Hybrid-VPIC：开源动理学/流体混合粒子网格代码

Ari Le,[1] Adam Stanier,[1] Lin Yin,[1] Blake Wetherton,[1] Brett Keenan,[1] 和 Brian Albright[1]

洛斯阿拉莫斯国家实验室，洛斯阿拉莫斯，新墨西哥州 *87545*，

USA

（日期：2023年5月10日）

Hybrid-VPIC 是开源高性能粒子网格（PIC）代码 VPIC 的扩展，集成了混合动理学离子/流体电子求解器。本文介绍了该代码中提供的模型，并概述了该代码在空间和实验室等离子体物理问题中的应用。文中记录了混合求解器实现方式中的特定选择，供用户参考。本文还介绍了几种用于处理混合代码特有数值难题的方案。本文特别关注碰撞高能量密度状态下混合物建模这一计算量巨大的问题，并首次在混合粒子网格代码中实现了更精确的电子流体输运系数。

arXiv:2305.05600v1 [physics.plasm-ph] 9 May 2023

I. 引言

本文介绍了 Hybrid-VPIC 代码。这是一款通用的动力学离子/流体电子混合代码，基于高性能粒子网格（PIC）代码 VPIC[1]开发。Hybrid-VPIC 旨在充分发挥 VPIC代码[2,3] 的卓越性能，同时利用其灵活性，让用户能够指定新问题、边界条件和自定义物理模块。Hybrid-VPIC代码[4], 是开源 VPIC 代码的一部分，本文的主要目标之一是为其他有意使用该代码的研究者提供参考。

一般而言，混合代码[5–7] 允许对这样的系统进行建模：其中一种物种（通常是电子）可以作为流体处理，而其他物种（通常是离子）则需要进行动理学处理。混合模型的主要优势在于，如果系统中最小的动力学尺度对所研究的物理问题并不重要，就无需对其进行解析。这可以使计算成本降低数个数量级。例如，对于典型的空间物理应用，忽略电子动力学尺度通常可使计算成本和内存需求降低约 $\sqrt{m_i/m_e}$ 倍（m_i/m_e 为离子与电子的质量比），且时间步长通常也可按相近的倍数增大。因此，混合代码既能捕捉相对大尺度的动力学过程，又能保留离子动力学特性，并在全动理学模型与流体模型之间架起桥梁。

已有多种混合粒子网格代码，并已用于研究空间、天体物理和实验室等离子体问题[8–17]。Hybrid-VPIC 使用的核心混合算法与 H3D 代码[10], 所采用的算法基本相同；该代码此前曾在多台拍字节级并行计算机上运行。该算法采用显式时间步进，因此相对简单且高效。这使 Hybrid-VPIC 获得了良好的性能（在基于 CPU 的计算机上，每个处理器每秒约执行 1000 万次粒子推进），并可扩展至需要 $> 10^5$个处理核心的大型问题。

Hybrid-VPIC代码目前正用于探索多个不同的应用领域，下面通过一些示例展示该代码的用途。该代码的应用包括磁层建模、其他空间物理应用以及模拟实验室聚变装置。大多数应用描述都较为简短，仅用于说明如何设置Hybrid-VPIC来模拟各种问题，并突出混合粒子网格方法中若干数值计算难点。该代码的简化静电版本已用于模拟高能量密度（HED）状态下多维流动中的混合。

这一应用领域需要大量的计算资源，并对初步科学研究成果进行了更为深入的介绍。

本文结构安排如下：第二节简要回顾了采用动力学离子和无质量流体电子的混合模型所求解的方程，并介绍了实现 Hybrid-VPIC 求解器时所做的若干具体选择。此外，文中还给出了电磁 Hybrid-VPIC 模拟中使用的一种开放边界条件示例，该示例或许对其他混合PIC代码也有参考价值。第三节介绍了 Hybrid-VPIC 已应用于其中的几个问题示例。这些示例展示了混合粒子网格模型特有的一些数值难题。第四节介绍了 Hybrid-VPIC 的简化静电版本，该版本主要用于研究高能量密度（HED）状态下的动力学混合效应；第五节将介绍这一应用。第六节随后进行总结讨论。附录 A 节介绍了该代码的一项扩展，用于模拟相对论电子束在空气中的传播；这需要一种保留对束流电子群进行动理学处理的混合模型。粒子形状函数的细节见附录 B 节。

II. 电磁混合模型

本节简要回顾 Hybrid-VPIC 所模拟的方程，以及在 VPIC 中实现混合求解器时所做的具体选择。这些方程和方法对于混合PIC模拟而言相当标准，只有少数粒子网格实现方面的内容是 Hybrid-VPIC 特有的。文中还介绍了粒子形状函数和边界条件的一些细节，这些内容可能对其他混合粒子网格代码有所帮助。

A. 混合模型方程 乐友

混合模型将某些物种进行动理学处理，而以流体描述其他物种。Hybrid-VPIC 主要用作离子动理学/电子流体代码，与其他许多混合粒子网格代码类似[5,6]。该模型适用于特征长度尺度远大于电子动力学尺度（德拜长度和电子趋肤深度）、时间尺度长于电子等离子体周期的现象。混合模型方程取低频极限，并假设等离子体准中性。每种离子物种 s 的电荷为 $q_s = Z_s e$ ，质量为

m_s 进行描述 由其相空间分布 $f_s(\mathbf{x},\ \mathbf{v}\ t)$ 满足以下形式的 Vlasov 方程描述：

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_s = C_i\{f_s\}, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{E}$ 是电场，$\mathbf{B}$ 是磁场，而 $C_i\{f_s\}$ 是用于考虑粒子碰撞的算子。与其他粒子网格代码一样，这些方程通过追踪样本离子宏粒子沿电磁场中的单粒子轨迹运动来求解。

电子流体通过欧姆定律进入演化方程。我们将电子视为无质量流体[7],，其动量平衡方程给出以下电场欧姆定律：

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{en_e}\nabla p_e - \mathbf{u_i} \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e}\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{R}_{ei} \tag{2}$$

基于$\mathbf{J} = n_e e(\bar{}\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$ 替换整体电子流，其中 $\bar{}\mathbf{u}_i = \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v}/en_e$，并假设准中性，使得 $n_e = \bar{Z}_i n_i = \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$。由于混合模型包含与 $1/n_e$ 成正比的项，因此必须对低密度区域和真空区域进行修正。我们采用最简单的方法，在场求解器中设置密度下限 n_f，这样用于推进场的密度就是 $n_e = \max(n_e,\ n_f)$。密度下限的典型取值为 $n_f/n_0 \sim 0.01$ - 0.05，其中 n_0 是参考背景密度。VPIC 和 Hybrid-VPIC 允许使用不同的代码单位；参考密度 n_0 通常用于定义以电子趋肤深度 d_e 为单位的长度（适用于速度以光速 C 归一化的全动力学系统中的“自然”相对论粒子网格单位），或定义以离子惯性长度 d_i 为单位的长度（适用于磁化混合模拟，使用阿尔fvén单位，速度以参考阿尔fvén速度 v_A 归一化）。

对于电磁问题，我们加入形式如下的电阻项和超电阻项 ：

$$\mathbf{R_{ei}} = \eta \mathbf{J} - \eta_H \nabla^2 \mathbf{J}, \tag{3}$$

其中，电阻率 η 可简单地视为对电子-离子碰撞的描述，而超电阻率 η_H 可代表电子黏度，并通过阻尼网格尺度的振荡来提高数值稳定性。正如后文第 IV 节所述，项 $\mathbf{R_{ei}}$ 也可能包含显式摩擦或粒子碰撞模型中其他动量交换项的贡献。虽然我们在方程 2 中使用简单的标量电子压强 p_e，但也可以纳入电子压强张量效应[18]。Hybrid-VPIC 的设计支持完整的电子压强张量，但目前尚未实现各向异性压强模型。请注意，在不存在电阻项 $\mathbf{R}_{ei}$ 和压力梯度的情况下，磁场被冻结在

无质量电子混合模型中的电子流体中。霍尔项中的总电流密度（$1/en_e$）$\mathbf{J}$ ×$\mathbf{B}$ 取自安培定律的低频极限：

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \tag{4}$$

磁场按照法拉第定律演化：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \tag{5}$$

霍尔项支持哨声波，而哨声波通常是混合粒子模拟代码中对时间步长限制最严格的因素。哨声波的库朗–弗里德里希–列维（CFL）条件通常为[19] $\Omega_{ci}\Delta t < (\Delta x/d_i)^2/\pi$ （其中 $d_i = c/\omega_{pi}$ 为离子惯性长度）。在 Hybrid-VPIC 中，与其他一些混合粒子模拟代码一样，可以对场求解器进行子循环，在推进粒子之前使用更小的时间步长推进场。当网格分辨率非常高且 $\Delta x \ll d_i$时，这种方法最为有用。

通过为电子压强 p_e提供演化方程，可以闭合混合模型；该方程既可以采用状态方程，也可以采用额外的时变能量平衡方程。对于许多初始等离子体条件均匀的问题，以下形式的简单状态方程

$$p_e = p_0 \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{\gamma} \tag{6}$$

足以准确描述电子压强效应。这里再次假设准中性，因此 $n_e = \sum_s q_s n_s$；绝热指数 γ 的典型取值为 $\gamma = 1$ （等温极限，适用于任何电子温度均匀的系统）和 $\gamma = 5/3$ （绝热极限）。

对于初始条件存在梯度的较复杂系统，需要单独的电子能量演化方程。其形式为：

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = -\gamma \nabla \cdot (p_e \mathbf{u_e}) + (\gamma - 1)\mathbf{u_e} \cdot \nabla p_e + (\gamma - 1)(-\nabla \cdot \mathbf{Q_e} + H_{ei}), \tag{7}$$

其中，电子速度由 $\mathbf{u}_e = -(\nabla \times \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}_i)/en_e$ 推得，$\mathbf{J}_i = n_e e^{-}\mathbf{u}_i$ 为离子携带的电流。若在 Hybrid-VPIC 中用该方程代替简单的状态方程，则方程 7 会与磁场演化在同一数值循环中随时间积分。对于许多问题，电子热流可用热导率 κ 建模为

$$\mathbf{Q_e} = -\kappa \nabla T_e \tag{8}$$

其中，$\kappa = \kappa_e + \kappa_0$ κ_e 由物理模型给出，并可能取决于局部等离子体条件；κ_0 则是一个较小的（对于具有物理热导率的模型，为$\kappa_0 \sim 0.01$—$0.1\kappa_e$ ；或

对于磁化模拟，为$\kappa_0 \sim 0.01 n_0 d_i v_A$ ）常数数值扩散系数，为方便起见单独设定，有助于维持数值稳定性。电子与离子能量交换模型可通过 H_{ei}项纳入；在 Hybrid-VPIC 中，该项通过将碰撞模型中离子在每个网格单元内损失的能量加回局部电子流体单元来实现。迄今为止，Hybrid-VPIC 中的独立电子能量方程主要用于第 IV 节所述碰撞区域的静电版本。

B. PIC实现

尽管无质量电子混合PIC方程相对标准，但用于求解这些方程的数值方法存在一些差异。下面介绍Hybrid-VPIC所采用的求解器实现中的一些具体选择。Hybrid-VPIC使用显式时间步进算法，与H3D混合PIC代码非常相似[10]。尽管隐式算法[20] 具有更优越的守恒特性，但Hybrid-VPIC选择显式积分器，是因为它相对简单且速度较快。采用蛙跳法推进粒子，因此速度在半个时间步处已知：

$$\mathbf{v}_p^{n+1/2} = \mathbf{v}_p^{n-1/2} + \frac{q_s}{m_s}(\mathbf{E}^n + \mathbf{v}_p^n \times \mathbf{B}^n)\Delta t \tag{9}$$

其中，$\mathbf{v}_p^n = 0.5(\mathbf{v}_p^{n+1/2} + \mathbf{v}_p^{n-1/2})$和$\mathbf{v}_p^{n+1/2}$可以显式求解。我们使用标准的Boris方法[21], ，先在 $\Delta t/2$内利用电场加速粒子，再在 Δt内绕磁场进行能量守恒的旋转，随后在另一个 $\Delta t/2$内利用电场加速粒子。粒子位置在整数时间步处已知：

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \mathbf{v}_p^{n+1/2}\Delta t \tag{10}$$

电场由欧姆定律给出，如式 2 所示，是磁场、粒子密度和电流矩的函数，$\mathbf{E}^n(\mathbf{B}^n, \mathbf{J}_i^n, n_i^n)$。显式混合粒子网格代码中的一个难点是，式 9 中的电场$\mathbf{E}^n$ 本身取决于离子电流密度（这是在半时间步已知的$\mathbf{v}_i^{n+1/2}$ 的一个矩）。目前已开发出几种处理方法，包括预测校正法的不同变体[13,22], 、电流推进与循环蛙跳法[23] (CAM-CL)算法，以及简单的线性外推。我们在 Hybrid-VPIC 中采用简单的线性外推，因为这种方法效率高（每个时间步只需进行一次粒子推进），且对许多问题而言精度足够[24]。为在欧姆定律中外推离子电流，我们

因此使用：

$$\mathbf{J}_i^{n+1} = \frac{3}{2}\mathbf{J}_i^{n+1/2} - \frac{1}{2}\mathbf{J}_i^{n-1/2} \tag{11}$$

与 VPIC代码的全动力学版本不同，后者为电磁求解器实现了 Yee 网格[1,25]，Hybrid-VPIC 对所有场量都采用单元中心网格。这包括电场和磁场，以及在网格上收集的粒子矩。代码中网格量 Q 的梯度采用标准的二阶中心有限差分计算：

$$\nabla Q_{i,j,k} = \frac{Q_{i+1,j,k} - Q_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{Q_{i,j+1,k} - Q_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{Q_{i,j,k+1} - Q_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\hat{\mathbf{z}} \tag{12}$$

VPIC 中每个宏粒子的位置$\mathbf{x_p}$ 以网格单元索引 I的形式存储，该索引对应一组三个笛卡尔单元索引 $I \leftrightarrow (i,j,k)$，以及网格单元内的相对坐标（$dx, dy, dz$） $\in[-1,1]^3$。每个粒子都属于一个物种，并被赋予电荷 $q_s = Z_s e$ 和质量m_s。VPIC 支持可变粒子权重 w_p，因此每个宏粒子可以代表数量不同的真实粒子。Hybrid-VPIC代码实现了两种用于网格间插值的粒子形状函数。第一种是简单的最近网格点（NGP）形状。在 NGP 格式中，狄拉克 δ 函数形状会为位置$\mathbf{x}_p$ 位于网格单元$I \leftrightarrow (i,j,k)$内的粒子赋予电荷密度和电流

$$\begin{cases} n_{i,j,k} = q_s w_p / V_c, \\ \mathbf{J}_{i,j,k} = q_s w_p \mathbf{u}_p / V_c, \end{cases} \tag{13}$$

在所有其他网格单元中的贡献均为零，其中 $V_c = \Delta x \Delta y \Delta z$ 是单元体积。进行粒子推进时，使用$\mathbf{x}_p^n$ 处网格单元的局部场值。采用 NGP 形状函数时，可能需要较多的每格粒子数，才能将粒子噪声降至可接受的低水平。然而，NGP 有一个独特的优点：它是唯一能够精确保持渐近性质的混合 PIC 格式[26]，且在离子惯性长度分辨率不足的网格中不会产生虚假的数值色散。在非线性阶段，数值色散可能导致激波前沿出现非物理的丝化现象（见第 III B 节）。

Hybrid-VPIC 中可用的第二种粒子形状函数是二次和（QS）格式。这不是其他粒子网格代码中使用的标准二次 B 样条形状函数，后者是各方向样条函数的张量积。选择 QS 格式是为了与全动力学版本 VPIC 中现有的并行通信例程兼容。由于全动力学 VPIC代码使用低阶粒子形状函数，子域之间仅需在共享完整面的邻域之间进行并行通信。因此，在三维模拟中，每个子域最多只有 6 个

需要通信的邻域，而不是与其至少共享一个顶点的全部 26 个邻域。除此限制之外，VPIC 目前在子域各方向的每一端仅设置了一个幽灵网格单元。QS 格式的插值系数见附录 B 节。尽管 QS 不具备完整张量积二次样条函数的低阶连续性特性，但在实际应用中，它对粒子噪声具有类似的平滑效果。对于对粒子噪声敏感的问题，还可以按照 Stanier、Chacón 和 Chen[20] 的第 4.3 节所述方法，在 Hybrid-VPIC 中对自洽场和矩平滑算子执行一次或多次平滑操作。使用 NGP 或 QS 粒子形状函数时，均可应用此平滑例程。

通过重复使用 VPIC 中已实现的 Boris[21] 粒子推进，在电磁场中推进粒子。全动力学VPIC代码具有相对论性，粒子数据以相对论动量$\mathbf{p} = \gamma m_s \mathbf{u}$ 以及每个粒子的位置形式存储。宏粒子按照相对论动力学方程推进。然而，混合粒子模拟模型是在不包含光波的低频极限下建立的，因此与对整体离子运动进行相对论处理并不一致。因此，Hybrid-VPIC 的主要版本通过在非相对论极限下求解运动方程来简化粒子推进 $\gamma \to 1$。不过，只要整体离子流保持非相对论性[16]，仍可模拟含有稀薄相对论性离子群的等离子体。因此，Hybrid-VPIC 也提供了保留相对论性粒子推进的选项。

C. 开放边界条件

Hybrid-VPIC 中最简单的边界条件是完全周期性边界条件。为了拓展 Hybrid-VPIC 可模拟问题的范围，开发了开放边界条件，使等离子体和磁通量能够流入或流出模拟区域。离子粒子在开放边界处被吸收，并在必要时重新注入新粒子。注入的粒子通量从漂移多麦克斯韦速度分布中抽样，并采用一种方案，使边界处的指定密度、流动和压强矩与目标值相匹配[27]。

磁场在形式上分为两个分量 $\mathbf{B} = \mathbf{B_0} + \mathbf{B_1}$, ，其中固定的外部场为 $\mathbf{B_0}$ ，随时间变化的分量为 $\mathbf{B_1}$。外部场是真空场（$\nabla \times \mathbf{B_0} = 0$），由等离子体外部的一组电流产生。例如，在全球磁层模拟中，行星际磁场和行星偶极场，或

磁镜装置中由外部线圈产生的约束场（示例应用见第 III 节）。粒子在总磁场 $\mathbf{B}$中推进。在场求解器中，只有 $\mathbf{B_1}$ 随时间推进；根据$\mu_0\mathbf{J} = \nabla \times\mathbf{B} = \nabla \times\mathbf{B_1}$计算霍尔项中的等离子体电流密度时，可以省略 $\mathbf{B_0}$ 。请注意，这是对 $\mathbf{B}$ 场的精确分裂，而不是基于 $\mathbf{B_1}$大小的微扰近似。这种方式分裂 $\mathbf{B}$ 的优点是，对于开放边界条件，$\mathbf{B_0}$ 在边界虚拟单元中保持固定。否则，外部场可能会通过在边界处扩散而随时间变化。对于 $\mathbf{B}$的时变分量所采用的开放边界条件，每个虚拟单元中的场 $\mathbf{B_1}$ 均设为模拟区域内相邻网格单元中的场值。

电场的处理方式有所不同。沿开放边界的虚拟网格单元中的电场与主体单元中的电场一同随时间推进。但是，根据式 2 的欧姆定律计算虚拟网格单元中的电场时，假设$\mathbf{B}$ 或等离子体矩（n 和$\mathbf{u}_i$）在垂直于边界的方向上都不存在梯度。虚拟网格单元中的等离子体矩与磁场一样，均设为与相邻网格单元中的值相同。因此，例如，沿 x 方向的开放边界可以具有由 p_e 中的 y 和 z 梯度产生的压力梯度场 E_y 和 E_z，但不存在压力梯度驱动分量 E_x。至关重要的是，对于开放的 x 边界，霍尔项 $\propto (\nabla \times\mathbf{B}) \times\mathbf{B}$ 中会保留 y 和 z （但不包括 x ）的梯度。这种开放边界处电场的处理方式显著提升了数值稳定性。尽管如此，通常还需要设置一个宽达数个网格单元的缓冲区，并提高超电阻率 η_H ，以耗散残余振荡。

III. 电磁代码的应用

这里，我们介绍电磁 Hybrid-VPIC 代码的若干应用，以展示该代码适用的问题类型。选择这些示例也旨在说明上文第 II 节所述的混合 PIC 处理中涉及的一两个数值问题。

A. 全球磁层日侧

几十年来，混合粒子网格代码一直用于模拟与太阳风[28–32]相互作用的磁化天体的全球磁层。一个简单的全球磁层模型

已在 Hybrid-VPIC 中实现。该模型包含均匀流动的太阳风等离子体，并携带行星际磁场。代码可任意指定磁场和流速。在计算域内初始化一个具有纯偶极磁场的“行星”。外部场 $\mathbf{B}_0$（见第 II C 节）设为偶极磁场与行星际磁场之和。在行星处设置了基本的内边界条件：行星内部的电场设为零，粒子可以被行星表面吸收或反射。开放边界包括注入新的太阳风等离子体。

图 1 绘制了二维 Hybrid-VPIC 磁层模拟中的等离子体密度（以太阳风密度为归一化基准）。太阳风从左向右流动，阿尔fvén 马赫数为 $M_A = 10$；行星半径为 $80\,d_i$（其中 d_i 是上游太阳风中的离子惯性长度）。模拟区域为 $L_x \times L_z = 1600\,d_i \times 3200\,d_i = 800 \times 1600$ 个网格单元，其中 d_i 是根据太阳风密度计算的离子惯性长度。在 1 天文单位处的太阳风中，[33] 的典型值为：离子惯性长度 $d_i \sim 100\,km$，阿尔fvén 速度 $v_A \sim 50\,km/s$。电子和离子等离子体 beta 为 $\beta_e = \beta_i = 0.5$，电子遵循等温状态方程。行星偶极场强度的设定使磁层顶（闭合磁层磁力线与开放行星际磁力线之间的边界）位于行星表面上方 $\sim 100\,d_i$ 处。所用时间步长为 $\Delta t = 0.002/\omega_{ci}$，其中 ω_{ci} 是行星际磁场中的离子回旋频率；每次粒子推进时，场求解器进行 5 次子循环。采用最低阶最近网格点粒子权重，每个网格单元有 ~ 100 个数值粒子。虽然此示例模拟采用了第 II C 节所述的开放边界条件，但在行星内边界和模拟区域边界周围设置了耗散层，并对磁场进行了额外平滑，以帮助维持数值稳定性（参见示例输入文件[4]）。

图 1 中的数据绘制于太阳风穿越模拟区域的完整通过时间稍后 $t = 180/\omega_{ci}$。模拟显示了弓形激波及磁鞘的形成；磁鞘是激波前沿后方由受激太阳风等离子体构成的高密度层。混合PIC代码对离子进行动力学处理，使前激波区得以形成；前激波区是由从激波前沿反射回上游的粒子驱动的湍流区域。准平行弓形激波上游的前激波区涨落最强，此处磁力线几乎平行于激波法线。对于本次模拟中行星际磁场的取向（磁场与流入 x 方向的夹角为 20°），准平行激波区域主要位于模拟区域的下半部。该区域的等离子体密度涨落幅度约为其平均值。

前激波区的主导模式是电磁共振离子-离子束不稳定性[34–36]，它由从弓形激波反射并沿平行方向流回上游的离子驱动

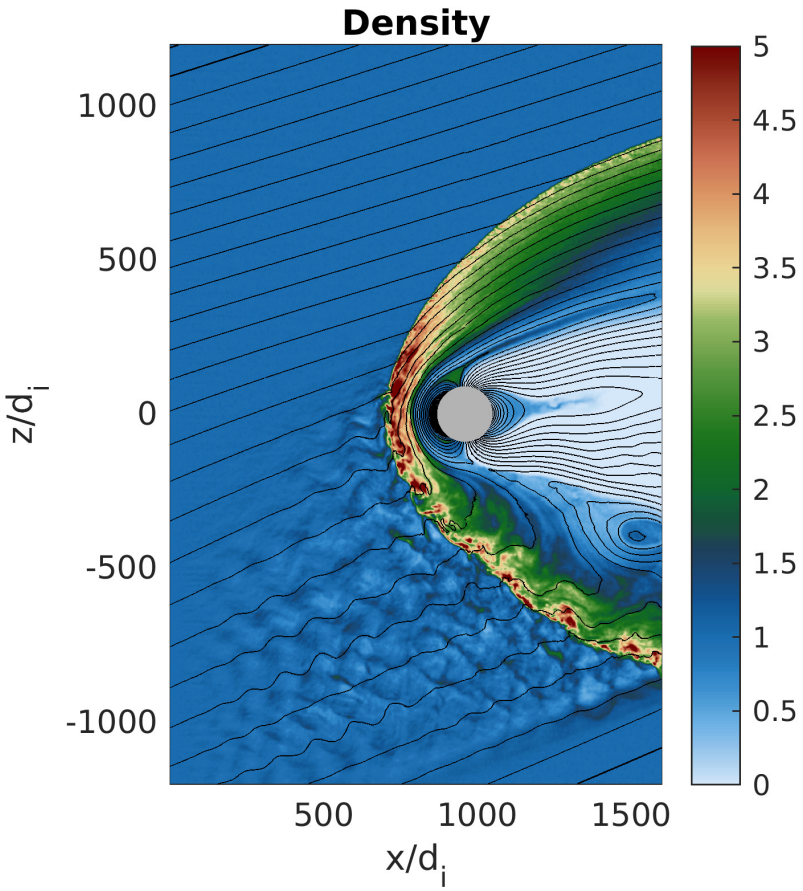

图1： 混合模拟中，太阳风与行星偶极磁场相互作用时的总等离子体密度（以太阳风上游密度归一化）等值线，以及部分磁力线示例。下半部分的波动位于准平行弓形激波上游的前激波区，由从激波前沿反射回上游的离子驱动。

B. 天体物理爆炸

天体物理爆炸是指高能电离物质迅速膨胀并进入背景等离子体的过程[37],，这种现象既会自然发生，也会出现在激光驱动的实验室实验中[38]。碎屑的能量通过对流电场与背景等离子体耦合；对流电场会带动背景离子并排出磁场，从而形成抗磁空腔[39]。在无碰撞

等离子体中，如果碎屑离子的拉莫尔半径很大，足以使其移出空腔[40,41],，它们也可能与场脱耦；这正是离子的动理学处理对于这一问题可能很重要的一个例子。

图2展示了二维混合PIC天体爆炸模拟中密度分布的示例。此前的论文中提供了更多此类 Hybrid-VPIC 模拟示例（包括三维模拟）[35,41],，以及将代码与线性波求解器进行比较的验证研究。模拟初始时包含一小团呈高斯形分布的碎屑离子，以阿尔芬马赫数（速度归一化至阿尔芬速度） $M_A = 15$径向向外运动。碎屑总质量对应的等质量半径为 $R_m = 150\, d_i$，也就是说，碎屑总质量等于背景等离子体中半径为 R_m 的球体质量。两组模拟展示的都是抗磁空腔达到最大尺寸并开始回缩后不久的状态。

碎屑的膨胀会在背景等离子体中驱动向外传播的激波。这些模拟的计算域尺寸为 $L_x \times L_z = 1000\, d_i \times 1000\, d_i$，并且有意采用了略低的分辨率，每个方向上均为512个网格单元。模拟使用的时间步长为 $\Delta t = 0.01/\omega_{ci}$，背景等离子体中每个网格单元有200个数值粒子，另有 ~ 1 百万个数值粒子用于表示碎屑云。背景等离子体β为 $\beta_i = \beta_e = 0.1$，电子遵循等温状态方程。此示例的输入文件可在线获取[4]。

网格分辨率较低，凸显了第 II B 节提到的一个数值问题：在分辨率不足的混合PIC模拟[26]中，粒子权重被分散到多个网格单元上。尽管具体取决于问题，为避免这一数值问题，建议使用 $\Delta x/d_i \leq 1$ 的网格分辨率。图 2(a) 中使用的最近网格点加权未显现这一问题，激波前沿仍保持着符合物理实际的结构。然而，在图 2(b) 中，采用 QS粒子权重方案并对粒子矩和场平滑程序进行 10 次处理后，激波前沿破裂成细丝。激波前沿处最初形成的细丝也以不符合物理实际的高速脱离了激波主体。因此，尽管高阶粒子形状函数或平滑处理有助于减轻粒子噪声的影响，但也可能导致虚假的非物理色散。粒子形状函数和平滑次数的最佳选择，取决于具体问题以及现有计算资源所能支持的网格分辨率。

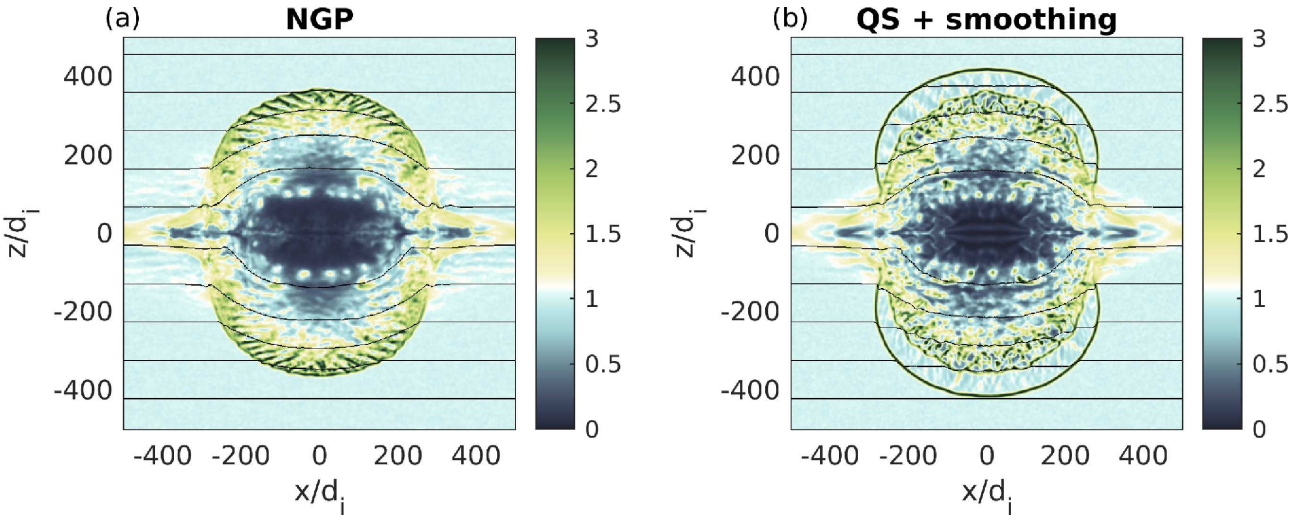

图 2：天体物理爆炸的 Hybrid-VPIC 模拟中，总等离子体密度（以背景密度归一化）的等值线——电离碎片云膨胀并进入背景磁化等离子体。黑线表示磁力线示例。这些膨胀的碎屑最初沿径向向外运动，阿尔fvén马赫数为 $M_A = 15$，所谓的等质量半径为$R_m = 150\ d_i$（背景等离子体中半径为 R_m 的球体所含的质量与爆炸碎屑离子的质量相同）。(a) 使用最近网格点（NGP）权重进行的模拟，不会受到混合粒子网格代码中由有限粒子尺寸导致的数值色散[26]。(b) 类似的模拟，但采用第 IIB 节所述的二次和（QS）粒子权重，并对矩和场进行 10 遍二项式平滑[20]。粒子权重分布在许多网格单元上，导致激波前沿出现非物理丝化，第一个丝状结构超越激波的其余部分向前传播。

C. 磁镜聚变装置

作为最后一个应用示例，我们介绍一种磁镜聚变实验的 Hybrid-VPIC 模型。由于高场超导线圈的问世，以及气体动力学陷阱（GDT）实验取得了令人鼓舞的结果，其约束性能已接近理论极限[42,43]，磁镜近年来重新受到关注。出于几个原因，有必要为 GDT 概念建立离子动力学模型。首先，所有磁镜装置都包含损失锥速度分布，这可能会激发动力学不稳定性。此外，虽然 GDT 的中心核心区包含碰撞性相对较强的热等离子体，但该装置还会通过注入最初为中性的多兆电子伏离子束来补充燃料。快燃料离子几乎不发生碰撞，而聚变性能对快离子的减速过程及其速度分布十分敏感。最后，有限拉莫尔半径

（FLR）效应预计能够稳定磁流体交换模，这是导致磁镜约束性能下降的主要不稳定性之一。

镜机模型在 Hybrid-VPIC 中的实现，首先是根据名义外部线圈构型初始化磁场 $\mathbf{B}_0$。用户可以指定任意线圈构型。边界为开放边界，并设置为剔除外部线圈与计算域笛卡尔体积相交的所有区域。在磁场较弱的中心区域初始化热等离子体。由于损失锥中的粒子会逃离等离子体，因此在镜机中心加入体源，以补充等离子体密度。我们采用具有麦克斯韦速度分布的源，并将新粒子的总通量设定为足以维持中心等离子体密度的稳定运行平均值。用户也可以任意设定粒子源项。为纳入以中性束注入的快离子，还可以加入额外的体源，其中的离子取样自束流型分布，并在实验相关的俯仰角附近形成峰值 $45°$。

图 3 展示了镜机三维 Hybrid-VPIC 模拟的示例数据。模拟域为 $L_x \times L_y \times L_z = 300\, d_i \times 30\, d_i \times 30\, d_i = 800 \times 160 \times 160$ 个网格单元，在密度分布峰值处每个网格单元使用 50 个粒子。采用一种外部磁场线圈几何构型，使镜比（轴上峰值磁场相对于中心磁场的归一化值）为 5。电子与离子温度相等，对应的等离子体β值为 $\beta_i = \beta_e = 0.03$。电子遵循简单的等温状态方程，不过也可以进行修改，以描述镜磁装置中更真实的电子分布[44]。模拟的时间步长为 $\Omega_{ci}\Delta t = 0.01$（$\Omega_{ci}$ 在轴上磁场峰值位置处计算），并在 $\sim 150,000$ 个时间步内达到准稳态。该模拟在计算集群的 8 个节点上运行，每个节点有 128 个 CPU核心，耗时 ~ 12 小时。图 3 中可见等离子体密度柱边缘的交换模。这些磁流体力学模由磁场曲率存在时的等离子体压力梯度驱动。交换模是磁镜装置中的主要损失机制之一。然而，人们认为较短波长的模会受到离子有限拉莫尔半径效应的稳定作用。我们计划未来使用 Hybrid-VPIC 对此进行更详细的模拟。

IV. 静电碰撞混合模型

Hybrid-VPIC代码的主要应用之一，是研究与惯性约束聚变（ICF）相关的高能量密度（HED）等离子体状态中的动力学混合。混合粒子模拟

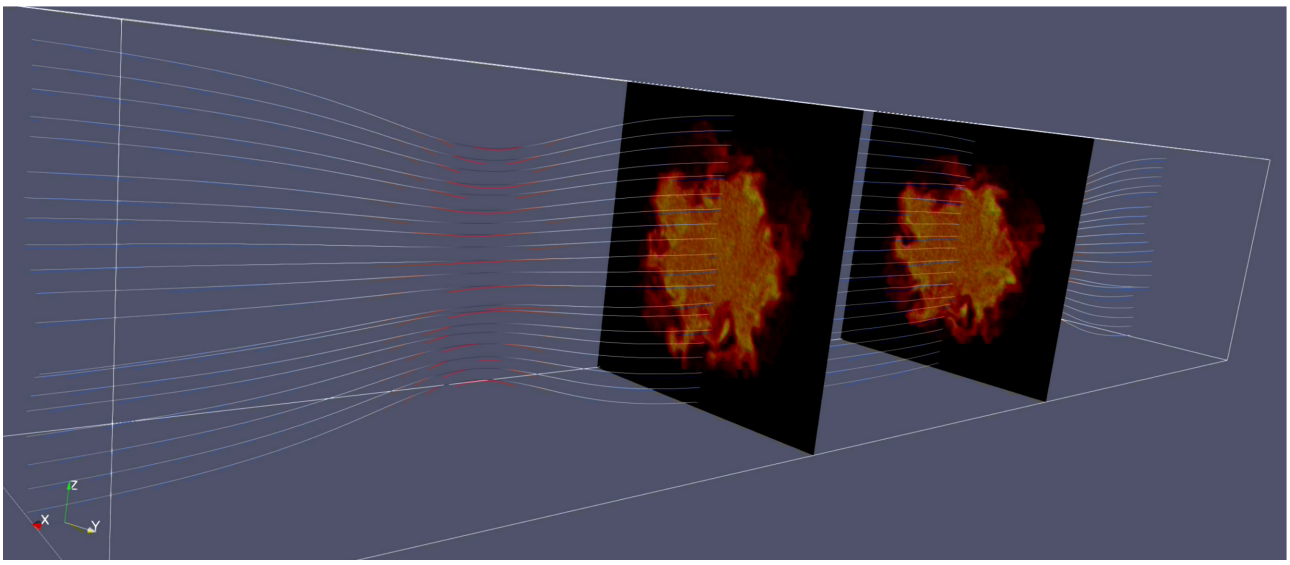

图3： 图中展示了磁镜约束装置的 Hybrid-VPIC 模拟所得的两幅等离子体密度切片，以及示例磁力线。该装置的磁镜比为$B_m/B_0 = 5$，中心β值为 $\beta_i = \beta_e = 0.03$。三维模拟展示了等离子体边缘处交换模的发展过程。有限拉莫尔半径（FLR）效应应当能够稳定这些磁流体力学模，而这一问题适合采用混合PIC代码进行研究。

模型此前已能够在一维模拟中展示此类动力学混合或组分分离效应[45–47]。Hybrid-VPIC的高性能使其得以扩展到包含湍流混合的二维模拟中，相关示例结果将在第V节中进行更详细的介绍。Hybrid-VPIC还首次在混合PIC代码中加入了针对多离子组分碰撞等离子体的改进型电子流体输运模型[48]。迄今为止，这些研究主要集中于更简单的静电状态，其中不存在外部施加或自生的[49,50] 磁场。在这种情况下，欧姆定律中的磁项被略去，电场的形式为：

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{en_e}\nabla p_e + \mathbf{R}_{ei} \tag{14}$$

虽然静电场模型相对简单，但对于与惯性约束聚变相关的高能量密度状态中的库仑碰撞，则需要进行更详细的处理。对于离子-离子碰撞，我们重用 Takizuka-Abe[51] 粒子配对程序，该程序已在全动力学VPIC代码[52–54]中得到广泛应用。值得注意的是，Hybrid-VPIC[46,55], 中也实现了一个用于聚变燃烧的类似二元配对算法，不过这并非第 V 节所述混合建模的必要组成部分。

离子-电子碰撞主要通过粒子-流体碰撞模型处理（对于每种离子种类，我们称之为 $C_{ie0}\{f_s\}$ s），该模型基于离子与麦克斯韦电子分布碰撞时的碰撞频率。我们还加入了一个修正项，以得到完整的离子碰撞算子 $C_i\{f_s\} = C_{ie0}\{f_s\} + C_{th}\{f_s\}$，其中 $C_{th}\{f_s\}$ 考虑了热力。主要的离子-电子碰撞算子 $C_{ie0}\{f_s\}$ 采用蒙特卡罗模型来处理粒子与流体背景[56]的散射。与约化流体模型相比，粒子-流体散射模型的一个优点是，它能更好地处理稀薄的快离子群体，例如聚变产生的 α粒子；对于这类粒子，典型流体展开中的 $v_i \ll v_{the}$ 假设并不充分成立。利用每个网格单元内局部的电子密度和温度，可以计算给定离子相应的俯仰角散射率、摩擦散射率和能量扩散散射率。根据这些结果，可以计算出摩擦阻力项和一个伪随机散射角。

如上所述，散射算子中加入了一个附加项，用于描述热力；热力取决于温度梯度存在时电子分布的低阶非麦克斯韦修正。为了计算热力，我们采用 Simakov 和 Molvig[48]计算的多离子碰撞等离子体输运系数。热力碰撞算子 $C_{sth}\{f_s\}$ 会为每个离子宏粒子提供额外加速度。每个离子的额外加速度 p 为：

$$\mathbf{a}_{th} = \frac{\beta_0 Z_p^2}{m_p \sum_s (n_s Z_s^2)} \nabla T_e, \tag{15}$$

其中，输运系数 $\beta_0(Z_{eff})$[48] 由关于 $Z_{\text{eff}} = \sum_s n_s Z_s^2 / n_e$ 的帕德近似给出。由于模型依赖于 Z_{eff}，在粒子网格代码的主粒子循环中，我们收集粒子的 $(Z_s)^2$ 加权矩。具体而言，除了标准的 (Z_s) 加权电流密度和电荷密度外，我们还在每个网格点收集 $\mathbf{J}_{2i} = \sum_s n_s Z_s^2 \mathbf{u}_s$和 $n_{2i} = \sum_s n_s Z_s^2$。

散射算子采用最低阶算子分裂方法，其中每个离子的碰撞速度更新都在电场中的 Boris推进之后执行。 $C_{ei0}\{f_s\}$使用 Lemons 等。[56], ，而 $C_{th}\{f_s\}$ 只需将 一个$_{th}\Delta t$ 添加到每个离子的速度中。为守恒总能量和动量，每个离子宏粒子的动量增量 $\Delta(m_p \mathbf{u}_P)$会被加回电场的欧姆定律中（从而得到方程 14 中的电阻项$\mathbf{R}_{ei}$），而能量增量 $\Delta(m_p u_p^2/2)$则作为电子的局部热源纳入方程 7 的项 H_{ei} 中。

在静电近似下求解式 7 的电子能量平衡方程

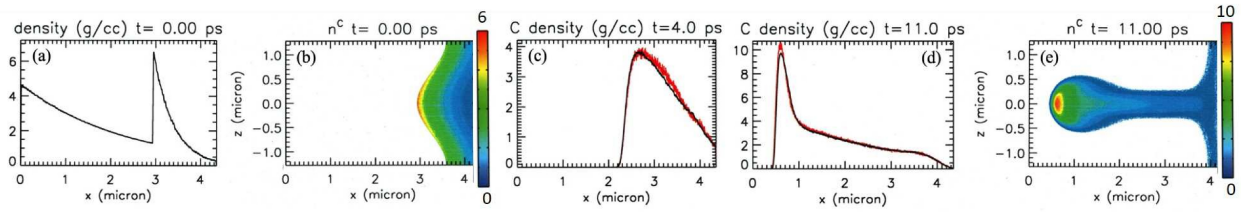

图 4： 存在陡峭密度梯度、速度为 $g = 2.1 \times 10^{19}$ cm/s^{2}时，氘-碳界面瑞利-泰勒不稳定性增长的混合模拟：(a) $z = 0$ 处的初始密度（单位：g/cc）分布，处于等温静水力平衡状态；(b) $t = 0$ 处的碳离子密度，显示单模扰动下初始氘-碳界面构型，扰动参数为 $w = 2.56$ μm和 $a = 0.64$ μm（$a/w = 0.25$）；(c)-(d) $z = 0$处的碳离子密度分布，分别对应时间 $t = 4.0$ ps和11 ps，比较混合模拟（黑色曲线）与全动理学VPIC代码（红色曲线）的结果；(e) 混合模拟中 $t = 11.0$ ps时的碳离子密度。重力方向为 $-\hat{x}$ 。

$\mathbf{u}_e = \sum_s n_s Z_s \mathbf{u}_s / \sum_s n_s Z_s$ 使用 Simakov和Molvig 的式 (13) 中的电子热流模型来计算 $\mathbf{Q}_e$ [48]:

$$\mathbf{Q}_e = \beta_0 p_e (\mathbf{u}_e - \hat{\mathbf{u}}_i) - \kappa \nabla T_e \tag{16}$$

其中，$\hat{\mathbf{u}}_i = \sum_s n_s Z_s^2 \mathbf{u}_s / \sum_s n_s Z_s^2$，$\kappa = \kappa_e + \kappa_0 = \gamma_0 p_e / m_e \sum_i \nu_{ei} + \kappa_0$，$\kappa_0$是一个较小的数值扩散常数（标称等离子体条件下为$\kappa_0 < \kappa_e$），如第二节所述；$\nu_{es} = \sqrt{32\pi} n_s Z_s^2 e^4 \log \Lambda / 3 m_e^{1/2} T_e^{3/2}$，$\beta_0$是方程 15 中的同一系数；输运系数 γ_0 由[48] 通过对 Z_{eff} 的另一个函数进行近似得到。请注意，尽管在此极限下电子黏性输运系数也是已知的，[48]，但电子黏度尚未在 Hybrid-VPIC 中实现，因为它通常不如离子黏度重要。

V. 应用：等离子体动力学效应对界面混合的影响

本节将较为详细地介绍 Hybrid-VPIC 的一种应用：模拟高能量密度环境中等离子体动力学效应对界面混合的影响，其中涉及双极扩散、黏度、组分质量输运[57–66]和流体动力学不稳定性。我们首先研究瑞利-泰勒（RT）不稳定性的建模：在处于流体静力平衡的氘-碳（D-C）界面上施加大小恒定的均匀有效重力 g（作为粒子推进中电场加速度之外的附加加速度）。我们考虑两种可能的流体静力平衡状态：等温条件和“等容”条件（每个材料区域内密度恒定）。

在等温条件下，$T_i = T_e = T$（在整个模拟区域内恒定），为了在 $-\hat{x}$ 方向的重力作用下维持界面两侧的压力平衡，$\hat{x}$ 中必须存在初始密度梯度[66]。设物种 i 和 j 分别为位于 $\hat{x}$界面两侧的轻离子组分和重离子组分。将离子和电子的动量方程相加

$$m_i n_i \frac{dv_i}{dt} = -T\nabla n_i - m_i n_i g\hat{x} \tag{17}$$

$$m_e n_e \frac{dv_e}{dt} = -TZ_i\nabla n_i - m_e Z_i n_i g\hat{x}, \tag{18}$$

令对流导数等于零，并取 $m_i \gg m_e$，可得物种 i的$\partial \log\, n_i/\partial x = m_i g/\left[(Z_i+1)T\right]$。对其积分可得密度分布

$$n_i(x) = n_{i0}\exp\left[-\frac{m_i g x}{T(Z_i+1)}\right] \tag{19}$$

其中，n_{i0} 是物种 i 在 $x = 0$处的离子密度。为使 x 中位于位置 $x_s(z)$处的界面两侧保持压力平衡，界面处物种 j 的离子密度必须满足

$$n_j(x,z) = n_{j0}\exp\left[-\frac{m_j g[x - x_s(z)]}{T(Z_j+1)}\right] \tag{20}$$

其中

$$n_{j0}(z) = n_{i0}\frac{Z_i+1}{Z_j+1}\exp\left[-\frac{m_i g x_s(z)}{T(Z_i+1)}\right]. \tag{21}$$

或者，我们可以考虑这样一种情况：某一区域内初始密度为常数，而温度 $T_e(x) = T_i(x) = T(x)$ 发生变化，以建立流体静力平衡。将电子和离子的动量方程相加并取极限 $dv_e/dt = dv_i/dt \to 0$，可得

$$\nabla(n_e T_e + n_i T_i) = -(n_e m_e + n_i m_i)g\hat{x}, \tag{22}$$

这意味着

$$(Z_i+1)\nabla T = -m_i g\hat{x}, \tag{23}$$

或者，积分可得，

$$T(x,z) \approx T_0 - \frac{m_i g}{Z_i+1}\left[x - x_s(z)\right], \tag{24}$$

$$T(x,z) \approx T_0 - \frac{m_j g}{Z_j+1}\left[x - x_s(z)\right], \tag{25}$$

其中，T_0 是一个积分常数，等于界面处的温度。要使材料界面两侧的压力梯度为零，两个物种的密度必须满足

$$n_j = n_i\frac{Z_i+1}{Z_j+1}. \tag{26}$$

混合瑞利-泰勒模拟根据上述密度或温度剖面初始化，采用带有正弦扰动的阶跃函数等离子体界面。经典瑞利-泰勒增长率为 $\gamma = \sqrt{Agk}$，其中 $A = (\rho_h - \rho_l)/(\rho_h + \rho_l)$ 是根据轻离子和重离子密度 ρ_l 与~~$\rho_{\bar{h}}$~~ 计算得到的阿特伍德数， $k = 2\pi/w$ 是波长为 w的扰动波数。然而，存在等离子体动力学效应（有限扩散率和黏度）时，小波长下的增长会受到抑制，因此增长率是波数的非单调函数 k，并在较小的 k 值处达到最大值，详见参考文献[66,67],；这种行为不同于经典增长率表达式。

本文讨论了以全动理学VPIC代码[1–3, 68] 为基准的混合模拟，研究满足流体静力平衡的 D^+-C^{6+} 界面的瑞利-泰勒动力学。在模拟中，界面位置处的D和C离子数密度分别为 $n_{\mathrm{D}} = 5.40 \times 10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$ 和 $n_{\mathrm{C}} = 1.54 \times 10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$（C侧的电子数密度为 $n_e = 9.24 \times 10^{23}\ \mathrm{cm}^{-3}$），且 $A = 0.67$。在（x, z）平面内进行二维模拟，界面位置表示为$x_{\mathrm{it}}(z) = L_x/2 - a\cos(2\pi z/w)/2$，其中 L_x 是模拟区域在 x方向上的尺寸， w 是沿 z方向的单一正弦扰动的波长， a 是扰动的峰峰值振幅。模拟区域在 z 方向上的尺寸设为与扰动波长相等 w。

在模拟中，我们对所有碰撞采用二元碰撞模型[51] ，其库仑对数为 $\log\Lambda$ 。为使碰撞算子严格守恒能量和动量，所有计算宏粒子均具有相同的统计权重，也就是说，在给定模拟中，每个粒子代表相同数量的真实粒子。每格粒子数是密度的函数。在界面位置，C 离子和氘离子分别采用每格 167 个和 584 个计算宏粒子。

碰撞算子可以每隔 N 个时间步应用一次，并满足条件 $2dt_{\mathrm{coll}}\nu_{\mathrm{ij}} \ll 1$ ，以确保碰撞采样的准确性[56], ，其中 $dt_{\mathrm{coll}} = Ndt$ 是碰撞算子的子循环时间步长， dt 是模拟时间步长， ν_{ij} 是物种 i 和 j 的碰撞率（包括 $i = j$ 的自碰撞和 $i \neq j$的跨物种碰撞）。在全动理学 VPIC 模拟中，界面处的网格单元尺寸与德拜长度处于同一量级，库朗条件要求的时间步长远小于混合代码中使用的时间步长，并且 $N > 1$。在混合模拟中，我们使用 $N = 1$ 和时间步长 dt ，以获得与全 VPIC 模拟中相同的 $2dt_{\mathrm{coll}}\nu_{\mathrm{ij}}$。电子压强演化方程采用子循环，以使其满足电子热流扩散方程所施加的 CFL 条件。混合模拟

运行最多 22×10^6 个时间步，能量守恒误差在 < 2.5 %以内 .

在（x， z）平面内进行的模拟在 z中对粒子和场采用周期性边界条件。 x 中的场边界条件为理想电导体边界。为避免模拟中的边界效应， x 方向上的模拟长度较长，并且边界与界面之间的距离足够大，因此在 x-边界处电场实际上为零。在 x中采用“麦克斯韦分布回流”边界条件，即在边界处遇到边界的粒子将从初始局部温度对应的麦克斯韦分布中重新注入。

混合代码的第一个测试问题使用全动理学VPIC代码进行基准测试，研究的是最初满足等温静水力平衡的氘-碳界面的瑞利-泰勒动力学；该界面存在陡峭的密度梯度，速度为 $g = 2.1 \times 10^{19}$ 厘米/秒^2。为降低全动理学VPIC代码的计算成本，人为增大了碳的原子质量数至 $A_C = 36$ ，以提高增长率。模拟区域尺寸为 $L_x = 4.35$ μ米×$L_z = w = 2.56$ μ米，扰动振幅为 $a = 0.64$ μ米（$a/w = 0.25$）。波长选取为在这些参数设置下所得到的最大增长率附近的值[66]。整个模拟区域内的温度均为 $T_e = T_i = 5$千电子伏。

等离子体动力学效应取决于碰撞性。在高碰撞性的极限下，等离子体动力学效应变得微不足道。另一方面，如果动力学效应占主导地位（例如在短波长模态的情况下），有效表面张力可以使界面扰动变平。因此，在模拟中，我们采用具有增强库仑对数 $\log \Lambda = 40$ 的碰撞模型，以便针对所选的等离子体密度和扰动波长控制等离子体动力学效应。（也可以使用常规的库仑对数值并提高密度，以获得所需的碰撞率；然而，对于全动力学模拟而言，这种做法的计算成本更高，因为对具有更小德拜长度的高电子密度等离子体介质进行建模，需要采用更小的网格尺寸和时间步长。）

图 4 展示了采用初始等温静水力平衡和陡峭密度梯度（ $g = 2.1 \times 10^{19}$ cm/s^2 ）进行瑞利-泰勒模拟的结果。图(a)和(b)中分别显示了沿 x方向的陡峭密度分布和界面结构。重力沿 $-\hat{}x$ 方向，重流体（C离子）位于轻流体（D离子）的右侧。如图(e)所示，随着重流体向轻流体中运动，施加的模态振幅增长至非线性阶段。在完整的VPIC模拟中，等离子体动力学效应抑制了短波长模态的增长，因此不存在小尺度结构。相比之下，在无黏流体力学中，瑞利-泰勒模态结构的边缘通常会出现开尔文-亥姆霍兹不稳定性。 $z = 0$ 时刻的碳离子密度分布

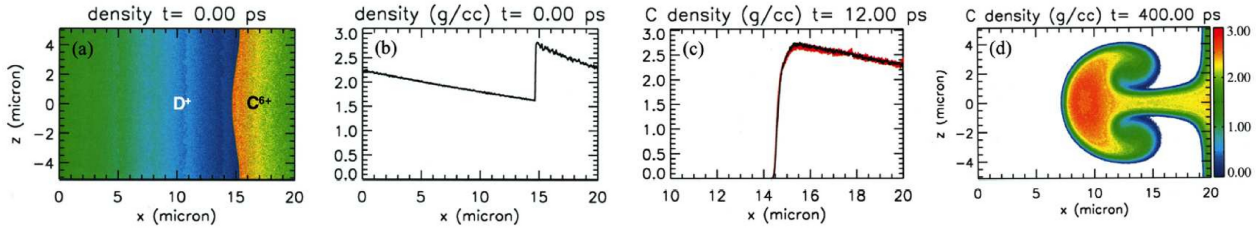

图 5：较长时间下氘-碳界面瑞利-泰勒不稳定性增长的混合模拟

与惯性约束聚变设置相关的尺度（ $g = 2.1 \times 10^{17}$ cm/s^2 ）以及网格分辨率收敛性验证：(a) 初始密度，显示单模态扰动的D-C界面构型，波长为$w = 10.24\ \mu$m和 $a = 0.64\ \mu$m（$a/w = 0.0625$）；(b) $z = 0$处等温静水力平衡下的初始密度分布；(c) $z = 0$处的碳离子密度分布，在 $t = 12.0$ ps时比较高分辨率模拟（红色曲线）和低分辨率模拟（黑色曲线）的结果；(d) $t = 400.0$ ps长时间尺度下低分辨率混合模拟的碳离子密度。重力沿 $-\hat{x}$ 方向。

$t = 4.0$ ps 和混合模拟在 11 ps 时的结果分别与完整 VPIC代码的结果叠加显示于图 (c) 和 (d) 中，二者吻合良好。请注意，混合模拟的网格尺寸是完整 VPIC 模拟的 5–6 倍，时间步长则大 26 倍。因此，混合模拟不仅捕捉到了瑞利-泰勒动力学的关键特征，而且与完整 VPIC 模拟相比，计算成本降低了近 3 个数量级。

接下来，我们讨论采用等温静水力平衡、在更长时间尺度下对 $g = 2.1 \times 10^{17}$ cm/s^2 进行的瑞利-泰勒不稳定性混合模拟。界面位置处初始 D 和 C离子的离子数密度以及阿特伍德数均与上述情况相同，但未采用人为设定的原子质量数或库仑对数。模拟参数为 $T_e = T_i = 1$ keV、库仑对数 $\log \Lambda = 5$、 $L_x = 20.0\ \mu$m、 $L_z = w = 10.24\ \mu$m 和 $a = 0.64\ \mu$m（a/w =0.0625）。这些参数与惯性约束聚变条件下碳壳层向内坍缩并撞击氘燃料时减速阶段的情况相关；此时，最大增长对应的扰动波长为 $10\ \mu$m[67]。为检验网格分辨率的收敛性，我们进行了两组混合模拟：第一组采用较高的空间分辨率：$n_x = 19040$ 和 $n_z = 9200$，与图 4 中获得与完整 VPIC模拟结果吻合的参数相当；第二组采用较低的空间分辨率， $n_x = 1280$ 和 $n_z = 640$ ，但模拟时间更长（半纳秒）。

结果如图 5 所示，其中 (a) 和 (b) 两帧展示了初始条件。在 (c) 帧中，叠加显示了高分辨率（红色曲线）和

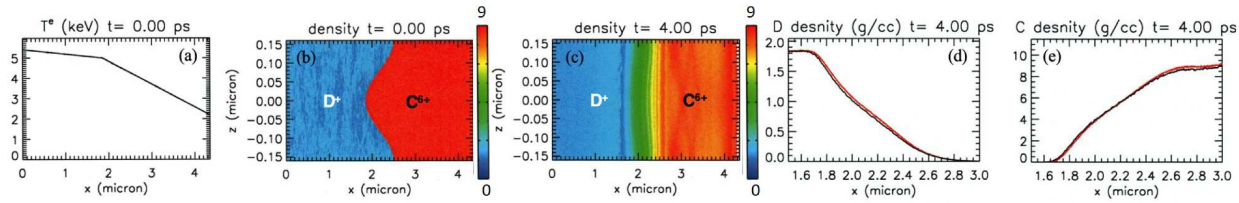

图 6：在等容静水力平衡条件下，以 $g = 2.1 \times 10^{18}$ cm/s^{2}进行瑞利-泰勒不稳定性增长的混合模拟：(a) $z = 0$时的初始温度分布；(b) $t = 0$时的密度，显示单个短波长扰动的初始氘-碳界面构型，扰动参数为$w = 0.32$ μm和 $a = 0.64$ μm（$a/w = 2$）；(c) 混合模拟在 $t = 4.0$ ps时的密度，显示短波模式受到强烈动力学效应后界面变平；(d)-(e) 在 $t = 4.0$ ps时 $z = 0$处的氘离子和碳离子密度分布，对比混合模拟（黑色曲线）与全动理学VPIC代码（红色曲线）的结果。重力沿 $-\hat{x}$ 方向。

低分辨率（黑色曲线）模拟在 [69,70] at time [67]ps 时的碳离子密度分布，二者吻合良好。确认收敛后，(d) 帧展示了低分辨率模拟的后期瑞利-泰勒动力学，其中由于等离子体动力学效应阻碍了短波长模态的增长，小尺度结构消失了。这种行为与采用等离子体输运模型、在流体近似极限下进行的 XRAGE[69,70] 模拟结果一致[67]。（下文展示减速阶段惯性约束聚变内爆的多模瑞利-泰勒模拟后，我们将再讨论这一结果的意义。）低分辨率模拟共完成了超过 2400 万个时间步，能量守恒误差在 0.2% 以内。

现在我们讨论等容静水力平衡条件下瑞利-泰勒不稳定性增长的模拟。模拟参数与图 4 所用参数相似，但速度为 $g = 2.1 \times 10^{18}$ cm/s^2，且库仑对数 $\log \Lambda = 100$有所增大。模拟区域尺寸为 $L_x = 4.35$ μm$L_z = w = 0.32$ μm，扰动振幅为 $a = 0.64$ μm（$a/w = 2$）。选择短波长是为了显示其对界面结构的强烈动力学效应[66]。界面位置处的温度为 $T_e = T_i = 5$千电子伏。

结果如图 6 所示，其中(a)和(b)分别展示了 $z = 0$ 处的初始温度分布和短波扰动的初始界面构型。由于存在短波模，动力学效应很强，抑制了 RT 模的增长，并在较短时间内使界面趋于平坦，这与全 VPIC 模拟中发现的动力学行为相似 [66]。此外，混合模型（黑色曲线）与全动力学模型之间的比较

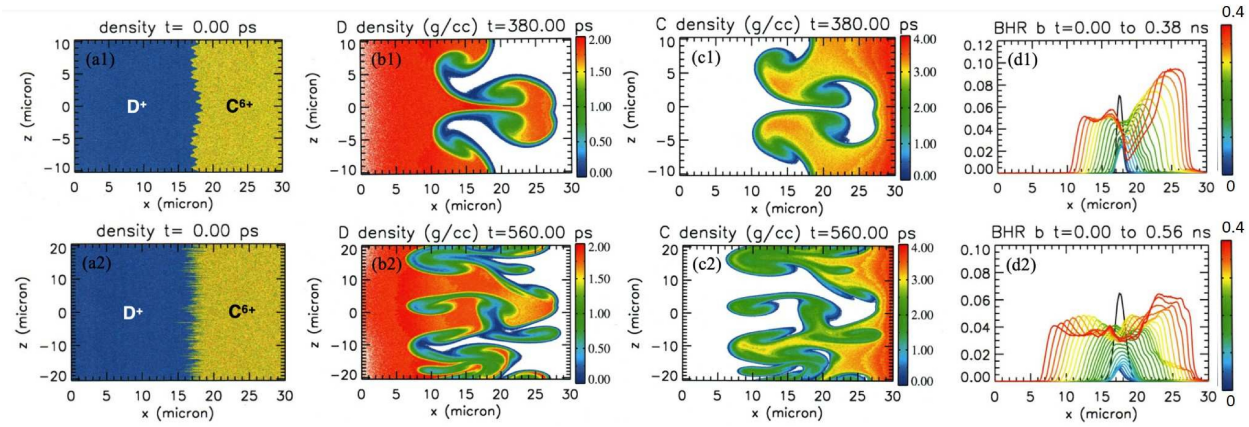

图 7： 在一个

与惯性约束聚变相关的较长时间尺度， $g = 2.1 \times 10^{17}$ cm/s^2 及等容静水力平衡条件下：(a1)和(a2)分别为 4 模和 209模模拟中显示 D-C 界面构型的初始密度。(b1)和(b2)分别为 4 模和 209模模拟在时间 $t = 380.0$ ps 和 560 ps 时的氘离子密度；同理，(c1)和(c2)表示碳离子密度。(d1)和(d2)为 BHR b参数随时间的演化（从早期到晚期的分布以从黑色到红色的颜色光谱表示）。重力方向为 $-\hat{x}$ 。

VPIC代码（红色曲线）对D离子和C离子密度分布的 $z = 0$ 在时间 $t = 4.0$ ps时，结果显示于帧(d)中，表明两者具有良好的一致性。

我们还考虑了与ICF设置相关的多模瑞利-泰勒不稳定性增长的长时间尺度动力学，使用 $g = 2.1 \times 10^{17}$ cm/s^2 以及等容静水力平衡条件。采用与图5中相同的D-C界面等离子体密度和温度，进行了4模和209模两种混合模拟。4模模拟具有 $L_x = 30.0$ μm、$L_z = 20.48$ μm的波长，波长为 L_z、 $L_z/2$、 $L_z/10$、 $L_z/22$ 的正弦扰动带有相移，振幅为 $a = 0.64$ μm。波长为 $L_z/2 = 10.24$ μm的模态是使用等温静水力平衡在图5中模拟的最大增长模。209模模拟具有 $L_x = 30.0$ μm、 $L_z = 40.96$ μm的波长，波长为 L_z/N，其中 N 是从1到209变化的模数；正弦扰动带有随机相移，振幅为 $a = 0.16$ μm。最大增长处波长为10.24 μm的模态也包括在内。

RT多模混合模拟的结果如图7所示，上排为4模模拟，下排为209模模拟。初始界面配

置见图(a1)和(a2)。209模模拟中的初始扰动振幅小了 4×，因此各模态需要更长时间才能演化。对于这些多模混合模拟，能量守恒率为 $\sim 2.5\%$。在这些多模模拟中，瑞利-泰勒动力学被模拟了较长的时间尺度（∼0.5 ns），但未出现湍流状态。相比之下，最大增长率对应的波长为10.24 μm的模态主导了后期的材料场，这一点从图(b1)、(b2)、(c1)和(c2)所示的结果中可以看出。

可以使用比容-密度协方差量来评估混合程度

$$b = \langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle - 1 \tag{27}$$

该量来自 Besnard-Harlow-Rauenzahn（BHR）湍流混合模型[71,72]。根据定义， b 为非负值；在这类平均压力梯度十分重要的变密度流动中，b 发挥着核心的流体动力学作用，既描述材料场，也影响湍流的产生与演化。量 b 还包含多组分等离子体形态（即“混合程度”）的信息；对于发生热核反应等二元反应的介质， b 可用于以忠实反映其底层形态的方式修正物种间的反应速率[73]。具体而言，随着 b 趋近于零，介质将达到原子尺度上的完全混合； b 有限的区域则对应不完全混合。近期在国家点火装置开展的分离反应物实验中，已观测到与 b 这类变化相关的反应速率修正[74]。

图 7（d1）和（d2）展示了两种多模混合模拟中 BHR b 随时间的演变，以及其随 x 变化的情况；数据在 z上取平均（从早期到晚期的曲线以从黑色到红色的颜色光谱表示）。在模拟过程中，观察到量 b先随时间减小、随后增大，同时有限 b 的区域逐渐变宽。从模拟结果可见，这对应于不完全混合层从界面开始生长，其原因是最大波长模态演化至有限振幅。不完全混合层不断增厚，并扩展至模拟体积的很大一部分。由于模拟时间尺度与惯性约束聚变实验中碳壳向内爆缩、压缩氘燃料时减速阶段的时间尺度相当，这表明湍流发展并实现完全湍流混合的时间不足，与先前研究的结论一致[75–77]。为进一步推动近期惯性约束聚变点火演示的成果[78],，可利用这种混合模拟能力深入了解动力学效应对混合及燃烧传播的影响[79]。

最后，我们考察存在激波时的界面动力学，这种情况通常

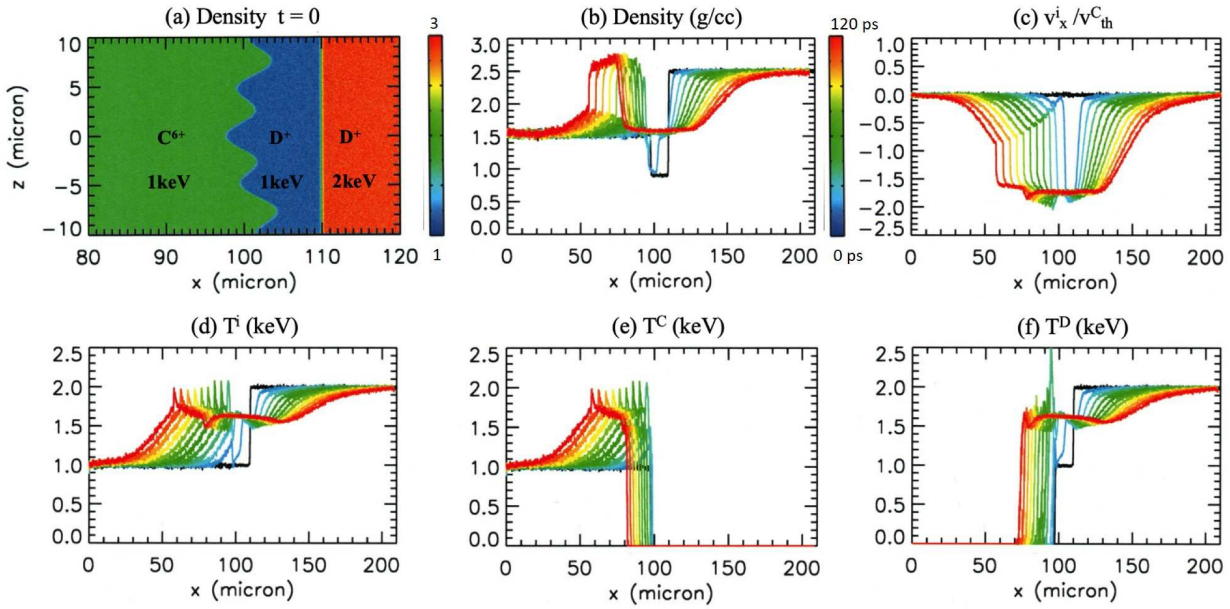

图 8： 碳-氘界面与入射冲击波相互作用所导致的 Richtmyer-Meshkov不稳定性演化的混合模拟：(a) 通过密度显示的初始条件和界面结构；(b) 至 (f) 为密度、质量加权离子流速（以 C离子热速度 v_{th}^{C}为单位）、质量加权离子温度 T^{i}、 T^{C}和 T^{D}从 $t=0$至 117 ps 的分布（从早期到晚期的分布以从黑色到红色的颜色光谱表示）。

见于惯性约束聚变环境。混合模拟所用的初始条件来自一次惯性约束聚变内爆的 XRAGE 辐射流体力学模拟。模拟尺寸为$L_x = 210.0\ \mu$m 和 $L_z = 20.0\ \mu$m。我们根据参考文献[80]采用库仑对数来描述种内与种间碰撞。如图 8 (a) 所示，碳-氘界面的电子与离子温度为 1 千电子伏，正弦扰动波长为 $10L_z$， L_z， $L_z/4$ ，并具有相移和 $a = 3.4\ \mu$m 的峰峰值振幅。界面处的碳离子和氘离子密度分别为 1.54 g/cc 和 0.90 g/cc，并通过要求$n_{\mathrm{C}}(1 + Z_{\mathrm{C}}) = n_{\mathrm{D}}(1 + Z_{\mathrm{D}})$来满足界面两侧的压力平衡。激波从模拟区域右侧一个压力较高、含有氘离子的区域发起，该区域的密度为 2.5 g/cc，且 $T_e = T_D = 2$ 千电子伏。初始密度分布由图 (b) 中的黑色曲线表示。在这些等离子体条件下，不同密度氘离子的边界处总压力跃升 5.6 倍（$x = 110\ \mu$m）。

(b) 至 (f) 帧展示了从 $t = 0$ 到 117 ps 期间密度、质量加权离子流速、质量加权离子温度 T_i、 T_C 和 T_D 在 $z = 0$ 处的剖面随时间的演化。

其中，使用从黑色到红色的颜色光谱表示从早期到晚期的剖面。激波推动形成一片宽广的流动等离子体，其速度为 ~ 1.7 倍C离子热速度。受激波压缩的C物质形成一个狭窄的高密度层，位置介于 $x \sim 55$ 和 75 μm之间，其中C离子温度达到峰值，为初始温度的 $2\times$ 倍；界面处D离子层的温度较低（~ 1.6 千电子伏）。混合模拟还提供了有关两种离子种类之间能量分配的更多信息。质量加权等离子体密度和温度总体上与采用等离子体输运模型的XRAGE模拟结果一致。

VI. 讨论

我们介绍了 Hybrid-VPIC 代码，它扩展了开源 VPIC代码，以纳入混合流体/动理学模型。该代码采用了相当标准的混合求解器，并记录了若干具体选择的细节，供其他代码用户参考。来自空间和实验室等离子体建模的示例应用展示了该代码已发挥作用的问题，也凸显了混合PIC模拟中出现的一些数值难题。特别是，新的开放边界处理方法可能对其他混合粒子网格代码的开发者有所帮助。

Hybrid-VPIC 还针对碰撞、非磁化环境采用了一种相对较新的电子流体闭合[48] 。将该模型与混合 PIC 格式耦合后，便能够研究高能量密度环境下的界面混合，这是一个计算需求极高的问题。目前，针对这一应用领域的大规模计算工作已经启动，并已有一些初步科学结果发表。未来，碰撞模型可能会采用一种新的公式[81]进行更新。此外，电子输运模型也可能通过扩展 Braginskii闭合[83]，纳入磁效应[82]。这将使人们能够研究包括自生磁场在内的其他效应。

最后，未来的工作还将包括更新 Hybrid-VPIC 代码库，使其采用更新版本的 VPIC 2.0[68] 中的例程。该版本基于 Kokkos框架[84] 构建，可在基于 CPU、GPU 及其他计算架构的系统上实现高性能和可移植性。

致谢

本项工作在美国能源部国家核安全管理局的主持下，根据合同编号89233218CNA000001 执行。本项工作部分得到了高级模拟与计算综合计算计划以及实验科学办公室和惯性约束聚变计划的支持。此外，还获得了 NASA 磁层多尺度（MMS）任务以及 LANL 实验室定向研发（LDRD）计划的支持。作者感谢 Erik L. Vold 博士和 Jan Velechovsky 博士就界面混合应用开展的有益讨论，并感谢他们提供了图 8 中混合模拟所使用的 XRAGE 辐射流体力学模拟的初始条件。VPIC 模拟在 ASC Trinity 超级计算机上通过能力级计算和大规模计算倡议（LSCI）运行，并使用 LANL 机构计算资源完成。

数据可用性

可使用 Hybrid-VPIC代码复现数据，该代码正以开源形式发布于https://github.com/lanl/vpic-kokkos/tree/hybridVPIC[4]。论文中所述的功能并非全部都已准备好发布。若其他用户因特定研究需要某些功能，可联系作者，以加快这些功能的发布。

附录 A：含动力学电子的混合模型

Hybrid-VPIC代码的主要应用涉及将离子动力学模型与流体电子模型耦合。不过，也可以在混合PIC代码中加入动力学电子物种。一个典型例子是研究相对论性电子束在大气密度下的空气中传播时的稳定性，这种情况下加入动力学电子至关重要。MeV 能区的相对论电子束会使背景空气部分电离。高能束流电子的平均自由程可达数百米。另一方面，背景等离子体具有很强的碰撞性，温度仍相对较低（几 eV）。冷背景等离子体的动力学尺度可能小于微米，因此无法使用全动力学显式粒子网格代码处理这一问题。相反，可以采用简化的流体模型描述冷背景等离子体。

相对论电子束在电阻性介质中传播时的一种长波长不稳定性

空气背景首先由 Rosenbluth[85] 进行了处理。一个能够描述该不稳定性的简单模型包含描述相对论性电子的无碰撞 Vlasov 方程，并将空气视为具有电阻性的背景，其特征由简单的欧姆定律 $\mathbf{E} = \eta\mathbf{J}$（其中 $\mathbf{J}$ 是背景所携带的电流）描述。该模型已在 Hybrid-VPIC 中实现，具体方法是将束流电子视为具有相对论性粒子推进的动力学组分，并将欧姆定律简化为上述简单形式，其中 $\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}_{eb}$，而 $\mathbf{J}_{eb}$ 是动力学电子束所携带的电流。该系统容易发生一种不稳定性（现称为电阻性束流弯曲不稳定性），其成因是磁场的电阻性扩散，这使得束流与磁力线能够彼此滑移。该不稳定性会导致电流通道发生近乎刚性的横向位移；对于有限波长，这对应于电流发生弯曲。

示例数据来自对具有不同电阻率的背景中传播的 $\sim 1\ MeV$ 电子束进行的模拟。电子束在 x 方向上均匀分布，其剖面为 Harris 薄层剖面，$n(z) \sim n_0\tanh(z/d_e)$，其中 d_e 为电子趋肤深度；磁场与电子束携带的电流相一致。电子束粒子具有均匀漂移，对应的能量为 $\sim 1\ MeV$，其热扩散与电流通道宽度相一致。这并非精确平衡态，因为 Harris 薄层解是非相对论性的，但电子束会迅速达到稳定的近似平衡态（见图 9(c)，此时没有电阻率或电场）。这些模拟的计算开销不大，模拟区域大小为$L_x \times L_z = 80\ d_e \times 20\ d_e$，包含 640×320 个网格单元，并在 x方向上采用周期性边界。z 边界对场开放，并会吸收粒子。模拟在密度峰值处每个网格单元有 2000 个粒子。每个模拟都可以在不到半小时内，于多核（128 CPU）计算集群的单个节点上运行完成。场求解器采用子循环，以满足该简单模型中$\mathbf{B}$ 所满足的磁扩散方程的 CFL 条件。

正如理论所预测的，束流会发生弯曲不稳定性，使电流通道发生弯折。图 9 所示的电阻率中，电阻率最高时不稳定性增长最快。尽管这个简单模型捕捉到了电阻性束流弯曲不稳定性的基本特征，但要构建更完整、更逼真的模型，还需要考虑背景空气化学[86]和电子-空气碰撞。尽管如此，这个示例仍展示了如何将动力学电子纳入 Hybrid-VPIC，以解决另一类无法用全动力学代码处理的问题。

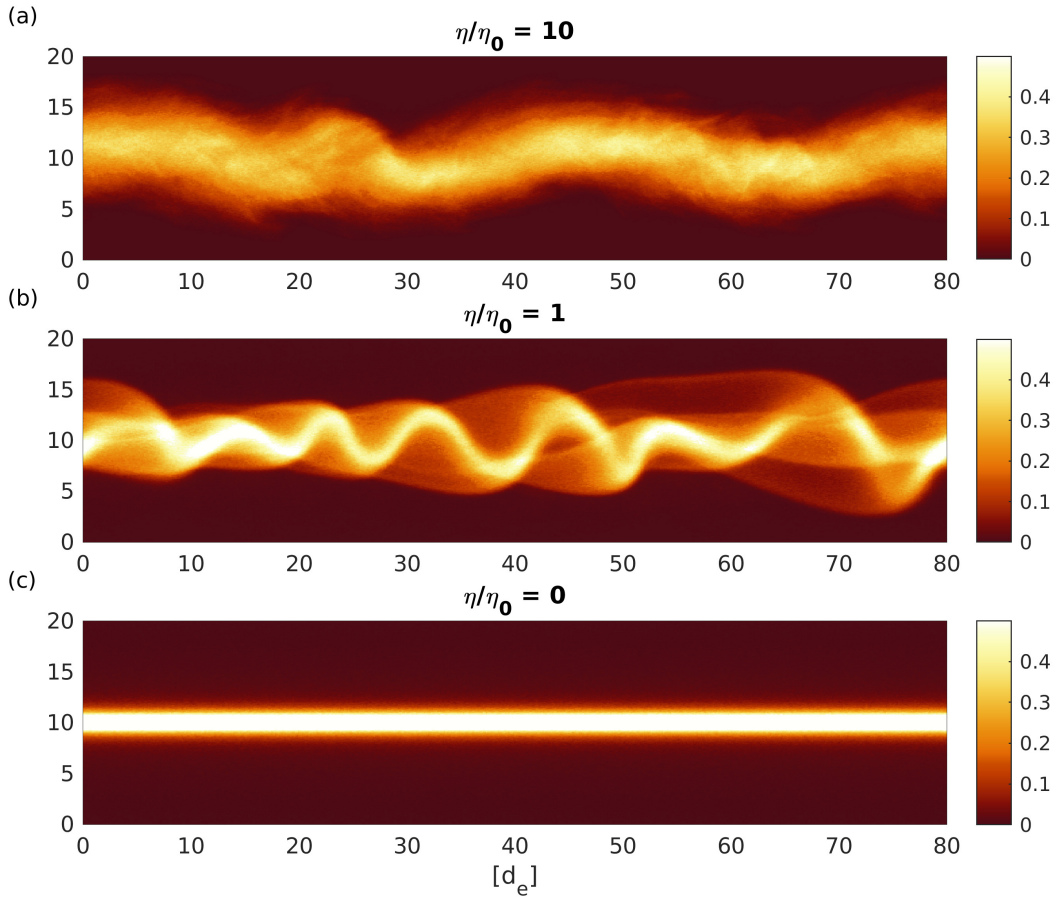

图 9：二维　相对论电子束传播过程中的电阻性束流弯曲不稳定性模拟

在电阻性背景中传播。每个面板显示时刻 $t = 300/\omega_{pe}$ 的电子密度（以初始峰值电子密度 n_0 归一化），距离则以基于 n_0 的电子趋肤深度 $d_e = c/\omega_{pe}$ 为单位。电阻率以电子动力学尺度为基准进行归一化，其基本单位为 $\eta_0 = \mu_0 c^2/\omega_{pe}$。(a) 电阻率最高的背景具有最大的增长率，电子束迅速散射并扩散。(b) 中等电阻率的情形显示了线性不稳定性向强非线性阶段的转变。(c) 图中还给出了无电阻率的情形作为参考，此时电子束保持平衡分布。

附录 B：二次和（QS）粒子形状函数

第 II 节讨论的 QS 格式会在索引为 $I \leftrightarrow (i, j, k)$ 的网格单元中，累积属于电荷为 $Z_p e$ 的物种、权重为 w_p 的离子宏粒子的电荷密度及相对单元

坐标 (dx, dy, dz)，方法如下：

$$\begin{cases} n_{i,j,k} = (Z_p e w_p / 6V_c) \times (3 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \\ n_{i+1,j,k} = (Z_p e w_p / 12V_c) \times (1 + dx)(1 + dx), \\ n_{i,j+1,k} = (Z_p e w_p / 12V_c) \times (1 + dy)(1 + dy), \\ n_{i,j,k+1} = (Z_p e w_p / 12V_c) \times (1 + dz)(1 + dz), \\ n_{i-1,j,k} = (Z_p e w_p / 12V_c) \times (1 - dx)(1 - dx), \\ n_{i,j-1,k} = (Z_p e w_p / 12V_c) \times (1 - dy)(1 - dy), \\ n_{i,j,k-1} = (Z_p e w_p / 12V_c) \times (1 - dz)(1 - dz), \end{cases} \tag{B1}$$

其他所有网格单元的密度均为零，其中 (dx, dy, dz) 在半时间步长 $t^{n+1/2}$ 处求值。离子电流也以额外乘以粒子速度的因子进行累积：$\mathbf{J}_{i,j,k} = Z_p e n_{i,j,k} \mathbf{u_p}$。在粒子推进过程中，利用预先计算的各场分量插值系数 $F \in \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$，将场插值到粒子位置，其形式为：

$$\begin{cases} F^0_{i,j,k} = (1/12) \times (6F_{i,j,k} + F_{i+1,j,k} + F_{i,j+1,k} + F_{i,j,k+1} + F_{i-1,j,k} + F_{i,j-1,k} + F_{i,j,k-1}), \\ F^x_{i,j,k} = (1/6) \times (F_{i+1,j,k} - F_{i-1,j,k}), \\ F^y_{i,j,k} = (1/6) \times (F_{i,j+1,k} - F_{i,j-1,k}), \\ F^z_{i,j,k} = (1/6) \times (F_{i,j,k+1} - F_{i,j,k-1}), \\ F^{xx}_{i,j,k} = (1/12) \times (F_{i+1,j,k} + F_{i-1,j,k} - 2F_{i,j,k}), \\ F^{yy}_{i,j,k} = (1/12) \times (F_{i,j+1,k} + F_{i,j-1,k} - 2F_{i,j,k}), \\ F^{zz}_{i,j,k} = (1/12) \times (F_{i,j,k+1} + F_{i,j,k-1} - 2F_{i,j,k}). \end{cases} \tag{B2}$$

根据式 B2 中的插值系数，在网格单元 $I \leftrightarrow$ 中位置$\mathbf{x}_p$ 处推动粒子所用的场（其单元坐标为 (i, j, k)，相对单元坐标为 (dx, dy, dz)）为：

$$F(x_p) = F^0 + dx(F^x + dxF^{xx}) + dy(F^y + dyF^{yy}) + dz(F^z + dzF^{zz}), \tag{B3}$$

其中，每个插值函数都在网格单元 $I \leftrightarrow (i,\ j,\ k)$ 中求值。综合来看，方程 B1 和 B3 得到了一种一致的插值方案，且不受粒子自作用力影响。

参考文献

[1]K. J. Bowers、B. Albright、L. Yin、B. Bergen 和 T. Kwan，《等离子体物理》**15**, 055703 (2008)。[2]K. J. Bowers、B. J. Albright、B. Bergen、L. Yin、K. J. Barker 和 D. J. Kerbyson，载于 *SC'08*：*2008* 年 *ACM/IEEE* 超级计算会议论文集（IEEE，2008），第 1–11 页。[3]K. J. Bowers、B. J. Albright、L. Yin、W. Daughton、V. Roytershteyn、B. Bergen 和 T. Kwan，载于物理学杂志：会议系列，第 180 卷（IOP 出版社，2009），第 012055 页。[4]洛斯阿拉莫斯国家实验室，"Hybrid-VPIC, https://github.com/lanl/vpic- kokkos/tree/hybridVPIC，"（2022年）。[5]A. S. Lipatov，混合多尺度模拟技术：介绍及其在天体物理和实验室等离子体中的应用（施普林格科学与商业媒体，2002）。[6]D. Winske、L. Yin、N. Omidi、H. Karimabadi 和 K. Quest，《空间等离子体模拟》，136（2003年）。[7]D. Winske、H. Karimabadi、A. Le、N. Omidi、V. Roytershteyn 和 A. Stanier，arXiv 预印本 arXiv:2204.01676（2022年）。[8]C. Nieter 和 J. R. Cary，《计算物理学杂志》**196**, 448（2004年）。[9]L. Gargaté、R. Bingham、R. A. Fonseca 和 L. O. Silva，《计算物理通讯》**176**, 419（2007年）。[10]H. Karimabadi、B. Loring、H. Vu、Y. Omelchenko、M. Tatineni、A. Majumdar、U. Ayachit 和 B. Geveci，载于第五届空间等离子体流数值建模国际会议（*astronum 2010*），第 444 卷（2011），第 281 页。[11]J. Müller、S. Simon、U. Motschmann、J. Schüle、K.-H. Glassmeier 和 G. J. Pringle，《计算物理通讯》**182**, 946（2011年）。[12]Y. A. Omelchenko 和 H. Karimabadi，《计算物理学杂志》**231**, 1766（2012年）。[13]M. W. Kunz、J. M. Stone 和 X.-N. Bai，《计算物理学杂志》**259**, 154（2014年）。[14]S. Fatemi、A. R. Poppe、G. T. Delory 和 W. M. Farrell，载于物理学杂志：会议系列，第 837 卷（IOP 出版社，2017年），第 012017 页。[15]K. Peterson、D. Welch 和 D. V. Rose，"芝加哥的粒子网格和粒子网格/流体建模：面向当今 Z 平台建模的算法与关键计算问题。"技术报告（桑迪亚国家实验室（SNL-NM），美国新墨西哥州阿尔伯克基，2018年）。[16]C. C. Haggerty 和 D. Caprioli，《天体物理学杂志》**887**, 165（2019年）。

[17]B. Cohen, D. Larson, M. Belyaev, 和 V. Thomas, “Topanga：一种用于 e3 模拟的现代代码”，技术报告（劳伦斯利弗莫尔国家实验室（LLNL），利弗莫尔，加利福尼亚州（美国），2019年）。[18]A. Le, W. Daughton, H. Karimabadi, 和 J. Egedal, 《等离子体物理》23, 032114（2016年）。[19]P. L. Pritchett, 《物理学讲义》，1（2003年）。[20]A. Stanier, L. Chacón, 和 G. Chen, 《计算物理学杂志》376, 597（2019年）。[21]J. P. Boris, 载于《第四届等离子体数值模拟会议论文集》（1970年），第3–67页。[22]D. S. Harned, 《计算物理学杂志》47, 452（1982年）。[23]A. P. Matthews, 《计算物理学杂志》112, 102（1994年）。[24]H. Karimabadi, D. Krauss-Varban, J. Huba, 和 H. Vu, 《地球物理研究杂志：空间物理学》109（2004年）。[25]K. Yee, IEEE天线与传播汇刊14, 302（1966年）。[26]A. Stanier, L. Chacón, 和 A. Le, 《计算物理学杂志》420, 109705（2020年）。[27]W. Daughton, J. Scudder, 和 H. Karimabadi, 《等离子体物理》13, 072101（2006年）。[28]D. W. Swift, 《地球物理研究快报》22, 311（1995年）。[29]H. Karimabadi, H. Vu, D. Krauss-Varban, 和 Y. Omelchenko, 载于《空间等离子体流的数值模拟》，第359卷（2006年），第257页。[30]P. Trávní˘cek, P. Hellinger, 和 D. Schriver, 《地球物理研究快报》34（2007年）。[31]N. Omidi, J. Eastwood, 和 D. Sibeck, 《地球物理研究杂志：空间物理学》115（2010年）。[32]Y. Lin, X. Wang, S. Lu, J. Perez, 和 Q. Lu, 《地球物理研究杂志：空间物理学》119, 7413（2014年）。[33]K. G. Klein 和 D. Vech, 美国天文学会研究札记3, 107（2019年）。[34]S. P. Gary, 《空间科学评论》56, 373（1991年）。[35]B. D. Keenan, A. Le, D. Winske, A. Stanier, B. Wetherton, M. Cowee, 和 F. Guo, 《等离子体物理》29, 012107（2022年）。[36]A. Le, L.-J. Chen, B. Wetherton, B. Keenan, 和 A. Stanier, 《天文学与空间科学前沿》9（2023年），10.3389/fspas.2022.1100472。[37]D. Winske 和 S. P. Gary, 《地球物理研究杂志：空间物理学》112（2007年）。[38]S. Clark, D. Winske, D. Schaeffer, E. Everson, A. Bondarenko, C. Constantin, 和 C. Niemann, 《等离子体物理》20, 082129（2013年）。

[39]D. Winske, J. D. Huba, C. Niemann, 和 A. Le, 《天文学与空间科学前沿》**5**, 51（2019年）。[40]D. W. Hewett, S. H. Brecht, 和 D. J. Larson, 《地球物理研究杂志：空间物理学》**116**（2011年）。[41]A. Le, D. Winske, A. Stanier, W. Daughton, M. Cowee, B. Wetherton, 和 F. Guo, 《地球物理研究杂志：空间物理学》**126**, e2021JA029125（2021年）。[42]A. Ivanov, A. Anikeev, P. Bagryansky, P. Deichuli, S. Korepanov, A. Lizunov, V. Maximov, S. Murakhtin, V. Y. Savkin, D. Den Hartog, 等, 《物理评论快报》**90**, 105002（2003年）。[43]A. A. Ivanov 和 V. Prikhodko, 《等离子体物理与受控聚变》**55**, 063001（2013年）。[44]B. A. Wetherton, A. Le, J.Egedal, C. Forest, W.Daughton, A.Stanier, 和S.Boldyrev, 《等离子体物理》**28**, 042510（2021年）。[45]C. Bellei, P. Amendt, S. Wilks, M. Haines, D. Casey, C. Li, R. Petrasso, 和 D. Welch, 《等离子体物理》**20**, 012701（2013年）。[46]A. Le, T. J. Kwan, M. J. Schmitt, H. W. Herrmann, 和 S. H. Batha, 《等离子体物理》**23**, 102705（2016年）。[47]H. Sio, J. Frenje, A. Le, S. Atzeni, T. J. Kwan, M. G. Johnson, G. Kagan, C. Stoeckl, C. Li, C. Parker, 等, 《物理评论快报》**122**, 035001（2019年）。[48]A. N. Simakov 和 K. Molvig, 《等离子体物理》**21**, 024503（2014年）。[49]C. Walsh, J. Chittenden, K. McGlinchey, N. Niasse, 和 B. Appelbe, 《物理评论快报》**118**, 155001（2017年）。[50]J. D. Sadler, H. Li, 和 K. A. Flippo, 《英国皇家学会哲学汇刊A辑》**378**, 20200045（2020年）。[51]T. Takizuka 和 H. Abe, 《计算物理学杂志》**25**, 205（1977年）。[52]W. Daughton, V. Roytershteyn, B. Albright, H. Karimabadi, L. Yin, 和 K. J. Bowers, 《物理评论快报》**103**, 065004（2009年）。[53]V. Roytershteyn, W. Daughton, S. Dorfman, Y. Ren, H. Ji, M. Yamada, H. Karimabadi, L. Yin, B. Albright, 和 K. Bowers, 《等离子体物理》**17**, 055706（2010年）。[54]A. Le, J. Egedal, W. Daughton, V. Roytershteyn, H. Karimabadi, 和 C. Forest, 《等离子体物理学杂志》**81**, 305810108（2015年）。[55]D. P. Higginson, A. Link, 和 A. Schmidt, 《计算物理学杂志》**388**, 439（2019年）。[56]D. S. Lemons, D. Winske, W. Daughton, 和 B. Albright, 《计算物理学杂志》**228**, 1391（2009年）。

[57]K. Molvig, E. L. Vold, E. S. Dodd, and S. C. Wilks, 《物理评论快报》**113**, 145001 (2014年).[58]K. Molvig, A. N. Simakov, and E. L. Vold, 《等离子体物理》**21**, 092709 (2014年).[59]B. M. Haines, E. L. Vold, K. Molvig, C. Aldrich, and R. Rauenzahn, 《等离子体物理》**21**, 092306 (2014年).[60]A. N. Simakov and K. Molvig, 《等离子体物理》**23**, 032115 (2016年).[61]A. N. Simakov and K. Molvig, 《等离子体物理》**23**, 032116 (2016年).[62]E. L. Vold, R. M.Rauenzahn, C. Aldrich, K. Molvig, A. N.Simakov, and B. M. Haines, 《等离子体物理》**24**, 042702 (2017年).[63]E. L. Vold, L. Yin, W. Taitano, K. Molvig, and B. J. Albright, 《等离子体物理》 **25**, 062102 (2018年).[64]E. Vold, G. Kagan, A. N. Simakov, K. Molvig, and L. Yin, 《等离子体物理与受控聚变》 **60**, 054010 (2018年).[65]L. Yin, B. Albright, W. Taitano, E. Vold, L. Chacon, and A. Simakov, 《等离子体物理》 **23**, 112302 (2016年).[66]L. Yin, B. J. Albright, E. L. Vold, W. D. Nystrom, R. F. Bird, and K. J. Bowers, 《等离子体物理》**26**, 062302 (2019年).[67] E. Vold, L. Yin, and B. Albright, 《等离子体物理》**28**, 092709 (2021年).[68]R. Bird, N. Tan, S. V. Luedtke, S. L. Harrell, M. Taufer, and B. Albright, 《IEEE并行与分布式系统汇刊》**33**, 952 (2021年).[69]M. Gittings, R. Weaver, M. Clover, T. Betlach, N. Byrne, R. Coker, E. Dendy, R. Hueckstaedt, K. New, W. R. Oakes, D. Ranta, and R. Stefan, 计算机科学：发现**1** (2008年).[70]B. M. Haines, C. H. Aldrich, J. M. Campbell, R. M. Rauenzahn, and C. A. Wingate, 《等离子体物理》**24** (2017年).[71]D. Besnard, F. H. Harlow, R. M. Rauenzahn, and C. Zemach, “变密度湍流的湍流输运方程及其与双场模型的关系,” 技术报告（洛斯阿拉莫斯国家实验室，美国新墨西哥州，1992年）.[72]A. Banerjee, R. A. Gore, and M. J. Andrews, 《物理评论E》**82**, 046309 (2010年).[73]J. R. Ristorcelli, 《流体物理学》**29**, 020705 (2017年).[74]B. J. Albright, T. J. Murphy, B. Haines, M. Douglas, J. H. Cooley, T. H. Day, N. A. Denissen, C. Di Stefano, P. Donovan, S. Edwards,*et al.*, 《等离子体物理》 **29**, 022702 (2022年).[75]H. Robey, Y. Zhou, A. Buckingham, P. Keiter, B. A. Remington, and R. P. Drake, 《等离子体物理》**10**, 614 (2003年).

[76]C. Weber, D. Clark, A. Cook, L. Busby, and H. Robey, 《物理评论E》**89**, 053106 (2014年).[77]C. Weber, D. Clark, A. Cook, D. Eder, S. Haan, B. Hammel, D. Hinkel, O. Jones, M. Marinak, J. Milovich, *et al.*, 《等离子体物理》**22**, 032702 (2015年).[78]H. Abu-Shawareb, R. Acree, P. Adams, J. Adams, B. Addis, R. Aden, P. Adrian, B. Afeyan, M. Aggleton, L. Aghaian, *et al.*, 《物理评论快报》**129**, 075001 (2022年).[79]W. Daughton, B. Albright, S. Finnegan, B.M. Haines, J. Kline, J. Sauppe, and J. Smidt, 《等离子体物理》**30**, 012704 (2023年).[80]J. D. Huba, *NRL*等离子体手册, 第6790卷（美国海军研究实验室，1998年）.[81]D. P. Higginson and A. J. Link, 计算物理学杂志**457**, 110935 (2022年).[82]A. N. Simakov, 《等离子体物理》**29**, 022304 (2022年).[83]S. Braginskii, 《苏联物理学—实验与理论物理学杂志》**6**, 358 (1958年).[84]H. C. Edwards, C. R. Trott, and D. Sunderland, 《并行与分布式计算杂志》**74**, 3202 (2014年).[85]M. N. Rosenbluth, 《流体物理学》**3**, 932 (1960年).[86]H. S. Uhm and M. Lampe, 《流体物理学》**23**, 1574 (1980年).