arXiv:2305.05557v1 [math.CO] 9 May 2023

有限偏序集上的对偶化复形与典范复形

FERNANDO SANCHO DE SALAS 和 ALEJANDRO TORRES SANCHO

Abstract. 我们发展了格罗滕迪克关于有限偏序集上的对偶化复形的理论，以及其后续的科恩-麦考利性理论。

Introduction

A. Grothendieck 在概形及其上的拟凝聚层的框架下，发展了对偶化复形理论，以及该理论与科恩–麦考利性或戈伦斯坦性的关系（[7]）。在这里，我们将他的观点应用于有限拓扑空间或偏序集，其中阿贝尔群层的范畴扮演拟凝聚模范畴的角色。这项工作已经在 [10], 中开始；在那里，我们发展了有限空间 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 上的对偶化复形、典范层和科恩–麦考利性的基本事实：$= \{\Delta_n\}$的子集，其中 Δ_n 是一个具有 n 个元素的集合；该空间是单纯复形所在的环境空间，也是 n维仿射 Deitmar 概形在 $\mathbb{F}_1$ 上的底层拓扑空间（[5], [11]）。由于有限型 Dietmar $\mathbb{F}_1$-概形的底层拓扑空间是有限拓扑空间，因此本文可以视为对这类概形上的格罗滕迪克对偶化复形理论的发展。

设 X 为有限拓扑空间， $D(X)$ 为 X 上阿贝尔群层复形的导出范畴，而 $D^b_c(X)$（分别为 $D_c(X)$）为同调有界且有限生成的复形（分别为具有有限生成同调的复形）所构成的子范畴。在 X 上，“对偶化复形”有两种不同的概念，必须明确加以区分。

一方面，有整体对偶化复形 D_X，它在 [8], 中被引入，是对上同调进行对偶化的复形，也就是说，它满足格罗滕迪克-韦尔迪耶对偶：

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(F, D_X) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma(X, F), \mathbb{Z})$$

对于任意的 $F \in D(X)$。如果 X 是局部空间（即它有唯一的闭点，记为 $\mathbf{0}$），我们引入一个“局部对偶化复形” $D^{\mathbf{0}}_X$，它使局部上同调对偶化。

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(F, D^{\mathbf{0}}_X) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma_{\mathbf{0}}(X, F), \mathbb{Z}).$$

这些复形 D_X 和 $D^{\mathbf{0}}_X$ 始终存在，并且在同构意义下唯一。

2020年数学主题分类。06A11、13H10、14A23、14M05。关键词和短语。有限偏序集、单纯复形、对偶化复形、典范层、科恩-麦考利性、单元素域。本研究得到 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2021-128665NB-I00 项目支持，并酌情获得“ERDF 建设欧洲的一种方式”资助。

另一方面，还有一种由自反性得到的“对偶化复形” $\Omega \in D_c^b(X)$ 的概念。这些复形在概形的框架下由格罗滕迪克命名为对偶化复形；出于两个原因，本文将其称为典范复形。首先，为避免与上文定义的整体和局部对偶化复形混淆。其次，在提及诺特环上的对偶化复形时，“典范复形”或“典范层”这一术语已相当常见。因此，典范复形是一个复形 $\Omega \in D_c^b(X)$，使得自然态射

$$F \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F,\Omega),\Omega)$$

对任意 $F \in D_c(X)$ 都是同构，即，一个能在 $D_c(X)$ 上诱导自反性的复形。这些典范复形将是本文的主要研究对象。与整体和局部对偶化复形不同，典范复形未必存在；即使存在，也仅在平移和张量一个可逆层的意义下唯一，这与概形上的情形相同。不过，正如我们将看到的，这些典范复形与整体和局部对偶化复形密切相关（同样，这与概形上的情形相同）。

在第3节中，我们回顾有限空间之间连续映射 $f\colon X \to S$ 的相对对偶化复形 $D_{X/S}$ 的概念，并引入沿 X 的闭子集 Y 的局部相对对偶化复形 $D^Y_{X/S}$ 的概念。定理3.3说明了这两个复形之间的关系，定理 3.5则说明局部相对对偶化复形在闭子空间下的性质。接着，我们将重点讨论 S 是一个点且 Y 是局部空间 X 的闭点的情形；这就是上文提到的局部对偶化复形 D^0_X，并将发挥关键作用。命题 3.9阐明了局部对偶化复形与层 $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ = “支撑在 x 上的常值层”之间的关系。这些层将在全文中出现并发挥重要作用。它们类似于概形中点的剩余域。

第4节专门讨论典范复形，其内容与 [7]有很强的平行性。正如我们已经提到的，这样的复形未必存在（若存在，我们称 X 为可对偶的）。若它存在，则在平移和张量积一个可逆层的意义下唯一（定理4.8）。其存在对 X 施加了一些拓扑条件（定理4.15）：(1) X 上存在余维函数，特别是 X 是串联的。(2) 每个区间都具有球面的上同调（其维数与该区间的维数相同）。我们还将看到，当 X 是局部的或不可约的时，这些条件足以保证典范复形的存在（定理4.16、4.18）。因此，我们将推导出，任意单纯复形或单纯复形的任意局部闭子空间都存在典范复形。此外，单纯复形 K 的典范复形经由 [10], 中构造的对应，与由Stanley–Reisner对应将 K 映到 S_K所得的概形的对偶化复形一致。定理4.11阐述了典范复形的主要上同调性质及其与局部上同调的关系。一个关键推论是，在局部空间 X 上，典范复形与局部对偶化复形一致（相差一个平移）；其在 X^* 上的限制$= X - \mathbf{0}$ 与整体对偶化复形 D_{X^*}一致。定理4.20概述了一个

局部且可对偶化空间丰富的上同调性质；这些性质与局部诺特环具有对偶化复形时的相应结果有着显著的相似之处。

第5节借鉴格罗滕迪克的观点，从典范复形出发，致力于发展有限空间上的科恩–麦考利性理论。我们首先介绍层的深度和维数的概念，并根据层在局部且可对偶化空间 X 上与典范复形 D_X^0 的对偶来定义层的科恩–麦考利性（定义 5.10）。在给出科恩–麦考利层的一般结构之后（命题 5.12），我们完整刻画了两种重要情形下的科恩–麦考利层：一方面， F 在一般位置无挠；另一方面， F 是挠层。相关结果见定理 5.14 和 5.15。随后，我们将科恩–麦考利局部空间 X 定义为这样一种局部空间：常值层 $\mathbb{Z}$ 是科恩–麦考利的。这意味着局部对偶化复形是一个层（平移了 X 的维数）。换言之，科恩–麦考利局部空间是具有典范层 ω_X 的局部空间。定理 5.18（另见推论 5.20）根据纯性和局部上同调群给出了科恩–麦考利局部空间的刻画。在定理 5.21 中，我们证明，局部空间的闭子集 K 是科恩–麦考利的，当且仅当层 $\mathbb{Z}_K$ （支撑在 K 上的常值层）是科恩–麦考利的。特别地，科恩–麦考利空间 X 的闭子集 K 是科恩–麦考利的，当且仅当除一个以外的所有 $\mathcal{E}xt_X^i$（$\mathbb{Z}_K$， ω_X）都消失：这与科恩–麦考利概形的闭子概形具有相同的科恩–麦考利性判据。在单纯形情形下，科恩–麦考利单纯复形 K 的典范层通过 $[10]$, 中构造的对应，与和 K 相关联的概形 S_K 的典范模一致。以下定理（定理 5.24）总结了科恩–麦考利局部空间的典范层的所有上同调性质，并展示了它们与科恩–麦考利局部环的典范层性质之间的相似性：

定理。设 X 是一个具有典范层 ω_X 的 n 维科恩–麦考利局部有限空间。设 $\mathbf{0}$ 是 X 和 $X^* = X - \mathbf{0}$ 的闭点。那么：

(A) 对任意 $F \in D(X)$，都有短正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n+1-i}_{\mathbf{0}}(X,F),\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^i_X(F,\omega_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_{\mathbf{0}}(X,F),\mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^{n+1-i}_X(F,\omega_X),\mathbb{Z}) \to H^i_{\mathbf{0}}(X,F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^{n-i}_X(F,\omega_X),\mathbb{Z}) \to 0.$$

T取 $F = \mathbb{Z}_K$，对于某个 X 的闭子集 K，我们得到正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n+1-i}_{\mathbf{0}}(K,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^i_K(X,\omega_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_{\mathbf{0}}(K,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n+1-i}_K(X,\omega_X),\mathbb{Z}) \to H^i_{\mathbf{0}}(K,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_K(X,\omega_X),\mathbb{Z}) \to 0.$$

(B) 这个层

$$\omega_{X^*} := (\omega_X)_{|X^*}$$

是 X^* 上的整体对偶化层，即 $\omega_{X^*}[n-1]$ 是 X^* 的整体对偶化复形。因此，对于任意 $F \in D(X^*)$，都有短正合列（注意 $n-1 =$ 维 X^*）

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(X^*,F),\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^i_{X^*}(F,\omega_{X^*}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(X^*,F),\mathbb{Z}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^{n-i}_{X^*}(F,\omega_{X^*}),\mathbb{Z}) \to H^i(X^*,F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^{n-1-i}_{X^*}(F,\omega_{X^*}),\mathbb{Z}) \to 0.$$

特别地，取 $F=\mathbb{Z}$，可得正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(X^*,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^i(X^*,\omega_{X^*}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(X^*,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(X^*,\omega_{X^*}),\mathbb{Z}) \to H^i(X^*,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(X^*,\omega_{X^*}),\mathbb{Z}) \to 0,$$

对于任意闭子集 K^* of X^*，取 $F=\mathbb{Z}_{K^*}$，可得正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(K^*,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^i_{K^*}(X^*,\omega_{X^*}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(K^*,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_{K^*}(X^*,\omega_{X^*}),\mathbb{Z}) \to H^i(K^*,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}_{K^*}(X^*,\omega_{X^*}),\mathbb{Z}) \to 0.$$

(C) 若 $K \subseteq X$ 是余维为 d 的Cohen–Macaulay闭子集，则有Gysin同构

$$H^i_K(X,\omega_X) = H^{i-d}(K,\omega_K) = \begin{cases} 0 & , \quad for\ i \neq d \\ H^{n-d}_{\mathbf{0}}(K,\mathbb{Z})^*, & for\ i = d, \end{cases}$$

$$H^i_{K^*}(X^*,\omega_{X^*}) = H^{i-d}(K^*,\omega_{K^*}) = \begin{cases} 0 & , \quad for\ i \neq d, n-1 \\ \mathbb{Z} & , \quad for\ i = n-1 \\ H^{n-d-1}(K^*,\mathbb{Z})^*, & for\ i = d \end{cases}$$

非局部情形下的科恩–麦考利层或空间的概念可归结为局部情形。第5节最后的结果旨在研究科恩-麦考利性在乘积和重心细分下的表现（定理5.28和5.29）。最后，我们将科恩-麦考利性与偏序集上的经典概念进行比较，后者的发展见 [1]。

第1节旨在介绍有限空间及其导出范畴的一些基本定义、记号和结果，并证明若干供后文使用的技术性结果。最后，第2节主要探讨层 $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ 与区间上同调之间的基本联系，这一联系将在本文其余部分广泛使用。

1. Preliminaries and notations

1.1. 有限空间。本文中，有限空间指有限的 T_0 拓扑空间。众所周知，这等价于有限偏序集，但我们更倾向于采用拓扑观点。对于每个 $x \in X$，我们记作

$$\begin{aligned} U_x &= \text{ smallest open subset of } X \text{ containing } x, \\ C_x &= \text{ smallest closed subset of } X \text{ containing } x = \text{ closure of } x. \end{aligned}$$

并且我们还记作 $U_x^* := U_x - \{x\}$, $C_x^* := C_x - \{x\}$。

X 上的偏序由下式给出

$$x \le y \Leftrightarrow C_x \subseteq C_y \Leftrightarrow U_x \supseteq U_y.$$

U 的子集 X 是开集，当且仅当它是上闭的： $x \in U$ 且 $y \ge x$ 蕴含 $y \in U$。类似地，C 的子集 X 是闭集，当且仅当它是下闭的： $x \in C$ 且 $y \le x$蕴含 $y \in C$。有：

$$U_x = \{p \in X : p \ge x\}$$
$$C_x = \{p \in X : p \le x\}.$$

点 $x \in X$ 是闭的，当且仅当它是极小元；类似地， x 是开的，当且仅当它是极大元。开点称为 X的泛点，因为它们的闭包是 X的不可约分支。

有限空间之间的映射 f: $X \to Y$ 连续，当且仅当它是保序的：$x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')$。

X 的对偶空间记作 X^{op}。它具有相同的底集，并赋予对偶拓扑（即反向的偏序）： X^{op} 的开子集是 X的闭子集。

定义 1.1. 若有限空间 X 有唯一的闭点（即 X 有最小元），则称其为局部的，我们通常将该闭点记为 0。其开补集 $X - \mathbf{0}$ 通常记为 X^*。对任意点 $x \in X$， U_x 是局部的，其闭点为 x，而 C_x 是不可约的，其泛点为 x。

定义 1.2. 有限空间 X 的维数，记作 $\dim X$，是链的最大长度。

$$C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n$$

X 的不可约闭子集；等价地，它是 X 的点所构成的链$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 的最大长度。

有限空间 X 称为纯的，如果所有极大链 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 的长度都等于 $\dim X$。

1.1.1. 单纯复形。我们将 $\Delta_n = \{1, \ldots, n\}$ 表示为 n 元素的集合，并

$$\mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1} := \{\text{subsets of } \Delta_n\}$$

w这是一个有限偏序集，其预序由包含映射给出： $p \le q \Leftrightarrow p \subseteq q$.

$\mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1}$ 是一个局部不可约空间，其闭点 0 表示Δ_n 的空子集，而其泛点是 Δ_n的全集。我们将记作

$$\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{F}_1} := \mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1} - \mathbf{0}$$

这是 $\mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1}$的一个开子集。

定义 1.3. 单纯复形 K （至多有 n 个顶点）是 $\mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1}$ 的一个闭子集。注意， Δ_n 的空子集也允许作为 K 的一个单形。如果我们不想允许空子集作为单形，则定义：射影单纯复形是 $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbf{F}_1}$ 的一个闭子集。当然，如果 K 是一个单纯复形，那么 $K^* = K - \mathbf{0}$ 是一个

射影单纯复形，反过来，在射影单纯复形中添加 0 会得到一个单纯复形。我们将看到，单纯复形的行为类似于仿射代数概形（仿射 n 维概形的闭子概形），而射影单纯复形的行为则类似于射影概形。需要提醒读者的是，在组合学文献中，射影单纯复形通常称为抽象单纯复形。

最后，我们称有限空间 X 为局部单纯的，若对于任意 $x \in X$， U_x 都是一个单纯复形。任何单纯复形和任何射影单纯复形都是局部单纯的。局部单纯有限空间的性质将类似于有限型概形。

例。对于任意有限空间 X，其重心细分 βX 是 X的所有（非空）全序子集构成的集合。它是 X的所有（非空）子集所成偏序集的一个闭子集。因此， βX 是一个射影单纯复形。

1.2. 层。与任何拓扑空间一样，有限空间 X上也有阿贝尔群层。我们将有限空间 X上的阿贝尔群层范畴记作 Shv(X)。众所周知，在有限空间上，层的概念比在一般拓扑空间中简单得多：有限空间 X 上的阿贝尔群层 F 等价于一个从 X^{op} 到阿贝尔群范畴的函子。我们将沿用 [3]的记号。

若对任意 $x \in X$， F_x 都是有限生成阿贝尔群，则层 F 是有限生成的。对于 X 上的任意层 F 以及 X的任意局部闭子集 S，我们用 F_S 表示支撑在 S上的层 F；它是满足以下条件的唯一层

$$(F_S)_{|S} = F_{|S} \quad , \quad (F_S)_{|X-S} = 0.$$

为避免混淆，对于每个 $x \in X$， F_x 表示 x 处的 F 的茎，而 $F_{\{x\}}$ 表示支撑在 x上的层 F。

我们用 $D(\mathbb{Z})$表示阿贝尔群复形范畴 $C(\mathbb{Z})$的导出范畴，用 $D_c(\mathbb{Z})$表示上同调群有限生成的复形构成的全子范畴，并用 $D^b(\mathbb{Z})$表示上同调有界的复形构成的全子范畴。最后，$D^b_c(\mathbb{Z}) = D^b(\mathbb{Z}) \cap D_c(\mathbb{Z})$。注意，任意 $E \in D^b_c(\mathbb{Z})$都是完美的，因为 $\mathbb{Z}$ 是正则的。对于任意 $E \in D(\mathbb{Z})$，我们记 $E^\vee := \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Z})$。函子 $(\,)^\vee$ 保持 $D_c(\mathbb{Z})$和$D^b(\mathbb{Z})$。对于任意 $E \in D_c(\mathbb{Z})$，自然态射 $E \to E^{\vee\vee}$ 是同构。我们将使用以下初等结果：

引理 1.4. 设 $K \in D^b_c(\mathbb{Z})$。以下条件等价

(1) 对某个整数 r， $K \simeq \mathbb{Z}[r]$。(2) 存在 $K' \in D^b_c(\mathbb{Z})$ 使得 $K' \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K \simeq \mathbb{Z}$。(3) $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(K, K)$ 是一个同构。

我们用 $C(X)$ 表示 X 上的阿贝尔群层复形范畴，并用 $D(X)$ 表示其导出范畴。于是，$D_c(X)$ 表示满足以下条件的复形的全子范畴：层 $F(H^i)$ 是有限生成的；$F(D^b)$ 表示上同调有界的复形的全子范畴，而 $X(D^b_c)\, X(= D_c) X(\cap D^b)$。对象 $X(F \in D^b_c)$ 是

有时称为有界且相干。这些子范畴可逐纤维判定，也就是说，复形 $F \in D(X)$ 属于 $D_c(X)$（分别属于 $D^b(X)$），当且仅当对任意 $F_x \in D_c$，$\mathbb{Z}(D^b)$（分别为$\mathbb{Z}(x \in X)$）。

对于任意复形 $F, G \in D(X)$，我们将 $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_X^\bullet(F,G) \in D(\mathbb{Z})$ 记作导出同态复形，将 $\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F,G) \in D(X)$ 记作层的导出同态复形，并将 $F \otimes G$ 记作导出张量积。

令 $\pi\colon X \to \{\mathrm{pt}\}$ 为到一点的投影，令 $\pi^{-1}\colon C(\mathbb{Z}) = C(\mathrm{pt}) \to C(X)$ 为逆像。对于任意 $E \in C(\mathbb{Z})$，我们仍用 E 表示 X上的复形 $\pi^{-1}E$；它是常值复形：对于任意 $x \in X$， $E_x = E$。接着，我们记作

$$E \otimes_{\mathbb{Z}} F := (\pi^{-1}E) \otimes_{\mathbb{Z}} F$$

对于任意 $E \in C(\mathbb{Z})$ $F \in C(X)$。

对于 X 上的任意层复形 F，都有标准的分解（记 $n = \dim X$）

$$0 \to F \to C^0F \to \cdots \to C^nF \to 0$$
$$0 \to C_nF \to \cdots \to C_0F \to F \to 0$$

其中

$$C^iF = \bigoplus_{x_0<\cdots<x_i} F_{x_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_{x_0}}$$
$$C_iF = \bigoplus_{x_0<\cdots<x_i} F_{x_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_{x_i}}$$

这些分解将用于将复形 F 的某些公式的证明简化为 $F = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_x}$ 或 $F = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_x}$ 的情形。

1.5. 同调与上同调。对于任意 $F \in D(X)$，我们将 $\mathbb{R}\Gamma(X,F)$ 记为 F 的截面函子的右导出函子；类似地，我们将 $\mathbb{L}(X,F)$ 记为 F 的余截面函子的左导出函子（见 [3]），并且

$$H^i(X,F) = H^i[\mathbb{R}\Gamma(X,F)], \qquad H_i(X,F) = H_i[\mathbb{L}(X,F)]$$

F 的上同调群和同调群。这些可以通过标准分解来计算，即，

$$\mathbb{R}\Gamma(X,F) \simeq \Gamma(X, C^\bullet F), \quad \mathbb{L}(X,F) \simeq Ł(X, C_\bullet F).$$

常值层 $\mathbb{Z}$ 的同调与上同调互为对偶：

$$\mathbb{R}\Gamma(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{L}(X,\mathbb{Z})^\vee \quad , \quad \mathbb{L}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{R}\Gamma(X,\mathbb{Z})^\vee.$$

我们将记 $\mathbb{L}_{\mathrm{red}}(X,\mathbb{Z}) := \mathrm{Cone}(\phi)[-1]$，其中 ϕ 是复形的自然态射 $\phi\colon \mathbb{L}(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$。于是

$$\widetilde{H}_i(X,\mathbb{Z}) := H_i[\mathbb{L}_{\mathrm{red}}(X,\mathbb{Z})]$$

$\widetilde{}$是 X的约化同调群。注意，如果 X 为空，那么对于任意 $i \neq -1$，都有 $H_{-1}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ and$\widetilde{}H_i(X,\mathbb{Z}) = 0$。类似地，可以定义约化上同调 $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}(X,\mathbb{Z})$，它是约化同调的对偶。

对于 X的任意闭子集 Y，我们将 $\mathbb{R}\Gamma_Y(X,F)$记为以 Y 为支撑的截面的右导出函子，并将 $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y F$ 记为其层化版本。由局部上同调的正合三角可得：

引理 1.6. 对任意 $x \in X$，有：

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x,\mathbb{Z}) = \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}(U_x^*,\mathbb{Z})[-1]$$
$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x,\mathbb{Z})^\vee = \mathbb{L}_{\mathrm{red}}(U_x^*,\mathbb{Z})[1].$$

1.7. 导出范畴中的一些公式。对于任意连续映射 $f\colon X \to Y$，导出直像 $\mathbb{R}f_*\colon D(X) \to D(Y)$ 将 $D_c(X)$ 映入 $D_c(Y)$，并将 $D^b(X)$ 映入 $D^b(Y)$，且它是逆像 $f^{-1}\colon D(Y) \to D(X)$ 的右伴随。

对于任意开子集 $j\colon U \hookrightarrow X$，$j_!\colon D(U) \to D(X)$ 表示零延拓函子，且它是 $j^{-1} =$ 到 U 的限制的左伴随。对于任意 $F \in D(X)$，$F_U = j_!j^{-1}F = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_U$。对于任意闭子集 $i\colon Y \hookrightarrow X$，$F_Y = i_*i^{-1}F = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_Y$，并且有一个正合三角

$$F_{X-Y} \to F \to F_Y.$$

以下公式我们将广泛使用，不再另行说明（其中一些适用于任意拓扑空间（[9]），另一些则专用于有限空间）：

(1) 对任意开子集 U，其中 X

$$\mathbb{R}\Gamma(U,\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F,G)) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_U^\bullet(F_{|U},G_{|U}).$$

(2) 对任意 F、G、$H \in D(X)$

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} G,H) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F,\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(G,H))$$
$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} G,H) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F,\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(G,H))$$

(3) 对任意开子集 $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_U,G) = \mathbb{R}j_*j^{-1}G.$$

(4) 对任意 $E \in D(\mathbb{Z})$、$F \in D(X)$，

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(E,F) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(E,\mathbb{R}\Gamma(X,F)).$$

(5) 对任意闭子集 $i\colon Y \hookrightarrow X$，

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_Y,G) = \mathbb{R}\Gamma_Y(X,G)$$
$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_Y,G) = \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y G$$
$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F_Y,G) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F,\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Y G)$$
$$i_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_Y^\bullet(i^{-1}F,G) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F,i_*G).$$

(6) 对于任意 $x \in X$：

$$F_x = \Gamma(U_x,F) = \mathbb{R}\Gamma(U_x,F) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{U_x},F)$$
$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F,\mathbb{Z}_{C_x}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(F_x,\mathbb{Z}).$$

我们以此结束 节，我们将通过证明一些技术性结果来展开，这些结果将在本文中使用。

命题 1.8. 设 $F, G \in D(X)$，且 x 是 X的一个闭点。若 F 和 G 支撑在 x上，则

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F,G) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(X,F), \mathbb{R}\Gamma(X,G)) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(F_x, G_x).$$

证明. 设 $i\colon \{x\} \hookrightarrow X$ 为包含映射。由于 G 支撑在 x上， $G = i_* i^{-1} G$ ，于是

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F,G) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F, i_* i^{-1} G) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(F_x, G_x).$$

总之，只需证明：若 F支撑在 x上，则 $\mathbb{R}\Gamma(X,F) \to \mathbb{R}\Gamma(U_x, F) = F_x$是一个同构。这可由 Mayer-Vietoris 正合三角推出

$$\mathbb{R}\Gamma(X,F) \to \mathbb{R}\Gamma(U_x, F) \oplus \mathbb{R}\Gamma(X - x, F) \to \mathbb{R}\Gamma(U_x - x, F)$$

因为 $F_{|X-x} = 0$ 和 $F_{|U_x - x} = 0$。 □

命题 1.9. 对任意 $G \in D(X)$ 和任意 $E \in D(\mathbb{Z})$，存在一个自然态射

$$E^\vee \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} G \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E, G)$$

若 G 或 E 有界且相干，则它是同构。

证明. 自然态射 $E \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} E^\vee \to \mathbb{Z}$ 诱导出一个态射 $E \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} E^\vee \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} G \to G$，进而得到所需的态射（张量积与 $\mathbb{R}\mathcal{H}om$ 之间的伴随）。通过茎上的方式证明该同构。对任意 $x \in X$，有

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E,G)_x = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{U_x}^\bullet(E, G_{|U_x}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(E, G_x) \xleftarrow{\sim} E^\vee \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} G_x$$

其中，若 $G_x \in$Perf($\mathbb{Z}$) 或 $E \in$Perf($\mathbb{Z}$)，则最后一个同构成立。 □

命题 1.10. 设 $G \in D_c^b(X)$。函子

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\quad, G)\colon D(X) \to D(X)$$

将 $D_c(X)$ 映入 $D_c(X)$，并将 $D^b(X)$ 映入 $D^b(X)$。

证明。设 $F \in D_c(X)$（分别为 $F \in D^b(X)$）。由复形的正合序列

$$0 \to C_n F \to \cdots \to C_0 F \to F \to 0$$

只需证明关于 $C_i F$ 的结论。这将问题化为如下情形：$F = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_x}$ ，其中 $E \in D_c(\mathbb{Z})$（分别为 $E \in D^b(\mathbb{Z})$），且 $x \in X$。若记 $j\colon U_x \hookrightarrow X$ 为包含映射，则有：

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_x}, G) &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E, \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{U_x}, G)) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E, \mathbb{R}j_* G_{|U_x}) \\ &\overset{1.9}{=} E^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}j_* G_{|U_x}\end{aligned}$$

从而得出结论。 □

2. Intervals, codimension functions and the sheaves $\mathbb{Z}_{\{x\}}$.

本节回顾一些基本概念，例如区间、余维函数和层 $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ ，以及它们之间的关系。在本文中，层 $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ 将扮演概形上点的剩余域的角色。本节的主要初等结果是说明这些层之间的态射与区间上同调的关系。

定义 2.1. 对于任意 $x < y$，我们记作

$$(x, y) := U_x^* \cap C_y^* = \{p \in X : x < p < y\}$$
$$[x, y] := U_x \cap C_y = \{p \in X : x \leq p \leq y\}.$$

如果每个区间 $[x, y]$ 都是纯的，我们就称 X 为串联的，也就是说，从x 到 y 的每条极大链的长度都等于 $\dim[x, y]$。如果区间 (x, y) 是同调球面，我们就称其为

$$H^i_{\mathrm{red}}((x, y), \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, \text{ for } i \neq \dim(x, y) \\ \simeq \mathbb{Z}, \text{ for } i = \dim(x, y). \end{cases}$$

如果 $x < y$ 且 (x, y) 为空集，我们就称 x 先于 y，记作 $x \prec y$。 X 上的余维函数是一个映射 d: $X \to \mathbb{Z}$ ，满足

$$d(x) = d(y) + 1$$

对于任意 $x \prec y$。

注记 2.3. 若 X 具有余维函数，则 X 是串联的。反之则不成立，但若 X 不可约或局部，则反命题成立。

定义 2.4. 对每个 $x \in X$， $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ 表示支撑在 x上的常值层 $\mathbb{Z}$ 。于是

$$\mathbb{Z}_{\{x\}} = \mathbb{Z}_{U_x} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_x}.$$

本文将广泛使用以下命题。

命题 2.5（ $\mathbb{Z}_{\{x\}}$的上同调性质）。

(1) 对任意 $F \in D(X)$ 以及任意 $x \in X$ ，有： $\mathbb{R}\mathbf{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)$ $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_x}$，于是

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = H^i_x(U_x, F) \quad , \quad \mathcal{E}xt^i_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = H^i_x(U_x, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_x}.$$

(2)（切除）对于任意包含 x的开子集 U ，有

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^\bullet_U(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F_{|U}).$$

(3) 对任意 $x < y$ ，有:

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}}) = \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}((x, y), \mathbb{Z})[-2]$$

然后

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}}) = H^{i-2}_{\mathrm{red}}((x, y), \mathbb{Z}).$$

证明。（1）由于 $\mathbb{Z}_{\{x\}} = \mathbb{Z}_{U_x} \otimes \mathbb{Z}_{C_x}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) &= \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{U_x} \otimes \mathbb{Z}_{C_x}, F) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{U_x}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{C_x} F) \\ &= \mathbb{R}\Gamma(U_x, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{C_x} F) = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F).\end{aligned}$$

类似地,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{U_x}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{C_x} F) = \mathbb{R}j_* j^{-1}\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{C_x} F = \mathbb{R}j_*\mathbb{R}\underline{\Gamma}_x F_{|U_x}.$$

由于 $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_x F_{|U_x}$ 的支撑位于 x，且其在 x 处的茎为 $\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)$，因此可得 $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_x F_{|U_x} = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\{x\}}$；再由投影公式，$\mathbb{R}j_*\mathbb{R}\underline{\Gamma}_x F_{|U_x} = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}j_*\mathbb{Z}_{\{x\}}$。于是,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}j_*\mathbb{Z}_{\{x\}} = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_x}.$$

（2）由（1）得出。下面证明（3）。由（1）可知，只需证明 $\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z}_{\{y\}}) = \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}((x, y), \mathbb{Z})[-2]$。由正合列

$$0 \to \mathbb{Z}_{\{y\}} \to \mathbb{Z}_{C_y} \to \mathbb{Z}_{C_y^*} \to 0$$

我们得到正合三角

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z}_{\{y\}}) \to \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z}_{C_y}) \to \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z}_{C_y^*}).$$

由此可得

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z}_{C_y}) = \mathbb{R}\Gamma_x(C_y, \mathbb{Z}) \overset{1.6}{=} \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}(C_y - x, \mathbb{Z})[-1] = 0 \,(\text{since } C_y - x \text{ is contractible})$$

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z}_{C_y^*}) = \mathbb{R}\Gamma_x(C_y^*, \mathbb{Z}) \overset{1.6}{=} \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}((x, y), \mathbb{Z})[-1].$$

□

层 $\{\mathbb{Z}_{U_x}\}_{x\in X}$ 构成了 $D(X)$ 的一个有限生成元系。我们来看看层 $\{\mathbb{Z}_{C_x}\}_{x\in X}$ 或 $\{\mathbb{Z}_{\{x\}}\}_{x\in X}$ 是否也构成一个生成元系。

命题 2.6。设 $F \in D(X)$。以下条件等价:

(1) $F = 0$。(2) 对任意 $x \in X$，$= 0 \mathbf{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) \mathbb{R}$。(3) 对任意 $x \in X$，$= 0 \mathbf{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_x}, F) \mathbb{R}$。

证明。(1) $\Rightarrow$(2)显然。我们来证明(2) $\Rightarrow$(3)。我们通过对 $\dim C_x$进行归纳法，来看 $\mathbb{R}\mathbf{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_x}, F) = 0$。若 $\dim C_x = 0$，则 $C_x = \{x\}$。现在假设 $\dim C_x > 0$。由正合列

$$0 \to \mathbb{Z}_{\{x\}} \to \mathbb{Z}_{C_x} \to \mathbb{Z}_{C_x^*} \to 0$$

我们只需证明 $\mathbb{R}\mathbf{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_x^*}, F) = 0$。由归纳法，$\mathbb{R}\mathbf{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_y}, F) = 0$对任意 $y < x$均成立，进而 $\mathbb{R}\mathbf{Hom}_X^\bullet(E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_y}, F) = 0$对任意 $E \in D(\mathbb{Z})$ 和任意 $y < x$均成立。因此，$\mathbb{R}\mathbf{Hom}_X^\bullet(C^i\mathbb{Z}_{C_x^*}, F) = 0$ 对任意 i 均成立，由复形的正合序列即可得证。

$$0 \to \mathbb{Z}_{C_x^*} \to C^0\mathbb{Z}_{C_x^*} \to \cdots \to C^n\mathbb{Z}_{C_x^*} \to 0.$$

(3) $\Rightarrow$(1)。我们来证明，对于任何 $G \in D(X)$， $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_X^\bullet(G, F) = 0$。若 $G = \mathbb{Z}_{C_x}$，则由假设可知此结论成立。因此，对于任何 $E \in D(\mathbb{Z})$ 及任何$x \in X$，结论对 $G = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_x}$ 成立。于是，对于任何 i 及任何 G，结论对 C^iG 成立。同样，正合列$0 \to G \to C^0G \to \cdots \to C^nG \to 0$ 使我们得以得出结论。□

3. Local and global dualizing complexes

本节将引入局部和整体对偶化复形。我们主要关注局部空间的局部对偶化复形。

3.1. 整体对偶化复形。这里回顾整体对偶化复形的概念（见 [8], [3], [4]）。

定义 3.1. 设 $f\colon X \to S$ 是有限空间之间的连续映射。函子

$$\begin{aligned} D(X) &\longrightarrow D(S) \\ F &\longmapsto \mathbb{R}f_*F \end{aligned}$$

有一个右伴随函子

$$f^!\colon D(S) \to D(X)$$

并将 $D_{X/S} := f^!\mathbb{Z}$ 记作 X 在 S 上的相对对偶化复形。若 S 只是一个点，则将 $D_{X/S}$ 记作 D_X，并称为 X 的整体对偶化复形。根据定义，有

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_X^\bullet(F, D_X) = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma(X, F), \mathbb{Z}) \qquad \text{(Global duality isomorphism)}$$

对任意 $F \in D(X)$。

我们回顾 $f^!$ 的构造，因为稍后会用到它。设 G 是 Y 上的一个层。函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Shv}(X) &\longrightarrow \{\text{Abelian groups}\} \\ F &\longmapsto \mathrm{Hom}_Y(f_*C^nF, G) \end{aligned}$$

是右正合的，并将滤过直极限映为滤过逆极限。因此，它可由 X 上的一个层 $f^{-n}G$ 表示。一个态射 $G \to G'$ 诱导一个态射 $f^{-n}G \to f^{-n}G'$。自然态射 $f_*C^{n-1}F \to f_*C^nF$ 诱导一个态射 $f^{-n}G \to f^{-n+1}G$。因此，若 G 是 $\mathbf{Y}$ 上的层复形，则有一个双复形 $f^{-p}G^q$，其对应的单复形记作 $f^\nabla G$。有一个同构

$$\mathrm{Hom}_Y^\bullet(f_*C^\bullet F, G) = \mathrm{Hom}_X^\bullet(F, f^\nabla G)$$

它扩展为层复形 F 在 X上的同一个同构。于是， $f^!G$ 定义为

$$f^!G := f^\nabla I(G)$$

其中 $G \to I(G)$ 是一个内射分解。

对于任意连续映射 $f\colon X \to S$，都有一个自然同构 $D_X = f^!D_S$。由伴随可得一个态射。

$$\mathbb{R}f_*D_X \to D_S.$$

3.2. 局部对偶化复形。设 $f\colon X \to S$ 是一个连续映射，且 Y 是 X 的一个闭子集。

定义 3.2. 对于 X 上的任意层 F，我们将 S 上的层 $f_*^Y F$ 定义为:

$$(f_*^Y F)(V) = \Gamma_{Y\cap f^{-1}(V)}(f^{-1}(V), F)$$

对于任意开子集 S 的 V。换句话说

$$f_*^Y F = f_*\mathcal{H}om_X(\mathbb{Z}_Y, F).$$

于是我们得到一个（左正合）函子

$$f_*^Y\colon \mathrm{Shv}(X) \longrightarrow \mathrm{Shv}(S)$$

及其右导出函子

$$\mathbb{R}f_*^Y\colon D(X) \to D(S)$$

可以描述为 $\mathbb{R}f_*^Y(F) = \mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_Y, F)$】【。

定理3.3。函子 $\mathbb{R}f_*^Y$ 有一个右伴随

$$f_{(X,Y)}^!\colon D(S) \to D(X).$$

此外，若记 $U = X - Y$, $j\colon U \hookrightarrow X$ 为包含映射，且 $f_U = f\circ j$，则对任意 $G \in \mathbf{D}(S)$，有一个正合三角

$$\mathbb{R}j_* f_U^! G \to f^! G \to f_{(X,Y)}^! G.$$

证明。设 G 是 Y 上的一个层。函子

$$\begin{aligned}\mathrm{Shv}(X) &\longrightarrow \{\text{Abelian groups}\}\\ F &\longmapsto \mathrm{Hom}_Y(f_*^Y C^n F, G)\end{aligned}$$

是右正合的，并将滤过直极限映为滤过逆极限。因此，它可由 X 上的一个层 ${f^{-n}}_{(X,Y)}G$ 表示。

一个态射 $G \to G'$ 诱导出一个态射 ${f^{-n}}_{(X,Y)}G \to {f^{-n}}_{(X,Y)}G'$。自然态射 $f_*^Y C^{n-1}F \to f_*^Y C^n F$ 诱导出一个态射 ${f^{-n}}_{(X,Y)}G \to {f^{-n+1}}_{(X,Y)}G$。因此，若 G 是 $\mathbf{Y}$ 上的层复形，则我们有一个双复形 ${f^{-p}}_{(X,Y)}G^q$，其对应的简单复形记为 $f_{(X,Y)}^\nabla G$。有一个同构

$$\mathrm{Hom}_Y^\bullet(f_*^Y C^\bullet F, G) = \mathrm{Hom}_X^\bullet(F, f_{(X,Y)}^\nabla G) \tag{3.3.1}$$

它扩展为 X 上层复形 F 的同一个同构。于是，只需定义

$$f_{(X,Y)}^! G := f_{(X,Y)}^\nabla I(G)$$

其中 $G \to I(G)$ 是一个内射分解。细节留给读者验证。现在，由复形的正合序列

$$0 \to f_*^Y C^\bullet F \to f_* C^\bullet F \to f_* j_* C^\bullet F_{|U} \to 0$$

可得复形的正合序列

$$0 \to j_* f_U^{\nabla} I(G) \to f^{\nabla} I(G) \to f_{(X,Y)}^{\nabla} I(G) \to 0$$

因此，正合三角为

$$\mathbb{R} j_* f_U^! G \to f^! G \to f_{(X,Y)}^! G.$$

□

定义 3.4。我们将 $D_{X/S}^Y := f_{(X,Y)}^! \mathbb{Z}$ 记作.....。它称为 X 沿 Y相对于 S 的局部相对对偶化复形。若 S 是一个点，则记作 D_X^Y，并称为 X 沿 Y的局部对偶化复形。

定理 3.5。设 $f\colon X \to S$ 是一个连续映射， Y 是 X的一个闭子集。对于任意闭子集 $i\colon K \hookrightarrow X$, 有:

$$i_* D_{K/S}^{Y \cap K} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, D_{X/S}^Y).$$

更一般地，对于任意 $G \in D(S)$，有

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, f_{(X,Y)}^! G) = i_*(f_{(K,K\cap Y)}^! G).$$

证明。对于 S 的任意开子集 V 以及任意 $F \in D(X)$，有

$$\Gamma_{Y \cap f^{-1}(V)}(f^{-1}(V), F_K) = \Gamma_{K \cap Y \cap f^{-1}(V)}(K \cap f^{-1}(V), F_{|K})$$

然后 $f_*^Y F_K = f_*^{Y\cap K} F_{|K}$。该结果由伴随性得出。 □

在本文其余部分，我们只考虑以下特殊情形:

定义 3.6. 设 X 是一个有限局部空间， $\mathbf{0} \in X$ 是闭点，且 $X^* = X - \{\mathbf{0}\}$。复形 $D_X^{\mathbf{0}}$ 称为 X 的局部对偶化复形。根据定义

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F, D_X^{\mathbf{0}}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma_{\mathbf{0}}(X, F), \mathbb{Z}) \tag{3.6.1}$$

称其为局部对偶同构。存在一个正合三角

$$\mathbb{R} j_* D_{X^*} \to \mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}} \to D_X^{\mathbf{0}} \tag{3.6.2}$$

其中 $j\colon X^* \hookrightarrow X$ 是包含映射，因为 $D_X = \mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}$ （见 [3]）。此外，对于任意闭子集 $i\colon K \hookrightarrow X$，有:

$$i_* D_K^{\mathbf{0}} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, D_X^{\mathbf{0}}) \tag{3.6.3}$$

即， $D_K^{\mathbf{0}} = i^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, D_X^{\mathbf{0}})$。

以下结果展示了局部对偶化复形与层 $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ 之间的关系。

注 3.7. 由局部对偶,

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}, D_X^{\mathbf{0}}) = \mathbb{Z}$$

进而

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}, D_X^{\mathbf{0}}) = \mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}$$

由命题 2.5。

命题 3.8。对于任意 $x > \mathbf{0}$，有：

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, D^{\mathbf{0}}_X) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}, \mathbb{Z}_{\{x\}})^\vee = \mathbb{L}_{\mathrm{red}}((\mathbf{0}, x), \mathbb{Z})[2].$$

因此，

$$\operatorname{Ext}^{-i}_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, D^{\mathbf{0}}_X) = \widetilde{H}_{i-2}((\mathbf{0}, x), \mathbb{Z}).$$

证明。第 一个同构是局部对偶；第二个结论由命题 2.5 得出。 □

命题 3.9。设 $x < y$ 和 $j\colon\ U_y \hookrightarrow U_x$ 为包含映射。则有：

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(j^{-1}D^x_{U_x}, D^y_{U_y}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}}).$$

证明。由此可得

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_y}(j^{-1}D^x_{U_x}, D^y_{U_y}) &\overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_y}(\mathbb{Z}_{\{y\}}, j^{-1}D^x_{U_x})^\vee = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(j_!\mathbb{Z}_{\{y\}}, D^x_{U_x})^\vee = \\ &= \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(\mathbb{Z}_{\{y\}}, D^x_{U_x})^\vee \overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}})^{\vee\vee} = \\ &= \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}}) \overset{2.5}{=\!=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}})\end{aligned}$$

□

4. Canonical complexes

A. Grothendieck 在概形上引入了“对偶化复形”的概念，将其定义为一种能够产生自反性的复形。在本文中，我们为有限空间引入类似的概念，但为了避免与上一节中的对偶化复形混淆，我们将其称为典范复形。它的主要性质仿照 Grothendieck 在概形上的相应性质。

定义 4.1. X 上的典范复形是一个复形 $\Omega \in D^b_c(X)$，满足对于任意$F \in D_c(X)$，自然态射

$$F \to \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, \Omega), \Omega)$$

是一个同构。这个同构将称为自反同构。如果存在一个定义在 X 上的典范复形，则称有限空间是可对偶的（正如我们稍后将看到的，若它存在，则本质上是唯一的）。

定义 4.2. 对任意 $\Omega \in D(X)$，记 $D := \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\ , \Omega)\colon\ D(X) \to D(X)$。我们称 $F \in D(X)$ 是 Ω-自反的，如果 $F \to D(D(F))$ 是一个同构。

注 4.3. 设 Ω 是一个典范复形。对于任意 $F, G \in D_c(X)$，都有一个同构

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, G) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(D(G), D(F))$$

然后有一个同构

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(F, G) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(D(G), D(F)).$$

事实上，$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(D(G)\ D(F)) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(D(G) \otimes F, \Omega) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, D(D(G)))$，由此可得结论，因为 $G = D(D(G))$。

P命题 4.4. 设 $\Omega \in D_c^b(X)$。以下条件等价 .

(1) Ω 是一个典范复形。(2) 任意 $F \in D_c^b(X)$ 都是 Ω- 自反的。(3) 对任意 $x \in X$, $\mathbb{Z}_{U_x}$ 都是 Ω-自反的。(4) 对任意 $x \in X$, $\mathbb{Z}_{C_x}$ 都是 Ω-自反的。(5) 对任意 $x \in X$, $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ 都是 Ω-自反的。

证明。为了证明 F 是自反的，只需证明对于任意 i， C^iF 是自反的，或者对于任意 i, C_iF 是自反的。还要注意，对于任意 $E \in D(\mathbb{Z})$ 和任意$F \in D_c^b(X)$，有

$$D(E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} F) = E^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D(F). \tag{4.4.1}$$

Indeed, $D(E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} F, \Omega) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(E, D(F)) \overset{1.9}{=} E^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D(F)$.

(3) $\Rightarrow$ (1)。若 $\mathbb{Z}_{U_x}$ 是自反的，则根据 (4.4.1)，对任意 $E \in D_c(\mathbb{Z})$， $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_x}$ 都是自反的。因此，对任意 $F \in D_c(X)$ 和任意 i， C_iF 都是自反的，故 F 是自反的。

(4) $\Rightarrow$ (1)。这与前一个证明类似，只需将其中的 $\mathbb{Z}_{U_x}$ 替换为 $\mathbb{Z}_{C_x}$，并将 C_iF 替换为 C^iF。

(5) $\Rightarrow$ (4)。对 $\dim C_x$ 使用归纳法。若其为零，则 $C_x = \{x\}$。若 $\dim C_x > 0$，由正合列

$$0 \to \mathbb{Z}_{\{x\}} \to \mathbb{Z}_{C_x} \to \mathbb{Z}_{C_x^*} \to 0$$

我们只需证明 $\mathbb{Z}_{C_x^*}$ 是自反的。根据归纳法，对任意 $y < x$， $\mathbb{Z}_{C_y}$ 都是自反的；由 (4.4.1)，对任意 $E \in D_c(\mathbb{Z})$， $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{C_y}$ 都是自反的，进而对任意 i，$C^i\mathbb{Z}_{C_x^*}$ 都是自反的，结论得证。

其余推论显而易见。 □

定理 4.5. 设 $\Omega \in D_c^b(X)$ 是一个典范复形。

(1) 若 U 是 X的开子集，则 $\Omega^{|U}$ 是 U上的典范复形。(2) 若 $K \overset{i}{\hookrightarrow} X$是一个闭子集，则 $i^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, \Omega)$ 是K上的典范复形。

证明. (1) 由等式 $\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, \Omega)_{|U} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_U^\bullet(F_{|U}, \Omega^{|U})$，以及任意一个 $G \in D_c(U)$都是某个 $F \in D_c(X)$在 U 上的限制这一事实，可立即得出（例如， $F = j_!G$，其中 j 是 U 到 X的包含映射）。

(2) 记 $\Omega^K = i^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, \Omega)$，于是 $i_*\Omega^K = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, \Omega)$。我们先来证明

$$i_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(F, \Omega^K) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*F, \Omega) \tag{4.5.1}$$

对于任意 $F \in D(K)$。事实上，由于 $F = i^{-1}i_*F$，可得

$$\begin{aligned} i_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(F, \Omega^K) &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*F, i_*\Omega^K) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*F, \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_K, \Omega)) \\ &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*F \otimes \mathbb{Z}_K, \Omega) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*F, \Omega). \end{aligned}$$

现在，令 $F \in D_c(K)$，我们来证明 $F \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(\mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(F, \Omega^K), \Omega^K)$ 是一个同构。只需证明它在施加 i_* 后是同构即可。现在，

$$\begin{aligned} i_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(\mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(F, \Omega^K), \Omega^K) &\overset{(4.5.1)}{=} \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_K^\bullet(F, \Omega^K), \Omega) \\ &\overset{(4.5.1)}{=} \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(i_*F, \Omega), \Omega) = i_*F. \end{aligned}$$

□

推论 4.6. 可对偶空间的任意局部闭子空间都是可对偶的。任意单纯复形都是可对偶的。任意射影单纯复形都是可对偶的。更一般地，单纯复形（或射影单纯复形）的任意局部闭子集都是可对偶的。

证明. 第一条结论由定理 4.5 得出。在 [10] 中证明了 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 是可对偶的（事实上，证明了 $\mathbb{Z}_{\{g\}}$ 是典范复形，且 g 是 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$的泛点）。因此， $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 的任意局部闭子集都是可对偶的。□

注记 4.7（与 Stanley–Reisner 对应的相容性）。设 $K \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 是一个单纯复形，$S_K \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ 是根据 Stanley–Reisner 对应与之关联的闭子概形。在 [10] 中证明了存在连续映射 $\pi\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$、$\pi_K\colon S_K \to K$ 以及正合函子

$$\pi^\star\colon \mathrm{Shv}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}) \quad , \quad \pi_K^\star\colon \mathrm{Shv}(K) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(S_K).$$

此外，有一个同构

$$\pi^\star\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}}(\mathbb{Z}_K, \mathbb{Z}_{\{g\}}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}}(\mathcal{O}_{S_K}, \omega_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}})$$

其中 $\omega_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}}$ 是概形 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$的典范模，即最高阶微分：$\omega_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}} = \Omega^n_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}}$。因此，如果 Ω_K 是 K上的典范复形，那么 $\pi^\star(\Omega_K)$ 是概形 S_K的对偶化复形。

定理4.8（典范复形的唯一性）。假设 X 是连通的。设 $\Omega \in D_c^b(X)$ 是一个典范复形。当且仅当

$$\Omega' = \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}[r]$$

对于某个 $r \in \mathbb{Z}$ 以及某个可逆层 $\mathcal{L}$（即局部同构于常值层 $\mathbb{Z}$的层）。

证明。反　　向显然。下面证明正向。对于任意 $F \in D_c(X)$，记

$$D(F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, \Omega) \quad , \quad D'(F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, \Omega').$$

定义 $L = D'D(\mathbb{Z}) \in D_c^b(X)$，首先证明

$$F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L = D'D(F) \tag{4.8.1}$$

$\mathbb{L}$对任意 $F \in D_c(X)$ 均成立。事实上，由于 D' 满足自反性，只需验证 $D'(F \otimes L) = D(F)$。现在，

$$\begin{aligned} D'(F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L) &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L, \Omega') = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, D'(L)) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, D(\mathbb{Z})) \\ &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, \Omega) = D(F) \end{aligned}$$

$\mathbb{L}$正如所需。在等式 (4.8.1) 中令 $F = L' := DD'(\mathbb{Z})$，我们得到 $L' \otimes L = \mathbb{Z}$.$\mathbb{L}$在点 $x \in X$ 处取茎，得到 $L'_x \otimes L_x = \mathbb{Z}$，进而得到 $L_x = \mathbb{Z}[r_x]$，其中某个整数为 r_x（引理 1.4）。对于任意 $y > x$，该图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} L'_x \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L_x & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} \\ L'_y \overset{\mathbb{L}}{\otimes} L_y & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \end{array}$$

可得 $r_x = r_y$。因此，r_x 在 x 上局部常值。由于 X 连通，它是常值的。总之，对于某个可逆层 $\mathcal{L}$ 和某个整数 r，有 $L = \mathcal{L}[r]$。最后，在等式 (4.8.1) 中取 $F = \Omega = D(\mathbb{Z})$，得到

$$\Omega \otimes \mathcal{L}[r] = D'DD(\mathbb{Z}) = D'(\mathbb{Z}) = \Omega'$$

定理得证。 □

现在我们来看看，一个典范复形对应着一个余维函数（它事实上是余维函数的证明将在稍后给出）。

命题 4.9. 设 Ω 是定义在 X 上的典范复形。对于每个 $x \in X$，存在一个整数ϕ_x 使得：

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \Omega) &= \mathbb{Z}[-\phi_x] \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \Omega) &= \mathbb{Z}_{C_x}[-\phi_x] \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_x}, \Omega) &= \mathbb{Z}_{\{x\}}[-\phi_x]. \end{aligned}$$

证明. 根据自反性，有

$$\mathbb{Z}_{C_x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_x}, \Omega), \Omega) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{C_x}\Omega, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{C_x}\Omega)$$

并取在 x处的茎

$$\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{U_x}^\bullet(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_x\Omega_{|U_x}, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_x\Omega_{|U_x}) \overset{1.8}{=\!=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \Omega), \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \Omega)).$$

根据引理 1.4，$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x,\Omega) = \mathbb{Z}[-\phi_x]$ 对于某个整数 ϕ_x成立。第二个公式由命题 2.5 得出，而第三个公式则由第二个公式通过自反性得到。□

定义 4.10. 映射。

$$\begin{aligned}\phi\colon X &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ x &\mapsto \phi_x\end{aligned}$$

称为与 Ω 相关联的余维函数。

定理4.11（双对偶性）。设 Ω 是 X 上的一个典范复形，其余维函数为ϕ。对于每个 $x \in X$, $F \in D_c(X)$，有：

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(F_{|U_x}, \Omega_{|U_x})^\vee[-\phi_x]$$

进而

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(F_{|U_x}, \Omega_{|U_x}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F)^\vee[-\phi_x].$$

因此，Ω 的茎上描述由下式给出：

$$\Omega_x = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z})^\vee[-\phi_x] \overset{1.6}{=} \mathbb{L}_{\mathrm{red}}(U_x^*, \mathbb{Z})[1-\phi_x].$$

证明。由此可得

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) &\overset{4.3}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(D(F), D(\mathbb{Z}_{\{x\}})) \overset{4.9}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(D(F), \mathbb{Z}_{C_x})[-\phi_x]\\ &= \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(D(F)_x, \mathbb{Z})[-\phi_x].\end{aligned}$$

由于 $D(F)_x = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(F_{|U_x}, \Omega_{|U_x})$，我们得出第一个等式。取对偶 $^\vee$，即可得到第二个等式。对第二个等式取 $F = \mathbb{Z}$，即可得到 Ω 的茎上的描述。

□

推论 4.12（典范复形与局部对偶化复形的相容性）。若 Ω 是 X 的典范复形，余维函数为 ϕ, 则对于任意 $x \in X$：

$$\Omega_{|U_x} = D^x_{U_x}[-\phi_x].$$

此推论表明，在局部空间上，典范复形只有一个候选（相差一个移位），即局部对偶化复形。在不可约空间上，只有一个候选：支撑在泛点处的常值层 $\mathbb{Z}$，正如下文将要证明的。

命题 4.13。设 X 是一个不可约有限空间， g 是泛点。若 Ω 是 X 上的典范复形，余维函数为 ϕ, 则

$$\Omega = \mathbb{Z}_{\{g\}}[-\phi_g].$$

证明。由定理4.11,

$$\Omega_g = \mathbb{Z}[-\phi_g]. \tag{4.13.1}$$

考虑正合列

$$0 \to \Omega_{\{g\}} \to \Omega \to \Omega_{X-g} \to 0.$$

应用 $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\ ,\Omega)$ 可得正合三角

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\Omega_{X-g}, \Omega) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\Omega, \Omega) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\Omega_{\{g\}}, \Omega).$$

我们有 $\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\Omega, \Omega) = \mathbb{Z}$；下面来说明 $\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\Omega^{\{g\}}, \Omega) = \mathbb{Z}$ 也成立。事实上，若j: $\{g\} \hookrightarrow X$ 是包含映射，则

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\Omega_{\{g\}}, \Omega) = j_*\mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(\Omega_g, \Omega_g) \overset{(4.13.1)}{=} j_*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

由正合三角可得 $\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\Omega^{X-g}, \Omega) = 0$，进而 $\Omega_{X-g} = 0$。因此 $\Omega = \Omega_{\{g\}} = \mathbb{Z}_{\{g\}}[-\phi_g]$。□

我们现在旨在证明，有限空间 X若要存在典范复形，就必须满足某些必要的拓扑条件。当该空间是局部的或不可约的时，这些条件也将是充分的。

命题 4.14. 设 Ω 是定义在 X 上、具有余维函数 ϕ 的典范复形。对于任意 $x < y$，有：

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}((x, y), \mathbb{Z})[-2] = \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}}) = \mathbb{Z}[\phi_y - \phi_x].$$

证明。第一个等式由命题 2.5 给出。对于第二个，

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}}) \overset{4.3}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(D(\mathbb{Z}_{\{y\}}), D(\mathbb{Z}_{\{x\}})) &\overset{4.9}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{C_y}, \mathbb{Z}_{C_x})[\phi_y - \phi_x] \\ &= \mathbb{Z}[\phi_y - \phi_x].\end{aligned}$$

□

定理4.15. 设 Ω 是定义在 X 上、具有余维函数 ϕ 的典范复形。则：

(1) ϕ 是余维函数：$\phi_x = \phi_y + 1$ 对于任意 $x \prec y$。特别地，X 是串联的。(2) 对于任意 $x < y$，区间（x，y）是同调球面。

证明。(1) 如果 $x \prec y$，那么（x，y）为空，因此 $\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}$（（$x$，$y$） $\mathbb{Z}$） $= \mathbb{Z}[1]$。根据命题 4.14，$\phi_y - \phi_x = -1$。

(2) 根据命题 4.14，$\mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}$（（$x$，$y$） $\mathbb{Z}$） $= \mathbb{Z}[2 - \phi_x + \phi_y]$。剩下需要证明 dim（$x$，$y$） $= \phi_x - \phi_y - 2$。由于 ϕ 是余维函数，dim$[x, y] = \phi_x - \phi_y$。因为 dim（x，y） $=$dim $[x, y] - 2$. □，故得出结论。

现在我们将看到，当 X 是局部的或不可约时，该定理的逆命题成立。

定理 4.16。假设 X 是局部的，且闭点为 0。进一步假设：

(a) X 是串联的。(b) 对任意 $x < y$，区间 (x, y) 是一个同调球面。

那么：

（1）局部对偶化复形 D_X^0 是一个典范复形，其余维函数为$\phi_x = -\dim C_x$。（2）对于任意 $x \in X$，有

$$[D_X^0]_{|U_x} \simeq D_{U_x}^x[\dim C_x].$$

证明。我们来证明（2）。有

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}((D_X^{\mathbf{0}})_{|U_x}, D^x_{U_x}[\dim C_x]) &\overset{3.9}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X(\mathbb{Z}_{\mathbf{0}}, \mathbb{Z}_{\{x\}})[\dim C_x]\\ &\overset{2.5}{=} \mathbb{R}\Gamma_{\mathrm{red}}((\mathbf{0}, x), \mathbb{Z})[\dim C_x - 2]\\ &\overset{(b)}{\simeq} \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

因此，元素 $1 \in \mathbb{Z}$ 给出了一个态射 $\psi\colon (D_X^{\mathbf{0}})_{|U_x} \to D^x_{U_x}[\mathbf{dim}\ C_x]$。为了证明 ψ 是一个同构，只需（根据命题 2.6）在对任意 $q \in U_x$ 应用 $\mathbb{R}\mathbf{Hom}^\bullet_{U_x}(\mathbb{Z}_{\{q\}},)$ 后验证这一点。现在，

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(\mathbb{Z}_{\{q\}}, (D_X^{\mathbf{0}})_{|U_x}) &\overset{3.8}{=} \mathbb{L}_{\mathrm{red}}((\mathbf{0}, q), \mathbb{Z})[2] \overset{(b)}{\simeq} \mathbb{Z}[\dim[\mathbf{0}, q]]\\ \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(\mathbb{Z}_{\{q\}}, D^x_{U_x}) &\overset{3.8}{=} \mathbb{L}_{\mathrm{red}}((x, q), \mathbb{Z})[2] \overset{(b)}{\simeq} \mathbb{Z}[\dim[x, q]]\end{aligned}$$

由 catenarity 可知 $\mathbf{dim}[x, q] + \mathbf{dim}\ C_x = \mathbf{dim}[\mathbf{0}, q]$，因此得证。

现在，让我们证明 (1)。设 $F \in D_c(X)$，并考察可知。

$$F \to \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, D_X^{\mathbf{0}}), D_X^{\mathbf{0}})$$

是一个同构。我们逐茎进行考察。右侧项在闭点 0 处的纤维是

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, D_X^{\mathbf{0}}), D_X^{\mathbf{0}}) &\overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}, \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, D_X^{\mathbf{0}}))^\vee\\ &= \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(F, \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}, D_X^{\mathbf{0}}))^\vee\\ &\overset{3.7}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(F, \mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}))^\vee = (F_{\mathbf{0}})^{\vee\vee} = F_{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

正如所需。在非闭点 x 处的纤维是同构，因为 $D_X^{\mathbf{0}}$ 到 U_x 的限制同构于 $D^x_{U_x}[\dim C_x]$（由 (2) 得出），根据维数归纳法，这是 U_x 上的典范复形。最后，$D_X^{\mathbf{0}}$ 的余维函数为 $\phi_x = -\mathbf{dim}\ C_x$，因为 $\phi_{\mathbf{0}} = 0$，这是由于 $\mathbb{R}\mathbf{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{\mathbf{0}\}}, D_X^{\mathbf{0}}) = \mathbb{Z}$，由局部对偶可知。□

推论 4.17. 有限空间局部可对偶，当且仅当它是串联的，且每个区间都是同调球面。

T定理 4.18. 假设 X 不可约，且其泛点为 g。进一步假设 (a) X 是串联的。(b) 对任意 $x < y$，区间 (x, y) 是同调球面。

那么 $\mathbb{Z}_{\{g\}}$ 就是一个典范复形，其余维函数为 $\phi_x = \mathbf{dim}\, U_x$。

证明。对于任意 $x \in X$, U_x 是局部的，因此由定理 4.16 可知它具有一个典范复形；由于 U_x 不可约，$\mathbb{Z}_{\{g\}}$ 是 U_x 中的一个典范复形（命题 4.13）。因此，$\mathbb{Z}_{\{g\}}$ 是 X 上的一个典范复形，因为它在每个 U_x 上的限制都是一个典范复形。余维函数为 $\phi_x = \mathbf{dim}\ U_x$，因为 $\phi_g = 0$，因为 $\mathbb{R}\mathbf{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{g\}}, \mathbb{Z}_{\{g\}}) = \mathbb{Z}$。□

推论 4.19。设 X 是一个串联的有限空间，且对于任意 $x < y$，(x, y) 都是一个同调球面。那么，对于任意点 $x \in X$， $D^x_{U_x}$ 是 U_x 的一个典范复形，而 $\mathbb{Z}_{\{x\}}$ 是 C_x 的一个典范复形。

定理4.20（局部可对偶空间上的局部与整体对偶性）。设 X 是一个具有闭点 0 的局部可对偶有限空间。设 $D^{\mathbf{0}}_X$ 是局部对偶化复形，并且对于每个 $F \in D_c(X)$，记

$$D(F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^{\bullet}_X(F, D^{\mathbf{0}}_X).$$

（A）对于每个 $x \in X$，有（记 $c_x = \dim C_x$）：

（a） $D(F)_x = \mathbb{R}\,\mathbf{Hom}^{\bullet}_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F)^{\vee}[c_x] \overset{2.5}{=} \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)^{\vee}[c_x]$.

（b） $F_x = \mathbb{R}\,\mathbf{Hom}^{\bullet}_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, D(F))^{\vee}[c_x] \overset{2.5}{=} \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, D(F))^{\vee}[c_x]$.特别地，

(a') $[D^{\mathbf{0}}_X]_x = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^{\bullet}_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, \mathbb{Z})^{\vee}[c_x] \overset{2.5}{=} \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z})^{\vee}[c_x] \overset{1.6}{=} \mathbb{L}_{\mathrm{red}}(U^*_x, \mathbb{Z})[1 + c_x]$.

(b') $\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, D^{\mathbf{0}}_X) \overset{2.5}{=} \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^{\bullet}_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, D^{\mathbf{0}}_X) = \mathbb{Z}[c_x]$.

（B）记 $X^* = X - \mathbf{0}$。则 $D_{X^*} := (D^{\mathbf{0}}_X)_{|X^*}[-1]$ 是 X^* 的整体对偶化复形，因此

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^{\bullet}_{X^*}(G, D_{X^*}) = \mathbb{R}\Gamma(X^*, G)^{\vee}$$

对于任意 $G \in D(X^*)$。

证明。(a)由定理4.11的第二个公式得到，因为 $D^{\mathbf{0}}_X$ 是余维函数为 $\phi_x = -$ 维 C_x的典范复形。将 F替换为 $D(F)$，得到(b)。(a')-(b')中的公式通过取 $F = \mathbb{Z}$得到。(B)由3.6.2得到。□

以下推论是定理 4.20、4.16 和 4.5 的结果，它表明抽象单纯复形（我们称之为射影单纯复形）的行为类似于射影概形。

推论 4.21. 设 K^* 是一个 n 维射影单纯复形。整体对偶化复形 D_{K^*} 是一个典范复形，并且在局部上与局部对偶化复形一致，即：对每个 $x \in X$，都有

$$D_{K^*|U_x} = D^x_{U_x}[\dim C_x].$$

在 $K^* = \mathbb{P}^n_{\mathbf{F}_1}$ 的情况下，有 $D_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{F}_1}} = \mathbb{Z}_{\{g\}}[n]$，其中 g是 $\mathbb{P}^n_{\mathbf{F}_1}$ 的泛点。一般而言，若 i: $K^* \hookrightarrow \mathbb{P}^r_{\mathbf{F}_1}$ 是一个闭子集，则

$$D_{K^*} = i^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om^{\bullet}_{\mathbb{P}^r_{\mathbf{F}_1}}(\mathbb{Z}_{K^*}, \mathbb{Z}_{\{g\}})[r].$$

4.0.1. 乘积。设 X、Y是两个有限空间。考虑直积 $X \times Y$ 及自然投影 π_X: $X \times Y \to X$、 π_Y: $X \times Y \to Y$。对于任意 $F \in D(X)$、$G \in D(Y)$，记

$$F \boxtimes G = (\pi_X^{-1}F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (\pi_Y^{-1}G).$$

对于任意开子集 U of X和 V of Y，有 $(F \boxtimes G)_{|U\times V} = F_{|U} \boxtimes G_{|V}$。对于任意点 $(x, y) \in X \times Y$有

$$\mathbb{Z}_{\{(x,y)\}} = \mathbb{Z}_{\{x\}} \boxtimes \mathbb{Z}_{\{y\}}.$$

引理 4.22。有

$$\mathbb{R}\Gamma(X \times Y, F \boxtimes Y) = \mathbb{R}\Gamma(X, F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\Gamma(Y, G).$$

证明。记 p_X: $X \to \{*\}$, p_Y: $Y \to \{*\}$ 为到一个点的投影。于是，利用基变换和投影公式（两次）（见 [3]）

$$\mathbb{R}\Gamma(X \times Y, F \boxtimes Y) = \mathbb{R}p_{X*}\mathbb{R}\pi_{X*}\left[(\pi_X^{-1}F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (\pi_Y^{-1}G)\right] = \mathbb{R}p_{X*}(F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\pi_{X*}\pi_Y^{-1}G)$$

$$= \mathbb{R}p_{X*}(F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_X^{-1}\mathbb{R}p_{Y*}G) = \mathbb{R}p_{X*}F \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}p_{Y*}G$$

□

对于任意 $F_1, F_2 \in D(X)$ 和 $G_1, G_2 \in D(Y)$，有一个自然态射

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F_1, F_2) \boxtimes \mathbb{R}\mathcal{H}om_Y^\bullet(G_1, G_2) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{X\times Y}^\bullet(F_1 \boxtimes G_1, F_2 \boxtimes G_2) \tag{4.22.1}$$

and then a morphism

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(F_1, F_2) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_Y^\bullet(G_1, G_2) \longrightarrow \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{X\times Y}^\bullet(F_1 \boxtimes G_1, F_2 \boxtimes G_2) \tag{4.22.2}$$

命题 4.23。假设 $F_1, F_2 \in D_c^b(X)$ 和 $G_1, G_2 \in D_c^b(Y)$。则 (4.22.1) 和 (4.22.2) 是同构。

证明。为了验证 (4.22.1) 是一个同构，我们逐茎考察。对于任意 $(x, y) \in X\times Y$，有 $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$。在态射 (4.22.1) 中取 (x, y) 处的茎，得到空间 U_x, U_y 以及限制在其上的层 F_i, G_j 对应的态射 (4.22.2)。总之，只需证明 (4.22.2) 是一个同构。

(a) 首先假设

$$F_1 = E_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_{x_1}} \quad , \quad F_2 = E_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_{x_2}}$$
$$G_1 = V_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_{y_1}} \quad , \quad G_2 = V_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{U_{y_2}}$$

其中 $E_i, V_i \in D_c^b(\mathbb{Z})$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$。在这种情况下，同构 (4.22.2) 可通过直接计算得到。

(b) 根据 (a)，对于任意整数 i_1, i_2, j_1, j_2，复形 $C_{i_1}F_1$, $C_{i_2}F_2$,$C_{j_1}G_1$, $C_{j_2}F_2$ 对应的 (4.22.2) 是一个同构。

由复形的正合序列 $0 \to C_nF_1 \to \cdots \to C_0F_1 \to F_1 \to 0$（以及 F_2、G_1、G_2 对应的类似序列），我们得出，对于任意 F_1、$F_2 \in D_c^b(X)$， G_1、$G_2 \in D_c^b(Y)$，(4.22.1) 都是一个同构。□

Pro命题 4.24. $X \times Y$ 是可对偶的，当且仅当 X 和 Y 是可对偶的。 $e.$

证明。假设 X和 Y可对偶，且其典范复形分别为 Ω_X、Ω_Y，我们来证明 $\Omega_X \boxtimes \Omega_Y$是 $X \times Y$上的典范复形。由命题 4.23

$$D(F \boxtimes G) = D(F) \boxtimes D(G)$$

对于任意 $F \in D_c(X)$、 $G \in D_c(Y)$，于是 $F \boxtimes G$ 是自反的。特别地，层$\mathbb{Z}_{\{(x,y)\}}$ 是自反的，因为 $\mathbb{Z}_{\{(x,y)\}} = \mathbb{Z}_{\{x\}} \boxtimes \mathbb{Z}_{\{y\}}$。由命题 4.4 可得结论。

反过来，假设 $X \times Y$ 可对偶。令 $y \in Y$ 为一个闭点。则$X = X \times \{y\}$ 是 $X \times Y$ 的闭子集，因此它是可对偶的。类似地， Y也是可对偶的。

□

同一命题对局部对偶化复形也成立：

命题 4.25。设 X 和 Y 为局部空间，其闭点分别为 x_0、 y_0。则

$$D_{X\times Y}^{(x_0,y_0)} = D_X^{x_0} \boxtimes D_Y^{y_0}.$$

证明。我们先定义一个态射 ψ: $D_X^{x_0} \boxtimes D_Y^{y_0} \to D_{X\times Y}^{(x_0,y_0)}$。有如下等式

<escape>$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X\times Y}(D_X^{x_0} \boxtimes D_Y^{y_0}, D^{(x_0,y_0)}{}_{X\times Y}) \overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X\times Y}(\mathbb{Z}_{\{(x_0,y_0)\}}, D_X^{x_0} \boxtimes D_Y^{y_0})^\vee$</escape>

$$\overset{4.23}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x_0\}}, D_X^{x_0})^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_Y(\mathbb{Z}_{\{y_0\}}, D_Y^{y_0})^\vee.$$
$$\overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(D_X^{x_0}, D_X^{x_0}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_Y(D_Y^{y_0}, D_Y^{y_0}).$$

因此，恒等态射 $D_X^{x_0} \to D_X^{x_0}$, $D_Y^{y_0} \to D_Y^{y_0}$ 给出了所需的态射 ψ。为了证明 ψ 是同构，只需根据命题 2.6，证明对任意 $(x, y) \in X \times Y$，应用 $\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X\times Y}(\mathbb{Z}_{\{(x,y)\}},)$ 后它仍是同构。现在，

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X\times Y}(\mathbb{Z}_{\{(x,y)\}}, D_X^{x_0} \boxtimes D_Y^{y_0}) \overset{4.23}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, D_X^{x_0}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_Y(\mathbb{Z}_{\{y\}}, D_Y^{y_0})$$
$$\overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x_0\}}, \mathbb{Z}_{\{x\}})^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_Y(\mathbb{Z}_{\{y_0\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}})^\vee$$

and

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X\times Y}(\mathbb{Z}_{\{(x,y)\}}, D_{X\times Y}^{(x_0,y_0)}) \overset{3.6.1}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X\times Y}(\mathbb{Z}_{\{(x_0,y_0)\}}, \mathbb{Z}_{\{(x,y)\}})^\vee$$
$$\overset{4.23}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x_0\}}, \mathbb{Z}_{\{x\}})^\vee \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_Y(\mathbb{Z}_{\{y_0\}}, \mathbb{Z}_{\{y\}})^\vee$$

□

5. 柯恩–麦考利性

仿照格罗滕迪克，我们从典范复形的科恩-麦考利性理论出发，发展有限空间上的科恩-麦考利性理论。

5.1. 支撑、维数与深度。

定义 5.1. 对任意 $F \in D(X)$，我们回顾其支撑的定义如下:

$$\operatorname{supp}(F) = \{x \in X : F_x \neq 0\}$$

其对偶支集定义如下:

$$\text{d-supp}(F) = \{x \in X : \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) \neq 0\}.$$

F 的维数定义如下:

$$\dim(F) = \dim(\overline{\operatorname{supp}(F)}).$$

最后，若 $\operatorname{supp}(F)$ 是纯的，则称 $\overline{F}$ 是纯的。

注 5.2. 请注意,

$$\overline{\operatorname{supp}(F)} = \{x \in X : F_{|U_x} \neq 0\}.$$

注记 5.3. $H^i(X, F) = 0$ 对于任意 $i >$ 维数 F，因为 $H^i(X, F) = H^i(S, F_{|S})$，其中 $S = \overline{\text{支集}(F)}$。

命题 5.4. 有:

(1) $\overline{\text{支集}(F)} = \overline{\text{对偶支集}(F)}$。(2) 若 X 有一个典范复形 Ω,
则对任意 $F \in D_c(X)$，其中 $D(F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(F, \Omega)$。

$$\text{d-supp}(F) = \operatorname{supp}(D(F))$$

证明。(1). 若 $x \in$ 对偶支集(F)，则 $\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) \neq 0$，因此 $F_{|U_x} \neq 0$ 所以 $x \in$ 支集(F)。为得出结论，只需证明 F 的支撑中的任意泛点都属于 F的对偶支集。设 g 是这样的泛点。那么 $F_{|U_g}$ 支撑在闭点 g处，因此

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{g\}}, F) = \mathbb{R}\Gamma_g(U_g, F) = F_g \neq 0$$

于是 $g \in$ 对偶支集(F)。

(2). 由以下等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) &\overset{4.3}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(D(F), D(\mathbb{Z}_{\{x\}})) \overset{4.9}{=} \mathbb{R}\operatorname{Hom}_X^\bullet(D(F), \mathbb{Z}_{C_x})[-\phi_x] \\ &= \mathbb{R}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}^\bullet(D(F)_x, \mathbb{Z})[-\phi_x].\end{aligned}$$

□

定义 5.5. 设 F 是 X 上的一个层。对每个 $x \in \text{d-supp}(F)$，我们定义 F 在 x 处的深度为:

$$\operatorname{depth}_x(F) = \text{smallest } k \text{ such that } \operatorname{Ext}_X^k(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) \neq 0$$

或者等价地，满足 $H_x^k(U_x, F) \neq 0$ 的最小 k。那么， F 的深度定义为:

$$\operatorname{depth}(F) = \min_{x \in \text{d-supp}(F)} \{\operatorname{depth}_x(F) + \dim(C_x)\}$$

命题 5.6. 有:

(1) 深度(F) $\leq$ dim(F)。(2) 对任意 $x \in$ d-supp(F),

depth$_x$(F) $\leq$ dim($F_{|U_x}$)。

证明。(1) 令 g 为 supp(F) 的一个泛点，使得 dim C_g = dim(F)。那么 depth$_g$(F) $= 0$, 所以 depth$_g$(F) + dim C_g = dim(F)，结论得证。

(2) $H^i_x(U_x, F)$ = 对任意 $i >$ dim($F_{|U_x}$) 均成立，因此结论得证。 □

注 5.7。假设 F 是纯的。那么，以下条件等价:

(1) 深度(F) = dim(F)。(2) 对每个 $x \in$ d-supp(F),

depth$_x$(F) = dim($F_{|U_x}$)。

事实上， F的纯性意味着，对于任意 $x \in$ supp(F)，dim($F_{|U_x}$) + dim C_x = dim F，由此很容易得出结论。

5.2. 局部空间与可对偶空间上的 Cohen-Macaulay 性。设 X 为一个局部空间，其闭点为 0。进一步假设 X 是可对偶的。那么，局部对偶化复形 D^0_X 是一个典范复形，我们将记作

$$D(F) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet_X(F, D^0_X)$$

对于任意 $F \in D(X)$。

定义 5.8。若层 F 在 X 上满足：对任意$x \in X$， F_x 均无挠，则称其为无挠的。若对任意 $x \in X$, F_x 均为挠阿贝尔群，则称 F 为挠层。

注 5.9。任意有限生成阿贝尔群 G 都可分解为直和

$$G = L \oplus T,$$

其中 L 是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模， T 是挠群。如果 $L = 0$ 或$T = 0$成立，则称 G 为无混合。此外，有

$$G^\vee = L^\vee \oplus T^\vee, \quad L^\vee = L^*, \quad T^\vee \simeq T[-1]$$

其中 $L^* =$ Hom$_\mathbb{Z}(L, \mathbb{Z})$ 是一个与 L 秩相同的自由 $\mathbb{Z}$-模。

定义 5.10. 有限生成层 F 称为科恩–麦考利层，若 $D(F)$ 是一个层，即

$$D(F) = F^\#[r]$$

对于某个定义在 X 上的层 $F_\#$ 以及某个整数 r。此时， $F^\#$ 称为 F的对偶层。

注 5.11. 注意，d-supp($F_\#$) = supp(F) 且 supp(F) = supp($F_\#$)。由反身性， $F_\#$ 也是科恩–麦考利的，且其维数与 F相同。

我们来证明科恩–麦考利层一般无混合。

命题 5.12（科恩–麦考利层的一般结构）。设 F 为科恩–麦考利层， $D(F) = F_{\#}[r]$。对于 $\mathrm{supp}(F)$ 的任意泛点 g， F_g是无混合的：要么F_g 无挠，要么 F_g 是挠群。在第一种情况下， $r =$ 维 C_g；在第二种情况下$r+1 =$ 维 C_g。于是

$$\mathrm{supp}(F) = S_{\mathrm{free}} \cup S_{\mathrm{tor}}$$

其中 S_{free} （分别地， S_{tor}）是 F 的支撑的不可约分支的并，这些分支上 F 在其泛点处是无挠的（分别地，是一个挠群），因此

$$\overline{\mathrm{supp}(F)} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$$

且 $\overline{S_1}$ （分别地， $\overline{S_2}$）是维数为 r （分别地，维数为 $r+1$）的纯的。因此

$$\dim(F) = \begin{cases} r, \text{ if } S_2 = \emptyset \\ r+1, \text{ if } S_2 \neq \emptyset. \end{cases}$$

证明。设 g是 $\mathrm{supp}(F)$ 的泛点，并设 $F_g = L \oplus T$是 F_g在其无挠部分和挠部分中的分解。由定理4.20,

$$[F^{\#}]_g[r] = (F_g)^{\vee}[\dim C_g] \simeq L^*[\dim C_g] \oplus T[-1 + \dim C_g].$$

然后，要么 $r =$维数 C_g （接着 $T = 0$），要么 $r = -1 +$维数C_g （接着 $L^* = 0$。即, $L = 0$）。□

定义 5.13. 若对于 $\mathrm{supp}(F)$ 的任意泛点 g，层 F 都是无挠的，我们称其为泛点处无挠。

定理 5.14。设 F 是 X 上有限生成且泛点处无挠的层。对于每个 $x \in X$，记 $d_x =\dim(F_{|U_x})$。若 F 是科恩–麦考利的，则:

(1) F 是纯的。(2) 对任意 $x \in X$， $H^i_x(U_x, F) = 0$ 对 $i \neq d_x$，且 $H^{d_x}_x(U_x, F)$ 无挠。(3) 对任意 $x \in$ d-supp(F)， $\mathrm{depth}_x(F) = d_x$。 (4) $\mathrm{depth}(F) = \dim(F)$。(5) $D(F) = F^{\#}[\dim(F)],$，其中 $F_{\#}$ 是无挠且科恩–麦考利的层，且

$$[F^{\#}]_x = H^{d_x}_x(U_x, F)^* \quad , \quad H^{d_x}_x(U_x, F^{\#}) = (F_x)^*.$$

(6) F 无挠。

反过来，若 F 满足 (1) 和 (2)，则 F 是科恩–麦考利的。

证明。由命题 5.12， F 是纯的，且 $D(F) = F_{\#}[\dim\ F]$。由定理4.20，对于任意 $x \in X$:

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)^{\vee} = [F^{\#}]_x[\dim F - \dim C_x].$$

若 $x \in \overline{\mathrm{supp}(F)}$，则 $\dim\ F - \dim\ C_x = d_x$，因为 F是纯的。将 $[F_{\#}]_x = L \oplus T$分解为自由部分和挠部分，并取对偶 $^{\vee}$，我们得到

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) \simeq L^*[-d_x] \oplus T[-1 - d_x]$$

然后

$$H^i(U_x, F) = 0, \text{ for } i < d_x,$$
$$H_x^{d_x}(U_x, F) = L^* \text{ is torsion free,}$$
$$T = H_x^{d_x+1}(U_x, F) = 0, \text{ hence } F^{\#} \text{ is torsion free.}$$

将上文中的 F替换为 $F_{\#}$，可得 $H_x^{d_x}(U_x, F^{\#}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_x, \mathbb{Z})$，且 F无挠，因此 (1)-(6) 中的所有结论均得证。

反向结论可由等式 $D(F)_x = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)^{\vee}[\dim C_x]$ 轻易推出；事实上，根据 (2)，$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) = H_x^{d_x}(U_x, F)[-d_x]$，且 $H_x^{d_x}(U_x, F)$ 无挠，因此 $\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)^{\vee} = H_x^{d_x}(U_x, F)^*[d_x]$，从而 $D(F)_x = H_x^{d_x}(U_x, F)^*[d_x + \dim C_x]$ (1)$= H_x^{d_x}(U_x, F)^*[\dim F]$，继而$D(F) = F^{\#}[\dim F]$，其中 F# 由 $(F\#)_x = H_x^{d_x}(U_x, F)^*$ 定义。

□

现在来证明挠层的类似定理。

定理5.15. 设 F 是 X上的有限生成挠层。对于每个 $x \in X$，记 $d_x = \dim(F_{|U_x})$。若 F 是科恩–麦考利的，则：

(1) F 是纯的。(2) 对任意 $x \in X$, $H_x^i(U_x, F), = 0$ 对于 $i \neq d_x$。(3) 对任意 $x \in$ d-supp(F)，$\mathrm{depth}_x(F) = d_x$。(4) $\mathrm{depth}(F) = \dim(F)$。(5) $D(F) = F^{\#}[\dim(F) - 1]$，其中 $F_{\#}$是一个挠的科恩 – 麦考利层，并且

$$[F^{\#}]_x \simeq H_x^{d_x}(U_x, F) \quad , \quad H_x^{d_x}(U_x, F^{\#}) \simeq F_x.$$

反过来，若 F 是纯的且满足(2)、(3)或(4)中的任一条件，则 F 是科恩–麦考利的。

证明. 根据命题5.12，F是纯的，且 $D(F) = F^{\#}[\dim F - 1]$。根据定理4.20，

$$[F^{\#}]_x[\dim F - 1] = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)^{\vee}[\dim C_x]$$

于是 $[F_{\#}]_x$是一个挠群（注意，对于任意 i，$H_x^i(U_x, F)$ 都是一个挠阿贝尔群，因为 F是一个挠层）。现在，$\dim F - \dim C_x = d_x$，因为 F是纯的。接着，对偶化 $^{\vee}$，我们得到：

$$\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F) = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}([F^{\#}]_x, \mathbb{Z})[1 - d_x] \simeq [F^{\#}]_x[-d_x]$$

于是：

$$H^i(U_x, F) = 0, \text{ for } i \neq d_x$$
$$H_x^{d_x}(U_x, F) \simeq [F^{\#}]_x.$$

将上文中的 F替换为 $F_{\#}$，我们得到 $H_x^{d_x}(U_x, F^{\#}) = F_x$，于是 (1)-(5) 中的所有内容均得以证明。反过来，注意到 (2) 与 (3) 等价；若 F 是纯的，则 (3) 与 (4) 也等价。与前一定理一样，由等式$D(F)_x = \mathbb{R}\Gamma_x(U_x, F)^{\vee}[\dim C_x]$即可轻松得到结论。

□

5.3. 科恩–麦考利局部空间。设 X 是一个局部且可对偶化空间，其闭点为 0。注意，常值层 $\mathbb{Z}$ 是无挠的，且 $\mathrm{supp}(\mathbb{Z}) = X$。

定义 5.16. 若 X 是科恩–麦考利的，则称常值层 $\mathbb{Z}$ 是科恩–麦考利的。这意味着

$$D_X^{\mathbf{0}} = \omega_X[\dim X]$$

对于某个 X 上的层 ω_X，它称为 X 的典范层。

注 5.17. (a) 如果 X 是科恩–麦考利的，那么对于任意 $x \in X$， U_x 都是科恩–麦考利的，并且

$$\omega_{U_x} \simeq \omega_{X|U_x}$$

因为 $D^{\mathbf{0}}_{X|U_x} \simeq D^x_{U_x}[-\text{维数 } C_x]$。

(b) 对于任意 $x \in X$， C_x 都是科恩–麦考利的，且 $\omega_{C_x} = \mathbb{Z}_{\{x\}}$。

由定理 5.14 可得，

定理 5.1 18. 设 X 为局部且可对偶化空间。若 X 为科恩–麦考利，则：

(1) X 是纯的。(2) 对于任意 $x \in X$，都有：

$$H^i_x(U_x, \mathbb{Z}) = 0 \text{ for } i \neq \dim U_x \text{ and } H^{\dim U_x}_x(U_x, \mathbb{Z}) \text{ is torsion free.}$$

(3) 对任意 $x \in X$，有（记 $d_x = \dim U_x$）

$$\omega_{X,x} = H^{d_x}_x(U_x, \mathbb{Z})^* \quad , \quad H^{d_x}_x(U_x, \omega_X) = \mathbb{Z}.$$

此外， ω_X 是一个无挠且科恩–麦考利层，因此

$$H^i_x(U_x, \omega_X) = 0 \text{ for any } i \neq d_x.$$

反过来，如果 X 满足 (1) 和 (2)，那么它就是科恩–麦考利的。

注 5.19. 由于 $\mathbb{R}\Gamma_x(U_x, \mathbb{Z})^\vee \overset{1.6}{=} \mathbb{L}_{\mathrm{red}}(U_x^*, \mathbb{Z})[1]$, 和 $H_{\dim U_x^*}(U_x^*, \mathbb{Z})$ 总是无挠的，定理 5.18 中的陈述 (2) 等价于：

(2') $\widetilde{H}_i(U_x^*, \mathbb{Z}) = 0$ for any $i \neq \dim U_x^*$.

When 若 (2') 对点 $x \in X$ 成立，我们就称 X 在 x 处是科恩–麦考利的 .

我们来说明，定理 5.18 的逆命题部分可以加强：条件 (2)（或 (2')）足以保证 X 是科恩–麦考利的。

推论 5.20. 局部且可对偶化空间 X 是科恩–麦考利的，当且仅当

$$\widetilde{H}_i(U_x^*, \mathbb{Z}) = 0 \text{ for any } x \in X \text{ and any } i \neq \dim U_x^*.$$

换言之， X 是科恩–麦考利的，当且仅当它在每个点处都是科恩–麦考利的。

证明。我们只需证明逆命题。我们通过对 $\dim X$ 进行归纳法来推进。注意，任何维数为 ≤ 1 的局部空间都是可对偶的且为科恩–麦考利的，因此我们可以假设 $\dim X > 1$。令 D 为 X 的局部对偶化复形。根据归纳法，对于任意 $x \neq \mathbf{0}$，U_x 都是科恩–麦考利的，因此对于某个定义在 U_x 上的层 F^x 和某个整数 r_x，有 $D_{|U_x} = F^x[r_x]$。这个整数在 $x \in X^*$ 上局部常值。由于 X^* 是连通的（因为 X 的维数为 > 1，且它在 $\mathbf{0}$ 处是科恩–麦考利的），所以 r_x 是常数。特别地，对于 X 的任意泛点 g，都有 $r = r_g = \dim C_g$。因此，X 是纯的，我们由定理 5.18 得出结论。□

定理 5.21。 设 $i\colon K \hookrightarrow X$ 是一个闭子集。以下条件等价：

(1) K 是科恩–麦考利。(2) $\mathbb{Z}_K$ 是 X的
科恩–麦考利层。

此外，若 X 是科恩–麦考利的，则

$$K \text{ is Cohen–Macaulay } \Leftrightarrow \mathcal{E}xt^i_X(\mathbb{Z}_K, \omega_X) = 0 \text{ for any } i \neq c := \dim X - \dim K$$

此时 $i_*\omega_K = \mathcal{E}xt^c_X(\mathbb{Z}_K, \omega_X)$。

证明。由同构 (3.6.3) 可得：$i_*D^{\mathbf{0}}_K = \mathbb{R}\mathcal{H}om^{\bullet}_X(\mathbb{Z}_K, D^{\mathbf{0}}_X)$。 □

文献 [10] 证明了：当 $X = \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 且 K 是单纯复形时，该定理表明，K 是科恩–麦考利的（按本文的定义）当且仅当它满足 Reisner 判据（链接的同调消失）。

更一般地，我们可以刻画科恩–麦考利局部空间上的科恩–麦考利层：

命题 5.22. 设 X 是一个局部的科恩–麦考利空间，其典范层为 ω_X。若且唯若存在一个整数 c，使得 X 上的层 F 是科恩–麦考利的：

$$\mathcal{E}xt^i_X(F, \omega_X) = 0 \text{ for any } i \neq c.$$

在此情形下，有：

$$c = \begin{cases} \dim X - \dim F, & \text{if } F \text{ is generically torsion free} \\ \dim X - \dim F + 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$
$$\mathcal{E}xt^c_X(F, \omega_X) \text{ is Cohen–Macaulay,}$$
$$F = \mathcal{E}xt^c_X(\mathcal{E}xt^c_X(F, \omega_X), \omega_X)$$

注记 5.23。沿用注记 4.7 的记号，若 $K \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_1}$ 是 Cohen–Macaulay 单纯复形，且 $S_K \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ 是其关联的 Cohen–Macaulay 概形，则：

$$\pi^\star \omega_K = \omega_{S_K}$$

其中，ω_{S_K} 表示概形 S_K 的典范模。

5.3.1. 典范层的上同调性质。

现在，我们以一种更“通俗易懂”的方式重述先前的结果。由定理 4.20 和 5.21，可得:

定理 5.24. 设 X 是一个 n维的局部可对偶科恩–麦考利有限空间，其典范层为 ω_X。对于每个 $x \in X$， $d_x =$维 U_x且 $\omega_{U_x} = \omega_{X|U_x}$。那么:

(A) 对任意 $F \in D_c(X)$ 及任意 $x \in X$，有:

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(F_{|U_x}, \omega_{U_x}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F)^\vee[-\dim U_x]$$
$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_X(\mathbb{Z}_{\{x\}}, F) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{U_x}(F_{|U_x}, \omega_{U_x})^\vee[-\dim U_x]$$

因此得到短正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{d_x+1-i}_x(U_x, F), \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^i_{U_x}(F_{|U_x}, \omega_{U_x}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{d_x-i}_x(U_x, F), \mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Ext}^{d_x+1-i}_{U_x}(F_{|U_x}, \omega_{U_x}), \mathbb{Z}) \to H^i_x(U_x, F) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Ext}^{d_x-i}_{U_x}(F_{|U_x}\omega_{U_x}), \mathbb{Z}) \to 0.$$

取某个闭子集 $K \subseteq X$，并令 $F = \mathbb{Z}_K$ 及 $x = \mathbf{0}$，可得正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n+1-i}_{\mathbf{0}}(K, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to H^i_K(X, \omega_X) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_{\mathbf{0}}(K, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n+1-i}_K(X, \omega_X), \mathbb{Z}) \to H^i_{\mathbf{0}}(K, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_K(X, \omega_X), \mathbb{Z}) \to 0.$$

（B）层

$$\omega_{X^*} := (\omega_X)_{|X^*}$$

是 X^*上的整体对偶化层，即 $\omega_{X^*}[n-1]$ 是 X^*的整体对偶化复形。因此，对于任意 $F \in D(X^*)$，有（注意 $n - 1 = \dim X^*$）

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{X^*}(F, \omega_{X^*}) = \mathbb{R}\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}\Gamma(X^*, F), \mathbb{Z})[1-n]$$

于是得到短正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(X^*, F), \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^i_{X^*}(F, \omega_{X^*}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(X^*, F), \mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Ext}^{n-i}_{X^*}(F, \omega_{X^*}), \mathbb{Z}) \to H^i(X^*, F) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Ext}^{n-1-i}_{X^*}(F, \omega_{X^*}), \mathbb{Z}) \to 0.$$

特别地，取 $F = \mathbb{Z}$，有正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(X^*, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to H^i(X^*, \omega_{X^*}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(X^*, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(X^*, \omega_{X^*}), \mathbb{Z}) \to H^i(X^*, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(X^*, \omega_{X^*}), \mathbb{Z}) \to 0$$

以及对于 X^*的任意闭子集 K^*，取 $F = \mathbb{Z}_{K^*}$，可得到正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(K^*, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to H^i_{K^*}(X^*, \omega_{X^*}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}(K^*, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}_{K^*}(X^*, \omega_{X^*}), \mathbb{Z}) \to H^i(K^*, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-1-i}_{K^*}(X^*, \omega_{X^*}), \mathbb{Z}) \to 0.$$

（C）如果 $K \subseteq X$ 是余维为 d 的科恩–麦考利闭子集，则有 Gysin同构

$$H^i_K(X,\omega_X) = H^{i-d}(K,\omega_K) = \begin{cases} 0 & , \quad for\ i \neq d \\ H^{n-d}_{\mathbf{0}}(K,\mathbb{Z})^*, & for\ i = d, \end{cases}$$

$$H^i_{K^*}(X^*,\omega_{X^*}) = H^{i-d}(K^*,\omega_{K^*}) = \begin{cases} 0 & , \quad for\ i \neq d, n-1 \\ \mathbb{Z} & , \quad for\ i = n-1 \\ H^{n-d-1}(K^*,\mathbb{Z})^*, & for\ i = d \end{cases}$$

注释 5.25。注意，定理 5.24 适用于任何科恩–麦考利单纯复形。

5.4. Cohen–Macaulay空间。现在设 X 是一个局部可对偶化空间，但不一定是局部空间。

定义 5.26. 我们称 X 是科恩–麦考利的，如果对于任意 $x \in X$， U_x 都是科恩–麦考利局部空间。

注 5.27. (1) 根据注 5.17，该定义与局部情形下先前的定义相容。

(2) Cohen–Macaulay空间的任意开子集仍然是 Cohen–Macaulay空间。(3) 若 X 是 Cohen–Macaulay空间，则 $d_x = \dim U_x$ 是余维函数。(4) 也可以将 Cohen–Macaulay层 F 定义为满足以下条件的层：对于任意 $x \in X$， $F_{|U_x}$ 都是 Cohen–Macaulay空间；此时， X 是 Cohen–Macaulay空间，当且仅当 $\mathbb{Z}$ 是科恩–麦考利层。(5) 若 X 连通、是 Cohen–Macaulay空间且可对偶，则它有一个典范层 ω_X。我们将第5.3节中关于 ω_X 的结果留给读者推广到非局部情形。(6) 对于任意局部可对偶化空间 X 以及任意 $x \in X$、 C_x 和 $C^*_x := C_x - \{x\}$ 可对偶且是 Cohen–Macaulay空间。

例子。设 $K^* \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r_{\mathbb{F}_1}$ 是一个连通且维数为 n 的射影单纯复形。那么， K^* 是科恩–麦考利的当且仅当

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{F}_1}}(\mathbb{Z}_{K^*},\mathbb{Z}_{\{g\}}) = 0 \ for\ any\ i \neq r-n$$

其中 g 是 $\mathbb{P}^r_{\mathbb{F}_1}$ 的泛点。

下面的定理阐述了科恩-麦考利性在乘积和重心细分下的性质。

定理 5.28。 $X \times Y$ 是科恩–麦考利的，当且仅当 X 和 Y 是科恩–麦考利的。此外，如果 X 和 Y 是可对偶的，那么 $X \times Y$ 也是可对偶的，并且

$$\omega_{X\times Y} = \omega_X \boxtimes \omega_Y.$$

证明。关于科恩-麦考利性，可归结为 X 和 Y 是局部的情形，然后由等式（命题 4.25）容易得到结果： $D_X^{x_0} \boxtimes D_Y^{y_0} = D_{X\times Y}^{(x_0,y_0)}$。如果 X 和 Y 是可对偶的，且其对偶化复形分别为 Ω_X 和 Ω_Y，命题 4.24 证明了 $\Omega_X \boxtimes \Omega_Y$ 是 $X \times Y$ 上的一个对偶化复形，故结论成立。□

定理 5.29。设 X 是一个局部可对偶化空间。那么， βX 是科恩–麦考利的，当且仅当 X 和 X^{op} 是科恩–麦考利的。

证明。我们将用到以下众所周知的结果：

对于任意有限空间 T，有

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_i(\beta(T),\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_i(T,\mathbb{Z}) \quad , \quad \dim(\beta(T)) = \dim(T) \\ \widetilde{H}_i(T,\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_i(T^{\mathrm{op}},\mathbb{Z}) \quad , \quad \dim(T^{\mathrm{op}}) = \dim(T). \end{aligned} \tag{5.29.1}$$

对于每个 $x \in X$， $\widehat{x} \in X^{\mathrm{op}}$ 表示同一个元素，只不过是从对偶空间的角度来考虑。注意，

$$[U_x]^{\mathrm{op}} = C_{\widehat{x}}, \quad [C_x]^{\mathrm{op}} = U_{\widehat{x}}, \quad [U_x^*]^{\mathrm{op}} = C_{\widehat{x}}^*, \quad [C_x^*]^{\mathrm{op}} = U_{\widehat{x}}^*.$$

假设 βX 是科恩–麦考利的，并证明 X 是科恩–麦考利的。我们必须证明，对于任意 $x \in X$ 和任意 $i < \dim U_x^*$，有 $H_i(U_x^*,\mathbb{Z}) = 0$。令 $\beta = \{x\} \in \beta X$。有

$$\begin{aligned} U_\beta \xrightarrow{\sim} \overline{\beta}(C_x^*) \times \overline{\beta}(U_x^*) \\ \{x_1 < \cdots < x < \cdots < x_n\} \mapsto (\{x_1 < \cdots < x\}, \{x < \cdots < x_n\}) \end{aligned} \tag{5.29.2}$$

其中， $\overline{\beta}(T)$ 是通过向 $\beta(T)$ 添加一个极小点 0 得到的空间。由于 U_β 是科恩–麦考利的，因此 $\overline{\beta}(U_x^*)$ 也是如此（根据定理 5.28）；在 0 处的科恩-麦考利性意味着

$$\widetilde{H}_i(\beta(U_x^*),\mathbb{Z}) = 0 \text{ for } i < \dim \beta(U_x^*)$$

并且由（5.29.1）得出结论。最后，由于 $\beta(X) = \beta(X^{\mathrm{op}})$，我们还得到 X^{op} 是科恩–麦考利的。

现在假设 X 和 X^{op} 是科恩–麦考利的。由于 βX 被开子集 U_β 覆盖，且 $\beta = \{x\}$，只需证明 U_β 是科恩–麦考利的。根据等式 (5.29.2) 和定理 5.28，只需证明 $\overline{\beta}(C_x^*)$ 和 $\overline{\beta}(U_x^*)$ 是科恩–麦考利的。

(a) $\overline{\beta}(U_x^*)$ 是科恩–麦考利的。由于 $\overline{\beta}(U_x^*) = 0 \sqcup \beta(U_x^*)$，并且根据对 $\dim X$ 的归纳法， $\beta(U_x^*)$ 是科恩–麦考利的（注意 U_x^* 和 $[U_x^*]^{\mathrm{op}} = C_{\widehat{x}}^*$ 是科恩–麦考利的），因此只剩下证明 0 处的科恩-麦考利性，即证明对于 $i < \dim \beta(U_x^*)$， $H_i(\beta(U_x^*)\ \mathbb{Z}) = 0$。由（5.29.1）可得结论，因为 X 是科恩–麦考利的。

(b) $\overline{\beta}(C_x^*)$ 是科恩–麦考利的。同样地，利用归纳法（注意到 C_x^* 和 $[C_x^*]^{\mathrm{op}} = U_{\widehat{x}}^*$ 是科恩–麦考利的），只需证明在 0 处的科恩-麦考利性，即对于 $i < \dim \beta(C_x^*)$， $\sim H_i(\beta(C_x^*)\ \mathbb{Z}) = 0$。根据 (5.29.1)，只需证明 $\sim [C_x^*]^{\mathrm{op}} = U_{\widehat{x}}^*$ 的情形。由于 X^{op} 是科恩–麦考利的，对于 $i < \dim U_{\widehat{x}}^*$，有 $H_i(U_{\widehat{x}}^*,\mathbb{Z}) = 0$，正如所要求的。

□

推论 5.30. 如果 X 是单纯复形或射影单纯复形，那么 X 是科恩–麦考利的，当且仅当 βX 是科恩–麦考利的。

证明。如果 X 是一个单纯复形，那么 X^{op} 是 $(\mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1})^{\mathrm{op}} = \mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1}$ 的一个开子集，因此它是科恩–麦考利的，由定理 5.29 可得结论。同理，如果 X 是一个射影单纯复形，那么 X^{op} 是 $(\mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1} - \mathbf{0})^{\mathrm{op}} = \mathbb{A}^n_{\mathbf{F}_1} - \{g\}$ 的一个开子集，它同样是科恩–麦考利的。□

5.5. 与 Baclawski 的科恩-麦考利性的比较。在 [1], 中，如果有限偏序集 P 满足其每个开区间都是一个花束（这意味着这些区间的非零约化同调至多出现在可能的最高维数上），则称 $\widehat{\ }$ 为科恩–麦考利，其中 P，$\prec$ $\prec P$ 是通过向 P 添加一对新元素 0 、 1 而得到的偏序集，并且对所有 $x \in P$ 均有 $\prec$ $\prec \mathbf{0} < x < \mathbf{1}$ 。我们称 P 为 CM，以表示 Baclawski 意义下的科恩-麦考利性。

$\widehat{\ }$如果 [1] 中 P 的每个区间都是花束（可能除了 $(x, y) = (\widehat{\mathbf{0}}, \widehat{\mathbf{1}})$），则称偏序集为 ACM。

对于单纯复形，这两种定义一致，而且都与斯坦利–赖斯纳科恩-麦考利性一致（也就是说，它们都与满足 Reisner 判据的单纯复形一致）。更确切地说：对于单纯复形 K，令 K^* 为相应的射影单纯复形，即 $K^* = K - \{\mathbf{0}\}$。那么

K 是科恩–麦考利 $\Leftrightarrow K^*$ 是科恩-麦考利 $\Leftrightarrow K^*$ 是Stanley-Reisner Cohen-Macaulay且

$$K^* \text{ is Cohen–Macaulay } \Leftrightarrow K^* \text{ is ACM .}$$

对于一个生成的 一般的偏序集，让我们更明确地看看这两个概念之间的区别。 .

(∗) X 是科恩–麦考利的，当且仅当它满足：

(a) 对每个 $x < y$ （其中 x、 $y \in X$），区间（x， y）都是同调球面。$\widetilde{\ }$(b) 对每个 $x \in X$， H_i（U^*_x， $\mathbb{Z}$） $= 0$对于 $i <$维 U^*_x。

(∗∗) X 是科恩-麦考利的，当且仅当它满足：

(a') 对每个 $x < y$ （其中 x、 $y \in X$），区间（x， y）都是花束。

(b')=(b)$\widetilde{\ }$(c') 对每个 $x \in X$， H_i（C^*_x， $\mathbb{Z}$） $= 0$ 对于 $i <$维 C^*_x。$\widetilde{\ }$

(d') H_i（X， $\mathbb{Z}$） $= 0$ 对于 $i <$维 X。

最后，若 X 满足 (a')、(b') 和 (c')，则它是 ACM。

因此，条件 (a') 弱于 (a)，但 CM（分别为 ACM）施加了科恩–麦考利性所不要求的条件 (c') 和 (d')（分别为 (c')）。主要区别在于，科恩–麦考利性是局部的，而 CM 不是。因此，科恩–麦考利概形的一个开子集仍是科恩–麦考利的，但 CM 并不满足这一点。从这个意义上说，我们的定义与概形或交换代数中的定义更为契合。此外，从以下意义上说，我们的定义也与斯坦利–赖斯纳理论更加一致。对于每个单纯复形 K，我们记其关联的 Stanley–Reisner 概形（即由 Stanley–Reisner 理想定义的仿射概形中的闭子概形）为

S_K。如果 K' 是 K 的子复形，那么 $S_{K'}$ 是 S_K 的闭子概形。于是， $S_K - S'_K$ 是科恩–麦考利的，当且仅当 $K - K'$ 是科恩–麦考利的。对于 CM 而言，这一点并不成立（只有“若”这一方向成立）。此外， [10] 中证明了存在一个连续映射

$$\pi\colon S_K \to K.$$

对于任意开子集 $U$of K， $\pi^{-1}(U)$ 是 S_K 的一个开子概形，并且有

$$U \text{ is Cohen–Macaulay } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ is a Cohen–Macaulay scheme.}$$

这对科恩-麦考利并不成立。如果 U 是科恩-麦考利的，那么 $\pi^{-1}(U)$ 是科恩–麦考利的，但反之一般并不成立。

最后， X 是科恩-麦考利， $\Leftrightarrow \beta X$ 是科恩-麦考利，而 βX 是科恩–麦考利，当且仅当 X 和 X^{op} 是科恩–麦考利。这两种说法在单纯复形或射影单纯复形上是一致的。

References

[1] K. Baclawski，Cohen-Macaulay 偏序集，《代数学杂志》63 (1980)，第 1 期，226-258 页。[2] W. Bruns and J. Herzog，Cohen-Macaulay 环，《剑桥高等数学研究丛书》，第 39 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993 年。xii+403 页。[3] V. Carmona Sánchez， C. Maestro Pérez， F. Sancho de Salas and J.F.. Torres Sancho，有限空间的同调与上同调，《纯粹与应用代数杂志》224，第 4 期，106200，38 页（2020）。[4] J.M. Curry，胞腔层与余层之间的对偶，《纯粹与应用代数杂志》222(4)，966-993（2018）。[5] A. Deitmar，$\mathbb{F}_1$，上的概形，数域与函数域——两个平行世界，《数学进展》，第 239 卷，Birkh¨auser Boston Inc，波士顿，MA，2005 年，第 87-100 页。[6] R. Hartshorne，局部上同调，由 A. Grothendieck 在哈佛大学 1961 年秋季主讲的研讨班，数学讲义，第 41 号，施普林格出版社，柏林-纽约，1967 年，vi+106 页。[7] R. Hartshorne，留数与对偶，关于 A. Grothendieck 工作的研讨班讲义，1963/64 年于哈佛大学讲授。附 P. Deligne 的附录。数学讲义，第 20 号，施普林格出版社，柏林-纽约，1966 年，vii+423 页。[8] J.A. Navarro González，对偶与有限空间，《序》6 (1990)，第 4 期，401-408 页。[9] N. Spaltenstein，无界复形的分解，《Compositio Mathematica》65 (1988)，第 2 期，121-154 页。
[10] F. Sancho de Salas and A. Torres Sancho，斯坦利–赖斯纳理论的推广，arXiv:2303.06940 [math.AG]。[11] K. Thas，$\mathbb{F}_1$-概形的组合–动机性质，《绝对算术与 $\mathbb{F}_1$-几何》，83-159 页，欧洲数学学会，苏黎世¨，2016 年。

Departamento de Matemáticas and Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas (IUFFyM)Universidad de SalamancaPlaza de la Merced 1-4, 37008 Salamanca Spain电子邮箱地址：fsancho@usal.es 电子邮箱地址：atorressancho@usal.es