Nilpotent orbits and finite W-algebras*《几何表示论与扩张仿射李代数》，71–105，Fields Institute 通讯丛书59，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2011 0912 0689 2；arXiv：。v WZ W. Wang 和 L. Zhao。 [ ] *Representations of Lie superalgebras in prime characteristic.* I，《伦敦数学会会刊》（第3辑）99（2009），第1期，145–167。[X] H. Xiao。 *On finite dimensional representations of finite W-superalgebras*。《中国科学：数学》，即将出版。[Zh] L. Zhao。 *Finite W-superalgebras for queer Lie superalgebras*，《纯粹与应用代数杂志》218（2014），第7期，1184–1194。[ZS] Y. Zeng 和 B. Shu。 *Finite W-superalgebras for basic Lie superalgebras*《代数杂志》438（2015），第188–234页。

Department of Mathematics, National Central University, Chung-Li, Taiwan 32054
Email address: cwchen@math.ncu.edu.twInstitute of Mathematics, Academia Sinica,
and National Center of Theoretical Sci-ences, Taipei, Taiwan 10617*Email address*:
chengsj@math.sinica.edu.tw