arXiv:2305.05605v1 [math.MG] 9 May 2023

由具有平行面的简单截断 Coxeter 正交单形在双曲 n空间中生成的最优球与 horoball 堆积，适用于 $4 \leq n \leq 6$ *

Arnasli Yahya 和 Jen˝o Szirmai 布达佩斯科技经济大学数学研究所几何系，M˝uegyetem rkp. 3., H-1111 布达佩斯，匈牙利
arnasli@math.bme.hu,
szirmai@math.bme.hu

2023年5月10日

摘要

在研究了三维情形 [35], 之后，我们继续探讨并解决存在于 n维双曲空间$\mathbb{H}^n$ 中的、具有平行面的截短考克斯特正交单形内最优球与 horoball 堆积问题，研究范围截至 $n = 6$。本文确定了上述镶嵌在维数 $4 \leq n \leq 6$下的最优球与 horoball 堆积构型及其密度，其中堆积的对称性由所研究的考克斯特正交单形群导出。此外，对于每种最优 horoball 堆积，我们还确定了与相应 Busemann 函数相关的参数，该参数为不同的最优 horoball 堆积构型提供了等距变换不变的描述。

*数学主题分类（2010）：52C17；52C22；52B15。关键词和短语：Coxeter 群；horoball；双曲几何；堆积；镶嵌

1 背景与预备知识

根据 n维双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 中的已知结果（$2 \leq n \in \mathbb{N}$），球体（球）、极限球面（horoball）和超球面（超球）的最密堆积均可通过考克斯特单纯形镶嵌实现。这些发现为进一步研究此类镶嵌及其相关堆积提供了充分的动机。首先，让我们回顾该主题的既有成果和背景。

在离散几何领域，设 X 表示一个具有恒定曲率的空间，它可以是 n 维球面 $\mathbb{S}^n$、欧几里得空间 $\mathbb{E}^n$，或满足 $n \geq 2$ 的双曲空间 $\mathbb{H}^n$。该领域的一个基本问题是确定 X 中由给定半径 [5], [6] 的全等且互不重叠的球所能达到的最大堆积密度。正如 B¨or¨oczky 的研究 [3] 以及参考文献 [5] 和 [29] 中所述的重要构造所展示的，定义双曲空间中的堆积密度颇具挑战。为应对这些挑战，目前最广为接受的堆积密度概念会考虑球相对于其 Dirichlet-Voronoi胞的局部密度（见 [3] 和 [12]）。在研究 $\mathbb{H}^n$ 中的球堆积和 horoball堆积时，我们采用了这种局部密度概念的扩展形式。

设 B 是堆积 $\mathcal{B}$中的一个 horoball，并设 $P \in \mathbb{H}^n$ 是任意一点。我们将 $d(P,\ B)$ 定义为点 P 到超球面$S = \partial B$的最短距离。需要注意的是，如果 P 位于 horoball B 内，则 $d(P,\ B) \leq 0$。与 horoball B 相关联的 Dirichlet-Voronoi胞 $\mathcal{D}(B,\ \mathcal{B})$，可理解为由 $\mathbb{H}^n$ 中所有到 B的距离小于到堆积中任何其他 horoball 的距离的点所构成的凸体或区域。

$$\mathcal{D}(B, \mathcal{B}) = \{P \in \mathbb{H}^n | d(P, B) \leq d(P, B'),\ \forall B' \in \mathcal{B}\}.$$

由于 B 和 $\mathcal{D}$ 的体积均为无穷大，因此需要修正标准的局部密度概念。令 $Q \in \partial\mathbb{H}^n$ 表示 B的理想中心，并令其边界 S 为欧几里得（$n-1$）空间的一点紧化。令$B_C^{n-1}(r) \subset S$为以 $C \in S \setminus \{Q\}$ 为中心的欧几里得（$n-1$）球。于是，Q和 $B_C^{n-1}(r)$ 确定一个凸锥 $\mathcal{C}^n(r) = cone_Q\left(B_C^{n-1}(r)\right) \in \mathbb{H}^n$，其顶点为 Q，由所有经过 $B_C^{n-1}(r)$ 且极限点为Q的双曲测地线组成。B 对 $\mathcal{D}$ 的局部密度 $\delta_n(B,\ \mathcal{B})$ 定义为

$$\delta_n(\mathcal{B}, B) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mathrm{vol}(B \cap \mathcal{C}^n(r))}{\mathrm{vol}(\mathcal{D} \cap \mathcal{C}^n(r))}.$$

此上限与中心 C 的选择无关，适用于 $B_C^{n-1}(r)$。

对于周期性球堆积或 horoball堆积，上述局部密度可通过其对称群扩展至整个双曲空间，并与单纯形密度函数（定义如下）相关；我们在 [33] and[34] 中对该函数进行了推广。本文将采用这种堆积密度的定义。

Coxeter 单纯形是 X 中的一个顶维单纯形，其二面角要么是 π 的整数分之一，要么为 0。由 Coxeter 单纯形各侧上的反射生成的群称为 Coxeter 单纯形反射群。这类反射在 X 中生成一个离散的等距变换群，并以 Coxeter 单纯形为基本域；因此，若基本单纯形具有特征性，这些群便给出 X的正则镶嵌。当 $\mathbb{S}^n$时，Coxeter 群是有限群；当 $\mathbb{E}^n$ 或 $\mathbb{H}^n$时，则是无限群。在 $\mathbb{H}^n$ 中存在非紧致 Coxeter 单纯形，其理想顶点位于 $\partial\mathbb{H}^n$上；然而，这种单纯形仅存在于维数为 $2 \leq n \leq 9$的情形。此外，在维数为 $n \geq 3$时，这类单纯形仅有有限多个。Johnson 等人 [11] 找到了双曲 n空间中所有 Coxeter 单纯形的体积。这类单纯形是双曲流形最基本的构件，而流形的体积是一种重要的拓扑不变量。当然，如果允许单形具有“外部”顶点，可能的单形数量就会增加，并由此得到一些新的优美镶嵌（参见例如 [8, 9]）。我们的工作也与其中一类有关。

在常曲率（$n \geq 2$）的 n 维空间 X 中，定义单纯形密度函数 $d_n(r)$为 $n+1$ 个半径为r 、彼此相切的球在由其中心张成的单纯形中的密度。L. Fejes T´oth 和 H. S. M. Coxeter 猜想， X 中半径为 r 的球的堆积密度不能超过 $d_n(r)$。Rogers [30] 在欧几里得空间 $\mathbb{E}^n$中证明了这一猜想。L. Fejes T´oth [7], 解决了二维球面情形，B¨or¨oczky [3] 则为这一推广给出了证明。在双曲三维空间中，B¨or¨oczky 和 Florian 在 [4]证明了 $d_3(r)$的单调性；在 [23] 中，Marshall 证明，当 n足够大时，函数 $d_n(r)$ 关于变量 r严格递增。Kellerhals [12] 证明了 $d_n(r) < d_{n-1}(r)$，并指出，在 Marshall 考虑的情形中，每个球在其 Dirichlet–Voronoi 胞腔中的局部密度均不超过单纯形 horoball 密度$d_n(\infty)$。

单纯形球堆积和 horoball堆积密度的上界 $d_3(\infty) = (1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} + \cdots)^{-1} = 0.85327\ldots$无法通过堆积正则球达到，而是由 $\mathbb{H}^3$ 的 horoball堆积实现；正则理想单纯形镶嵌 $\mathbb{H}^3$。更准确地说， $\partial\mathbb{H}^3$ 中 horoball 的中心位于理想正则 Coxeter 单纯形镶嵌的顶点上，其 Schl¨afli 符号为 $\{3, 3, 6\}$。

在三维空间中，B¨or¨oczky 型超球堆积界被用于估计带尖点双曲流形的体积 [1, 25], ，近来亦是如此 [2,

24]。尖点超球邻域在万能覆盖 $\mathbb{H}^n$中的提升构成 horoball 堆积；对于某个等距变换的离散无挠子群 $\mathbb{H}^n/\Gamma$，相应的带尖点双曲流形的尖点会提升为基本域的理想顶点。在这种情形下，只有一个尖点的流形有定义良好的最大尖点邻域；而有多个尖点的流形则存在一系列互不重叠的尖点邻域，其边界具有非空的切向交集，这些邻域在万能覆盖中提升为不同的超球类型。一项重要应用是 Adams 证明了 Geiseking 流形是体积最小的非紧双曲 3-流形 [1] （更多信息 [28]）。随后，Kellerhals 使用 B¨or¨oczky 型界估计高维双曲流形的体积 [13]。

在 [18], 中，我们证明了实现 B¨or¨oczky 型上界的 $\mathbb{H}^3$ 中的经典超球堆积构形并非唯一。我们给出了若干例子，展示了使用不同类型 horoball 的不同正则 horoball 堆积；这些 horoball 相对于基本域具有不同的相对密度，并可达到 B¨or¨oczky–Florian 型单纯形上界 [4]。

此外，在 [33, 34]中我们发现，若允许全渐近单纯形的每个顶点处使用不同类型的 horoball，并将单纯形密度函数推广到 $\mathbb{H}^n$，则对于 $n \geq 2$，B¨or¨oczky 型密度上界对 $n \geq 4$中的完全渐近单纯形并不成立。在 $\mathbb{H}^4$中，局部最优单纯形堆积密度为 0.77038 . . .，高于使用单一类型 horoball 得到的 B¨or¨oczky 型密度上界 $d_4(\infty) = 0.73046\ldots$。然而，这些球堆积构型仅为局部最优，无法扩展到整个 $\mathbb{H}^n$。 [31, 32]中还介绍了其他有趣的构造。

在一系列共 5 篇论文中，R. T. Kozma 与第二作者研究了 Koszul 型非紧 Coxeter 单纯形镶嵌的最优 horoball堆积构型及其密度；这些镶嵌存在于 $\mathbb{H}^n$，其中 $2 \leq n \leq 9$（见 [18, 19, 20, 21]）。在 [22],中，我们进一步研究了这一主题的若干新方面。

我们在此仅着重介绍其中一个方面：在 [19], 我们发现了 $\mathbb{H}^4$ 中的 Coxeter 单纯形镶嵌的七种超球堆积，其密度为 $5\sqrt{2}/\pi^2 \approx 0.71645$，这些堆积反例于 L. Fejes T´oth 在其奠基性著作《正则图形》 [7, p.323]中关于 $\frac{5-\sqrt{5}}{4} \approx 0.\overline{69098}$ 最大堆积密度的猜想。我们在此指出，在我们的情形中，通过 Schl¨afli 符号 $\{4, 4, 3, 4, \infty\}$ 也可实现这一密度（见定理 4.4）。

在表 1 中，我们总结了 B¨or¨oczky 型密度上界 $d_n(\infty)$（见 [12]），以及我们在先前论文中发现的已知最密超球排列的密度。

n	最优考克斯特单纯形堆积密度	数值	$d_n(\infty)$	Δ
3	$\left(1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}-\dots\right)^{-1}$	0.85328...	0.85328...	0
4	$5\sqrt{2}/\pi^2$	0.71644...	0.73046...	0.0140...
5	$5/\left(7\zeta(3)\right)$	0.59421...	0.60695...	0.0127...
6	$81/\left(4\sqrt{2}\pi^3\right)$	0.46180...	0.49339...	0.0315...
7	$28/\left(81L(4,3)\right)$	0.36773...	0.39441...	0.0266...
8	$225/\left(8\pi^4\right)$	0.288731...	0.31114...	0.0223...
9	$1/\left(4\zeta(5)\right)$	0.24109...	0.24285...	0.0017...

表 1: $\mathbb{H}^n$的堆积密度上界和下界，其中 $\zeta(\cdot)$ 是黎曼ζ函数，$L(\cdot,\ \cdot)$ 是狄利克雷 L级数， Δ 是堆积密度上界与我们得到的有效下界之间的差距。

在 [35], 中，我们研究了属于三维考克斯特镶嵌的球堆积和超球堆积，这些镶嵌由具有平行面的简单截断正交形导出。我们确定了双曲三维空间 $\mathbb{H}^3$ 中所有上述考克斯特镶嵌的最优球堆积和超球堆积排列及其密度。超球的中心必须位于构成该镶嵌的多面体胞的理想顶点上，并且我们允许不同顶点处的超球类型各不相同（采用超球的 Busemann函数参数化）。我们证明，最密堆积由与镶嵌 $\{\infty,3,6,\infty\}$ 及其对偶$\{\infty,6,3,\infty\}$ 相关的超球实现，其密度为 ≈ 0.8413392。

本文继续研究并解决与具有平行面的截断考克斯特正交单形相关的最优球与 *horoball* 堆积问题。这些正交单形存在于 n维双曲空间 $\mathbb{H}^n$，直至 $n=6$；我们确定了上述镶嵌在维数 $4\le n\le 6$下的最优球与 *horoball* 堆积构型及其密度。我们证明，在4维和5 维中，最优球与 *horoball* 密度与已知的密度下界一致（见表 *1*），而在6维中则更低。特别是在 $\mathbb{H}^4$中，与 $\{4,4,3,4,\infty\}$ 镶嵌相关的两个 *horoball* 达到密度 $\frac{5\sqrt{2}}{\pi^2}\approx 0.71645$。在 $\mathbb{H}^5$中，$\frac{5}{7\zeta 3}\approx 0.59421$由与 $\{4,3,4,3,3,\overline{\infty}\}$ 考克斯特正交单形镶嵌相关的 *horoball* 实现。而在 $\mathbb{H}^6$中，最优值为 $\frac{15\sqrt{2}+18}{4\pi^3}\approx 0.31617$，由与考克斯特镶嵌 $\{3,4,3,3,3,4,\infty\}$相关的 *horoball* 堆积达到。

我们在射影贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型中计算密度的方法，大体上与早先的3维情形相似（见 *[35, 36]*），不过计算要复杂得多，且需要采用新方法，尤其是在体积计算方面。

2 基本概念

2.1 双曲空间的射影模型 $\mathbb{H}^n$

设 $\mathbb{E}^{1,n}$ 表示具有洛伦兹内积 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x^0y^0 + x^1y^1 +$的 $\mathbb{R}^{n+1}$ $\cdots + x^ny^n$ 其中，非零实向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 表示射影空间 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E}^{n+1})$中的点，该空间配备自然投影 $\Pi : \mathbb{E}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$所诱导的商拓扑。将 $\mathbb{E}^{1,n}$ 划分为 $Q_+ = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle \mathbf{v}、\mathbf{v} \rangle > 0\}$,$Q_0 = \{\mathbf{v} | \langle \mathbf{v}、\mathbf{v} \rangle = 0\}$ 和 $Q_- = \{\mathbf{v} | \langle \mathbf{v}、\mathbf{v} \rangle < 0\}$，双曲$n$空间的正常点为 $\mathbb{H}^n = \Pi(Q_-)$， $\partial\mathbb{H}^n = \Pi(Q_0)$是边界或理想点；我们将 $\Pi(Q_+)$中的点称为外点，而 $\mathbb{H}^n = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ 称为扩展双曲空间。

当 $[\mathbf{x}], [\mathbf{y}] \in \mathbb{P}^n$ 时，点彼此共轭，其中 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$。与 $[\mathbf{x}]$ 共轭的所有点构成一个射影（极）超平面 $Pol([\mathbf{x}]) = \{[\mathbf{y}] \in \mathbb{P}^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$. 因此， Q_0 在 $\mathbb{P}^n$的点与超平面之间诱导出一种对偶性 $\mathbb{R}^{n+1} \leftrightarrow \mathbb{R}_{n+1}$。当线性形式 $\boldsymbol{a}$在向量 $\mathbf{x}$ 上的取值为零时，即 $\mathbf{x}\boldsymbol{a} = 0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle$ ，点 $[\mathbf{x}]$ 与超平面 $[\boldsymbol{a}]$ 关联，其中 $\mathbf{x}$ $\in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$，且$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$。类似地， $\mathbb{P}^n$ 中的直线由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的二维子空间或 $\mathbb{R}_{n+1}$ [26]的对偶（$n-1$）子空间给出。

本文将 $\mathbb{H}^n$, $K = -k^2$的截面曲率设为 $k = 1$。两个正常点 $[\mathbf{x}]$ 和 $[\mathbf{y}]$ 之间的距离 d 由下式给出

$$\cosh d = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}. \tag{2.1}$$

点 $[\mathbf{x}]$在平面 $[\mathbf{u}]$ 上的投影 $[\mathbf{y}]$由下式给出

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \mathbf{u}, \tag{2.2}$$

其中， $[\mathbf{u}]$ 是超平面 $[\boldsymbol{u}]$的极点。

2.2 关于 horoball

$\mathbb{H}^n$ $(n \geq 2)$中的horosphere 是一种半径无限大的双曲 n球，其中心位于理想点 $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ ，可通过以 $x \in \mathbb{H}^n$ 为球心的球的上限得到 $c \to \xi$。等价地，horosphere 是一个与经过 $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$的一组平行直线正交的（$n-1$）曲面。horoball 是 horosphere 及其内部。

为了推导 horosphere 的方程，我们为 $\mathbb{P}^n$ 固定一个以$\mathbf{a}_i, 0 \le i \le n$ 为标准基的射影坐标系，使得$\mathbb{H}^n$ 的凯莱–克莱因球模型以 $O = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ 为中心，并通过令点 $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ 位于 $A_0 = (1, 0, \ldots, 1)$ 来确定其方向。以 $\xi = A_0$ 为中心、经过内部点 $S = (1, 0, \ldots, s)$ 的 horosphere 方程，可由边界球面 $-x^0x^0 + x^1x^1 + x^2x^2 + \cdots + x^nx^n = 0$的方程以及在 $\xi = A_0$处与边界球面相切的平面$x^0 - x^n = 0$ 推导得出。horosphere 的一般方程为

$$0 = \lambda(-x^0x^0 + x^1x^1 + x^2x^2 + \cdots + x^nx^n) + \mu(x^0 - x^n)^2. \tag{2.3}$$

在 S 处求值，得到

$$\lambda(-1 + s^2) + \mu(-1 + s)^2 = 0 \text{ and } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1 - s}{1 + s}.$$

对于 $s \neq \pm 1$，射影坐标中的 horosphere 方程为

$$(s - 1)\left(-x^0x^0 + \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right) - (1 + s)(x^0 - x^n)^2 = 0. \tag{2.4}$$

注 2.1 最后一种形式可以用球面坐标参数化来表示（这对于提供超球面可视化很有效。）

$$\begin{aligned}
h_1 &= \sqrt{\frac{1-s}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\\
h_2 &= \sqrt{\frac{1-s}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
h_{n-1} &= \sqrt{\frac{1-s}{2}}\sin\theta_1\cos\theta_2\\
h_n &= \frac{1+s}{2} + \frac{1-s}{2}\cos\theta_1,
\end{aligned}$$

其中 $0 \le \theta_i \le \pi$、$i \in \{1 \ldots n-2\}$ 和 $0 \le \theta_{n-1} < 2\pi$。

在 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中，对于任意两个超球 B 和 B'，存在一个等距变换 $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$，使得 $g.B = B'$。然而，区分某些对象往往很有用。

堆积的超球；我们将使用相对于镶嵌（格）的基本域的超球类型这一概念，如 [34] 中所介绍的那样。在 [21], 中，我们证明了这与 Busemann函数仅相差一个缩放因子，因此具有等距变换不变性。

当且仅当两个 horoball 相对于特定胞腔（在我们的情形中为 Coxeter 单纯形）的局部填充密度相等时，才称 horoball堆积中的两个 horoball 属于同一类型或等堆积；否则，这两个 horoball 属于不同类型。例如，以 A_0 为中心并经过 S、最终坐标 $s \in$ 取不同值（-1, 1）的 horoball，相对于给定胞腔属于不同类型，而以顶点 A_0 为中心的所有 horoball 构成一个单参数族。

horoball 部分的体积由 J´anos Bolyai 的经典公式给出。与长度为 x 的弦段相对应的超球面弧的双曲长度 $L(x)$ 为

$$L(x) = 2\sinh\left(\tfrac{x}{2}\right). \tag{2.5}$$

由于超球面的内蕴几何是欧几里得几何，超球面上的多面体 $\mathcal{A}$ 的（$n-1$）维体积 vol$\mathcal{A}$ 可按照 $\mathbb{E}^{n-1}$计算。由 $\mathcal{A}$以及连接 $\mathcal{A}$ 和 horoball 中心的测地线段围成的 horoball 部分 $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ 的体积为

$$\mathrm{vol}(\mathcal{H}(\mathcal{A})) = \tfrac{1}{n-1}\mathrm{vol}\mathcal{A}. \tag{2.6}$$

2.3 考克斯特正交单形与镶嵌

在 $\mathbb{H}^n$($2 \leq n \in \mathbb{N}$) 空间中，次数为 d ($0 \leq d \leq 2$) 的完全正交单形 $\mathcal{S}$ 是由超平面 H^0、.....、H^{n+d} 围成的多胞体，其中 $H^i \perp H^j$，若 $j \neq i-1$, i, $i+1$。我们将与超平面 H^i 相对的顶点记为 A_i，其中 ($0 \leq i \leq n$)。等价地，正交单形可以用正交单形的顶点序列 A_0、.....、A_n 来描述，其中对于所有 $i \in \{1, ..., n-1\}$, $A_{i-1}A_i$ 棱垂直于 A_iA_{i+1} 棱。这里, A_0 和 A_n 称为正交单形的主顶点。

现在，考虑对简单截断正交形的面 H^1、·、H^{n+1} 作反射，并将它们记为 r_0、.....、r_{n+1}，由此定义群

$$\mathbf{G} = \langle r_0, ..., r_{n+1} | (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle,$$

其中 $\alpha^{ij} = \frac{\pi}{m_{ij}}$，以及 $m_{ii} = 1$。注意，如果 $m_{ij} = \infty$ （即 H^i 和 H^j 平行），那么 r_i r_j $2 \leq m_{ij} \in \{\mathbb{N} \cup$,这一对不属于任 $\infty\}$ $i \neq j$ $\mathbb{H}^n$ — 何关系。这里, , 。由于考克斯特群 $\mathbf{G}$ 在双曲空间上适当地作用

不连续地作用，因此正交单形在此作用下的像构成$\mathcal{T}$ $\overline{\mathbb{H}}^n$ 的镶嵌；也就是说，正交单形的像无重叠地铺满 $\overline{\mathbb{H}}^n$。

设 $S \subset \overline{\mathbb{H}}^n$ 表示由有限个超平面 H^i 围成的完全正交单形，这些超平面的单位法向形式 $\boldsymbol{b}^i \in \boldsymbol{V}_{n+1}$ 均指向 S 的内部之外:

$$H^i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n | \mathbf{x}\, \boldsymbol{b}^i = 0\} \text{ with } \langle \boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{b}^i \rangle = 1. \tag{2.7}$$

格拉米矩阵 $G(\mathcal{S}) := (\langle \boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{b}^j \rangle)_{i,j}$ $i, j \in \{0, 1, 2 \dots n\}$ 是一个不可分解的对称矩阵，其惯性指数为 $(1, n)$，其元素为 $\langle \boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{b}^i \rangle = 1$ 和 $\langle \boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{b}^j \rangle \leq 0$，其中 $i \neq j$

$$\langle \boldsymbol{b}^i, \boldsymbol{b}^j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } H^i \perp H^j, \\ -\cos \alpha^{ij} & \text{if } H^i, H^j \text{ intersect along an edge of } P \text{ at angle } \alpha^{ij}, \\ -1 & \text{if } H^i, H^j \text{ are parallel in the hyperbolic sense}, \\ -\cosh l^{ij} & \text{if } H^i, H^j \text{ admit a common perpendicular of length } l^{ij}. \end{cases}$$

对于完全考克斯特正交单形 $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^n$，我们采用如下考克斯特图约定：如果两个超平面面之间的二面角为 $\frac{\pi}{m_{ij}}$，则用权重为 m_{ij} 的棱连接相应的两个节点。如果两个超平面面正交，则对应的两个节点不相连。在双曲情形下，如果 S 的两个边界超平面平行，则用标记为 ∞ 的线连接对应的节点。如果它们发散，则用点线连接相应的节点。

一般而言，考克斯特正交单形由 H-C. Im Hof 在 [8]和 [9] 中进行了分类；他证明这类正交单形存在于维数为 ≤ 9的空间中，并给出了完整列表。

本文考虑一类简单截断正交单形，其中$d = 1$。这意味着，其中一个主顶点（例如 A_{n-1}）是与射影模型相关的外点，因此它们被其极超平面$Pol(A_{n-1})$截断。此外，我们假设 $Pol(A_{n-1})$ 与超平面 H_0 平行。根据上述考克斯特正交单形分类，我们得出结论：这类镶嵌仅存在于3、4、5 和 6维双曲空间中 $\overline{\mathbb{H}}^n$。

与三维情形相关的堆积问题已在论文 [35], [36]中研究，因此下文我们将重点讨论维数为$n = 4$、5、6 的 $\overline{\mathbb{H}}^n$。需要指出的是，通过这些分析，我们完成了对这类镶嵌及其相关堆积问题的考察。

我们首先回顾产生具有平行面的截断正交单形的考克斯特图列表（见图1–3），并描述其考克斯特图，其中 $n =$

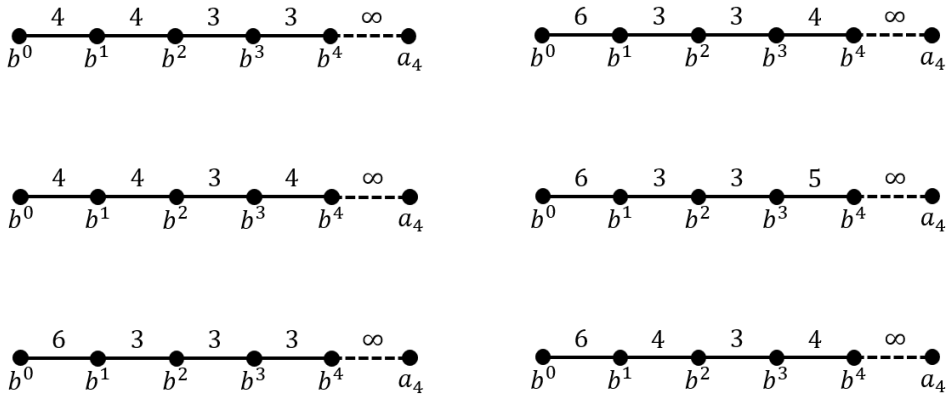

图 1：具有平行面的单截断正交单形的考克斯特图，位于$\overline{\mathbb{H}}^4$

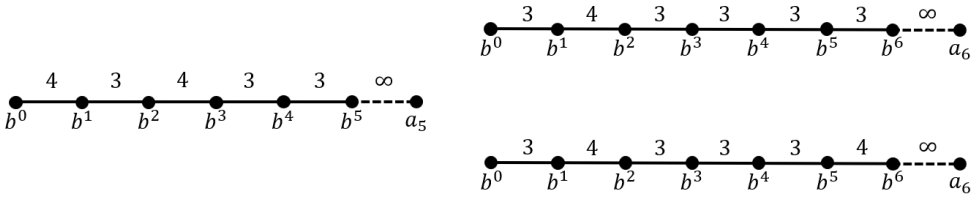

图 2：具有平行面的单截断正交单形的考克斯特图，位于$\overline{\mathbb{H}}^5$（左）和 $\overline{\mathbb{H}}^6$（右）

4，5，6。我们在 $\overline{\mathbb{H}}^4$中得到了6种考克斯特镶嵌，在$\overline{\mathbb{H}}^5$和 $\overline{\mathbb{H}}^6$ 中分别得到1种和2种。图4展示了 $\overline{\mathbb{H}}^4$ 和 $\overline{\mathbb{H}}^5$ 中截断正交单形（所考虑镶嵌的基本区域）的结构。因此，我们将考察与具有这些施莱夫利符号的截断正交单形相关的经典球堆积和horoball堆积。我们将采用三维情形中使用的方法（[35, 36]），并作出若干重要推广以适用于更高维数。

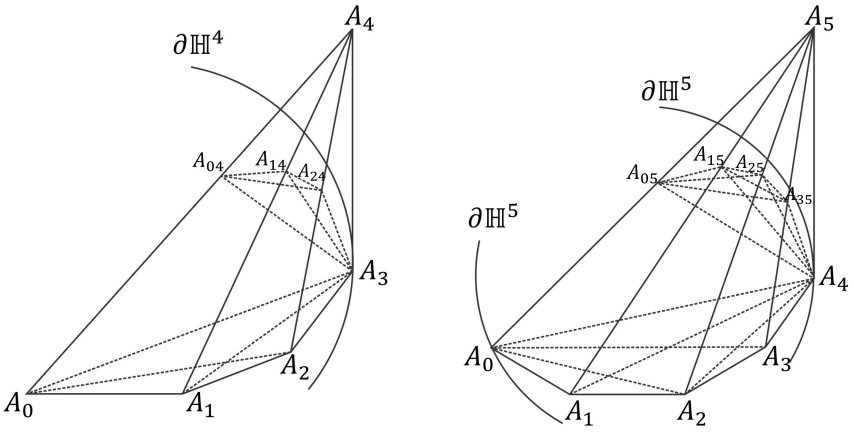

图3：$\mathbb{H}^4$中截断正交形的结构，顶点 A_3 是一个理想点，A_4 是超理想点，而 A_0 则是正常顶点或理想点。 A_4 的极超平面由 $A_3A_{04}A_{14}A_{24}$ 给出（左）。$\mathbb{H}^5$中的截断正交形，顶点 A_4 是一个理想点， A_5 是超理想点，而 A_0 则是正常顶点或理想点。 A_5 的极超平面由点 $A_4A_{05}A_{15}A_{25}A_{35}$ 表示（右）

2.3.1 偶数维正交单形的体积

平面正交形（即直角三角形）的面积公式广为人知，称为亏格公式。L. Schl¨afli 将这一公式推广到了偶数维球面正交单形。Schl¨afli 的约化公式用某些低维正交单形的体积表示偶数维球面正交单形的体积。通过解析延拓，这一公式可以直接推广到双曲情形。

在 [14], R. Kellerhals 进一步将此公式扩展到一类特定的双曲多胞体，称为度数为 d 的（完全）正交单形（其中 $d \in 0,1,2$）。这些多胞体出现在双曲 Coxeter 群的研究中，是一种特殊类型的基本多胞体。R. Kellerhals 证明了广义约化公式适用于偶数维的完全正交单形，并确定了维数为 n 时所有可能的完全正交单形的体积，其中 $n \in 4,6,8$。

在表 2 中，我们回顾所考察的偶数维正交单形的体积。

维数	Schl¨afli 符号	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$.
4	$\{4,4,3,3,\infty\}$	$\frac{\pi^2}{288} \approx 0.03427$
4	$\{4,4,3,4,\infty\}$	$\frac{\pi^2}{144} \approx 0.06854$
4	$\{6,3,3,3,\infty\}$	$\frac{\pi^2}{540} \approx 0.01828$
4	$\{6,3,3,4,\infty\}$	$\frac{\pi^2}{288} \approx 0.03427$
4	$\{6,3,3,5,\infty\}$	$\frac{61\pi^2}{900} \approx 0.66894$
4	$\{6,3,4,3,\infty\}$	$\frac{5\pi^2}{864} \approx 0.05712$
6	$\{3,4,3,3,3,3,\infty\}$	$\frac{11\pi^3}{86{,}400} \approx 0.00395$
6	$\{3,4,3,3,3,4,\infty\}$	$\frac{\pi^3}{86{,}400} \approx 0.00036$

表 2：在 $\mathbb{H}^4$ 和 $\mathbb{H}^6$中具有平行面的截断正交单形的体积。

2.3.2 $\mathbb{H}^5$中的正交单形的体积

与 $\mathbb{H}^4$ 和 $\mathbb{H}^6$ 的情况不同，$\mathbb{H}^5$中简单截断正交单形的体积无法用简单的闭式公式表示。为克服这一难题，我们采用一种称为剪刀全等法的方法，将正交单形分解为若干个更小的正交单形（见 [15]）。这些较小的正交单形必须满足双渐近正交单形的条件，从而可以使用 R. Kellerhals 在 [16, 17] 中建立的公式计算其体积。该公式利用正交单形 $\mathcal{S}$ 中主顶点的椭圆性和抛物性条件，具体为 A_0 和 A_5。

考虑一个正交单形 $\mathcal{S}$，其 Coxeter-Schl¨afli 矩阵记为 (b^{ij})，并令 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5 表示其 Schl¨afli 符号。在此背景下，$(b^{ij})_0$ 和 $(b^{ij})_5$ 指从 (b^{ij}) 中删除分别与顶点 A_0 和 A_5 对应的行和列后得到的主子矩阵。从几何上看，这一删除过程对应于从正交单形 $\mathcal{S}$中去除顶点 A_0 或 A_5 的对面，从而形成单纯锥结构。

我们有以下椭圆/抛物条件：

1. 如果$(b^{ij})_0$ 和 $(b^{ij})_5$ 是正定的，那么 A_0 和 A_5 是正常顶点，且称为椭圆的。

2. 如果 $(b^{ij})_0$ 和 $(b^{ij})_5$ 是半正定的，那么 A_0 和 A_5 是理想点，并称其为抛物型。

通过分析与这些子矩阵相关的多项式，可以得到以下结论：

1. $b^{ij}{}_0$ 和 $b^{ij}{}_5$ 是正定的，
$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_2}\right)}+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_5}\right)}<1,\quad \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_1}\right)}+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_4}\right)}<1.$$

2. $b^{ij}{}_0$ 和 $b^{ij}{}_5$ 是半正定的，
$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_2}\right)}+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_5}\right)}=1,\quad \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_1}\right)}+\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{v_3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{v_4}\right)}=1.$$

通过采用剪刀全等法，我们可以将具有 Schl¨afli 符号 $\{4,3,4,3,3,\infty\}$ 的简单截断 $\mathcal{S}$ 正交单形分解为若干个更小的正交单形。

超理想顶点 A_5 的极超平面 $Pol(A_5)$ 包含 $\mathcal{S}$的理想顶点 A_4 。 $Pol(A_5)$ 与棱 A_iA_5 （其中 $i \in\{0,1,2,3\}$）的交点记为 A_{i5}。示意图请参见图 3。截断正交单形 $\mathcal{S}$ 可以剖分为若干个“双渐近”正交单形 R_j，$(j \in \{1,\dots 4\})$，其中每个正交单形都是以下顶点的凸包：

$$R_1 := conv(A_0, A_{05}, A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_4) \qquad R_2 := conv(A_0, A_1, A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_4)$$
$$R_3 := conv(A_0, A_1, A_2, A_{25}, A_{35}, A_4) \qquad R_4 := conv(A_0, A_1, A_2, A_3, A_{35}, A_4).$$

因此， $\mathcal{S}$ 的体积可计算为

$$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}}) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{vol}(R_i).$$

按照 Kellerhals 在 [15], 中所描述的方法，可以利用正交单形 R_1、R_2、R_3 和 R_4 的考克斯特图计算其二面角（见图 4）。

^根据 $\mathcal{S}$的结构，我们可以直接推导出以下两个方程:

$$\frac{\pi}{p_1}+\frac{\pi}{p_2}=\frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{s_1}+\frac{\pi}{s_2}=\frac{\pi}{2}.$$

第一个方程源于对相关角度 $\frac{\pi}{p_1}$ 和 $\frac{\pi}{p_2}$ 的考察 — —

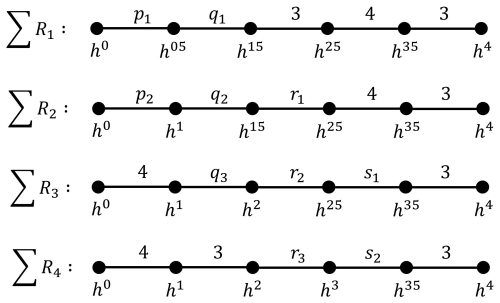

图 4：剖分后的双渐近正交单形 R_j、($j\in\{1,2,3,4\}$) 的考克斯特图。此处，h^k 表示每个相应 R_j中顶点 A_k 的对面

在三维空间中的顶点 A_{15},A_{25},A_{35},A_4 处。这些角存在于超平面面 $A_{05}A_{15}A_{25}A_{35}A_4$、 $A_0A_{15}A_{25}A_{35}A_4$和$A_1A_{15}A_{25}A_{35}A_4$的公共部分。第二个方程源于棱 A_2A_4上的角度 $\frac{\pi}{s_1}$和 $\frac{\pi}{s_2}$，该棱位于由顶点A_2,A_3,A_{35},A_4和 $\overline{A_2A_{25}A_{35}A_4}$确定的三维空间中。结合抛物性条件以及上述与参数 p_1,p_2,s_1,s_2相关的方程，我们可以确定图 4 所示施莱夫利符号中的所有参数。

$$p_1=p_2=s_1=s_2=4,\qquad q_1=q_2=q_3=r_1=r_2=r_3=3.$$

最后，我们确定所有双重渐近正交单纯形的 Schl¨afli 符号均为 4, 3, 3,4,3，其体积可使用 R. Kellerhals 给出的以下公式计算。

命题 2.2（[16, 17]）设 $R\subset\mathbb{H}^5$ 为由二面角 α_1、 α_2、 α_3、 α_4、 α_5 表示的双渐近5-正交单形，且 $\lambda=\tan\theta=\sqrt{|}_{\det(b^{ij})|\cos\alpha_1\cos\alpha_3\cos\alpha_5}$，

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$。令 $0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$，使得 $\tan\,\alpha_0 = \cot\,\theta \tan\,\alpha_3$。则，

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_5(R) = -\frac{1}{8}\{I(\lambda^{-1},0;\alpha_1) + \frac{1}{2}I(\lambda,0;\alpha_2) - I(\lambda^{-1},0;\alpha_0') + \frac{1}{2}I(\lambda,0;\alpha_4) + \\ + I(\lambda^{-1},0;\alpha_5)\} + \frac{1}{32}\{I_{alt}(\lambda,\alpha_1;\alpha_2) + I_{alt}(\lambda,\alpha_5;\alpha_2)\}\end{aligned}$$

其中 $I(a,b;x)$ 是三对数函数，即

$$I(a,b;x) = \int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\mathrm{Li}_2(e^{2iy})\right) d\left(a\ \tan^{-1}(b+y)\right)$$

with

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}dt.$$

and

$$\begin{aligned}I_{alt}(a,b;x) &= I_\delta(a,b;x) + I_\delta(a,-b;x)\\ I_\delta(a,b;x) &= I(a,-(\frac{\pi}{2}+b);\frac{\pi}{2}+b+x) - I(a,-(\frac{\pi}{2}+b);\frac{\pi}{2}+b+\frac{\pi}{2})\\ \alpha' &= \frac{\pi}{2} - \alpha.\end{aligned}$$

在当前情形下，每个双渐近正交单形 R_j 都具有 Schl¨afli 符号 $\{4,3,3,4,3\}$，这意味着 $\lambda = 1$ 且 $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$。因此，我们可以应用该命题的特定形式如下

命题 2.3 ([16, 17]) 设 R 表示一个双渐近 *5*-正交单形，其满足$\lambda = \tan\theta = 1$，即

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\},\ \textit{with}\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

然后，

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(R) = \frac{1}{4}\left\{\mathrm{J}_3(\alpha_1) + \mathrm{J}_3(\alpha_2) - \frac{1}{2}\mathrm{J}_3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right)\right\}\\ - \frac{1}{16}\left\{\mathrm{J}_3\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2\right) + \mathrm{J}_3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2\right)\right\} + \frac{3}{64}\zeta(3),\end{aligned}$$

where,

$$\mathrm{J}_3(\alpha) = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\mathrm{Li}_3\left(e^{2i\alpha}\right)\right),\ \textit{(the Lobachevsky function of order 3)}$$

$$\textit{with}, \mathrm{Li}_k(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_{k-1}(t)}{t}dt\ \textit{ and }\ \mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z),$$

and ζ *is Riemann Zeta function*.

每个双渐近正交单形 R_j 的体积，其中 $j \in 1$、.....、4，可使用命题 2.3 中给出的公式计算。已知该体积等于 $^{7\zeta}{}_{(3)\ 4608}$，如 [16] 所述。因此， $\widehat{\mathcal{S}}$ 的体积可直接计算如下:

$$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}}) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{vol}(R_i) = 4 \cdot \frac{7\zeta(3)}{4608} = \frac{7\zeta(3)}{1152}.$$

3 经典球堆积于 $\mathbb{H}^n$

为了构造并确定与所研究的考克斯特镶嵌相关的内切球及其半径，以及最优球堆积密度，我们可以直接应用 [10, 35]，中所述的方法，以及公式 (3.1)、(3.2) 和 (3.3)。在确定截断正交单形的内切半径时，需要考虑两种不同的类型。第一类涉及完全正交单形的内接球与截断正交单形的内接球相同的情形。第二类则涉及两者不相等的情形。

1. **类型 1**

   M. Jacquemet 确定了 n维双曲空间中截断单纯形的内切半径，前提是其内切球与相应的截断超平面没有公共内点（见 [10]）。现在，让我们回顾这篇重要论文中的一些重要论述。我们将使用上一节中引入的记号。设 $\mathcal{S}$ 为一个完全正交单形 $\widehat{\ }$，并设 $\mathcal{S}$ 为所研究的截断正交单形。相应的考克斯特–施莱夫利矩阵记为 (B^{ij})，其主子矩阵记为 (b^{ij})；该主子矩阵是 S 的考克斯特–施莱夫利矩阵。下面的引理给出了截断单纯形存在内切球的一个充分条件。

   引理 3.1 ([10]) 具有 *Coxeter-Schläfli* 主子矩阵 (b^{ij}) 的截断双曲单纯形 $\mathcal{S}$ 在 $\mathbb{H}^n$ 中存在内切球（嵌入其中且半径有限的最大球），当且仅当 $\sum_{i}^{n+1}{}_{,j=1}\mathrm{cof}_{ij}(b^{ij}) > 0$。

   可以通过以下矩阵 $(a_{ij}) = (b^{ij})^{-1}$ 重新表述。

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \det(b^{ij})(a_{ij}) > 0. \tag{3.1}$$

此外，以下引理给出了完全正交单形的内切半径公式。

引理 3.2（[10]）设（b^{ij}）为具有内切球 $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}^n$ 的完整正交单形 $\mathcal{S}$ 的 *Coxeter–Schl¨afli* 矩阵。那么，内切半径 $\mathtt{r} = \mathtt{r}$（$\mathcal{B}$）由下式给出

$$\mathtt{r} = \sinh^{-1}\sqrt{-\frac{1}{\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}}}. \tag{3.2}$$

在我们的研究中，正交单形包含一个位于 Beltrami-Cayley-Klein 模型之外的超理想顶点。因此，该正交单形被其超理想顶点对应的极超平面截断。由此，有必要考察原正交单形的内切半径是否与截断正交形的内切半径相等。引理 3.3 给出了截断单纯形（正交单形）与完整单纯形（正交单形）的内切半径相等的充要条件。

引理 3.3（[10]）设 $\mathcal{S}$ 为一个 n 维单纯形，其 $k \leq n$ 个顶点为超理想顶点，*Coxeter-Schl¨afli* 矩阵为（b^{ij}），且 $\mathcal{S}$ 有一个半径为 $\mathtt{r}$ 的内切球$\backsim\mathcal{B} \subset \mathbb{H}^n$。记 $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}^n$ 为相对于超理想顶点 v_1、$\cdots$、$\overline{v_k}$、$1 \leq k$ 截断后所对应的双曲 k-截断单纯形。$\widehat{}$设 $\widehat{\mathtt{r}}$ 为 $\mathcal{S}$ 的内切球半径。那么，$\mathtt{r} = \widehat{\mathtt{r}}$ 当且仅当

$$\frac{\sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{cof}_{ij}(b^{ij})}{\det(b^{ij})\mathrm{cof}_{ii}(b^{ij})} \geq 1 \quad \text{for all } i = 1, \cdots, k. \tag{3.3}$$

2. **类型 2**

我们考虑完全正交单形和截断正交单形的内切半径不相同的情况，即引理 3.3 不成立的情况。在这些情况下，所构造的内切球与截断超平面相交：

$$\mathtt{r} = d(\mathbf{c}, H^0) = \cdots = d(\mathbf{c}, H^{n1}) > d(\mathbf{c}, H^{n+1}),$$

其中$\mathbf{c}$ 是完全正交单形 $\mathcal{S}$的内切球球心。我们采用经典方法确定上述

情形中的内心和半径。一般来说，为了求得最优内切球的中心和半径 $\hat{\mathtt{r}}$，我们要确定截断正交形各个面的超平面垂直平分面。最大半径的内切球必须与 $\mathcal{S}$ 的至少四个面相切，其中一个必须是由形式 $[\boldsymbol{b}^n]$确定的面。因此，我们有 $n+1$个类似情形，它们给出了最优内心的候选点。我们需要确定这些中心，并选取半径最大的中心。这个最优球记为 $\mathcal{B}$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们引入与正交单形 $\mathcal{S}$ 生成的镶嵌相关的局部密度函数 $\delta_{opt}(\mathcal{S})$:

$\widehat{\ }$**定义 3.4** 与由截断正交形 $\mathcal{S}$生成的正交单纯形铺砌相关的局部密度函数 $\delta_{opt}(\mathcal{S})$ $\widehat{\ }$:

$$\delta_{opt}(\widehat{\mathcal{S}}) := \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{B})}{\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})}.$$

我们通过经典公式求得体积为 vol($\mathcal{B}$) 的球的体积

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}) = k^n \int_{\Phi} \sinh^{n-1}\phi^1 \sin^{n-2}\phi^2 \ldots \sin\phi^{n-1} \mathrm{d}\phi^1 \wedge \ldots \mathrm{d}\phi^n,$$

其中目前 $k = 1$ 和

$$\Phi : 0 \leq \phi^1 \leq \frac{\mathtt{r}}{k}, 0 \leq \phi^2 < \pi, \ldots, 0 \leq \phi^n < 2\pi.$$

$\widehat{\ }$截断单形的体积 $\mathcal{S}$ 可根据第 2.3.1-2 小节的结果计算。借助上述过程，我们确定了所研究的考克斯特镶嵌中最密的球堆积构型及其密度（此处不详细列出计算过程，参见 [35, 36] 和[10]）。结果汇总于下表:

定理3.5 在双曲空间 $\mathbb{H}^4$ 中，亩具有平行面的简单截断的 *Coxeter* 正交单形生成的经典球全等球堆积中， $\mathcal{B}_{\{4,4,3,3\}}$ 球构型提供了密度为≈ 0.06304 的最密堆积。

定理3.6 在 $\mathbb{H}^5$双曲空间中，在由具有平行面的简单截断的 *Coxeter* 正交单形生成的经典球的全等球堆积中， $\mathcal{B}_{\{4,3,4,3,3\}}$ 球构型以密度≈ 0.0140提供了最密堆积。

施莱夫利符号	内切半径 $\widehat{\ }$r	体积($\mathcal{B}$)	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\widehat{\mathcal{S}})$
$\{4,4,3,3,\infty\}$	≈ 0.14440	≈ 0.00216	$\frac{\pi^2}{288} \approx 0.03427$	$\approx \mathbf{0.06304}$
$\{4,4,3,4,\infty\}$	≈ 0.15986	≈ 0.00325	$\frac{\pi^2}{288} \approx 0.06854$	≈ 0.04742
$\{6,3,3,3,\infty\}$	≈ 0.11182	≈ 0.00077	$\frac{\pi^2}{540} \approx 0.01828$	≈ 0.04239
$\{6,3,3,4,\infty\}$	≈ 0.12751	≈ 0.00131	$\frac{\pi^2}{288} \approx 0.03427$	≈ 0.03828
$\{6,3,3,5,\infty\}$	≈ 0.14200	≈ 0.00202	$\frac{61\pi^2}{900} \approx 0.66894$	≈ 0.00302
$\{6,3,4,3,\infty\}$	≈ 0.16208	≈ 0.00344	$\frac{5\pi^2}{864} \approx 0.05712$	≈ 0.06014

表 3: $\mathbb{H}^4$中的最优球堆积及其密度

施莱夫利符号	内切半径 $\widehat{\ }$r	vol($\mathcal{B}$)	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\widehat{\mathcal{S}})$
$\{4,3,4,3,3,\infty\}$	≈ 0.11414	≈ 0.00010	$\frac{5}{7\zeta(3)}$	$\approx \mathbf{0.0140}$

表4: $\mathbb{H}^5$中的最优球堆积及其密度

定理3.7 在$\mathbb{H}^6$双曲空间中，在由具有平行面的简单截断的 *Coxeter* 正交单形生成的经典球的全等球堆积中， $\mathcal{B}_{\{3,4,3,3,3,4,\infty\}}$ 球构型以密度 $\approx 7.44867 \times 10^{-4}$提供了最密堆积。

4 $\mathbb{H}^n$, $n = 4,\ 5,\ 6$维空间中的horoball堆积

4.1 horoball堆积密度与重要引理

在本小节中，我们定义堆积密度，并汇总下一节用于求取所研究正交单形镶嵌的最优堆积密度的三个引理。

施莱夫利符号	内切半径 $\widehat{\ }$r	vol($\mathcal{B}$)	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\widehat{\mathcal{S}})$
$\{3,4,3,3,3,3,\infty\}$	≈ 0.06102	$\approx 2.67258 \times 10^{-7}$	$\frac{11\pi^3}{86{,}400} \approx 0.00395$	$\approx 6.77032 \times 10^{-5}$
$\{3,4,3,3,3,4,\infty\}$	≈ 0.06102	$\approx 2.67258 \times 10^{-7}$	$\frac{\pi^3}{86{,}400} \approx 0.00036$	$\approx \mathbf{7.44867 \times 10^{-4}}$

表5: $\mathbb{H}^6$中的最优球堆积及其密度

设 $\mathcal{T}$ 是图 1–2 中由 Schl¨afli 符号给出的$\mathbb{H}^n$ 的一个考克斯特正交单形镶嵌。考克斯特镶嵌的对称群 $\Gamma_{\mathcal{T}}$ 包含其考克斯特群，并且 $\mathcal{T}$ 中两个胞腔之间的等距映射保持该镶嵌不变。 $\mathcal{T}$ 的任意单纯形胞腔都作为 $\Gamma_{\mathcal{T}}$ 的基本域 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$，而考克斯特群由作用于 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ 的（$n-1$）维面上的反射生成。在本文中，我们只考虑具有平行面的非紧致、简单截断的考克斯特正交单形（及相应的镶嵌），其中含有一个或多个理想顶点；因此，轨形 $\mathbb{H}^n/\Gamma_{\mathcal{T}}$ 至少有一个尖点（见图 1–2），对于 $4 \leq n \leq 6$。

定义考克斯特正交单纯形镶嵌的正则 horoball 堆积 $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ $\mathcal{T}$ 的密度为

$$\delta(\mathcal{B}_{\mathcal{T}}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(B_i \cap \mathcal{F}_{\mathcal{T}})}{\mathrm{vol}(\mathcal{F}_{\mathcal{T}})}. \tag{4.1}$$

$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$表示镶嵌 $\mathcal{T}$的基本域， m 表示 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$的理想顶点数， B_i 表示以第 i个理想顶点为中心的 horoball。我们允许镶嵌的每个渐近顶点处存在不同类型的 horoball。若一组具有不同 horoball 类型的 horoball$\{B_i\}_{i=1}^{m}$ 构成堆积，则允许采用该组 horoball：任意两个 horoball 的内部不得有公共点，并且要求每个 horoball 不得延伸到其中心所在顶点对面的面之外。第二个条件确保该堆积在 $\Gamma_{\mathcal{T}}$对 $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$的作用下保持不变。满足这些条件后， $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$中的堆积密度通过 Γ_{τ}的作用扩展到整个 $\mathbb{H}^n$。对于考克斯特截断正交单形镶嵌，狄利克雷–沃罗诺伊胞腔与基本域（截断正交单形）重合。我们将最优 horoball 堆积密度记为

$$\delta_{opt}(\mathcal{T}_{\Gamma}) = \sup_{\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \text{ packing}} \delta(\mathcal{B}_{\tau}). \tag{4.2}$$

设 $\{A_i\}_{i=0}^{n} \in \mathbb{P}^n$ 表示所考虑的考克斯特镶嵌 $\mathcal{T}_{\Gamma}$ 的起始正交单形的顶点，其中 A_n 是一个外点（见图 3），而模型中的其他顶点是正常点或理想点。通过用 A_n 的极超平面 Pol（A_n）截去该正交单形，我们由此得到 $\mathcal{T}_{\Gamma}$ 的基本域 $\mathcal{F}_{\Gamma}$。在这些所考虑的情形中（见图 1–2）， $\mathcal{F}_{\Gamma}$ 是一个具有顶点 $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_{0n}A_{1n} \ldots A_{(n-2)n}$ 的 n-多胞体，其中 A_{n-1} 位于边界 $\partial\mathbb{H}^n$ 上，A_0 是正常顶点或理想顶点，而其他顶点是 $\mathbb{H}^n$ 的正常点（见图 3）。对于位于无穷远处的顶点，与镶嵌相关的超球堆积尤其有两种情形。

1. **一种超球类型** 这里我们描述一种在基本域 $\mathcal{F}_{\Gamma}$ 中寻找最优 horball堆积密度的过程，该基本域具有单个理想

顶点 A_{n-1}。通过在以 A_{n-1} 为中心的胞腔 $\mathcal{F}_\Gamma$ 中采用可容纳的最大超球类型，可以使堆积密度达到最大值。

我们通过双曲等距变换变换 $\mathcal{F}_\Gamma$，将顶点 A_{n-1} 映射到点 (1，0，.....，0，1)。$\mathcal{F}_\Gamma$ 其余顶点的坐标由图 1-2 中 Coxeter 图所示的 $\mathcal{F}_\Gamma$ 二面角确定。

设 $\mathcal{B}_{n-1}(s)$ 表示以 A_{n-1}为中心的 horoball 一参数族，其中与 Busemann函数相关的 s参数用于度量 horoball 的“半径”，即 horoball 与模型 O中心之间的最小欧氏有向距离；若 horoball 包含模型中心，则该距离取负值。

最大 horoball $\mathcal{B}_{n-1}(s)$ 必须与基本域 $\mathcal{F}_\Gamma$ 中至少一个不包含顶点A_{n-1} 的超平面相切，从而不与其他此类超平面相交。

可能的切点 $[\mathbf{f}_i]$ 的 $\mathcal{B}_{n-1}(s)$ 及其对应的超平面，由顶点 A_{n-1} 在由形式 $\boldsymbol{u}_i$ 给出的可能超平面上的投影确定（见图 4），

$$\mathbf{f}_i^{n-1} = \mathbf{a}_{n-1} - \frac{\langle \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i. \tag{4.3}$$

最大 horoball 的 s 参数的最优值可由上述经过 A_{n-1} 和垂足$\mathbf{f}_i^{n-1}$ 的超球面方程确定。

horosphere $\partial\mathcal{B}_{n-1}$ 与多胞体 $\mathcal{F}_\Gamma$棱的交点 $[\mathbf{h}_i]$，通过参数化棱 $\mathbf{h}_i(\lambda) = \lambda \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_i (i \in \{0, \cdots, n-2, 0n, \cdots, (n-2)n\})$，然后求其与 $\partial\mathcal{B}_{n-1}$的交点来确定。horospherical $(n-1)$-单纯形的体积根据公式 (2.6) 确定 horoball 部分的体积。horospherical $(n-1)$-多胞体的数据通过根据公式 (2.1) 求双曲距离 l_{ij}，$l_{ij} = d(H_i, H_j)$ 获得，其中 $d(\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = \arccos\left(\frac{-\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i \rangle \langle \mathbf{h}_j, \mathbf{h}_j \rangle}}\right)$。此外，horospherical 距离 L_{ij} 根据公式 (2.5) 求得。

我们得到一个边已知的超球面（$n-1$）-多胞体 $\mathcal{P}$。超球面的内蕴几何是欧氏的，因此所得多胞体的体积按欧氏意义计算。其计算

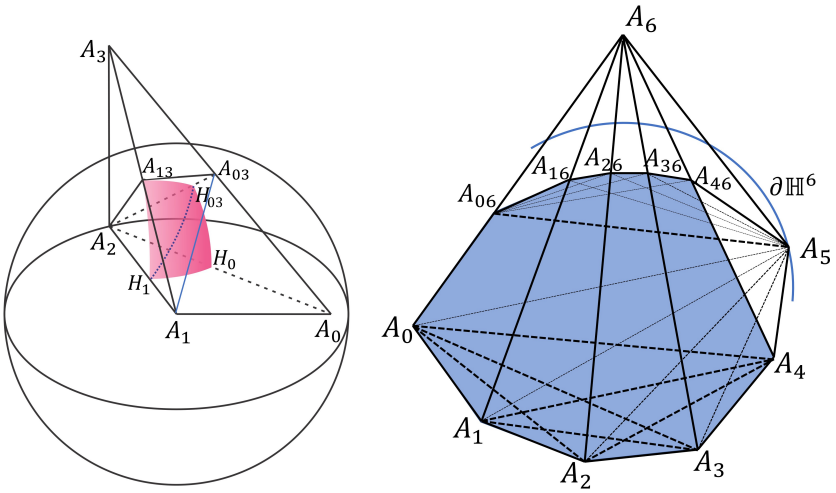

图 5：超球面 $\mathcal{B}_2$ 与其对面相切，所得的超球面多面体 $A_{13}H_0H_1H_{03}$ 通过超平面 $A_2A_1A_{03}$ 分割为两个单形 $H_0H_1H_{03}$ 和$A_{13}H_1H_{03}$，位于三维双曲空间$\mathbb{H}^3$ 中（左）。截断正交形 $\mathbb{H}^6$中的“对面”（位于阴影区域），由顶点 A_0、 A_1、 A_2、 A_3、 A_4 A_{06}、 A_{16}、 A_{26}、 A_{36}、 A_{46} 标示（右）。 —

上述 n维多胞体的体积通过将其分解为 n维单形来确定。在 $\mathbb{H}^n$中，理想顶点 A_{n-1} 的对面由多胞体 $\mathcal{P}$ 确定，该多胞体是由凸包 A_0、 $\cdots$、 A_{n-1}、 A_{0n}、 $\cdots$、 $A_{(n-2)n}$构成的，见图5中的阴影区域。该多胞体 $\mathcal{P}$ 可按如下方式剖分为 $n-1$ 个单形：

$$E_k := conv(A_{0n}, \cdots A_{kn}, A_k, \cdots, A_{n-2}), \quad \text{for } k = 0, \cdots, n-2$$

注意，

$int(E_{k_1}) \cap int(E_{k_2}) = \emptyset$,对于 $k_1 \neq k_2$, 其中 $int(E_k)$ 表示E_k的内部

$$\text{and} \bigcup_{k=0}^{n-2} E_k = \mathcal{P}.$$

例如，在$\mathbb{H}^6$中, 多胞体 $\mathcal{P}$ 及其剖分所得的单形分别示于图 5.left 和图 6 中。此外，我们取点投影

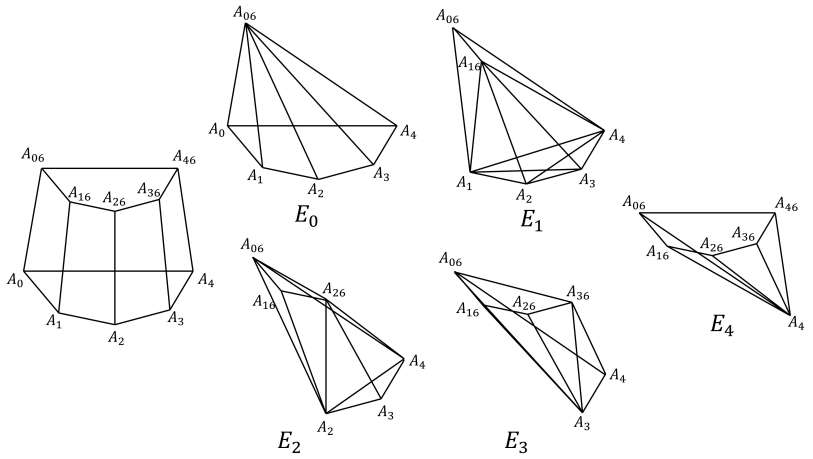

图6：将五维双曲多胞体 $\mathcal{P}$ 剖分为五维单纯形 E_k、 $k = 0, \cdots 4$ 的示意图。

将每个单形 E_k 投影到超球面 $\partial\mathcal{B}_{n-1}$ 上，方法是取$\partial\mathcal{B}_{n-1}$ 与从理想顶点 A_{n-1} 出发并通向 $\mathcal{P}$所有顶点的测地线的交点。我们分别将 E_k 的投影记为 D_k。为计算单形 $D_0 \dots D_{n-2}$的体积，我们使用 Cayley–Menger 行列式，它给出边长为$L_{i,\ j}(i = 1 \dots (n-1)\ j = 2 \dots n,\ i < j)$的超球面（$n-1$）单形的体积 vol($\mathcal{A}$)。

$$\mathrm{vol}(\mathcal{A})^2 = \frac{1}{(n!)^2 2^n} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & L_{1,2}^2 & L_{1,3}^2 & \dots & L_{1,n}^2 \\ 1 & L_{1,2}^2 & 0 & L_{2,3}^2 & \dots & L_{2,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & L_{1,n}^2 & L_{2,n}^2 & \dots & L_{n-1,n}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

包含在基本单纯形中的 horoball 部分的体积为

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_{n-1} \cap \mathcal{F}_\Gamma) = \frac{1}{n-1}\mathrm{vol}(\mathcal{Q}), \text{ where } \mathcal{Q} := \bigcup_{k=0\cdots n-2} D_k \tag{4.5}$$

Coxeter 单纯形 $\mathcal{F}_\Gamma$ 的局部最优 horoball 堆积密度可由公式 $\delta_{opt}(\mathcal{F}_\Gamma) = \mathrm{vol}(\mathcal{B}_{n-1}\cap\mathcal{F}_\Gamma)\ \mathrm{vol}(\mathcal{F}_\Gamma)$ 确定。

上述局部构造在 $g \in \Gamma$ 的等距变换作用下保持不变。考克斯特群 Γ 将最优局部 horoball 堆积密度扩展

从基本域 $\mathcal{F}_\Gamma$ 扩展至整个镶嵌 $\mathcal{T}_\Gamma$ 的 $\mathbb{H}^n$，因此我们通过公式 (4.1) 和 (4.2) 得到所考虑镶嵌的 horoball 堆积密度。

注释 4.1 在某些情况下，可能存在一个额外的理想顶点 A_0，从而允许我们考虑一个以该顶点为中心的超球面。在这些情况下确定最优 *horoball*堆积密度的过程与前面所述的情况类似。此外，在这些情况下，$(n-1)$维高球面多胞体 $\mathcal{Q}$ 是一个单纯形，其体积$\mathrm{vol}(\mathcal{Q})$ 可以直接利用 *Cayley-Menger* 行列式计算。

2. **两种 hor球类型** 确定最优超球扇区及其体积的计算方法，与上文所述的"单一超球类型"方法类似。然而，在所研究的情况下，两个超球不可能拥有共同的内部点。它们至多可以彼此相切。当超球类型连续变化时，以基本域中两个不同理想顶点为中心的两个相切 horball 部分的体积之间的关系见引理 4.2。

在 $\overline{\mathbb{H}}^n$ 中，令 $n \geq 2$，设 τ_1 和 τ_2 为两个全等的 n维凸锥，其顶点位于 C_1，$C_2 \in \partial\mathbb{H}^n$ 且共享一条公共测地边C_1C_2。令 $B_1(x)$ 和 $B_2(x)$ 分别表示以 C_1 和 C_2为中心的两个 horoball，并在 $I(x) \in C_1C_2$处彼此相切。对于 horoball 扇区的体积，定义 $I(0)$ 为满足 $V(0) = 2\mathrm{vol}(B_1(0) \cap \tau_1) = 2\mathrm{vol}(B_2(0) \cap \tau_2)$ 的点。

引理 4.2 ([33]) 令 x 为 $I(0)$ 与 $I(x)$之间的双曲距离，则

$$\begin{aligned} V(x) =& \mathrm{vol}(B_1(x) \cap \tau_1) + \mathrm{vol}(B_2(x) \cap \tau_2) \\ =& V(0)\frac{e^{(n-1)x} + e^{-(n-1)x}}{2} = V(0)\cosh\left((n-1)x\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

其关于 $x \to \pm\infty$严格凸且严格递增。

证明请参见我们的论文 [33] 。

上述方法可用于确定最优 horoball 堆积及其密度。

4.2 与超球堆积相关的结果

4.2.1 $\mathbb{H}^4$ 中的超球堆积

1. **单个 horoball 的堆积**

在给定情形中，我们考虑一个以 A_3 为中心的超球面。如前所述，当超球面与由顶点 A_0， A_1， A_2， A_{04}， A_{14}， A_{24}确定的对面相切时，超球面堆积达到其最优密度。正如图 1 中的施莱夫利符号所示，这一最优堆积构型可在所有可能的镶嵌中实现。

对于 Schl¨afli 符号 4，4，3，4，∞，有两个理想顶点，分别为 A_0 和 A_3。因此，我们可以构造另一个以顶点 A_0 为中心的超球面。当该超球面与 A_0 的对面相切时，这一超球面堆积将达到最优；该对面由顶点 A_1， A_2， A_3， A_4 确定。

通过应用前文所述的方法以及公式 (4.3)、(4.4) 和 (4.5)，并利用表 2 中给出的体积值，我们将结果汇总于表 6。

施läfli 符号	体积($\mathcal{B}_i \cap \widehat{\mathcal{S}}$)	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\mathcal{B}_\Gamma)$.
$\{4,4,3,3,\infty\},\ i=3$	$\frac{1}{48}$	$\frac{\pi^2}{288}$	$\frac{6}{\pi^2} \approx 0.60793$
$\{4,4,3,4,\infty\}\ \ i=3$	$\frac{\sqrt{2}}{48}$	$\frac{\pi^2}{144}$	$\frac{3}{8\pi^2} \approx 0.42987$
$\{4,4,3,4,\infty\},\ i=0$	$\frac{\sqrt{2}}{72}$	$\frac{\pi^2}{144}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \approx 0.28658$
$\{6,3,3,3,\infty\},\ i=3$	$\frac{\sqrt{3}}{144}$	$\frac{\pi^2}{540}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4\pi^2} \approx$ **0.65810**
$\{6,3,3,4,\infty\},\ i=3$	$\frac{\sqrt{6}}{144}$	$\frac{\pi^2}{288}$	$\frac{2\sqrt{6}}{\pi^2} \approx 0.49637$
$\{6,3,3,5,\infty\},\ i=3$	$\frac{1}{48}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$	$\frac{61\pi^2}{900}$	$\frac{25(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{244\pi^2} \approx 0.02909$
$\{6,3,4,3,\infty\},\ i=3$	$\frac{\sqrt{3}}{72}$	$\frac{5\pi^2}{864}$	$\frac{12\sqrt{3}}{5\pi^2} \approx 0.42119$

表 6： $\mathbb{H}^4$ 中仅含一个超球面的 hor球堆积密度

2. **双视球堆积**

定理 4.3 当 Γ 由 *Schl¨afli* 符号 $\{4,4,3,4,\infty\}$ 确定时，考克斯特单纯形镶嵌的最优 *hor*球堆积密度为

$$\delta_{opt}(\mathcal{T}_\Gamma)=\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_0^{opt}\cap\widehat{\mathcal{S}})+\mathrm{vol}(\mathcal{B}_3^{opt}\cap\widehat{\mathcal{S}}))}{\frac{\pi^2}{144}}\approx 0.71645. \tag{4.7}$$

证明
我们考虑 Schl¨afli 符号为 $\{4,4,3,4,\infty\}$ 的情形，其 Coxeter-Schl¨afli 矩阵为以下格拉姆矩阵

$$(b^{ij})=(\langle \boldsymbol{b}^i,\boldsymbol{b}^j\rangle)=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

其中 $0\le i,j\le 4$。此外，相应的逆矩阵 (a_{ij})

$$(a_{ij})=(\langle \boldsymbol{b}^i,\boldsymbol{b}^j\rangle)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -2 & -2 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -2 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\\ -2 & -2\sqrt{2} & -2 & -2 & -\sqrt{2}\\ -2 & -2\sqrt{2} & -2 & 0 & 0\\ -\sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

这表明截断正交形有两个理想顶点 $A_0[\mathbf{a}_0]$, 和$A_3[\mathbf{a}_3]$，因为 $a_{00}=0$, 且 $a_{33}=0$。我们有一个超理想顶点 $A_4[\mathbf{a}_4]$,, 因为 $a_{44}=1>0$。

首先，我们选取正交形超平面面的单位法向形式集合 $\boldsymbol{b}^0=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)^T$, $\boldsymbol{b}^1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0)^T$, $\boldsymbol{b}^2=(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^T$, $\boldsymbol{b}^3=(0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})^T$, $\boldsymbol{b}^4=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$, 其对应的格拉姆矩阵（考克斯特-施莱夫利矩阵）为（4.8）。

这些单位法向量 $\{\boldsymbol{b}^0,\boldsymbol{b}^1,\boldsymbol{b}^2,\boldsymbol{b}^3,\boldsymbol{b}^4\}$ 和 (a_{ij}) 决定了正交形顶点，其坐标为：$\mathbf{a}_0=(1,0,1,0,0)$, $\mathbf{a}_1=(1,0,0,0,0)$,$\mathbf{a}_2=(1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$, $\mathbf{a}_3=(1,\frac{1}{2},0,0,0)$, $\mathbf{a}_4=(1,1,0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$。–我们考虑以 A_0 和 A_3 为中心的两个 horoball $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{B}_3$，它们满足堆积条件，因此可能在棱 A_0A_3上的一点处彼此相切。为了研究

这种可能性，我们考虑移动点 $P[\mathbf{p}]$在 A_0A_3上的线性参数化

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{a}_3 + t\mathbf{a}_0, \qquad t \in [0,1], \tag{4.10}$$

其中显然 $\mathbf{p}(0) = \mathbf{a}_3$ 以及 $\mathbf{p}(1) = \mathbf{a}_0$。根据第 4.1 小节中所述的方法，我们可以确定以 A_0 和 A_3 为中心的可能的最大超球面及其参数 s_i, $i \in \{0,3\}$ 并利用投影公式 (4.3) 以及 (2.4) 中给出的超球面方程。

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}^3 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}^3, \boldsymbol{b}^3 \rangle}\mathbf{b}^3 = \left(1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

一个等距变换可以将 A_3 映射到点 $(1,0,0,0,1)$，并将 $\mathbf{f}_3$ 映射到 $\hat{\mathbf{f}_3} = (1, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})\hat{}$。将 $\mathbf{f}_3$ 代入 (2.4) 中给出的超球面方程，可得

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - s\right)^2}{(1-s)^2} + \frac{\frac{3}{8}}{1-s} = 1$$

通过对最后一个方程求解 s，可得 $s_3 = \frac{3}{5}$，进一步，对应于 (4.10) 中的 t 为 $t_3 = \frac{1}{3}$，即 $\mathbf{p}(\frac{1}{3})$ 是 $\mathcal{B}_3$ 与棱 A_3A_0 的交点。

另一方面，我们考虑以 A_0 为中心的 horoball $\mathcal{B}_0$，使其与由顶点 A_1、A_2、A_3、A_4 确定的对面 H_0，或由顶点 A_{04}、A_{14}、A_{24}、A_3 确定的截断面 H_5 相切。我们考虑以下投影：

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_0 - \frac{\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{b}^0 \rangle}{\langle \boldsymbol{b}^0, \boldsymbol{b}^0 \rangle}\mathbf{b}^0 = (1,0,0,0,0) = \mathbf{a}_1$$

存在一个等距变换，将 $\mathbf{a}_0$ 映射到 $(1, 0, 0, 0, 1)$，其中 $\mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_1$ 是定点。将 $\mathbf{f}_0$ 代入方程 (2.4)，并对 s 求解，可得 $s_0 = 0$。参数 $s_0 = 0$ 确定了超球面 $\mathcal{B}_0^{opt}$。

考虑

$$\mathbf{q}(t) = (1-t)\mathbf{a}_0 + t\mathbf{a}_3, \ \ t \in [0,1]$$

这显然与 $\mathbf{p}$ 相反，即 $\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(1-t)$。经过仔细分析，$\mathcal{B}_0(s_0)$ 与棱 A_0A_3 的交点为 $\mathbf{q}(\frac{2}{3})$。因此，

$$\mathbf{q}\left(\frac{2}{3}\right) = \mathbf{p}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \mathbf{p}\left(\frac{1}{3}\right)$$

这意味着超球 $\mathcal{B}_0^{opt}$ 和 $\mathcal{B}_3^{opt}$ 在棱A_0A_3上的某一点相切。

由式 (4.4) 和 (4.5) 可直接计算出由两个超球面构成的 horoball 堆积的最优密度

$$\delta_{opt}(\mathcal{T}_\Gamma) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_0^{opt} \cap \widehat{\mathcal{S}}) + \mathrm{vol}(\mathcal{B}_3^{opt} \cap \widehat{\mathcal{S}}))}{\frac{\pi^2}{144}}$$

$$= \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_0(0) \cap \widehat{\mathcal{S}}) + \mathrm{vol}(\mathcal{B}_3(\frac{3}{5}) \cap \widehat{\mathcal{S}}))}{\frac{\pi^2}{144}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{48} + \frac{\sqrt{2}}{72}}{\frac{\pi^2}{144}} = \frac{5\sqrt{2}}{\pi^2} \approx 0.71645 \quad \square$$

最后，我们将结果总结为以下定理

定理 4.4 在双曲空间 $\mathbb{H}^4$ 中，由具有平行面的简单截断考克斯特正交单形生成的、至多含两种超球类型的全等球与 *horoball* 堆积中，上述确定的 $\mathcal{B}_{\{4,4,3,4,\infty\}}$*horoball* 构型给出了最密堆积，其密度为 $\frac{5\sqrt{2}}{\pi^2} \approx 0.71645$。

注 4.5 该密度 $\delta_{opt}(\mathcal{T}_\Gamma) \approx 0.71645$是已知的 $\mathbb{H}^4$ 中最密 *horoball* 堆积密度。这里我们指出，如果允许在镶嵌的每个渐近顶点处放置不同类型的超球，则该密度可在七个渐近考克斯特单纯形镶嵌 $\Gamma \in \{S_4, P_4, FR_4, N_4, M_4, BP_4, DP_4\}$中实现（见 *[19]*）。

4.2.2 $\mathbb{H}^5$中的horoball堆积

该正交单形的 Coxeter–Schläfli 矩阵为 ¨，其 Schläfli 符号 $\{4, 3, 4, 3, 3, \infty\}$ 为 (b^{ij})。选取该正交单形超平面面的单位法向形式，得到矩阵 (b^{ij})，即：

$$\boldsymbol{b}^0 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \boldsymbol{b}^1 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{3} - \sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)^T,$$

$$\boldsymbol{b}^2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T, \boldsymbol{b}^3 = \left(\frac{\sqrt{30}}{6}, 1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)^T,$$

$$\boldsymbol{b}^4 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T, \boldsymbol{b}^5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T. \tag{4.11}$$

相应的顶点为 $A_0[\boldsymbol{a}_0]$、 $A_1[\boldsymbol{a}_1]$、 $A_2[\boldsymbol{a}_2]$、 $A_3[\boldsymbol{a}_3]$、 $A_4[\boldsymbol{a}_4]$、$A_5[\boldsymbol{a}_5]$, 其中

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_0=\left(1,\frac{\sqrt{30}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},0,0,0\right),\mathbf{a}_1=\left(1,\frac{\sqrt{30}}{6},0,0,0,0\right),\\ \mathbf{a}_2=\left(1,\frac{2\sqrt{6}+5\sqrt{30}}{33},0,\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{15}}{33},0,0\right),\mathbf{a}_3=\left(1,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8},0,0,0,0\right)\\ \mathbf{a}_4=\left(1,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8},0,0,\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8},0\right),\\ \mathbf{a}_5=\left(1,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{8},0,0,\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{8},\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{30}}{8}\right).\end{gathered}\tag{4.12}$$

1. **包含一个 horoball 的堆积**

图2显示，在五维双曲空间 $\mathbb{H}^5$中，由具有平行面的简单截断正交形生成的考克斯特镶嵌 $\mathcal{T}_\Gamma$ 只有一种，其施莱夫利符号为 4，3，4，3，3，∞。通过观察相应的（aij） = （b^{ij}）$^{-1}$ 矩阵，我们注意到，其基本域$\mathcal{F}_\Gamma$ 有两个理想顶点，分别为 A_0 和 A_4。因此，我们可以在这两个理想顶点中的任意一个处构造以其为中心的horoball。对于以 A_0为中心的超球面，对面为 $A_1A_2A_3A_4A_5$，截断面为 $A_4A05A_{15}A_{25}A_{35}$。然而，只有当超球面与面 $A_1A_2A_3A_4A_5$相切时，才能实现最优打包构型。与上文所述的四维情形类似，利用公式（4.3）、（4.4）、（4.5）以及第2.3.2小节确定的体积值，我们可以确定单一超球类型的最密超球打包。结果汇总于表7。

Schl¨afli 符号	体积($\mathcal{B}_i\cap\widehat{\mathcal{S}}$)	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\mathcal{B}_\Gamma)$。
$\{4,3,4,3,3,\infty\},\quad i=4$	$\frac{1}{384}$	$\frac{7\zeta(3)}{1152}$	$\frac{3}{7\zeta(3)}\approx\mathbf{0.35653}$
$\{4,3,4,3,3,\infty\},\ i=0$	$\frac{1}{576}$	$\frac{7\zeta(3)}{1152}$	$\frac{2}{7\zeta(3)}\approx 0.23769$

表7： $\mathbb{H}^5$中的堆积密度，含一个horoball

Schl¨afli 符号	体积$((\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_4) \cap \widehat{\mathcal{S}})$	$\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\mathcal{B}_\Gamma))$.
$(4,\ 3,\ 4,\ 3,\ 3,\ \infty)\ \ i=0,\ 4$	$\frac{5}{1152}$	$\frac{7\zeta(3)}{1152}$	$\frac{5}{7\zeta(3)} \approx \mathbf{0.59421}$

表8： $\mathbb{H}^5$中双超球堆积的密度

2. **双视球堆积**

这里我们同时考虑以 A_0 和 A_4 为中心的两个超球面，并计算它们的最优排列和密度。这与此前在四维双曲空间中的构造类似（见第4.2.1小节）。我们定义如下线性参数化

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{a}_4 + t\mathbf{a}_0, \ \ t \in [0,1], \tag{4.13}$$

描述棱 A_0A_4 上各点的位置。经过仔细研究，我们发现，如果 $t = \frac{27-6\sqrt{5}}{61}$，那么以 A_4 为中心的超球面与对面相切。此外， t 这一精确值也使得以 A_0 为中心的另一个超球面与对面 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 相切。因此，当且仅当这两个超球面分别与其中心所在的对面相切时，它们才彼此相切。计算结果汇总于表8。我们通过以下定理总结了对五维情形的研究。

定理4.6 在双曲空间 $\mathbb{H}^5$ 中，对于由具有平行面的简单截切考克斯特正交单形生成、至多包含两种超球类型的全等球与超球堆积，上述确定的 $\mathcal{B}_{\{4,3,4,3,3,\infty\}}$极限球构型给出了最密堆积，其密度为 $\frac{5}{7\zeta(3)} \approx 0.59421$。

注4.7 在 *[20]* 中，我们证明上述最优密度可由十种可公度的渐近型考克斯特单纯形镶嵌实现

$$\Gamma \in \left\{ \overline{U}_5, \overline{S}_5, \overline{Q}_5, \overline{X}_5, \overline{R}_5, \overline{N}_5, \overline{O}_5, \overline{M}_5, \overline{L}_5, \widehat{UR}_5 \right\},$$

当允许在镶嵌的每个渐近顶点处放置不同类型的超球时。

Schl¨afli 符号	$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_i \cap \hat{\mathcal{S}})$	$\mathrm{vol}(\hat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\mathcal{B}_\Gamma)$).
$(3, 4, 3, 3, 3,3, \infty)$ $i = 5$	$\frac{1}{23040}$	$\frac{11\pi^3}{86400}$	≈ 0.01010
$(3, 4, 3, 3, 3, 4, \infty)$ $i = 5$	$\frac{\sqrt{2}}{23040}$	$\frac{\pi^3}{86400}$	$\approx \mathbf{0.17114}$
$(3、4、3、3、3、4、\infty)$ $i = 0$	$\frac{1}{19200}$	$\frac{\pi^3}{86400}$	≈ 0.14513

表 9： $\mathbb{H}^6$ 中单个超球的堆积密度

4.2.3 $\mathbb{H}^6$中的horoball堆积

1. **单个 horoball 的堆积**

图 2 表明，在六维双曲空间$\mathbb{H}^6$ 中，有两个由具有平行面的简单截短正交单纯形生成的考克斯特镶嵌 $\mathcal{T}_{\Gamma_i},\ i \in \{1, 2\}$ ，其施莱¨夫利符号分别为 $\{3, 4, 3, 3, 3, 3, \infty\}$ 和 $\{3, 4, 3, 3, 3, 4,\infty\}$。利用相应的 $(a_{ij}) = (b^{ij})^{-1}$ 矩阵可以清楚地看出，在第一种情形中，基本域 $\mathcal{F}_{\Gamma_1}$ 只有一个理想顶点 A_5 ；而在第二种情形中，基本域 $\mathcal{F}_{\Gamma_1}$ 有两个理想顶点，即 A_0和 A_5。因此，我们可以构造以任一理想顶点为中心的超球。正如前面各小节所述，应构造一个以理想顶点 A_5为中心的超球面。此外，在施莱¨夫利符号为 $\{3, 4, 3, 3, 3, 4, \infty\}$的构型中，我们还有另一个以 A_0为中心的超球面。以 A_0 为中心的超球扇区将在其与 A_0的对面相切时达到最大体积，即与面 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$相切。另一方面，顶点 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的凸包是$\mathbb{H}^6$中的一个五单形。我们可以将该单形中心投影到超球面上，并计算其超球扇区的体积。类似于上述四维和五维情形，应用公式（4.3）、（4.4）、（4.5）以及表 2 中的体积值，我们可以确定具有一种超球类型的最密超球打包。结果汇总于表 9 中。

2. **双视球堆积**

对于由施莱夫利符号 $\{3, 4, 3, 3, 3, 4, \infty\}$ 给出的镶嵌 $\mathcal{T}_{\Gamma_2}$，我们有两个理想顶点 A_0 和 A_5。这两个超球面可能彼此相切。若切点存在，则位于棱 A_0A_5 上。我们可以确定属于理想顶点、且位于基本域（截断正交形） $\mathcal{F}_{\Gamma_2}$ 中的超球的最大可能大小；我们发现它们没有公共点，彼此不相交。因此，最优

Schl¨afli 符号	$\mathrm{vol}((\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_5) \cap \hat{\mathcal{S}})$	$\mathrm{vol}(\hat{\mathcal{S}})$	$\delta_{opt}(\mathcal{B}_\Gamma)$).
$\{3,4,3,3,3,4,\infty\}$	$\frac{5+3\sqrt{2}}{57600\sqrt{2}}$	$\frac{\pi^3}{86400}$	$\approx \mathbf{0.31617}$

表 10： $\mathbb{H}^6$ 中两种极限球的堆积密度

极限球排列由此超球构型导出。双超球堆积的最大密度可以直接通过以下方式计算：

$$\delta_{opt}(\mathcal{T}_{\Gamma_2}) = \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_0^{opt} \cap \widehat{\mathcal{S}}) + \mathrm{vol}(\mathcal{B}_5^{opt} \cap \widehat{\mathcal{S}}))}{\frac{\pi^3}{86,400}} =$$

$$= \frac{\mathrm{vol}(\mathcal{B}_0(0) \cap \widehat{\mathcal{S}}) + \mathrm{vol}(\mathcal{B}_5(\frac{7}{9}) \cap \widehat{\mathcal{S}}))}{\frac{\pi^3}{86,400}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{23040} + \frac{1}{19200}}{\frac{\pi^3}{86,400}} = \frac{15\sqrt{2}}{4\pi^3} + \frac{9}{2\pi^3} \approx 0.31617 \quad \square$$

我们在下表和定理中总结了我们的研究结果。

定理 4.8 在双曲空间 $\mathbb{H}^6$中，在由具有平行面的简单截顶考克斯特正交单形生成、至多包含两种极限球类型的全等球与 *horoball* 堆积中，上述确定的 $\mathcal{B}_{\{3,4,3,3,3,4,\infty\}}$极限球构型具有最密的堆积密度 $\frac{15\sqrt{2}+18}{4\pi^3} \approx 0.31617$。

瑟斯顿几何以及高维双曲空间中的球、horoball、超球堆积与覆盖仍有许多尚待解决的问题，我们计划对此作进一步研究，这或许能带来更多有趣的结果。

参考文献

[1] Adams, C.：最小体积的非紧致双曲三维流形。美国数学会会刊，**100(4)** (1987), 601–606。

[2] Agol, I., Culler, M., Shalen, P. B.：德恩手术、同调与双曲体积。代数与几何拓扑，**6(5)**（2006年），2297-2312。

[3] B¨or¨oczky, K.：常曲率空间中的球体堆积，匈牙利数学科学院学报，32（1978），243–261。.[4] B¨or¨oczky, K., Florian, A.：关于双曲空间中的最密球堆积，匈牙利数学科学院学报，15（1964年），237–245。[5] Fejes T´oth, G., Kuperberg, W.：凸集的堆积与覆盖，《凸几何手册》第B卷，编者：Gruber, P.M., Willis J.M.，North-Holland，（1983），799–860。[6] Fejes T´oth, G., Fejes T´oth, L., Kuperberg, W.：双曲空间中的球堆积，载于：Lagerungen。数学科学基础丛书，施普林格，Cham，第360卷（2023年），263–270, https://doi.org/10.1007/978-3-031- 21800-2-11。[7] Fejes T´oth, L.：《正则图形》，Macmillian（纽约），1964年。[8] Im Hof, H.-C.：一类双曲 Coxeter 群，数学展望，3（1985），179–186。[9] Im Hof, H.-C.：纳皮尔循环与双曲 Coxeter 群，比利时数学学会通报，42（1990年），523–545。[10] Jacquemet, M.：双曲截断 n-单形的内切半径，《离散与计算几何》，51（2014年），997–1016。[11] Johnson, N.W., Kellerhals, R., Ratcliffe, J.G., Tschants, S.T.：双曲 Coxeter 单形的大小，变换群，4/4（1999年），329–353。[12] Kellerhals, R.：常曲率空间中的球堆积与单纯形密度函数，《纯粹与应用数学杂志》，494（1998年），189–203。[13] Kellerhals, R.：带尖点双曲流形的体积，拓扑学，37/4（1998年），719–734。[14] Kellerhals, R.：关于 Schl¨afli 的约化公式，Math.Z，206（1991年），193–210[15] Kellerhals, R.：剪刀全等、黄金比例与双曲5空间中的体积，《离散与计算几何》，47（2012年），629–658

[16] Kellerhals, R.：《双曲五维正交单纯形的体积与三重对数函数》，《瑞士数学评论》，**67(1)**(1992), 648–663[17] Kellerhals, R.：《双曲五维空间中的体积》，《几何与泛函分析》，**5**(1995), 640–667[18] Kozma, R.T., Szirmai, J.：不同类型超球在完全渐近考克斯特镶嵌中的最优密度堆积，数学月刊¨，**168/1**(2012), 27–47.[19] Kozma, R.T., Szirmai, J.：双曲四维空间最优球堆积密度的新下界，《离散与计算几何》，**53/1** (2015), 182- 198.[20] Kozma, R.T., Szirmai, J.：双曲五维空间中超球堆积密度的新下界，《几何学献刊》，**206/1** (2020), 1–25.[21] Kozma, R.T., Szirmai, J.：n维双曲空间中当 $6 \leq n \leq 9$ 时超球堆积密度的下界，《几何学献刊》，(2023)（即将发表）。[22] Kozma, R.T., Szirmai, J.：双曲三维空间中 Koszul 型镶嵌的最优超球堆积密度，arXiv:2205.03945。已投稿稿件，(2023), arXiv:2205.03945.[23] Marshall, T. H.：渐近体积公式与双曲球堆积，《芬兰科学院数学年刊》，**24** (1999), 31–43.[24] Marshall, T.H., Martin, G.J.：双曲空间中的圆柱与超球堆积。《芬兰科学院数学年刊》，**30/1** (2005), 3–48.[25] Meyerhoff, R.：双曲三维空间中的球面堆积与体积。《瑞士数学评论》，**61** (1986), 271–278.[26] Moln´ar, E.：八种三维齐性几何的射影解释，《代数与几何论丛》，**38**(1997), 261–288.[27] Moln´ar, E., Szirmai, J.：八种齐性三维几何中的对称性，《对称性、文化与科学》，**21/1-3**(2010), 87–117。

[28] Moln´ar, E., Prok, I., Szirmai, J.：盖辛双曲理想单纯形流形的手术, 德布勒森数学出版物，**99/1-2** (2021), 185–200, DOI: 10.5486/PMD.2021.8995.[29] Radin, C.：最优密度堆积的对称性，《非欧几何》，编者 A. Pr´ekopa, E. Moln´ar，施普林格出版社，(2006), 197–207, .[30] Rogers, C.A.：《堆积与覆盖》，《剑桥数学与数理物理丛书》第54卷，剑桥大学出版社，(1964)。[31] Szirmai, J.：双曲三维空间中考克斯特镶嵌的最优球与超球堆积《代数与几何论丛》，**46/2** (2005), 545–558.[32] Szirmai, J.：双曲 d 维空间中考克斯特蜂窝的最优球与超球堆积《代数与几何论丛》，**48/1** (2007), 35–47.[33] Szirmai, J.：双曲 n 维空间中完全渐近正则单纯形的超球堆积，《数学等式》，**85** (2013), 471–482.[34] Szirmai, J.：双曲空间中由广义单纯形密度函数刻画的超球堆积及其密度，《匈牙利数学学报》，**136/1-2**(2012), 39–55.[35] Szirmai, J., Yahya, A.：由具有平行面的三维简单截断考克斯特正交单形生成的最优球与超球堆积，《数学问题》，(2022), 1–21.[36] Yahya, A., Szirmai, J.：与由具有平行面的简单截断正交单形构成的考克斯特镶嵌相关的球与超球面堆积可视化，*KoG*，**25** (2021), 64–71。