arXiv:2305.05628v1 [physics.flu-dyn] 9 May 2023

谐波强迫湍流的谱正交分解

Liam F. Heidt[1]†，以及 Tim Colonius[2]

[1]加州理工学院航空航天实验室，加州理工学院，美国加利福尼亚州 91101[2]加州理工学院机械与土木工程系，美国加利福尼亚州 91101

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

许多湍流流场呈现时间周期性的统计特性，其中包括涡轮机械流场、受外部谐波强迫的流场以及钝体尾流。然而，许多用于识别湍流相干结构的现有技术都假定统计特性是平稳的。本文利用循环平稳分析——将统计平稳框架拓展至统计特性周期变化的过程——把谱正交分解（SPOD）推广到循环平稳情形。本文探讨了循环平稳 SPOD（简称 CS-SPOD）的相关性质，阐明了 CS-SPOD 与谐波预解分析之间的理论联系，讨论了低频和高频强迫极限下的简化形式，并提出了一种计算 CS-SPOD 的高效算法，其计算成本与 SPOD 相当。我们通过两个示例问题展示 CS-SPOD 的实用性：一个修正的复数线性化金兹堡–朗道模型，以及一个高 Reynolds 数湍流射流。

1. 引言

周期性和准周期性强迫湍流在工程和自然界中无处不在。这类流场包括涡轮机械、天气与气候，以及通过谐波激励实现流动控制中的流场。当强迫相对于湍流时间尺度较慢时，其统计特性可建模为准定常状态（由一系列定常状态组成）。然而，在许多情况下，强迫频率与湍流频率相当，湍流结构不仅受到强迫的调制，也会被其改变。在这种情况下，一个关键目标是识别相干结构，并将其与类似但未受强迫的流场中出现的相干结构进行比较和对照，同时确保这些结构彼此不相关。

湍流中识别相干结构最常用的方法是本征正交分解（Lumley 1967，1970；Aubry 等 1988年；Sirovich 1989；Aubry1991），它将流场数据表示为相互正交的模态，其振幅能够以最优方式重构相关张量。采用典型的纯空间形式时，模态在时间上并不相干，因此许多研究者转而采用 DMD 及其变体（Rowley 等 2009年；Schmid 2010；Schmid 等 2011年）。然而，对于统计平稳的流动，谱正交分解（SPOD）（Lumley 1967，1970；Citriniti &George 2000；Picard & Delville 2000；Towne 等 2018）能够最优地重构时空统计特性，并得到以单一频率振荡的模态。纯空间 POD 和 SPOD 都有一个基本前提，即统计平稳性，也就是说统计特性不随时间变化。对于许多

† 通信邮箱：lheidt@caltech.edu

未受强迫的流场，这一假设是恰当的。然而，受到强迫时，这一基本假设不再成立，因为流场及其统计特性此时都与强迫相关。已有多项研究对 SPOD 进行了扩展，以研究受强迫的湍流。Franceschini 等 (2022) 研究了高频湍流分量在低频周期运动上发展的流场。随后，研究采用准稳态假设，并确定各个相位下条件固定的相干结构。 Glezer 等 (1989) 通过对时间序列集合求和，提出了一种适用于周期统计特性流场的扩展 POD 方法。然而，由于该方法基于 POD，仍然存在 POD 的不足。 Heidt 等 (2021) 将 SPOD 应用于三重分解场的残余分量（Hussain & Reynolds 1970，1972），以分离强迫对湍流的影响，但仍需采用平稳性假设。显然，SPOD 及上述扩展方法不足以研究受强迫的湍流。这促使我们将 SPOD 扩展到此类流场；本文的主要研究内容正是利用循环平稳分析实现这一扩展。

循环平稳分析是对平稳分析的扩展，用于具有周期统计特性的过程，已应用于从经济学到物理学和力学等广泛领域（Gardner 2018）。该理论最初由Gudzenko（1959）、Lebedev（1959）和Gladyshev（1963）提出，随后在Hurd（1969）和Gardner（1972）的研究中得到广泛发展和推广。二阶循环平稳过程的理论由Boyles & Gardner（1983）和Gardner（1986b）进一步发展，而Brown III（1987）和Gardner（1986c）则进一步推进了复值过程的理论。循环平稳分析为研究这些过程提供了稳健的统计理论，并发展出了与研究平稳过程时所使用的工具相类似的工具（例如均值、互相关、互谱密度等）；在分析平稳过程时，这些工具会自然地退化为相应的平稳情形。

Kim 等 （1996）提出了循环平稳经验正交函数（CSEOFs），本质上将 SPOD 扩展到一维数据的循环平稳过程。Kim 与 North （1997）通过若干近似降低计算成本，将该技术修改为适用于多维数据。然而，由于文献对于这些技术的推导、性质、解释和计算缺乏清晰说明，其应用一直受到限制。此外，尽管采用了上述近似，两种表述在高维数据上的计算仍难以实现。本文通过将 CSEOFs 的精确形式（Kim 等 1996）扩展至大型多维数据，将 SPOD 扩展到具有时间周期性统计特性的流场。下文将这种方法称为循环平稳 SPOD（简称 CS-SPOD）。

用于建模相干结构的方法也在考察范围内。具体而言，我们考虑预解分析（也称为输入/输出分析），其目标是寻找相对于能量增益能够产生放大程度最高的响应模态的强迫模态。当应用于湍流流动时，非线性模态相互作用被视为作用于线性化时间平均湍流平均流的强迫项（McKeon & Sharma 2010）。预解分析已被用于研究广泛的转捩流和湍流（Cossu et al. 2009；McKeon & Sharma 2010；Meliga et al. 2012；Sharma & McKeon 2013；Oberleithner et al. 2014；Jeun et al. 2016；Schmidt et al. 2018）等。Towne 等人（2018）建立了谱正交分解与预解之间的理论联系，表明当预解强迫模态彼此不相关时，预解输出模态等于谱正交分解模态。这为使用预解分析建立湍流流场时空统计的模型提供了理论基础（Moarref et al. 2013；Towne et al. 2020；Amaral et al. 2021），并推动了各种方法的发展（Morra et al. 2019；Pickering et al. 2021），以帮助对强迫系数进行白化，从而改善

这些模型。Padovan Padovan 等人 (2020) 和 Padovan & Rowley (2022) 将预解分析扩展到具有时周期平均流的流场，并称之为谐波预解分析。由此得到一组频率耦合方程，能够研究这些时间周期性流场中存在的一阶三元相互作用。与谱正交分解和预解分析之间的关系类似，本文建立了 CS-SPOD 与谐波预解分析之间的理论联系。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍并概述循环平稳过程的理论，并回顾一种计算其统计量的算法。在§3中，我们推导 CS-SPOD，探讨其性质，并提出一种高效的计算算法。在§4中验证该方法后，我们在§5中展示 CS-SPOD 的实用性。最后，在§6中，我们探讨 CS-SPOD 与谐波预解分析之间的关系。第8 节总结本文并概述主要内容。

2. 循环平稳理论

本节概述循环平稳分析理论及用于研究该理论的工具，并重点关注流体动力学。详尽的综述可见于Gardner 等人(2006）、Antoni (2009）和Napolitano (2019）。

复值标量过程 $q(t)$在时刻 t 若其均值和自相关函数以 T_0 (Gardner 1986*b*）为周期，则在广义平稳意义下是循环平稳的，亦即

$$E\{q(t)\} = E\{q(t+T_0)\}, \tag{2.1a}$$
$$R(t,\tau) = R(t+T_0,\tau), \tag{2.1b}$$

其中，$E\{\cdot\}$ 是期望算子，R 是自相关函数，τ 是时延。由于均值和自相关函数具有时间周期性，因此可以将它们表示为傅里叶级数

$$E\{q(t)\} = \sum_{k_\alpha=-\infty}^{\infty} \hat{q}_{k_\alpha\alpha_0} e^{i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t}, \tag{2.2a}$$
$$R(t,\tau) \equiv E\{q(t+\tau/2)q^*(t-\tau/2)\} = \sum_{k_\alpha=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{k_\alpha\alpha_0}(\tau) e^{i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t},$$

其中，$k_\alpha \in \mathbb{Z}$ 和傅里叶级数系数定义如下

$$\hat{q}_{k_\alpha\alpha_0} \equiv \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} E\{q(t)\} e^{-i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t} dt, \tag{2.3a}$$
$$\hat{R}_{k_\alpha\alpha_0}(\tau) \equiv \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R(t,\tau) e^{-i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t} dt, \tag{2.3b}$$

其中，$\alpha_0 = 1/T_0$ 是基周期频率。傅里叶系数 ˆ $R_{k_\alpha\alpha_0}(\tau)$称为 $q(t)$在循环频率 $k_\alpha\alpha_0$处的循环自相关函数。如果过程 ˆ 含有非零的 ˆ$q_{k_\alpha\alpha_0}$ 和/或 $R_{k_\alpha\alpha_0}(\tau)$，则分别称其在循环频率 $k_\alpha\alpha_0$处具有一阶和二阶循环平稳性。广义平稳过程 ˆ 是一种特殊情况，其中 $R_{k_\alpha\alpha_0}(\tau)$ $\neq 0$，且仅对 $k = 0$ 成立。

如果过程 $q(t)$在循环频率$k_\alpha\alpha_0$处包含确定性周期分量，那么它在循环频率 $k_\alpha\alpha_0$处会表现出一阶、二阶（以及任何更高阶）的循环平稳性。因此，确定性分量会产生纯一阶分量和非纯（即由低阶分量组成的）

二阶（或更高阶）分量（Antoni 等人 2004年）。Antoni 等人 （2004年）以及 Antoni（2009年）指出，在物理系统中，分别分析一阶和二阶分量至关重要，其中二阶分量 $q''(t)$ 定义为

$$q''(t) \equiv q(t) - E\{q(t)\}, \tag{2.4}$$

使得 $q(t) = E\{q(t)\} + q''(t)$ 且均值 $E\{q(t)\} = E\{q(t+T_0)\}$ 是 T_0 周期性的。考虑到一阶分量是源自强迫的确定性音调分量，而二阶分量是代表受强迫影响的基础湍流的随机分量，这种方法在物理上是合理的。这种顺序方法类似于三重分解（Hussain& Reynolds 1970，1972），其中基础流场被分解为一阶（相位平均）和二阶（湍流/残差）分量。

在本文中，我们假设所有使用二阶分析工具分析的过程均为零均值过程（或已去除其一阶分量）。因此，当我们说某个过程在循环频率 $k_\alpha\alpha_0$处呈现二阶循环平稳性时，我们指的是该过程在 $k_\alpha\alpha_0$处呈现纯二阶循环平稳性。

2.1. 二阶循环平稳分析工具

在流体动力学中，我们经常关注两个量之间的相关性。因此，我们现在将考虑时刻 t 、自变量（或空间位置）为 $\boldsymbol{x}$ 时的复值过程 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$，而不是标量过程 $q(t)$。如果两个过程的互相关函数可以表示为傅里叶级数，则称这两个过程联合循环平稳，表示为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t, \tau) \equiv E\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t+\tau/2)\boldsymbol{q}^*(\boldsymbol{x}', t-\tau/2)\} = \sum_{k_\alpha=-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{R}}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \tau) e^{i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t}, \tag{2.5}$$

其中，傅里叶级数系数为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \tau) \equiv \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t, \tau) e^{-i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t} dt, \tag{2.6}$$

这些系数称为循环频率 $k_\alpha\alpha_0$ 下 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}')$ 之间的循环互相关函数，其中 $(\cdot)^*$ 是 $(\cdot)$ 的复共轭。若唯一非零的循环频率为 $k_\alpha\alpha_0 = 0$，则 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}')$ 联合广义平稳。与平稳分析中的常见假设类似，我们假设所有过程分别满足循环平稳，且联合满足循环平稳。

循环平稳过程可通过循环互谱密度（CCSD）在双频域中进行分析。CCSD 是循环平稳过程的互谱密度（CSD）推广，并通过循环维纳–辛钦关系与循环互相关函数相关联（Gardner 与 Robinson，1989年）

$$\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\boldsymbol{R}}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \tag{2.7}$$

CCSD 也可以写为

$$\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', f) \equiv \tag{2.8}$$
$$\lim_{\Delta f\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Delta f E\left\{\hat{\boldsymbol{q}}_{1/\Delta f}(\boldsymbol{x}, t, f+\frac{1}{2}k_\alpha\alpha_0)\hat{\boldsymbol{q}}^*_{1/\Delta f}(\boldsymbol{x}', t, f-\frac{1}{2}k_\alpha\alpha_0)\right\} dt,$$

其中，$\hat{\boldsymbol{q}}_W(\boldsymbol{x},t,f) \equiv \int_{t-\frac{W}{2}}^{t+\frac{W}{2}} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t')e^{-i2\pi f t'}dt'$ 是$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$的短时傅里叶变换，$f$ 是谱频率，$k_\alpha\alpha_0$ 是循环频率。这表明，随着带宽趋近于零，CCSD 表示频率为 $f+\frac{1}{2}k_\alpha\alpha_0$ 和 $f-\frac{1}{2}k_\alpha\alpha_0$的两个谱分量的时间平均统计相关性（零时滞）（Napolitano 2019）。对于 $k_\alpha=0$，CCSD 自然退化为CSD，即 $\boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)$。循环平稳过程中谱分量之间的相关性对于推导 CS-SPOD 至关重要；而对于平稳过程，谱分量之间缺乏相关性，这正是 SPOD 能够独立分析各个频率的原因。

维格纳-维尔（WV）谱（Martin 1982；Martin& Flandrin 1985；Antoni2007）显示了过程随时间（或相位）变化的谱信息；对于循环平稳过程，其表达式为

$$\boldsymbol{WV}(\boldsymbol{x},t,f)=\sum_{k_\alpha=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x},f)e^{i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t}, \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x},\ f)$为循环功率谱密度（即 $\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x},\ f)$）。虽然 WV 谱不具物理意义，但由于 WV 谱中的负交互项，它可能包含负能量密度（Antoni 2007；Flandrin1998）。然而，Antoni(2007）表明，随着采样时间增加，这种情况可以任意减小。CCSD 和 WV 谱可对频率积分（Gardner 1994；Randall等 2001），分别得到瞬时方差以及瞬时方差的循环分布

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x},t)=E\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{q}^*(\boldsymbol{x},t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{WV}(\boldsymbol{x},t,f)df, \tag{2.10a}$$

$$\hat{\boldsymbol{m}}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x},f)df, \tag{2.10b}$$

其中 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x},\ t)$ 是过程的均值方差，$\hat{\boldsymbol{m}}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x})$ 则量化了各循环频率 $k_\alpha\alpha_0$ 对均值方差的贡献。

到目前为止，我们一直假设循环频率已知，但情况并非总是如此。为了确定系统中存在的循环频率，通过将 CCSD 重写为以下形式，来探索所有可能的循环频率 α

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\alpha,f)\equiv$$
$$\lim_{\Delta f\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\Delta f E\left\{\boldsymbol{q}_{1/\Delta f}(\boldsymbol{x},t,f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{q}^*_{1/\Delta f}(\boldsymbol{x}',t,f-\frac{\alpha}{2})\right\}dt. \tag{2.11}$$

当 α满足以下条件时，该过程在循环频率 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\alpha,f)\neq 0$处表现出循环平稳性。可能的循环频率范围为 $\alpha=[-0.5/\Delta t\quad 0.5/\Delta t]$，搜索时必须采用分辨率 $\Delta\alpha=1/T$ (Gardner 1986*a*)，以确保捕获所有存在的循环频率。对于循环平稳过程，由于互相关函数具有周期性，谱相关在 α 上变为离散形式，即

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\alpha,f)=\sum_{k_\alpha=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)\delta(\alpha-k_\alpha\alpha_0). \tag{2.12}$$

瞬时方差的循环分布改写为

$$\hat{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x},\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\alpha,f)df, \tag{2.13}$$

对于循环平稳过程，它同样会变为离散的。

我们必须澄清一个术语问题。鉴于平稳过程是循环平稳过程的子集，所有平稳过程也都是循环平稳过程。我们采用限制最严格的描述方式，即将平稳过程称为平稳过程，而非循环平稳过程。说某个过程具有循环平稳性，意味着至少存在一个循环频率 $k_\alpha\alpha_0$，$k_\alpha \neq 0$。

2.2. 循环遍历性

在流体动力学中，获取单个过程的多个实现十分费力，因此我们常在平稳过程中借助遍历性，将系综平均等同于单个实现的长时间平均。类似地，我们可以利用 Boyles 与 Gardner (1983年) 所述的循环遍历性概念，以适当的时间平均取代期望算子，具体而言，即循环平均算子(Braun 1975年)

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t) = E\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\} = \lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t+pT_0), \tag{2.14}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},\ t)$ 为均值。当数据与强迫锁相（即每个周期以整数个样本进行采样）时，使用循环平均算子；它与三重分解中使用的相位平均相同（Hussain &Reynolds1970；Reynolds & Hussain 1972）。由于循环平均算子是周期性的，因此可将其表示为泊松和

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t) = E\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\} = \sum_{k_\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t}\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)e^{-i2\pi(k_\alpha\alpha_0)t}dt. \tag{2.15}$$

此定义用于非相位锁定数据，或用于滤除被视为统计噪声的一阶分量（Franceschini 等人2022；Sonnenberger等人2000），与 Mezi´c （2013）以及Arbabi& Mezi´c（2017年）在限定为时间周期平均时所采用的谐波平均方法相同。

2.3. 计算循环互谱密度

本节将讨论根据离散数据计算循环互谱密度时的实际考量和细节。设向量 $\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^N$ 表示一个流场快照，即过程 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$ 在时间 t_k、空间区域 Ω的一组点上的瞬时状态。向量 N 的长度等于空间点数乘以状态变量数。我们假设这些数据包含 M 个等间隔快照，其中 $t_{k+1} = t_k + \Delta t$。此外，我们假设这些数据是相位锁定的，也就是说，基周期 T_0 内包含整数个时间步，并定义 $N_\theta = T_0/\Delta t$ †。采用 Towne 等人（2018）的类似记号，我们估计循环互谱密度张量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\alpha,f)$，它表示循环频率 α和谱频率 f下 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$ 与 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}',t)$ 之间的谱相关。对于循环平稳过程，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\alpha,f)$ 仅在 $\alpha = k_\alpha\alpha_0$时非零，因此写作 $\boldsymbol{S}_{k_\alpha\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)$，或等价地写作 $\boldsymbol{S}_{k_\alpha/T_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)$。现在，时空数据可表示为数据矩阵 Q 和时间向量 T

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_M] \in \mathbb{R}^{N\times M}, \quad \mathbf{T} = [t_1,t_2,\cdots,t_M] \in \mathbb{R}^M. \tag{2.16, 2.17}$$

† 这一限制简化了计算并降低了计算开销，但原则上可通过采用式（2.15）中的泊松求和时间平均，以及算法 2所示的计算效率较低的 CS-SPOD 形式来放宽这一限制。或者，也可以对非相位锁定数据进行时间插值，使其成为相位锁定数据。

尽管我们有如式（2.8 和 2.11）所示的 CCSD 公式，但这并不能得到 CCSD 的一致估计量，因为随着可用数据量增大，CCSD 估计值的方差并不会趋于零（Jenkins 1968; Antoni2007; Napolitano 2019）。相反，这样得到的估计值，其方差等于估计值本身的平方。通过采用适当的平均技术，可以得到 CCSD 的一致估计量。最常用的方法是时间平均Welch方法（Welch 1967），因为它具有较高的计算效率。Welch方法对多个 CCSD 求平均，从而得到 CCSD 的一致估计值。由式（2.11）可知，为了计算 CCSD，Welch 过程需对数据的两个频移版本进行处理，它们定义如下：

$$\mathbf{Q}_{\pm\alpha/2} = \mathbf{Q}e^{-i2\pi(\pm\alpha/2)\mathbf{T}} = [\mathbf{q}_{1,\pm\alpha/2}, \mathbf{q}_{2,\pm\alpha/2}, \cdots, \mathbf{q}_{M,\pm\alpha/2}], \tag{2.18}$$

其中，$\mathbf{q}_{k,\pm\alpha/2}$ 是对应于 k^{th}快照的 $\pm\frac{1}{2}\alpha$ 频移数据矩阵，即 $\mathbf{q}_{k,\pm\alpha/2} = \mathbf{q}_k e^{-i2\pi(\pm\alpha/2)t_k}$。接下来，我们将这两个频移数据矩阵划分为若干个可能相互重叠的块。每个块表示为

$$\mathbf{Q}^{(n)}_{\pm\alpha/2} = [\mathbf{q}^{(n)}_{1,\pm\alpha/2}, \mathbf{q}^{(n)}_{2,\pm\alpha/2}, \cdots, \mathbf{q}^{(n)}_{N_f,\pm\alpha/2}] \in \mathbb{C}^{N\times N_f}, \tag{2.19}$$

其中，N_f 是每个分块中的快照数，n^{th}分块的 k^{th} 项为$\mathbf{q}^{(n)}_{k,\pm\alpha/2} = \mathbf{q}_{k+(n-1)(N_f-N_0),\pm\alpha/2}$。分块总数 N_b由 $N_b = \lfloor \frac{N-N_0}{N_f-N_0} \rfloor$给出，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整算子，N_0 是每个分块重叠的快照数。循环遍历性假设认为，这些分块中的每一个都可视为该循环平稳流的一组实现中的单个实现。随后，使用窗函数 w计算两个频移矩阵中每个分块的离散傅里叶变换，得到

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(n)}_{\pm\alpha/2} = [\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{1,\pm\alpha/2}, \hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{2,\pm\alpha/2}, \cdots, \hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{N_f,\pm\alpha/2}], \tag{2.20}$$

其中

$$\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,\pm\alpha/2} = \frac{1}{\sqrt{N_f}} \sum_{j=1}^{N_f} w_j \mathbf{q}^{(n)}_{j,\pm\alpha/2} e^{-i2\pi(k-1)[(j-1)/N_f]}, \tag{2.21}$$

对于 $k = 1, \cdots, N_f$和 $n = 1, \cdots, N_b$其中 $\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,\pm\alpha/2}$是$n^{th}$ 块频移数据矩阵的 k^{th} 傅里叶分量，即 $f_{k,\pm\alpha_0/2}$。采用窗函数的节点值 w_j，以减轻数据在每个块内非周期性所导致的频谱泄漏和循环泄漏。由于应用了 $\pm\alpha/2$ 频移，频移数据矩阵的 $\pm\alpha/2$离散频率表示一个

$$f_{k,\pm\alpha/2} = f_k \pm \alpha/2 = \begin{cases} \dfrac{k-1}{N_f \Delta t} & \text{for } k \leqslant N_f/2, \\ \dfrac{k-1-N_f}{N_f \Delta t} & \text{for } k > N_f/2. \end{cases} \pm \frac{\alpha}{2} \tag{2.22}$$

这表明，按照（2.11）的要求，频率分量 $f_k + \alpha/2$ 和 $f_k - \alpha/2$在移位后的频率向量 $f_{k,\pm\alpha/2}$中具有相同的索引 k。随后，在循环频率 α和谱频率 f_k处估计循环互谱密度张量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \alpha, f)$，方法如下

$$\mathbf{S}_{f_k,\alpha} = \frac{\Delta t}{sN_b} \sum_{n=1}^{N_b} \hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,\alpha/2} (\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,-\alpha/2})^*, \tag{2.23}$$

其中， $s = \sum_{j=1}^{N_f} w_j^2$ 是归一化常数，用于校正加窗信号与未加窗信号之间的功率差异。将相同索引 k 处的傅里叶系数排列成新的频率数据矩阵，可将其简洁地表示为

$$\hat{\mathbf{Q}}_{f_k,\pm\alpha/2} = \sqrt{\kappa}[\hat{\mathbf{q}}_{k,\pm\alpha/2}^{(1)}, \hat{\mathbf{q}}_{k,\pm\alpha/2}^{(2)}, \cdots, \hat{\mathbf{q}}_{k,\pm\alpha/2}^{(N_b-1)}, \hat{\mathbf{q}}_{k,\pm\alpha/2}^{(N_b)}] \in \mathbb{C}^{N\times N_b}, \tag{2.24}$$

其中 $\kappa = \frac{\Delta t}{sN_b}$。$\mathbf{S}_{f_k,\ \alpha}$ 随后估算为

$$\mathbf{S}_{f_k,\alpha} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k,\alpha/2}(\hat{\mathbf{Q}}_{f_k,-\alpha/2})^*. \tag{2.25}$$

该估计会收敛，即偏差和方差变为零，只要 N_b 和 N_f 同时增大（Welch 1967; Bendat 与 Piersol 2011年; Antoni 2007年）。根据数据快照计算循环互谱密度的算法概述见算法1，其他所有二阶循环平稳分析工具均可由此计算。为有效管理内存，在各自循环的每次迭代后，均可删除赋值给“←”的变量。与互谱密度的 Welch 估计类似，循环互谱密度的估计也受到标准偏差-方差权衡的影响，因此应谨慎处理，以确保统计特性充分收敛。在循环互谱密度中，存在一种与谱泄漏类似的现象，称为循环泄漏（Gardner1986a），它会导致循环频率错误。使用汉宁窗或汉明窗时采用 67% 的重叠率，可有效最大限度地减少循环泄漏并降低方差（Antoni 2007年）。要充分降低方差，需要 $T\Delta f >> 1$ （Antoni, 2009年）。

算法1 使用频移数据矩阵计算循环互谱密度的算法。1：对于每个数据块， $n = 1$、**2,** $\cdots$**,** N_b**，执行▷ 计算频移块数据矩阵 2：** $\mathbf{Q}_{\pm\alpha/2}^{(n)} \leftarrow [\mathbf{q}_{1+(n-1)(N_f-N_0)\ \pm\alpha/2}$**,** $\mathbf{q}_{2+(n-1)(N_f-N_0)\ \pm\alpha/2}$**,** $\cdots$**,** $\mathbf{q}_{N_f+(n-1)(N_f-N_0)\ \pm\alpha/2}]$**▷ 使用（加窗）快速傅里叶变换，计算并存储每个频移块数据矩阵按行排列的离散傅里叶变换 3：** $\hat{}\mathbf{Q}_{\pm\alpha/2}^{(n)} = \mathbf{FFT}(\mathbf{Q}_{\pm\alpha/2}^{(n)}) = [\hat{}\mathbf{q}_1^{(n)}{}_{,\pm\alpha/2}$**,** $\hat{}\mathbf{q}_2^{(n)}{}_{,\pm\alpha/2}$**,** $\cdots$**,** $\hat{}\mathbf{q}_{N_f}^{(n)}{}_{,\pm\alpha/2}]$**▷ 列** $\hat{}\mathbf{q}_k^{(n)}{}_{,\pm\alpha/2}$ **包含离散频率** k^{th} **处傅里叶模态的第** n^{th} **个实现** f_k**,** $\pm\alpha/2$**4：结束循环 5：对于每个频率** $k = 1$、**2,** $\cdots, N_f$ **（或感兴趣的某个子集），执行**

▷ k^{th} $^{(n)}_{\pm\alpha/2}$

6 $\cdots$ $^{(N_b-1}$ $^{(N_b}$

从每个 $\hat{}\mathbf{Q}$ **的列中汇集傅里叶实现矩阵：** $\hat{}\mathbf{Q}_{f_k,\pm\alpha/2} \leftarrow \sqrt{\kappa}[\hat{}\mathbf{q}_k^{(1)}{}_{,\pm\alpha/2}$**,** $\hat{}\mathbf{q}_k^{(2)}{}_{,\pm\alpha/2}$**,** **,** $\hat{}\mathbf{q})_{k,\pm\alpha/2}$**,** $\hat{}\mathbf{q})_{k,\pm\alpha/2}]$**▷ 计算谱频率** f_k **和循环频率** α**处的循环互谱密度** $\hat{}\ \hat{}$ **7：** $\mathbf{S}_{f_k,\alpha} = \mathbf{Q}_{f_k,\alpha/2}(\mathbf{Q}_{f_k,-\alpha/2})^*$**.8：结束循环**

3. 循环平稳谱正交分解

3.1. 推导

CS-SPOD 的目标是寻找能够在平均意义下最佳近似零均值随机过程的确定性函数。为清晰起见，我们采用与 Towne 等人 提出的 SPOD 推导相似的方法和符号来推导 CS-SPOD。

（2018），并请读者参阅 Brereton 和 Kodal （1992年）、Towne等人（2018），以及 Schmidt 和 Colonius （2020），以了解 POD 和 SPOD 的详细讨论。与 SPOD 一样，我们要寻找同时依赖于空间和时间的确定性模态，以便最佳地分解流场的时空统计特性。因此，我们假设随机过程的每个实现都属于一个带有内积的希尔伯特空间

$$\langle \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \rangle_{x,t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \boldsymbol{q}_2^*(\boldsymbol{x},t) \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{x},t) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

其中，$\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{x},t)$ $\boldsymbol{q}_2(\boldsymbol{x},t)$ 是流场的两个实现，$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ 是正定加权张量，而 Ω 表示感兴趣的空间域。接下来，我们寻求使下式最大化：

$$\lambda = \frac{E\{|\langle \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t) \rangle_{x,t}|^2\}}{\langle \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t) \rangle_{x,t}}, \tag{3.2}$$

由此得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,t') \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}',t') \mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}t' = \lambda \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t), \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,t') \equiv E\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{q}^*(\boldsymbol{x}',t')\}$ 是两点时空相关张量。在此之前，我们并未对流场作出任何假设，因此其推导与谱正交分解（Lumley 1967, 1970; Towne 等 2018）完全相同。

由于循环平稳流动无限期持续，其时空范数下的能量是无限的，如（3.1）所示。因此，（3.3）的特征模态不具备本征正交分解或谱正交分解所依赖的任何有用性质。为解决这一问题，我们在谱域中进行新的特征值分解，从中确定具有所需性质的模态。我们采用如下试探形式：

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{m \in \mathcal{A}_m} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \gamma + m\alpha_0) e^{i2\pi(\gamma + m\alpha_0)t}. \tag{3.4}$$

解的试探形式 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$ 中包含的频率集合，称为 γ 解频率集合

$\Omega_\gamma = \{ \cdots, \ \gamma - 2\alpha_0, \ \gamma - \alpha_0, \ \gamma, \ \gamma + \alpha_0, \ \gamma + 2\alpha_0, \ \cdots \}$。

在附录中A，然后我们使用§2 中的理论推导无限维CS-SPOD特征值问题，其紧凑形式为

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma) \mathsf{W}(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}',\gamma) \mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \lambda \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\gamma), \tag{3.5}$$

其中

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma) = \tag{3.6a}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma-\alpha_0) & \boldsymbol{S}_{-\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma-\frac{\alpha_0}{2}) & \boldsymbol{S}_{-2\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma) & \ddots \\ \ddots & \boldsymbol{S}_{\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma-\frac{\alpha_0}{2}) & \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma) & \boldsymbol{S}_{-\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma+\frac{\alpha_0}{2}) & \ddots \\ \ddots & \boldsymbol{S}_{2\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma) & \boldsymbol{S}_{\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma+\frac{\alpha_0}{2}) & \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma+\alpha) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) & & & \\ & & \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) & & \\ & & & \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.6b) \qquad \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\gamma) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma-\alpha_0) \\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma) \\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+\alpha_0) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.6c)$$

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}',\ \gamma)$ 是 CS-SPOD 分解张量，$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ 是拼接权重张量，而 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\ \gamma)$ 是 CS-SPOD 特征向量。CS-SPOD 特征向量 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\ t)$ 在每个 $f \in \Omega_\gamma$ 处的傅里叶级数系数为 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\ f)$。

CS-SPOD 中这种频率耦合的出现，是因为相隔 $n\alpha_0$ 的频率分量彼此相关，如（2.8）所示。相比之下，平稳过程中的频率之间不存在相关性，因此可通过 SPOD 对每个频率独立求解。由于这种耦合，在 γ 和$\gamma+\alpha_0$ 处进行的 CS-SPOD 求解的是同一个问题，即得到 $\Omega_\gamma = \Omega_{\gamma+z\alpha_0}$，其中 $z \in \mathbb{Z}$，这意味着 CS-SPOD 仅在对应于 $\gamma \in \Gamma$的频率集合中包含唯一解，其中 $\Gamma = (-\alpha_0/2,\ \alpha_0/2]$。

在实践中，不求解无限维问题，而是将 $\mathcal{A}_m$限制为 a_1 个谐波，以限制可求解的频率，从而得到 $\mathcal{A}_m = \{-a_1, -a_1+1, \cdots, 0, \cdots, a_1-1,\ a_1\}$和 $\Omega_\gamma = \{-a_1\alpha_0+\gamma, (-a_1+1)\alpha_0+\gamma,\ \cdots,\ \gamma,\ \cdots,\ (a_1-1)\alpha_0+\gamma,\ a_1\alpha_0+\gamma\}$。此外，流场可能仅在基周期频率的 a_2 个谐波处呈现循环平稳性，从而得到 $\mathcal{A}_n = \{-a_2, -a_2+1, \cdots, 0, \cdots, a_2-1, a_2\}$。我们采用相同的记号来限制用于计算各种二阶工具（如维格纳–维尔谱）的谐波。这些限制产生 $2a_1+1$ 个耦合方程，进而形成一个 $2a_1+1 \times 2a_1+1$ 分块特征值系统，该系统具有 $2a_2+1$ 带状分块对角结构。在实践中，a_1 的选择应确保 Ω_γ 涵盖所有关注的频率，a_2 的选择应涵盖流场中存在的所有循环频率，并且 $a_2 < a_1$。对于 $a_1 = 2$，$a_2 = 1$ 的一个示例如下（为简洁起见，我们省略了该方程中对 $\boldsymbol{x}$ 的显式依赖）

$$\boldsymbol{S}(\gamma) = \qquad (3.7)$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_0(\gamma-2\alpha_0) & \boldsymbol{S}_{-\alpha_0}(\gamma-\frac{3}{2}\alpha_0) & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{S}_{\alpha_0}(\gamma-\frac{3}{2}\alpha_0) & \boldsymbol{S}_0(\gamma-\alpha_0) & \boldsymbol{S}_{-\alpha_0}(\gamma-\frac{1}{2}\alpha_0) & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S}_{\alpha_0}(\gamma-\frac{1}{2}\alpha_0) & \boldsymbol{S}_0(\gamma) & \boldsymbol{S}_{-\alpha_0}(\gamma+\frac{1}{2}\alpha_0) & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{S}_{\alpha_0}(\gamma+\frac{1}{2}\alpha_0) & \boldsymbol{S}_0(\gamma+\frac{1}{2}\alpha_0) & \boldsymbol{S}_{-\alpha_0}(\gamma+\frac{3}{2}\alpha_0) \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{S}_{\alpha_0}(\gamma+\frac{3}{2}\alpha_0) & \boldsymbol{S}_0(\gamma+2\alpha_0) \end{bmatrix}.$$

在 $a_2 = 0$ 的极限情况下，我们得到一个分块对角的 CS-SPOD 分解矩阵，其中每个对角块都是标准的 SPOD 特征值问题。

3.2. *CS-SPOD* 的性质

由于 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 是紧且有限的，希尔伯特–施密特理论保证了若干与本征正交分解和谱正交分解相类似的性质（Lumley 1967，1970；Towne 等2018）。对于每个唯一的频率集合 Ω_γ，存在可数无穷多个特征函数 $\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)$，它们在空间内范数 $\langle \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \rangle_x = \int_\Omega \boldsymbol{q}_2^*(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 下与同一频率集合 Ω_γ 中的所有其他模态正交，即 $\langle \boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\ \boldsymbol{\Psi}_k(\boldsymbol{x},\gamma) \rangle_x = \delta_{j,k}$。每个流动实现在解频率处的以下拼接向量

可按最优方式展开为

$$\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\gamma)=\begin{bmatrix}\vdots\\ \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},\gamma-\alpha_0)\\ \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},\gamma)\\ \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},\gamma+\alpha_0)\\ \vdots\end{bmatrix},\qquad \hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j(\gamma)\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma),\tag{3.8a,b}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},f)$ 是每个流动实现 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$ 在频率 f 处的时间傅里叶分解，而 $a_j(\gamma)=\langle\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\gamma),\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\rangle_x$ 是展开系数，它们彼此不相关，即 $E\{a_j(\gamma)a_k^*(\gamma)\}=\lambda_j(\gamma)\delta_{j,k}$。

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 是半正定的，这意味着 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 具有如下唯一的对角表示

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\gamma)\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\boldsymbol{\Psi}_j^*(\boldsymbol{x}',\gamma),\tag{3.9}$$

其中，CS-SPOD 模态是其主成分。这表明，CS-SPOD 能够确定可对二阶统计量进行最优重构的模态，每次对应一组频率 Ω_γ。

CS-SPOD 模态仅在对 $\mathrm{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 的总能量重构方面具有最优性。因此，尽管 $\mathrm{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 中的每个循环互谱密度都有对角表示，但 $\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)$ 的各个分量通常在空间范数下并不正交，即 $\langle\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},f)\,\boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{x},f)\rangle_x\neq\delta_{j,k}$。平稳过程是一个例外，此时不同频率分量之间的相关性为零，从而得到一个块对角矩阵，其中 $\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)$ 仅包含一个非零的 $\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)$ 分量，且$\langle\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\,\boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{x},\gamma)\rangle_x=\delta_{j,k}$。

将特征向量 $\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)$ 变换回时域，并注意到式（3.4）中定义的试探形式，可得 $\boldsymbol{\phi}_{\gamma,j}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{m\in\mathcal{A}_m}\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0)e^{i2\pi(\gamma+m\alpha_0)t}$；它们在完整周期上积分得到的时空内积中彼此正交。因此，频率集合 Ω_γ 中每个频率对应的模态都可以视为唯一的时空模态。

两点时空相关张量可以写为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,t')=\int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\gamma)\boldsymbol{\phi}_{\gamma,j}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\phi}_{\gamma,j}^*(\boldsymbol{x}',t')d\gamma.\tag{3.10}$$

将 $\boldsymbol{\phi}_{\gamma,j}(\boldsymbol{x},t)$ 的频率展开代入并应用 $t'=t-\tau$，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,\tau)=\int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\gamma)\sum_{m\in\mathcal{A}_m}\sum_{m'\in\mathcal{A}_m}\\ \boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0)\boldsymbol{\psi}_j^*(\boldsymbol{x}',\gamma+m'\alpha_0)e^{i2\pi(m-m')\alpha_0 t}e^{i2\pi(\gamma+m'\alpha_0)\tau}d\gamma,\end{aligned}\tag{3.11}$$

由此得到的重构具有时间周期性，这是由于 $e^{i2\pi(m-m')\alpha_0 t}$，这也正是选择式（3.4）所定义试探形式的原因。

总之，对于循环平稳流动，CS-SPOD 得到的模态以一组频率（Ω_γ）振荡，并能最优地表示二阶时空流动统计量。

3.3. 实际计算 *CS-SPOD* 模态

现在，我们将详细说明如何根据数据计算 CS-SPOD 模态，并介绍一种将计算成本和内存需求降低到与 SPOD 相近水平的技术。由于

互谱密度的维度为 $N \times N$，整体特征系统 S_{γ_k}（即 $\mathsf{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 的离散近似）的规模为 $(2a_1+1)N \times (2a_1+1)N$。对于常见的流体动力学问题，这可能形成一个规模为 $\mathrm{O}(10^6-10^9) \times \mathrm{O}(10^6-10^9)$ 的稠密矩阵，仅将其存储在内存中就难以实现，更不用说计算其特征分解了。这也是 Kim 等人（1996）以及 Kim 和 North（1997）的 CSEOF 方法中所需求逆运算的维度。因此，我们推导出一种类似于本征正交分解（Sirovich 1987）和谱正交分解（Citriniti & George 2000；Towne et al. 2018）中所采用技术的快照法，将特征值问题的规模从 $(2a_1+1)N \times (2a_1+1)N$ 降至 $(2a_1+1)N_b \times (2a_1+1)N_b$。由于 $N_b << N$，快照法使特征值问题在计算上变得可行。

为利用有限数量的离散数据求得 CS-SPOD，我们将 Welch 计算程序代入频率受限版本（3.6a）各项中的 CCSD。数值计算结果如下：

$$\mathsf{S}_{\gamma_k} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\widetilde{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k}, \qquad \widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,-a_1\alpha_0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,a_1\alpha_0} \end{bmatrix}, \tag{3.12a, b}$$

其中

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,m\alpha_0} = \sqrt{\kappa}[\hat{\mathbf{q}}^{(1)}_{k,m\alpha_0}, \hat{\mathbf{q}}^{(2)}_{k,m\alpha_0}, \cdots, \hat{\mathbf{q}}^{(N_b-1)}_{k,m\alpha_0}, \hat{\mathbf{q}}^{(N_b)}_{k,m\alpha_0}] \in \mathbb{C}^{N\times N_b}. \tag{3.13}$$

$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}$ 称为离散 Ω_{γ_k} 解频率集合上的拼接频率数据矩阵，$\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,m\alpha_0}$ 是 $m\alpha_0$ 频移数据矩阵中 n^{th} 块的 k^{th} DFT 分量。如前所述，解频率集合仅在$\gamma \in \Gamma$时唯一，因此相应的 DFT 频率为

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{k-1}{N_f\Delta t} & \text{for } k \leqslant \lfloor \dfrac{\alpha_0 N_f \Delta t}{2} \rfloor + 1, \\ \dfrac{k-1-N_f}{N_f\Delta t} & \text{for } N_f - \lceil \dfrac{\alpha_0 N_f \Delta t}{2} \rceil + 1 < k \leqslant N_f, \end{cases} \tag{3.14}$$

由此构成元素 $\gamma_k \in \Gamma_k$。展开（3.12）得

$$\mathsf{S}_{\gamma_k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,-a_1\alpha_0}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k,-a_1\alpha_0} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,-a_1\alpha_0}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,-a_1\alpha_0}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k,a_1\alpha_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k,-a_1\alpha_0} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k,a_1\alpha_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,a_1\alpha_0}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k,-a_1\alpha_0} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,a_1\alpha_0}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k} & \cdots & \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,a_1\alpha_0}\hat{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k,a_1\alpha_0} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

该表达式表明S_{γ_k} 包含非对角项，这些项表示过程本身并不存在的谱相关（即在 $\mathcal{A}_n$ 中不存在）。然而，随着 N_b和 N 同时增大，该系统会收敛，并成为对（3.6a）的一致估计。因此，所有表示 $\mathcal{A}_n$ 中不存在的谱相关的项都会收敛至零。此外，该估计在数值上为半正定，因此得到的 CS-SPOD 模态将具备所需性质。需要指出的是，循环频率无需限制在 $\mathcal{A}_n$ 内即可进行数值计算，此处仅选择 a_1。

方程 n（3.12）表明，最终的特征值问题可以简洁地写为

$$\mathbf{S}_{\gamma_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{\gamma_k} = \mathbf{\Lambda}_{\gamma_k}\mathbf{\Psi}_{\gamma_k}, \tag{3.16a}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\widetilde{\mathbf{Q}}^{*}_{\gamma_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{\gamma_k} = \mathbf{\Lambda}_{\gamma_k}\mathbf{\Psi}_{\gamma_k}. \tag{3.16b}$$

空间内积权重

$$\langle \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\rangle_x = \int_\Omega \boldsymbol{q}_1^*(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_2(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.17}$$

近似为 $\langle \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\rangle_x = \mathbf{q}_1^*\mathbf{W}\mathbf{q}_2$ 其中$\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 是一个正定厄米矩阵，用于同时考虑离散网格上积分的权重和数值求积$\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{(2a_1+1)N\times(2a_1+1)N}$ 是$\mathbf{W}$ 的分块对角矩阵（类似于3.6b）。随后，CS-SPOD 模态由以下各列给出： $\mathbf{\Psi}_{\gamma_k}$ 并按照其对应的特征值排序，这些特征值由对角矩阵$\mathbf{\Lambda}_{\gamma_k}$给出。这些离散 CS-SPOD 模态具有与前文讨论的所有模态类似的性质，包括在离散意义下正交 $\mathbf{\Psi}^*_{\gamma_k}\mathbf{W}\mathbf{\Psi}_{\gamma_k} = \boldsymbol{I}$，并且能够对估计得到的 CS-SPOD 分解矩阵进行最优分解$\mathbf{S}_{\gamma_k} = \mathbf{\Psi}_{\gamma_k}\mathbf{\Lambda}_{\gamma_k}\mathbf{\Psi}^*_{\gamma_k}$ （即二阶统计量）。

至多可以得到 \(\min(N, N_b)\) 个非零特征值。因此，可以证明以下 $N_b \times N_b$ 特征值问题

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{*}_{\gamma_k}\mathbf{W}\widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\mathbf{\Theta}_{\gamma_k} = \widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{\gamma_k}\mathbf{\Theta}_{\gamma_k}, \tag{3.18}$$

具有相同的非零特征值（3.16）。这种方法称为快照法（Sirovich 1987）。相应的特征向量可精确地恢复为

$$\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\gamma_k} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\mathbf{\Theta}_{\gamma_k}\widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{\gamma_k}. \tag{3.19}$$

~除简单的加权矩阵$\mathbf{W}$外，只需确定拼接数据矩阵$\mathbf{Q}_{\gamma_k}$^ ~，这可以通过计算$\mathbf{Q}_{\gamma_k,m\alpha_0}$中的每一项轻松实现$\mathbf{Q}_{\gamma_k}$~ ~* ~，使用算法1即可。确定$\mathbf{Q}_{\gamma_k}$ 后，计算$\mathbf{Q}_{\gamma_k}\mathbf{W}\mathbf{Q}_{\gamma_k}$ ，然后进行特征值分解。通常只有前几个模态具有物理意义，因此可以采用截断分解，利用随机化线性代数方法确定数量有限的能量最高的 CS-SPOD 模态（Martinsson & Tropp2020）。通过计算 ~$\mathbf{Q}^*_{\gamma_k}\mathbf{W}$ ~$\mathbf{Q}_{\gamma_k}$的迹。

算法2 以一种实用但计算效率较低的方式实现了 CS-SPOD。该算法需要计算 $2a_1 + 1$ 循环平稳交叉谱密度，其计算成本约为 $2a_1+1$ 倍的谱正交分解。内存需求也以类似的方式增长。在分析大型数据集时，这可能会造成难以承受的负担。

~然而，由于$\mathbf{Q}_{\gamma_k}$ 中的所有项都具有 ^$\mathbf{Q}_{\gamma_k,m\alpha_0}$的形式，因此可以显著节省计算量；这些项表示频移数据矩阵的时间傅里叶变换中的 k^{th} 频率分量。频移数据第 n^{th}个实现的时间傅里叶变换为

$$\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,m\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{N_f}}\sum_{j=1}^{N_f} w_j \mathbf{q}^{(n)}_{j,m\alpha_0} e^{-i2\pi(k-1)[\frac{j-1}{N_f}]}, \tag{3.20a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N_f}}\sum_{j=1}^{N_f} w_j \mathbf{q}^{(n)}_{j} e^{-i2\pi(m\alpha_0\Delta t)[(j-1)+(n-1)(N_f-N_0)]} e^{-i2\pi(k-1)[\frac{j-1}{N_f}]}, \tag{3.20b}$$

其中， $e^{-i2\pi(m\alpha_0\Delta t)[(j-1)+(n-1)(N_f-N_0)]}$ 是频移操作。我们将其分离

算法 2 计算 CS-SPOD 的朴素算法。

1: 对于每个数据块 $n = 1$、2、$\cdots$、N_b，执行▷ 构建块数据矩阵 2: $\mathrm{Q}^{(n)} = [\mathrm{q}_{1+(n-1)(N_f-N_0)}, \mathrm{q}_{2+(n-1)(N_f-N_0)} \cdots, \mathrm{q}_{N_f+(n-1)(N_f-N_0)}]$▷ 构建块时间矩阵 3: $\mathrm{T}^{(n)} = [t_{1+(n-1)(N_f-N_0)}\ t_{2+(n-1)(N_f-N_0)} \cdots, t_{N_f+(n-1)(N_f-N_0)}]$4: 结束循环 5: 对于每个 $m \in \mathcal{A}_m$，其中 $\mathcal{A}_m = \{-a_1, -a_1+1, \cdots, 0, \cdots, a_1-1, a_1\}$，执行 6: 对于每个数据块 $n = 1$、2、$\cdots$、N_b，执行▷ 计算频移块数据矩阵 7: $\mathrm{Q}^{(n)}_{m\alpha_0} \leftarrow \mathrm{Q}^{(n)} e^{-i2\pi(m\alpha_0)\mathrm{T}^{(n)}}$▷ 使用（加窗）快速傅里叶变换，计算并存储每个频移块数据矩阵逐行的离散傅里叶变换 8: $\hat{}\mathrm{Q}^{(n)}_{m\alpha_0} = \mathrm{FFT}(\mathrm{Q}^{(n)}_{m\alpha_0}) = [\hat{}\mathrm{q}^{(n)}_1, m\alpha_0, \hat{}\mathrm{q}^{(n)}_2, m\alpha_0, \cdots, \hat{}\mathrm{q}^{(n)}_{N_w}, m\alpha_0]$ 其中，列 $\hat{}\mathrm{q}^{(n)}_k, m\alpha_0$ 包含频移块数据矩阵在第 k^{th} 个离散频率处的傅里叶模态的 n^{th} 实现

9: </style}结束循环

10: </style}结束循环

11: **对于**每个 $\gamma_k \in \Gamma_k$ （或感兴趣的某个子集）**执行-**

▷ Assemble the concatenated frequency data matrix for frequency set Ω_{γ_k}

12: $$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k} \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,-a_1\alpha_0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,a_1\alpha_0} \end{bmatrix},$$

where $\hat{\mathbf{Q}}_{\gamma_k,m\alpha_0} \leftarrow \sqrt{\kappa}[\hat{\mathbf{q}}^{(1)}_{k,m\alpha_0}, \hat{\mathbf{q}}^{(2)}_{k,m\alpha_0}, \cdots, \hat{\mathbf{q}}^{(N_b-1)}_{k,m\alpha_0}, \hat{\mathbf{q}}^{(N_b)}_{k,m\alpha_0}]$ is the matrix of Fourier realizations corresponding to the kth column of the $m\alpha_0$ frequency-shifted block-data matrix $\hat{\mathbf{Q}}^{(n)}_{m\alpha_0}$

13: Compute the matrix $\mathbf{M}_{\gamma_k} \leftarrow \widetilde{\mathbf{Q}}^*_{\gamma_k}\mathbf{W}\widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}$

14: Compute the eigenvalue decomposition $\mathbf{M}_{\gamma_k} = \mathbf{\Theta}_{\gamma_k}\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{\gamma_k}\mathbf{\Theta}^*_{\gamma_k}$

15: Compute and save the CS-SPOD modes $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_{\gamma_k} = \widetilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_k}\mathbf{\Theta}_{\gamma_k}\widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}_{\gamma_k}$ and energies $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_{\gamma_k}$ for the γ_k frequency set Ω_{γ_k}

16: **结束循环**

通过将这些分量分解为移相分量和零相移频移分量，

$$\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,m\alpha_0} = e^{-i2\pi(m\alpha_0\Delta t)[(n-1)(N_f-N_0)]}\frac{1}{\sqrt{N_f}}\sum_{j=1}^{N_f} w_j \mathbf{q}^{(n)}_j e^{-i2\pi(m\alpha_0\Delta t N_f+k-1)[\frac{j-1}{N_f}]}, \quad (3.21a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{k,m\alpha_0} = e^{-i2\pi(m\alpha_0\Delta t)[(n-1)(N_f-N_0)]}\hat{\mathbf{q}}^{(n)}_{\ell(k,m)}, \quad (3.21b)$$

其中 $\ell(k,m)$ 是随 k,m 变化的 ℓ^{th} 频率。这表明， $m\alpha_0$频移数据矩阵的 f_k离散频率（$f_{k,m\alpha_0}$）可以精确地计算为非频移数据矩阵的 $f_{\ell(k,m)}$ 离散频率分量的移相版本。要采用此方法， $m\alpha_0\Delta t N_f \in \mathbb{Z}$。这确保应用频移算子所导致的频率变化等于频率向量索引的整数变化。由于 $\alpha_0\Delta T = 1/N_\theta$，因此得到$^{mN_f}_{N_\theta} \in \mathbb{Z}$，这要求 $N_f = N_{osc}N_\theta$，$N_{osc} \in \mathbb{Z}$。在此限制下，长度为 N_f 的记录的离散傅里叶变换频谱为

——

$$f_k = \begin{cases} \dfrac{(k-1)\alpha_0}{N_{osc}} & \text{for } k \leqslant \dfrac{N_{osc}N_\theta}{2}, \\ \dfrac{(k-1-N_{osc}N_\theta)\alpha_0}{N_{osc}} & \text{for } k > \dfrac{N_{osc}N_\theta}{2}, \end{cases} \tag{3.22}$$

且唯一的频率集变为

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{(k-1)\alpha_0}{N_{osc}} & \text{for } k \leqslant \lfloor \dfrac{N_{osc}}{2} \rfloor + 1, \\ \dfrac{(k-1-N_{osc}N_\theta)\alpha_0}{N_{osc}} & \text{for } N_f - \lceil \dfrac{N_{osc}}{2} \rceil + 1 < k \leqslant N_f. \end{cases} \tag{3.23}$$

这表明， $m\alpha_0$ 的频移对应于频率索引的整数变化，即， $m\alpha_0$频移数据矩阵的 k^{th} 频率分量，对应于未进行频移的数据矩阵的 $\ell(k,\ m)^{th}$ 频率分量（$f_{\ell(k,m)}$）的相移版本，即 $f_{k,\ m\alpha_0} = f_{\ell(k,m)}$，其中

$$\ell(k,m) = \begin{cases} \begin{cases} k + mN_{osc} & \text{for } m \geqslant 0 \\ k + mN_{osc} + N_f & \text{for } m < 0 \end{cases} & \text{for } k \leqslant \lfloor \dfrac{N_{osc}}{2} \rfloor + 1, \\ \begin{cases} k + mN_{osc} - N_f & \text{for } m \geqslant 0 \\ k + mN_{osc} & \text{for } m < 0 \end{cases} & \text{for } N_f - \lceil \dfrac{N_{osc}}{2} \rceil + 1 < k \leqslant N_f. \end{cases} \tag{3.24}$$

这意味着，CS-SPOD所需的全部数据（针对所有频率集合 Ω_{γ_k}）都包含在原始数据矩阵的傅里叶变换中。

算法3 采用了这些节省措施，只需对数据矩阵进行一次离散傅里叶变换，因此其计算成本和内存需求与谱正交分解相近。对于复数输入数据，计算CS-SPOD所需的内存为 $\approx$ （$^{1}_{1-N_0/N_f}$ +1） ×mem(**Q**)，这部分内存用于存储可能存在重叠的块数据矩阵和原始数据矩阵。此外，还需要额外内存来存储~临时矩阵γ_k，不过该矩阵的大小很小，因为通常 $2a_1+1 << N_f$在极端情况下，如果每次只能加载一个快照，则可以开发一种流式CS-SPOD算法，类似于Schmidt & Towne（2019）。

4. 我们的循环互谱密度和 CS-SPOD 算法的验证

我们使用具有解析解的模型问题来验证循环互谱密度和 CS-SPOD 的实现。设 $n(x,\ t)$ 为一个零均值、复值平稳随机过程，其相位在 0 到 2π之间均匀分布，且服从正态分布——

算法3 计算 CS-SPOD 的高效算法。

1：对于每个数据块 $n = 1$、2、 $\cdots$、 N_b，执行▷ 构造块数据矩阵 2：$\mathrm{Q}^{(n)} \leftarrow [\mathrm{q}_{1+(n-1)(N_f-N_0)}, \mathrm{q}_{2+(n-1)(N_f-N_0)} \cdots, \mathrm{q}_{N_f+(n-1)(N_f-N_0)}]$▷ 使用（加窗）快速傅里叶变换，计算并存储每个经频率移位的块数据矩阵按行排列的离散傅里叶变换 3：$\hat{\mathrm{Q}}^{(n)} = \mathrm{FFT}(\mathrm{Q}^{(n)})$▷ 舍弃计算 Q_{γ_k} 时不需要的任何频率分量
（如果不对所有 $\gamma_k \in \Gamma_k$ 计算 Q_{γ_k}） 4：循环结束 5：对于每个 $\gamma_k \in \Gamma_k$（或感兴趣的某个子集），执行▷ 组装频率集合 Ω_{γ_k}对应的拼接频率数据矩阵 6：$\tilde{\mathrm{Q}}_{\gamma_k} \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{Q}}_{\gamma_k,-a_1\alpha_0} \\ \vdots \\ \hat{\mathrm{Q}}_{\gamma_k,0} \\ \vdots \\ \hat{\mathrm{Q}}_{\gamma_k,a_1\alpha_0} \end{bmatrix}$，其中 $\hat{\mathrm{Q}}_{\gamma_k,m\alpha_0} \leftarrow \sqrt{\kappa}[\hat{\mathrm{q}}_k^{(1)}{}_{,m\alpha_0}, \hat{\mathrm{q}}_k^{(2)}{}_{,m\alpha_0}, \cdots, \hat{\mathrm{q}}^{(N_b-1)}{}_{k,m\alpha_0}, \hat{\mathrm{q}}^{(N_b)}{}_{k,m\alpha_0}]$是与经频率移位的块数据矩阵 $\hat{\mathrm{Q}}_{m\alpha_0}^{(n)}$ 的第 k^{th} 列相对应的傅里叶实现矩阵，可通过 $\hat{\mathrm{q}}_k^{(n)}{}_{,e^{-i2\pi(m\alpha_0\Delta t\,[\,n-1\quad N_f-N_0\,]}} \overset{m\alpha_0}{=}{}_{l\ k\ m}()()\,\hat{\mathrm{q}}_{\ell\ k}^{(n)}(\,,m)$高效计算，其中索引 (,) 由式 (3.24) 给出~∗ ~7：计算矩阵 $\mathrm{M}_{\gamma_k} \leftarrow \mathrm{Q}_{\gamma_k}\mathrm{W}\mathrm{Q}_{\gamma_k}$~8：计算 $\mathrm{M}_{\gamma_k} = \boldsymbol{\Theta}_{\gamma_k}\boldsymbol{\Lambda}_{\gamma_k}\boldsymbol{\Theta}_{\gamma_k}^*$ 的特征值分解 9：针对频率集合 Ω_{γ_k}，计算并保存 CS-SPOD 模态 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{\gamma_k} = \tilde{\mathrm{Q}}_{\gamma_k}\boldsymbol{\Theta}_{\gamma_k}\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{\gamma_k}^{-1/2}$ 和能量 $\boldsymbol{\Lambda}_{\gamma_k}$，对应 γ_k

10: **结束循环**

trib具有单位方差，以及协方差核 $c(x,x') = E\{n(x,t)n^*(x',t)\}$，其

$$c(x,x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{\sigma_\eta}\right)^2\right]\exp\left[-i2\pi\frac{x-x'}{\lambda_\eta}\right], \tag{4.1}$$

其中 $\sigma_\eta = 4$ 是包络的标准差，$\lambda_\eta = 20$ 是滤波器的波长，且 $x_0 = 1.5$ 是中心偏移距离。该协方差核与Towne 等人(2018) 使用的协方差核相同，因为其结构与真实流动（例如湍流射流）中呈现的统计特性在定性上相似。滤波过程 $\tilde{n}(x,t)$ 定义为滤波器 $f_\ell(x,t)$ 与 $n(x,t)$ 的卷积，表示为

$$\tilde{n}(x,t) = f_\ell(x,t) \circledast n(x,t). \tag{4.2}$$

我们对 $\tilde{n}(x,t)$ 进行正弦调制，以创建一个循环平稳过程

$$g(x,t) = \tilde{n}(x,t)\cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \tag{4.3}$$

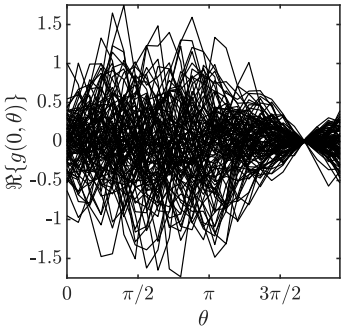


图 1：$x = 0$处模型过程的样本路径。

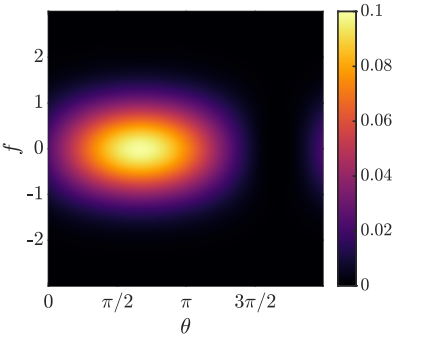


图 2：模型过程在$x' = 0$处的解析WV谱。

$x =$

其中，$f_0 = 0.5$ 为调制频率，而$\phi_0 = \frac{1}{3}2\pi$ 为相位偏移。利用§2中建立的理论，可以解析地确定 $g(x,t)$ 的循环互谱密度（CCSD），表示为

$$S_g(x,x',\alpha,f) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{\pm i2\theta}S_{\tilde{n}}(x,x',0,f) & \text{for } \alpha = \pm 2f_0 \\ \frac{1}{4}S_{\tilde{n}}(x,x',0,f+f_0) + \frac{1}{4}S_{\tilde{n}}(x,x',0,f-f_0) & \text{for } \alpha = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.4}$$

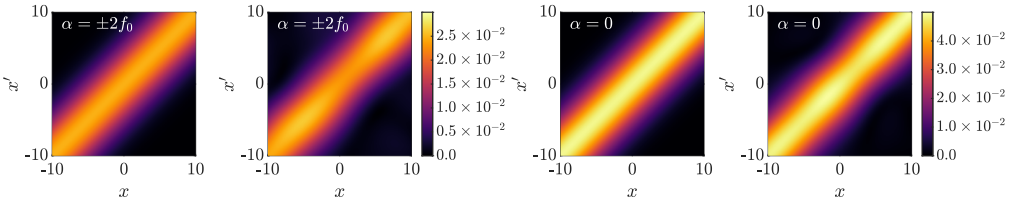
其中，$S_{\tilde{n}}(x,x',0,f)$ 是 $\tilde{n}(x,t)$在循环频率 $\alpha = 0$处的循环互谱密度（因此等于互谱密度）。存在的基频及唯一非零循环频率为 $\alpha_0 = \pm 2f_0$，这表明该过程具有循环平稳性。 $\tilde{n}(x,t)$的互谱密度为

$$S_{\tilde{n}}(x,x',0,f) = c(x,x')F_\ell(x,f)F_\ell^*(x',f), \tag{4.5}$$

其中，$F_\ell(x,f)$是滤波器 $f_\ell(x,t)$的时间傅里叶变换。所用滤波器是一个 5^{th}阶有限脉冲响应滤波器，其截止频率为 f_{co}，并随空间位置 $f_{co} = 0.2|x - x_0|/\max(x) + 0.2$变化。这使得滤波器在 x_0 处的谱衰减更快，而远离该位置时谱则更平坦。采用区域 $x \in [-10,10]$，并使用 2001 个等间距网格点对其离散化，网格间距为 $\Delta x = 0.01$。所有循环互谱密度和 CS-SPOD 估计均使用汉明窗，窗长为 $L_w = 10N_\theta$，重叠率为 67%。快照以时间间隔 $\Delta t = 0.04$保存，因此每个基周期频率 $T_0 = 1/\alpha_0 = 1/(2f_0)$的周期包含 $N_\theta = 25$ 个时间步。数据保存时长为$t_{end} = 2000T_0$，共得到 50000 个快照，以及该过程的 593 个数据块（实现）。

过程在 $x = 0$处、基于基周期频率相位的样本路径如图1所示。正如理论预测的那样，我们观察到过程的振幅随相位而调制。由于 $\alpha_0 = 2f_0$，施加于正弦调制的相位偏移 $\phi_0 = \frac{1}{3}2\pi$使样本路径产生了 $\frac{1}{6}2\pi$的相位偏移。图2展示了这种调制，其中我们绘出了使用（2.9 和4.4）在 $x = x' = 0$处计算得到的解析WV谱。该图显示了PSD随相位的正弦调制，以及由于所施加的滤波器，谱的振幅随 $|f|$ 增大而衰减。图3比较了在 $f = 0.1$ 和 $\alpha = 0$、$\pm 2f_0$处解析和数值CCSD的幅值。这里，我们观察到前述协方差核的关键结构，同时数值与解析CCSD之间吻合良好；随着实现数量增加，这种吻合还会进一步改善，从而验证了我们的循环互谱密度实现（算法1）。

接下来，我们验证了用于计算 CS-SPOD 的高效算法（算法 3），并
w



(a) 解析 (b) 数值 (c) 解析 (d) 数值

图 3：虚拟过程的 $f = 0.1$ 循环互谱密度幅值图，展示解析结果和数值生成结果。

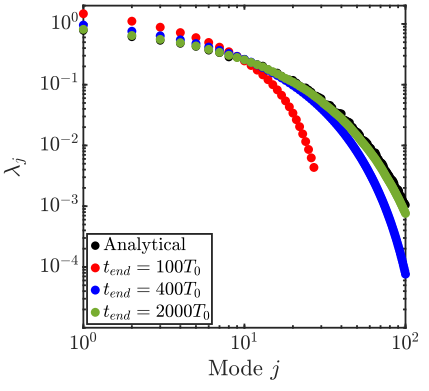


图 4：虚拟问题在多个信号时长下，$\gamma = 0.2$ 处 CS-SPOD 特征谱的解析结果与数值结果。

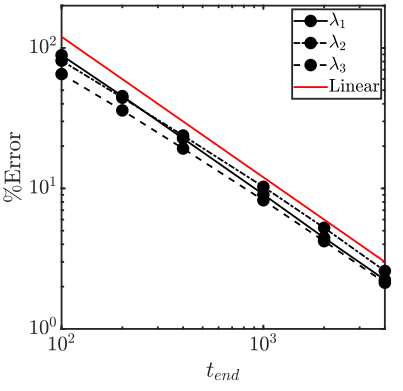


图 5：虚拟问题的 CS-SPOD 特征值随信号总时长的收敛情况。

通过将数值结果与解析结果进行比较，确定其随数据量增加的收敛性。解析解通过构造式（3.6a）定义的 CS-SPOD 特征系统获得：先计算解析 CCSD（由式（4.4）给出），再对最终的特征值问题进行数值求解。为涵盖相关频率范围，我们使用 $a_1 = 10$ 构造 $\mathcal{A}_m$，得到 $\Omega_\gamma = [-10, 10] + \gamma$。图 4展示了在 $\gamma = 0.2$ 时，$t_{end} = 100T_0$、$400T_0$和 $2000T_0$对应的解析与数值 CS-SPOD 特征谱对比（对该过程的 10000 次实现取平均）；它们分别对应 27、117 和 593 个数据块。随着过程持续时间增加，特征谱的估计逐渐收敛。这一点也体现在数值特征值均值与解析特征值之间的百分误差上：图 5展示了三个占主导地位的 CS-SPOD 模态的误差。我们发现，随着过程持续时间增加，这些特征值线性收敛至真实值；理论上，由于随着实现次数增加，CCSD 的 Welch 估计方差线性减小，这一结果是可以预期的（Antoni 2007年）。总体而言，我们获得了对 CS-SPOD 特征值的一致估计，并据此确认 CS-SPOD 的实现正确。

5. 示例问题

5.1. 修正的线性化复 *Ginzburg-Landau* 方程的应用

我们的第一个示例是简单且广为人知的线性化复Ginzburg-Landau方程，该方程已被用作对流不稳定流场的模型。

表现出非模态增长（Chomaz 等，1988年；Cossu 和 Chomaz，1997；Hunt 和 Crighton，1991）。它可以写成一般线性受迫系统的形式

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} - L(x,t)q(x,t) = f(x,t), \tag{5.1}$$

其中，$q(x,t)$ 和 $f(x,t)$ 分别表示状态和强迫，且 $|q(x\to\pm\infty,t)|\to 0$，而 $L(x,t)$ 是线性算子

$$L(x,t) = -\nu_1\frac{\partial}{\partial x} + \nu_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu(x,t). \tag{5.2}$$

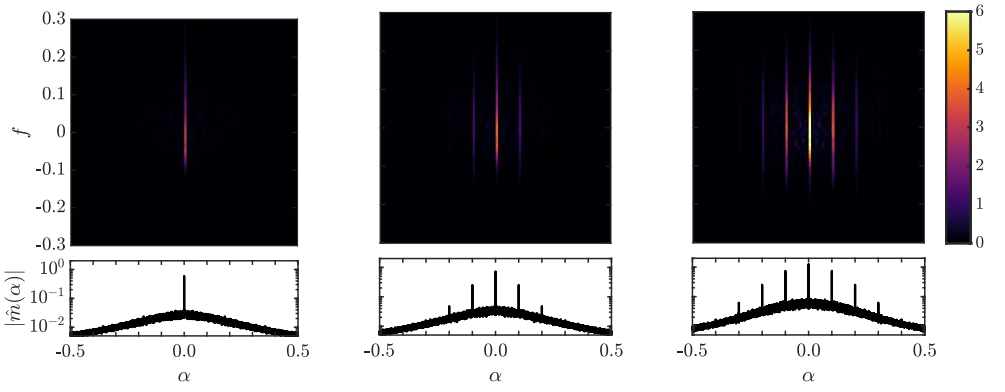
我们采用常用形式 $\mu(x) = \mu_0 - c_\mu^2 + \mu_2 \frac{x^2}{2}$ (Hunt & Crighton 1991; Bagheri 等人 2009年; Chen & Rowley 2011年; Towne 等人（2018）)，从而得到时不变动力学。(5.1, 5.2) 中除 μ_0 外的所有常数均采用 Bagheri 等人（2009年）中的取值。与 Franceschini 等人（2022）类似，我们通过使用$\mu_0 = \mu_0 + A_{\mu_0}\sin(2\pi f_0 t)$构造周期动力学，其中 μ_0 是 μ_0的平均值，A_{μ_0} 是 μ_0周期性调制的振幅，f_0 是周期性调制的频率。当$A_{\mu_0} = 0$时，系统具有时不变动力学；而当 $|A_{\mu_0}| > 0$ 时，系统具有周期动力学，分别产生平稳响应和循环平稳响应。通过改变 A_{μ_0}，我们可以调节系统的循环平稳程度。我们选择$f_0 = 0.1$，该值相较于感兴趣的频率（$\approx [-0.5, 0.5]$）较大，这意味着无法采用 Franceschini 等人（2022）的准稳态方法。与 Towne 等人（2018）一样，我们使用 $\mu_0 = 0.23$；对于 $A_{\mu_0} = 0$，由于线性算子 $L(x,t)$ 的非正规性，该设置会显著放大外部噪声，并产生湍流中通常存在的低秩性。按照 Franceschini 等人（2022）的做法，我们使用 Floquet 分析确认系统的稳定性（结果未展示）。为展示 CS-SPOD 的实用性并便于理解其含义，我们比较了在多个循环平稳程度下进行的 CS-SPOD：$A_{\mu_0} = 0.0$、0.2 和 0.4。

采用利用 Hermite多项式的伪谱方法对方程进行离散（Bagheri 等人，2009年；Chen 和 Rowley，2011年），其中配置点$[x_1, x_2, \cdots, x_{N_H}]$对应于前 N_H 个 Hermite多项式，缩放因子为$\Re\{(-\mu_2/(2\nu_2))^{\frac{1}{4}}\}$。遵循 Bagheri 等人（2009年）和 Towne 等人（2018）的做法，我们使用$N_H = 221$，得到计算域 $x \in [-85.19, 85.19]$，其范围足以模拟无限域。通过使用 Hermite多项式，边界条件得以隐式满足（Bagheri 等人，2009年）。对于 CS-SPOD，x_i 处加权矩阵的值取为相邻网格点中点之间的距离。采用嵌入式5^{th} 阶 Dormand–Prince龙格–库塔方法进行时间积分（Dormand 和 Prince，1980；Shampine 和 Reichelt，1997）。初始瞬态衰减后，保存了总计 40000 个解快照，快照间隔为 $\Delta t = 0.5$，对应的奈奎斯特频率为 $f_{\text{Nyquist}} = 1$。

为了模拟湍流系统，类似于Towne等人(2018)，我们使用空间相关带限噪声对系统施加激励。具体做法是，利用以下协方差核构造空间相关噪声

$$g(x,x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{\sigma_\eta}\right)^2\right]\exp\left[-i2\pi\frac{x-x'}{\lambda_\eta}\right], \tag{5.3}$$

其中 σ_η 是包络的标准差，λ_η 是滤波器的波长。将白噪声乘以协方差核的 Cholesky 分解，引入空间相关性。白噪声具有均匀相位、单位方差的正态分布振幅，其生成方式与 Towne 等人（2018）中相同。强迫为



(a) $A_{\mu_0} = 0$ (b) $A_{\mu_0} = 0.2$ (c) $A_{\mu_0} = 0.4$

图 6：金兹堡-朗道系统在 $x = 0$ 时的循环互谱密度（上）和积分循环互谱密度（下）。

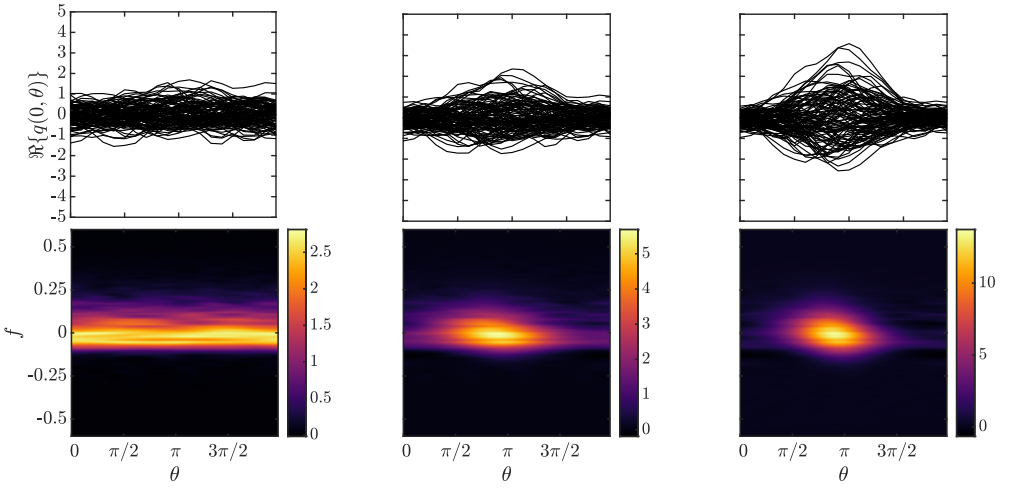
通过窗函数 exp 将强迫限制在区域内部的一部分$[-(x/L)^p]$，其中 $L = 60$，$p = 10$。空间相关噪声经由一个 10th 阶有限脉冲响应滤波器进行低通滤波，其截止频率为 $0.6 f_{\text{Nyquist}}$。由此得到平稳强迫，其振幅在截止频率以内近似恒定（在截止频率处振幅为 -6 dB），但具有由（5.3）定义的非零空间相关性。随后，对强迫进行线性插值，使其对应于时间积分所需的时间位置。为计算 WV谱、谱正交分解和 CS-SPOD，我们采用窗长 $N_w = 10N_\theta$，重叠率为 67%，由此得到该过程的 $N_b = 595$ 个实现，频率离散间隔为 $\Delta f = 0.01$。

分析生成的数据时，我们必须首先确定系统在哪些频率（如果存在）下表现出循环平稳性。为此，我们计算循环互谱密度，并在所有可能的 α 循环频率范围 $\alpha \in [-1, 1]$内进行搜索，同时注意 α 按照§2 中的讨论进行离散化，以确保不会遗漏任何可能的循环频率。图6 展示了 A_{μ_0}在 $x = 0$时对应的三个值的循环互谱密度和积分循环互谱密度，并证实当 $A_{\mu_0} > 0$ 时系统具有循环平稳性，因为在 $\alpha = 0$（调制频率f_0）处可见较高的循环互谱密度和积分循环互谱密度，且随着 A_{μ_0} 进一步增大，谐波数量也随之增加。

我们展示了该过程的 100 次实现，其中每次 A_{μ_0}，并给出$x = x' = 0$ 处随 α_0 的相位变化的 WV谱，见图7。计算 WV谱时采用 $a_2 = 5$，以涵盖所有存在的循环频率。图7 (a) 显示，对于 $A_{\mu_0} = 0$，统计特性随相位几乎保持不变，这符合时不变动力学的预期。观察到的轻微调制是由统计误差造成的。在图7(b, c) 中，随着 A_{μ_0} 增大，统计特性的调制程度也随之增强。此外，随着 μ_0增大，系统的非正规性增强，谱的峰值也随之升高。鉴于 μ_0 的最大值出现在 $\theta = 0.5\pi$，而 WV谱的峰值出现在$\theta \approx 0.95\pi$，当系统动力学最不稳定与扰动平均幅度最大之间存在 $\approx 0.45\pi$ 的相位延迟。

基于前述分析，为确保涵盖所有感兴趣的频率，我们使用 $a_1 = 5$ 计算 CS-SPOD，得到的频率范围为 $\Omega_\gamma = [-0.5, 0.5] + \gamma$。我们首先考虑具有 $A_{\mu_0} = 0.0$ 的平稳过程。尽管理论上在平稳情形下，循环平稳谱正交分解模态等同于 SPOD，但有限的数据长度会导致差异。

图 8 展示了 $A_{\mu_0} = 0.0$对应的 SPOD特征谱。请注意，该谱



(a) $A_{\mu_0} = 0$ (b) $A_{\mu_0} = 0.2$ (c) $A_{\mu_0} = 0.4$

图 7：示　例金兹堡–朗道样本路径（上）和 $x = 0$ （下）的 WV谱 .

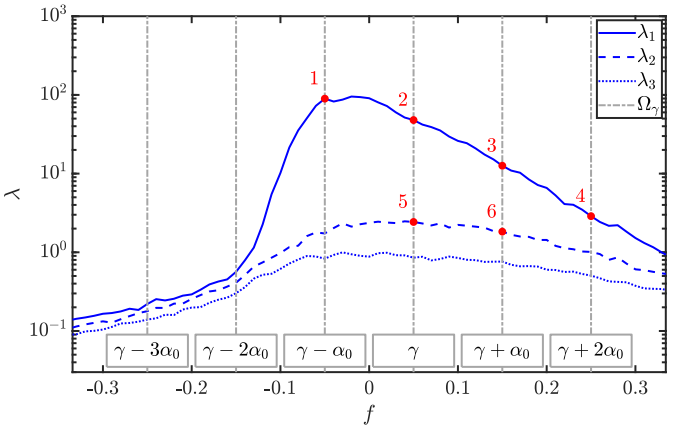


图8：金兹堡-朗道系统在 $A_{\mu_0} = 0.0$ 处的SPOD特征谱，展示了每个离散频率 f下能量最高的三个模态。CS-SPOD解中出现的频率，即 $f \in \Omega_\gamma$，对应的能量最高的6个模态以红点表示。

关于 f 并不对称，因为金兹堡-朗道系统是复数系统。我们在 SPOD谱上叠加了频率集合 $f \in \Omega_\gamma$，对应 $\gamma = 0.05$，并标出能量最高的 6 个交点并为其排序。根据图示，能量最占主导的 4 个循环平稳谱正交分解模态应分别对应于频率为 $\gamma - \alpha_0$、γ、$\gamma + \alpha_0$和 $\gamma + 2\alpha_0$时的主导 SPOD 模态。同样，5th 和 6th 循环平稳谱正交分解模态应分别对应于频率为 γ和 $\gamma + \alpha_0$时的第一次主导 SPOD 模态。图 9 比较了这六个模态各自的能量和特征函数在 SPOD 与 CS-SPOD（假设基周期频率为 $\alpha_0 = f_0$）下的结果。尽管各情况下的结果都相当相似，但仍存在与统计收敛有关的差异；正如预期，这种差异出现在两个不同模态之间能量分离较小的情况下（例如模态 5 和 6）。

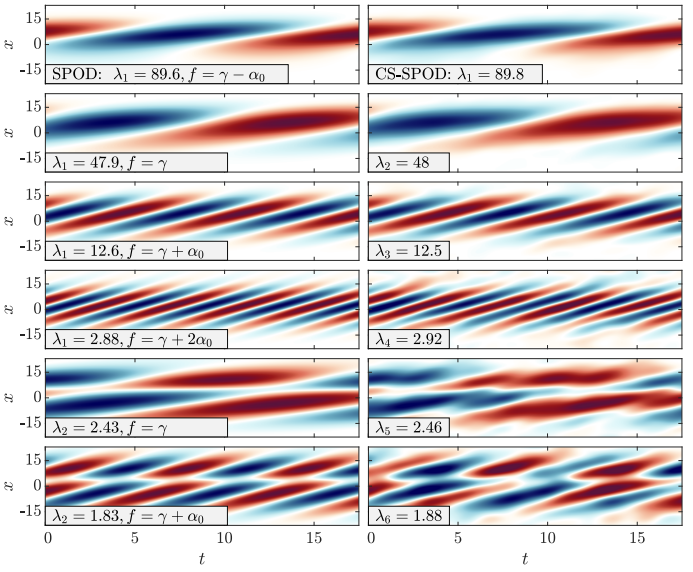


图 9：比较金兹堡–朗道系统在 $A_\mu = 0$ 时的 SPOD（左）和 CS-SPOD 模态（右）。从上到下依次为最显著的六个 CS-SPOD 模态，以及图 8 中标出的六个点。CS-SPOD 特征函数的等值线范围设为与对应的 SPOD 模态 $\pm||\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\ t)||_\infty$相同。

在图 10 中，我们比较了三种不同 $\gamma_k \in \Omega_\gamma$ 值下所有 A_{μ_0} 对应的 CS-SPOD 特征谱。随着 A_{μ_0} 增大，能量也随之增加，因为在对应于正 $A_{\mu_0}\sin(2\pi f_0 t)$ 的相位处，线性算子的非正规性不断增强，使扰动得到越来越大的放大；这与此前图 7 所示趋势一致。主导 CS-SPOD 模态与次主导模态之间存在较大的能量分离，且该分离随 A_{μ_0} 增大而扩大，表明该过程的低秩性越来越显著。在图 11 中，对于 $\gamma = 0.05$，我们展示了前 $\lambda_T = \sum_j \lambda_j$ 个 CS-SPOD 或 SPOD 模态所恢复的总能量（J）比例。正如理论预期，对于 $A_{\mu_0} = 0$，CS-SPOD 与 SPOD 得到的能量分布几乎相同。相比之下，随着 A_{μ_0} 增大，CS-SPOD 捕获的能量越来越多，超过了 SPOD。例如，当 $A_{\mu_0} = 0.4$ 时，第一个 CS-SPOD 模态捕获了总能量的 64%，而第一个 SPOD 模态仅捕获 45%。此外，前三个 CS-SPOD 模态捕获了总能量的 92%，而 SPOD 则需要七个模态才能捕获相近比例的能量。正如理论预期，SPOD 捕获的能量不会超过 CS-SPOD 捕获的能量（因为 SPOD 模态是 CS-SPOD 模态的子集）。因此，随着统计特性变得越来越循环平稳（即相位依赖性越来越强），CS-SPOD 能够捕获过程中越来越大比例的相位依赖统计量；而由于统计平稳性这一根本上有缺陷的假设，SPOD 无法做到这一点。

现在，我们通过展示图 A_{μ_0} 中占主导地位的 CS-SPOD 模态在 $\gamma = 0.05$处的实部和时间演化幅值$\boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{x},\ t)$ 来考察 12 和 13中 Ω_γ如何改变这些模态，二者分别对应于 $\boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{x},\ t)$ 和 $\boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{x},\ t)$。我们注意到，由于 Ω_γ中存在多个频率分量 $\boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{x},\ t)$，$\boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{x},\ t)$ 与 SPOD 不同，已无法用单个快照完整表示，而必须显示为时间的函数。类似地，模态的振幅随时间呈周期性变化，周期为 $T_0 = 1/\alpha_0$；而在 SPOD 中，振幅则不随时间变化。因此，振幅表示为相位 θ的函数。其他 γ 取值下也观察到了类似结果，此处未展示。

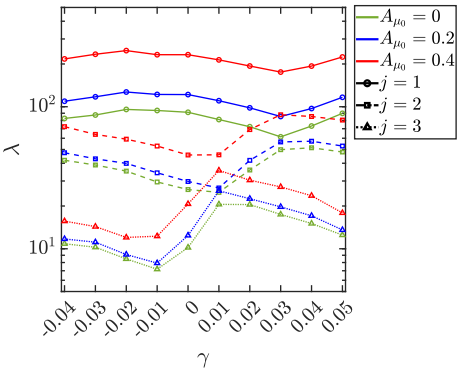


图 10：三个金兹堡-朗道系统的 CS-SPOD 能量谱。

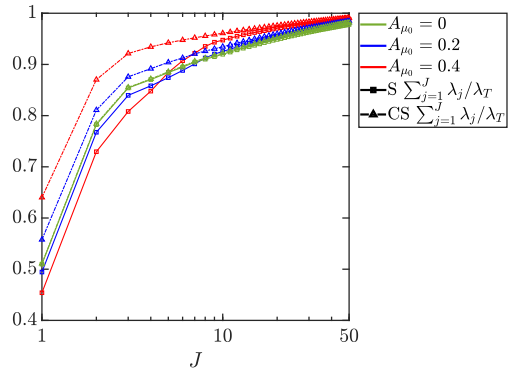


图 11：在 $\gamma=0.05$ 时，三个金兹堡-朗道系统中截断的 CS-SPOD（CS）和 SPOD（S）模态集所捕获的总分数能量。

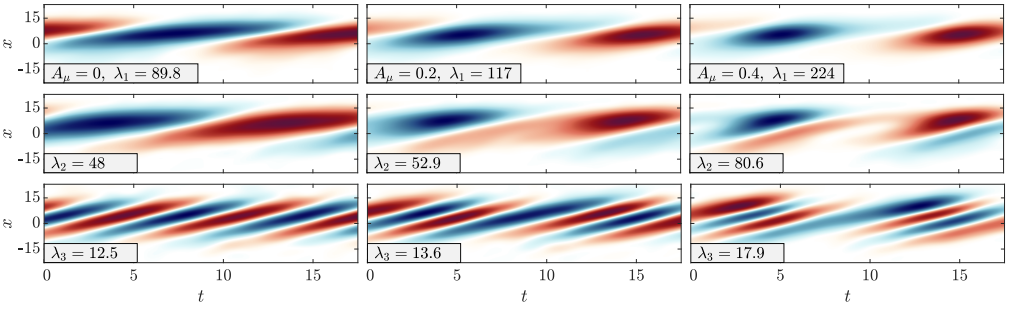


图 12：在 $\gamma=0.05$ 时，三个金兹堡-朗道系统中三个主导 CS-SPOD 模态的实部。每个 CS-SPOD 模态的等值线范围为 $\pm|\Re\{\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\ t)\}|_\infty$。

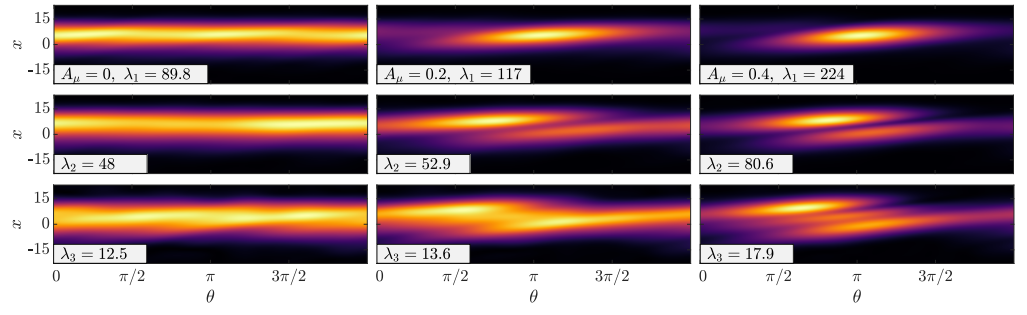


图 13：在 $\gamma=0.05$ 时，三个金兹堡–朗道系统中三个主导 CS-SPOD 模态的幅值。每个 CS-SPOD 模态的等值线范围为 $[0,||\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},\ t)||_\infty]$。

总体而言，对于 A_{μ_0} 的所有取值，CS-SPOD 模态的实部呈现出相似的结构。然而，随着 A_{μ_0} 增大，会出现额外的调制，导致幅值越来越依赖于时间/相位。

最后，在图 14中，我们通过各个频率分量的分数能量，考察哪些频率分量能量最高 $f\in\Omega_\gamma$，其中每个 CS-SPOD 模态的分数能量定义为 $E_{f,j}=\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},f)^*\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x},f)$，其中 $\sum_{f\in\Omega_\gamma}E_{f,j}=1$。随着 A_{μ_0}增大，CS-SPOD 模态由更多能量非零的频率分量构成，且这些分量的能量水平更高。例如，在 $\gamma=0.05$处，主导

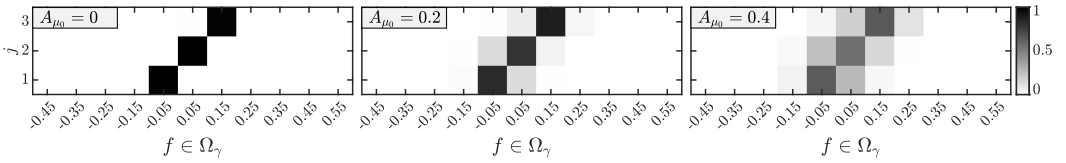


图 14：金兹堡-朗道系统在 $\gamma = 0.05$ 时的分数 CS-SPOD 模态能量 $E_{f,j}$。

频率分量，$f = 0.05$，包含对应 CS-SPOD 模态总能量的 $\approx 100\%$、83% 和 64%，分别对应 $A_{\mu_0} = 0$、0。2 和 0。4。这是因为随着 A_{μ_0} 的增加，不同频率分量之间存在的相关性逐渐增强。或者，也可以从以下角度理解这一现象：随着 A_{μ_0} 的增加，统计特性变得更加依赖于时间，因此，Ω_γ 中频率分量之间的相互作用程度增加，使得这些频率分量的叠加最终形成能够捕捉流场所经历的时间周期调制的 CS-SPOD 模态。

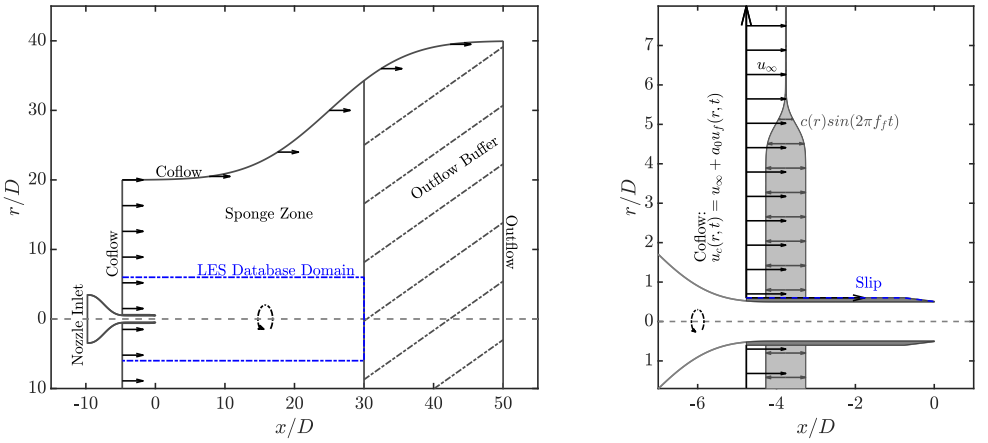
5.2. 受迫湍流射流

现在我们考虑一种受迫的湍流等温亚声速射流，其数据来自先前的一项研究 Heidt 等人(2021年)。Cascade Technologies 使用 Charles 求解器计算了大涡模拟，采用的设置与此前经过实验验证的湍流射流模拟相似（Br`es 等人 2017年、2018）。该射流的马赫数为$M_j = U_j/c_j = 0.4$，雷诺数为 $Re_j = \rho_j U_j D/\mu_j = 4.5 \times 10^5$，其中$\rho$ 为密度，μ为黏度，U 为速度，c 为声速，D 为喷嘴直径，下标 j 和 ∞分别代表射流和自由来流条件。频率以斯特劳哈尔数 $St = fD/U_j$表示，其中 f 为频率。

模拟设置示意图如图 15所示。声学激励以频率 $St_f = f_f D/U_j = 0.3$ 和振幅 $a_0/U_j = 0.1$施加。该强迫旨在大致模拟 Crow & Champagne (1971) 的受迫射流实验，我们选择 $St_f = 0.3$，以匹配他们观察到的能使流场产生最大放大的频率（即射流偏好模态）。我们有意采用较高的强迫振幅，以便在产生的湍流中清晰地建立循环平稳性。强迫施加于射流周围的环形区域内，延伸至 $r/D = 5$。声学激励的入口共流定义如下：

$$c(r) = 0.5\left[1 - \mathrm{erf}\left(2(r-5)\right)\right], \tag{5.4a}$$
$$u_f(r,t) = c(r)\sin(2\pi f_f t), \tag{5.4b}$$
$$u_x(r,t) = u_\infty + a_0 u_f(r,t), \tag{5.4c}$$
$$u_r(r,t) = u_\theta(r,t) = 0, \tag{5.4d}$$
$$\rho(r,t) = \rho_\infty + \rho_\infty(u_x(r,t) - u_\infty)/a_\infty, \tag{5.4e}$$
$$p(r,t) = p_\infty + a_\infty \rho_\infty (u_x(r,t) - u_\infty). \tag{5.4f}$$

瞬态过程结束后，模拟以 $\Delta t D/c_\infty = 0.001$ 的时间步长运行了 480 个强迫频率周期（总时长为 $t_{sim} D/c_\infty \approx 4000$），期间每个强迫周期保存了 N_θ =48 个快照。非结构化大涡模拟数据被插值到一个结构化柱坐标网格（$n_x \times n_r \times n_\theta = 656 \times 138 \times 128$）上，该网格覆盖 $x/D \in [0, 30]$、$r/D \in [0, 6]$ 和 $\theta \in [0, 2\pi]$，并用于后续分析。对于随机估计，我们采用窗长 $N_w = 6N_\theta$ 和重叠率



(a) 整体区域 (b) 喷嘴区域

图 15：受迫马赫数 0.4 湍流射流示意图，改编自 Br`es *et al.* (2018)。

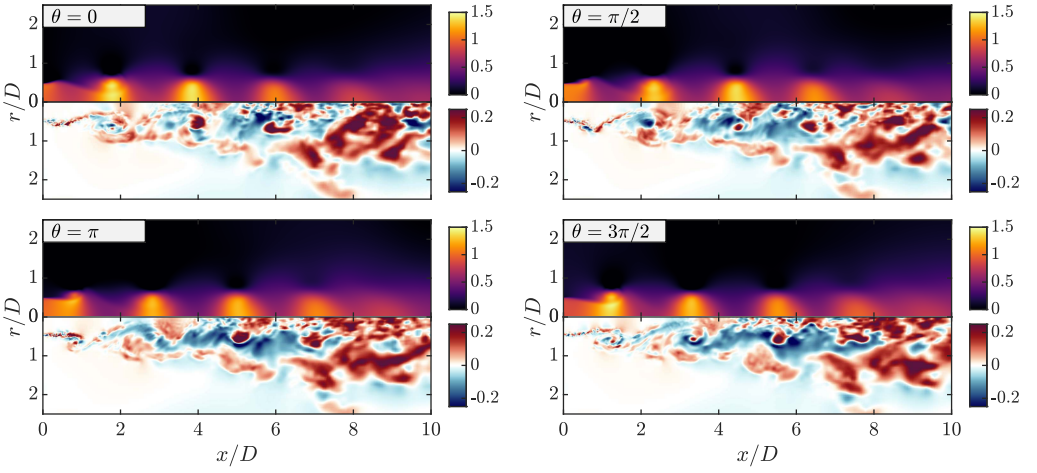


图 16：每对图像的上图为受强迫马赫数 0.4 湍流射流在 $\widetilde{u}/U_j$ at $\theta = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ 时的结果。每对图像的下图为对应于强迫相位 $\theta = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ 的某一时刻的结果 u''_x/U_j。

67%，得到 $N_b = 237$ 个数据块，无量纲频率离散为 $\Delta St \approx 0.05$。

在图 16 中，我们绘出了一个强迫周期内四个相位下的瞬时速度和相位平均速度（2.14）。虽然未展示，但我们验证了相位平均流场呈轴对称，这与轴对称射流强迫一致。在相位平均流场中，可以观察到射流轴向速度的大幅调制，涡旋卷起发生在 $x/D = 2.0$ 附近。基频脉动主要位于势核区，并驱动大尺度周期性调制。在图 17 中，我们提取了相位平均流场的前四个频率分量（$f = 0$，0.3，0.6，0.9）。每个非零频率对应的总脉动水平，即 $2 \times \Re\{\hat{u}_{x,\ \alpha}/U_j\}$，分别为 $\approx 40\%$，15% 和 8%，表明平均流场发生了显著的非线性周期性调制。谐波生成同样在强烈卷起发生的 $x = 2$ 附近达到峰值。

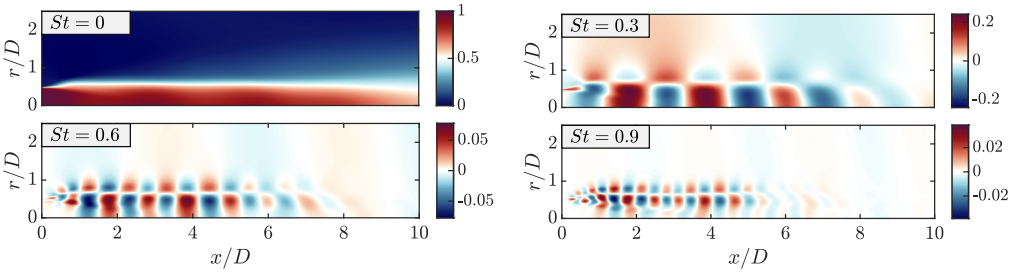


图 图 17: $\Re\{\hat{u}_{x,\ St}/U_j\}$ 在 $St = 0$，0.3，0.6 和 0.9 下的受迫马赫数 0.4 湍流射流 .

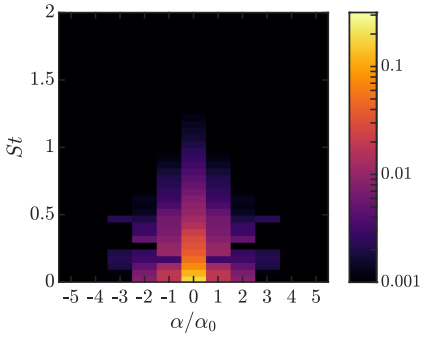


图 18: 受迫马赫数 0.4 湍流射流中 u_x''/U_j 在 $x/D = 7$，$r/D = 0.75$ 处的循环互谱密度密度绝对值。

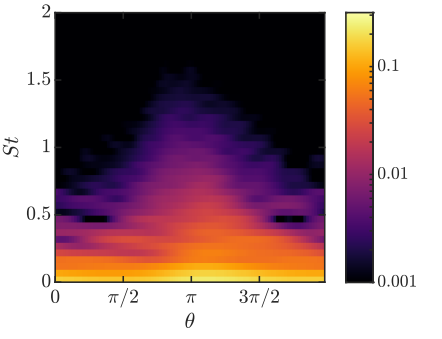


图 19: 受迫马赫数 0.4 湍流射流中 u_x''/U_j 在 $x/D = 7$，$r/D = 0.75$ 处的 WV谱。

接下来，我们分析二阶随机分量，以确定其中存在的循环频率，从而应用 CS-SPOD。与前一个示例类似，为了确定流场中存在的循环频率，我们考察了 对应的循环互谱密度（CCSD）及其积分形式（未展示），并再次注意到 α 的离散化方式，如 §2 中所述。我们确认，流场中仅存在强迫频率的谐波所对应的循环频率（即 $\mathbb{Z}f_f$）。

图 18 和 19 分别展示了轴向速度轴对称分量在 $x/D = 5$，$r/D = 0.75$处的循环互谱密度及其对应的 WV 谱。为清晰起见，循环互谱密度仅展示 $\alpha/\alpha_0 \in \mathbb{Z}$，因为 α 的所有其他取值 ≈ 0（在统计收敛范围内）均为 $\alpha/\alpha_0 = 0$，± 1，± 2。WV 谱显示了统计特性的这种大幅调制，其中高能量区域的相位对应于高速度区域经过时的相位。总体而言，很明显，受迫湍流射流在等于强迫频率谐波的频率处呈现循环平稳性。最后，我们展示 CS-SPOD 在受迫湍流射流中的应用。回顾一下，由于流场具有统计轴对称性，射流的 SPOD 模态和 CS-SPOD 模态在各个方位模态之间均相互解耦。为简洁起见，我们仅关注脉动的轴对称 $m = 0$ 分量。我们寻求在 Chu 可压缩能量范数下正交的模态（Chu 1965），该范数已应用于先前的 SPOD 研究中（Schmidt 等 2018）

$$\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_k \rangle_E = \iiint \mathbf{q}_1^H \operatorname{diag}\left(\frac{\overline{T}}{\gamma_g \overline{\rho} M^2}, \overline{\rho}, \overline{\rho}, \overline{\rho}, \frac{\overline{\rho}}{\gamma_g(\gamma_g - 1)\overline{T} M^2} \right) \mathbf{q}_k r \mathrm{d}x \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \mathbf{q}_j^* \mathbf{W} \mathbf{q}_2, \tag{5.5}$$

其中， M 为马赫数， γ_g 为比热比，矩阵$\mathbf{W}$ 则考虑了

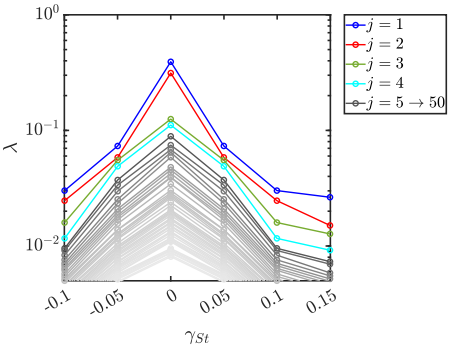


图 20：受迫马赫数 0.4 湍流射流的 CS-SPOD 能量谱。

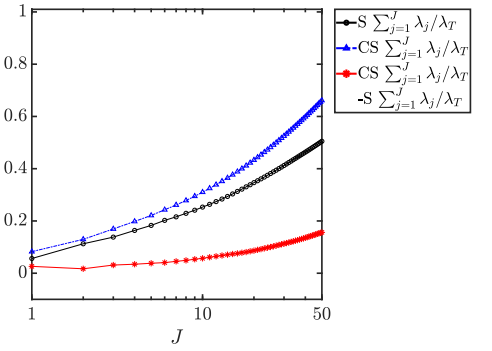


图 21：在 $\gamma_{St} = 0.15$ 处，受迫马赫数 0.4 湍流射流中由截断的 CS-SPOD（CS）和 SPOD（S）模态组所捕获的总能量。

能量与域求积权重。为计算 CS-SPOD，我们选取 $a_1 = 10$，得到的无量纲频率范围为 $\Omega_{\gamma_{St}} = [-3, 3] + \gamma_{St}$，涵盖了所有关注的频率。

图 20 展示了该湍流射流的 CS-SPOD 特征谱。前三个 CS-SPOD 模态之间存在显著的能量分离。由于 CS-SPOD 一次求解多个频率，其能量分离程度会小于 SPOD，尤其是谱会更加平坦。谱在 $\gamma_{St} = 0$ 处达到峰值，并按$|\gamma_{St}| \to 0.15$ 衰减；由于最小的 $|St| \in F$ 出现在 $|\gamma_{St}|$处，这种衰减是湍流射流中常见的能量谱衰减所致。根据关于自然湍流射流的既有文献（例如 Schmidt 等人（2018））， 预期会出现这种低秩行为。如图 21 所示，我们展示了前 J 个 SPOD 和 CS-SPOD 模态所捕获的总能量比例。在频率集合 Ω_γ 处，第一个 CS-SPOD 模态捕获了流场总能量的 8%；2 个模态捕获 13%，10 个模态捕获 31%，50 个模态捕获 66%。在 $\gamma_{St} = 0$ 处，1、2、10 和 50 个模态的捕获比例分别升至 16%、29%、56% 和 87%。令人意外的是，与 Ginsburg-Landau 模型不同，尽管调制程度很高，能量最大的 CS-SPOD 模态与 SPOD 模态之间的能量分离并不显著。不过，尽管差异较小，能量最大的 SPOD 和 CS-SPOD 模态在结构和时间演化方面却存在很大差异，下面将对此进行探讨。

我们在图 $\gamma_{St} = 0.15$ 中展示了22处能量最高的 SPOD 和 CS-SPOD 模态的压力分量的实部和绝对值。这些图中的实线和虚线分别对应于 $\tilde{u}_x/U_j = 0.25$、0.75 的等值线。由于 SPOD 模态的演化具有时不变性，因此仅展示单个时刻的 SPOD 模态；而为了展现其时间演化，则展示了多个时刻的 CS-SPOD 模态。占主导地位的 SPOD 模态集中在下游 $x/D \approx 6 - 12$处，频率为$St = 0.15$，其结构与先前在无强迫湍流射流中观察到的所谓“Orr模态”相似（Schmidt 等，2018；Pickering 等，2020）。根据构造，SPOD 模态的振幅随时间保持不变，其振幅最大的区域对应于 $x/D \approx 6 - 12$ 和 $r/D \approx 0 - 1$。能量最高的 CS-SPOD 模态的实部结构与相应的 SPOD 模态相似，但在高速度区域的剪切层中还存在局部调制。振幅等值线也呈现出这一特征：在与 SPOD 振幅分布相似的区域内，模态振幅随相位显著变化，但高振幅区域始终跟随射流中的高速区域。CS-SPOD

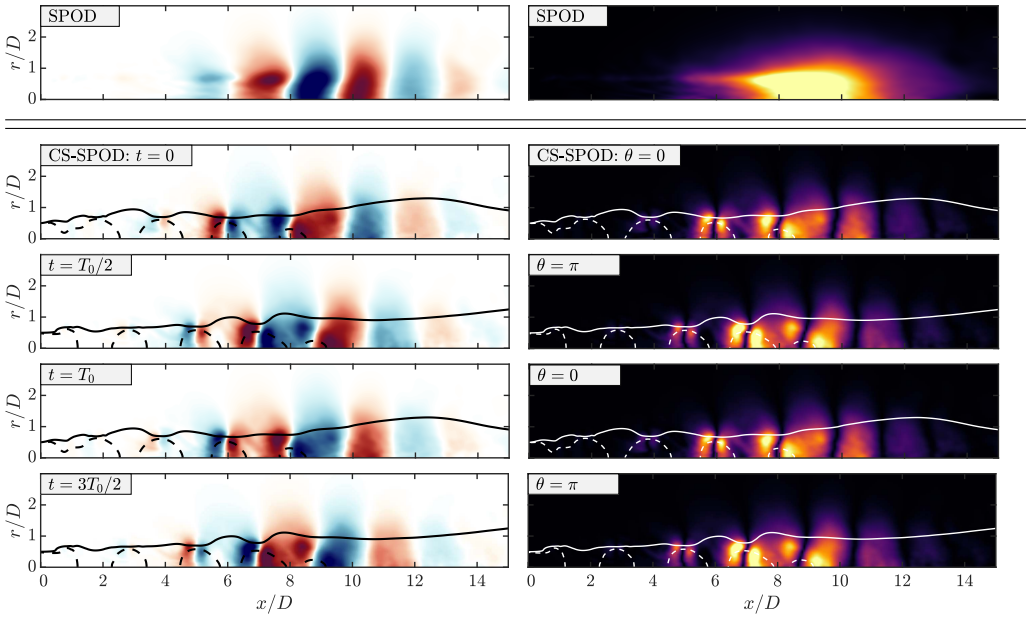


图 22：对比强迫马赫数 0.4 湍流射流中 $\gamma_{St} = 0.15$ 的主导 CS-SPOD 模态与主导 SPOD 模态的实部和幅值分量。实部和幅值等值线分别设为 $\pm 0.75|\Re\{\phi_{p,1}(x,\ r,\ t)\}|_\infty$ 和 $[0, 0.75|\phi_{p,1}(x,\ r,\ t)|_\infty]$。

模态沿着该区域分布，因为这里的剪切最强，同时也发生涡卷起（如图17 和16所示）。

图 23 显示了同一 CS-SPOD 模态在喷口出口附近放大区域内的情况。由于此处的脉动幅值较小，图中采用了较低的等值线级别。在 $t = 0$（即 $\theta = 0$）处，可以看到一个短波长开尔文–亥姆霍兹（KH）模态，位于 $x/D = [0,\ 1]$ 区域内的 25% 和 75% 速度线之间。由于平均流受到调制，KH 模态朝中心线倾斜。随后，在 $t = T_0/4$处，KH 模态略微向下游传播；由于运动这一相位下剪切层薄得多，该模态显著减弱。从 $t = T_0/4$ 到$t = 3T_0/4$，随着边界层厚度增加，KH 模态继续向下游传播，强度也随之增强。正如图 16所示，强迫引起的卷起也使 KH 模态发生旋转。在 $t = 3T_0/4$处，KH 模态比 $t = T_0/4$处强得多，是一个位于 $x/D = [0.6,\ 1]$ 区域附近、频率较低且背离中心线倾斜的结构。对 SPOD 模态进行相应分析后发现，在这一频率下喷口附近不存在开尔文–亥姆霍兹活动，这凸显了 CS-SPOD 揭示受强迫频率支配的潜在重要动力学效应的能力。

图 24 展示了 $\gamma_{St} = 0.15$处三个主导模态的归一化能量随相位的变化。尽管图22中可以看到能量随相位发生大幅调制，但其 $\pm 2\%$ 的变化幅度很小。这表明，尽管射流中的模态结构和统计特性都呈现出强烈的相位依赖性，但对整个流场取平均后，这些模态所包含的总能量并不强烈依赖于相位。最后，图25展示了 CS-SPOD 模态中各频率分量 $f \in \Omega_\gamma$ 的分数能量。此前观察到的大量频率相互作用清晰可见；对于 $j = 1$，能量最高的 8 个频率

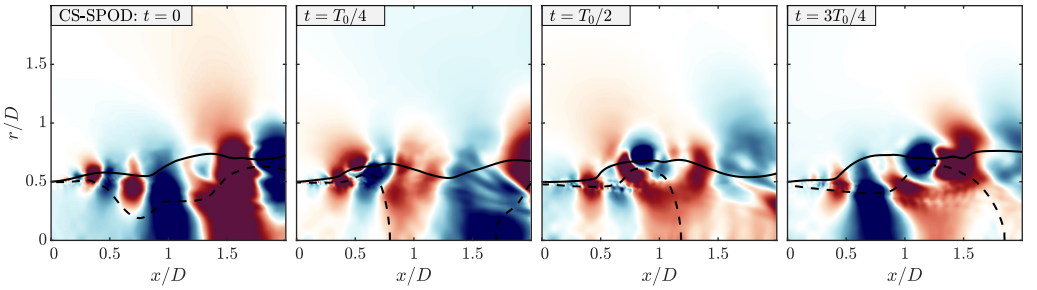


图 23：受迫马赫数 0.4 湍流射流中 $\gamma_{St} = 0.15$ 的主导 CS-SPOD 模态实部（放大查看 $x/D = [0,\ 2]$, $r/D = [0,\ 2]$）。所有等值线均设为 $\pm 0.25|\Re\{\phi_{p,1}(x = [0,\ 2],\ r = [0,\ 2],\ t)\}|_\infty$。

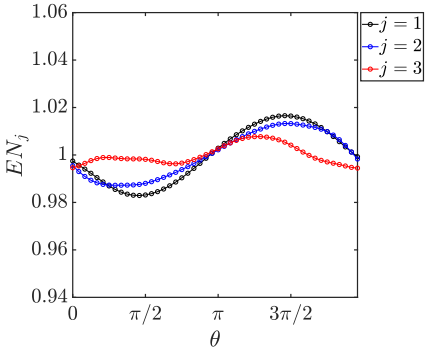


图 24：受迫马赫数 0.4 湍流射流中，主导循环平稳谱正交分解模态的能量随外部强迫相位的变化（ $\gamma_{St} = 0.15$ ）。

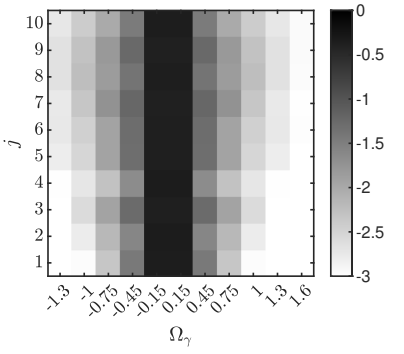


图 25：受迫马赫数 0.4 湍流射流中 $\gamma_{St} = 0.15$ 的循环平稳谱正交分解特征模态能量占比，按频率绘制，采用 $\log_{10}$ 刻度。

分量分别为 ± 0.15、± 0.45、± 0.75、± 1.05，它们分别包含 45.6% 3.7% 0.47% 0.11% 的能量。因此， Ω_γ 中的频率分量之间存在大量相互作用，从而产生了所观察到的强周期性。需要注意的是，尽管某个频率分量在 CS-SPOD 模态中可能仅占总能量的一小部分，但在许多情况下，它仍是具有重要物理意义的特征，例如前文讨论的受调制凯尔文–亥姆霍兹模态，因此应予以仔细研究。

总的来说，我们看到，强迫显然导致了已有 KH 模态和 Orr模态的大幅调制，而 SPOD 无法捕捉这一效应。因此，这证明了 CS-SPOD 对描述受迫湍流射流中的相干结构具有实用价值。

6. 谐波预解分析及其与 CS-SPOD 的关系

谐波预解分析 Padovan & Rowley(2022) 将预解分析扩展至时间周期性平均流场。首先从非线性控制方程出发

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(t)}{\partial t} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{g}(t)), \tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 是与时间无关的连续性方程、动量方程和能量方程，$\boldsymbol{g}(t) \in \mathbb{C}^N$ 是流动变量的状态向量。我们将状态分解为 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{g}''(\boldsymbol{x}, t)$，其中 $\tilde{\boldsymbol{g}}(t) = \tilde{\boldsymbol{g}}(t + T_0)$ 是 T_0 周期性平均流分量（一阶分量），而 $\boldsymbol{g}''(t)$是湍流分量（二阶分量）。由于

$\tilde{\boldsymbol{g}}(t)$具有周期性，因此可以表示为傅里叶级数，从而得到 $\tilde{\boldsymbol{g}}(t) = \sum_{n\in\mathcal{A}_n} \hat{\tilde{\boldsymbol{g}}}_n e^{i2\pi(n\alpha_0)^t}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{g}}_n$ 是基频 $\alpha_0 = 1/T_0$ 的谐波，即平均流的傅里叶级数组分量； T_0 是平均流振荡的周期； $n \in \mathcal{A}_n$的定义与前文相同。循环频率在进行线性分析时必须是平均流中存在的频率，即 $n\alpha_0$。将此分解代入（6.1）后，得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}''(t)}{\partial t} = D_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{g}}(t))\boldsymbol{g}''(t) + \mathbf{f}''(t), \tag{6.2}$$

其中 $\mathbf{f}''(t)$ 包含 $\boldsymbol{g}''(t)$ 中的高阶项。雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}(t) = D_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{g}}(t))$ 也是时间的周期函数。根据 Padovan & Rowley (2022) 中的讨论，我们假设它是时间的可微函数，从而保证式（6.2）存在唯一解。随后，也将其展开为傅里叶级数 $\boldsymbol{A}(t) = \sum_{n\in\mathcal{A}_n} \hat{\boldsymbol{A}}_n e^{i2\pi(n\alpha_0)_t}$将此展开代入式（6.2），得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}''(t)}{\partial t} = \sum_{n\in\mathcal{A}_n} \hat{\boldsymbol{A}}_n e^{i2\pi(n\alpha_0)t}\boldsymbol{g}''(t) + \mathbf{f}''(t), \tag{6.3}$$

对其进行时间傅里叶变换，再按频率分离，得到

$$i2\pi\gamma\hat{\boldsymbol{g}}_\gamma = \sum_{n\in\mathcal{A}_n} \hat{\boldsymbol{A}}_n e^{i2\pi(n\alpha_0)t}\hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma-n\alpha_0} + \hat{\mathbf{f}}_\gamma, \tag{6.4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{g}}_\gamma$ 和 $\mathbf{f}_\gamma$ 分别是 $\boldsymbol{g}''(t)$ 和 $\mathbf{f}''(t)$ 的 γ频率分量。式（6.3）表示一个耦合方程组，其中频率为 γ 的扰动通过平均流的 $n\alpha_0$ 频率分量与频率为 $\gamma - n\alpha_0$ 的扰动耦合。一般而言，这会导致一个无限维问题，类似于无限维 CS-SPOD 特征值问题。实际应用中，与 CS-SPOD 一样，我们将扰动频率限制为 $[\gamma - a_1\alpha_0,\ \gamma + a_1\alpha_0]$，因此寻求 $\boldsymbol{g}''(t) = \sum_{m\in\mathcal{A}_m} \hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma+m\alpha_0} e^{i2\pi(\gamma+m\alpha_0)t}$ 的时间周期扰动，其中 $\mathcal{A}_m = \{-a_1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, a_1\}$。这会产生解频率集合 $\Omega_\gamma = \{-a_1\alpha_0 + \gamma,\ (-a_1+1)\alpha_0 + \gamma,\ \cdots,\ \gamma,\ \cdots,\ (a_1-1)\alpha_0 + \gamma,\ a_1\alpha_0 + \gamma\}$。

我们还将平均流的频率限制为 $[-a_2,\ a_2]$，其中 $a_2 \leqslant a_1$。最终问题可简洁地表示为

$$(i2\pi\gamma\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{T}})\hat{\boldsymbol{G}} = \hat{\boldsymbol{F}}, \tag{6.6}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \hat{\boldsymbol{R}}_{-\alpha_0} & \hat{\boldsymbol{A}}_{-\alpha_0} & \hat{\boldsymbol{A}}_{-2\alpha_0} & \ddots \\ \ddots & \hat{\boldsymbol{A}}_{\alpha_0} & \hat{\boldsymbol{R}}_0 & \hat{\boldsymbol{A}}_{-\alpha_0} & \ddots \\ \ddots & \hat{\boldsymbol{A}}_{2\alpha_0} & \hat{\boldsymbol{A}}_{\alpha_0} & \hat{\boldsymbol{R}}_{\alpha_0} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma-\alpha_0} \\ \hat{\boldsymbol{g}}_\gamma \\ \hat{\boldsymbol{g}}_{\gamma+\alpha_0} \\ \vdots \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_{\gamma-\alpha_0} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_\gamma \\ \hat{\boldsymbol{f}}_{\gamma+\alpha_0} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (6.7a, b, c)$$

$\hat{\boldsymbol{R}}_{k\alpha_0} = (-ik\alpha_0\boldsymbol{I} + \hat{\boldsymbol{A}}_0) \in \mathbb{C}^{N\times N}$，且 $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{(2a_1+1)N\times(2a_1+1)N}$ 是单位算子。谐波预解算子定义为 $\hat{\boldsymbol{H}} = (i2\pi\gamma\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{T}})^{-1} \in \mathbb{C}^{(2a_1+1)N\times(2a_1+1)N}$，并具有（$2a_1+1$）个耦合方程；由于平均流的周期性，它是（$2a_2+1$）带状分块对角的。如果流场是时不变的，那么所有非对角块均为零，即不存在跨频率耦合，并且该系统

变为分块对角形式，其中每个对角块都是频率 $\gamma + k\alpha_0, k \in \mathbb{Z}$ 下的标准预解问题。正如 Padovan & Rowley (2022) 所详述的，必须去除谐波预解算子中的奇异性，以避免数值计算困难。

与 CS-SPOD 类似，谐波预解分析在 γ 上具有周期性，因此我们只需在范围 $\gamma \in \Omega_\gamma = (-\alpha_0/2,\ \alpha_0/2]$ 内求解。接下来，我们希望求出能产生最高能量响应$\boldsymbol{G}$的强迫模态 $\hat{}\,\hat{}\boldsymbol{F}$，这可表示为以下优化问题

$$\sigma^2 = \frac{\langle \hat{\boldsymbol{G}}, \hat{\boldsymbol{G}} \rangle_G}{\langle \hat{\boldsymbol{F}}, \hat{\boldsymbol{F}} \rangle_F}, \tag{6.8}$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 其中，$\langle \boldsymbol{G}_j,\ \boldsymbol{G}_k \rangle_G$ 和 $\langle \boldsymbol{F}_j,\ \boldsymbol{F}_k \rangle_F$ 分别是输出空间和输入空间上的内积，其定义如下

$$\langle \hat{\boldsymbol{G}}_j, \hat{\boldsymbol{G}}_k \rangle_G = \int_\Omega \hat{\boldsymbol{G}}_k^*(\boldsymbol{x}, f) \boldsymbol{W}_G(\boldsymbol{x}) \hat{\boldsymbol{G}}_j(\boldsymbol{x}, f) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{6.9a}$$

$$\langle \hat{\boldsymbol{F}}_j, \hat{\boldsymbol{F}}_k \rangle_F = \int_\Omega \hat{\boldsymbol{F}}_k^*(\boldsymbol{x}, f) \boldsymbol{W}_F(\boldsymbol{x}) \hat{\boldsymbol{F}}_j(\boldsymbol{x}, f) \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6.9b}$$

该优化问题的解由加权谐波预解算子的奇异值分解给出

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{W}_G^{1/2} \hat{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{W}_F^{-1/2} = \widetilde{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{\Sigma} \widetilde{\boldsymbol{V}}^*, \tag{6.10}$$

其中，对角矩阵 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots]$ 包含排序后的增益，而 $\hat{}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}_F^{-1/2} \widetilde{}\,\boldsymbol{V}$ 和 $\hat{}\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}_G^{1/2} \widetilde{}\,\boldsymbol{U}$ 的列分别包含强迫模态和响应模态。这些模态与 $\hat{}\,\boldsymbol{F}$ 或 $\hat{}\,\boldsymbol{G}$ 具有类似的结构，并且强迫 $\hat{}\,\hat{}$ 模态和响应模态（$\boldsymbol{U}_j$，$\boldsymbol{V}_j$）可在时域中重构为

$$\boldsymbol{U}_j = \boldsymbol{U}_j(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{m \in \mathcal{A}_m} \hat{\boldsymbol{u}}_{j,\gamma+m\alpha_0} e^{i2\pi(\gamma+m\alpha_0)t} \tag{6.11a}$$

$$\boldsymbol{V}_j = \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{m \in \mathcal{A}_m} \hat{\boldsymbol{v}}_{j,\gamma+m\alpha_0} e^{i2\pi(\gamma+m\alpha_0)t}. \tag{6.11b}$$

分别地，这些模态在各自的空间范数下构成正交归一组 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\langle \boldsymbol{U}_j,\ \boldsymbol{U}_k \rangle_G = \langle \boldsymbol{V}_j,\ \boldsymbol{V}_k \rangle_F = \delta_{j,\ k}$ 而时间模态在各自的时空范数下相互正交 $\langle \boldsymbol{U}_j,\ \boldsymbol{U}_k \rangle_{G(x,t)}$，$\langle \boldsymbol{V}_j,\ \boldsymbol{V}_k \rangle_{F(x,t)}$，其中

$$\langle \boldsymbol{U}_j, \boldsymbol{U}_k \rangle_{U(x,t)} = \int_\Omega \boldsymbol{U}_k^*(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{W}_G(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{U}_j(\boldsymbol{x}, t)\ d\boldsymbol{x}dt, \tag{6.12a}$$

$$\langle \boldsymbol{V}_j, \boldsymbol{V}_k \rangle_{G(x,t)} = \int_\Omega \boldsymbol{V}_k^*(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{W}_F(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}, t)\ d\boldsymbol{x}dt, \tag{6.12b}$$

分解已完成，因此可以将输出展开为

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\boldsymbol{U}}_j(\boldsymbol{x}, \gamma) \sigma_j(\gamma) \beta_j(\gamma), \tag{6.13}$$

其中

$$\beta_j(\gamma) = \langle \hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, \gamma), \hat{\boldsymbol{U}}_j(\boldsymbol{x}, \gamma) \rangle_F. \tag{6.14}$$

谐波预解分析与CS-SPOD之间的联系可通过一种类似于Towne 等人 (2018)所采用的方法得到，并且类似于预解分析与谱正交分解之间的关系。在§2中，已表明 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}',\ \alpha,\ f)$可以简洁地

写作

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\alpha,f)=E\{\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},f-\alpha/2)\hat{\boldsymbol{q}}^{*}(\boldsymbol{x}',f+\alpha/2)\}, \tag{6.15}$$

其中，$\hat{}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\ f)$ 是 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\ t)$ 的短时傅里叶变换。类似地，过程 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\ t)$ 的 CS-SPOD 分解张量可写为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)=E\{\hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x},\gamma)\hat{\boldsymbol{Q}}^{*}(\boldsymbol{x}',\gamma)\}. \tag{6.16}$$

为建立 CS-SPOD 与谐波预解分析之间的关系，我们令 CS-SPOD 分解矩阵的 CS-SPOD 展开与谐波预解展开相等，并令所有范数相等，即 $\langle\cdot\rangle=\langle\cdot\rangle_G=\langle\cdot\rangle_F=\langle\cdot\rangle_x$，可得

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(\gamma)\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\boldsymbol{\Psi}_j^{*}(\boldsymbol{x}',\gamma) \tag{6.17a}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\boldsymbol{U}}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\hat{\boldsymbol{U}}_k^{*}(\boldsymbol{x}',\gamma)\sigma_j(\gamma)\sigma_k(\gamma)S_{\beta_j\beta_k}(\gamma), \tag{6.17b}$$

其中，$S_{\beta_j\beta_k}(\gamma)=E\{\beta_j(\gamma)\beta_k^{*}(\gamma)\}$ 是 j^{th} 与 k^{th} 展开系数之间的标量互谱密度。与 Towne 等人（2018）相同，输出谐波预解模态和奇异值被移至期望算子之外，因为它们是确定性量。相反，展开系数取决于强迫 $\hat{}\mathrm{F}(\boldsymbol{x},\gamma)$；由于湍流流场的随机性，该强迫是随机的，因此由互谱密度描述。对于平稳过程，$\mathrm{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)$ 是分块对角的，$\hat{}$ 这意味着 $\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)$ 和 $\mathrm{U}j(\boldsymbol{x},\gamma)$ 每个模态仅包含一个非零频率分量，因此该关系简化为 Towne 等人（2018）中的形式。对于不相关的展开系数 $S_{\beta_j\beta_k}(\gamma)=\mu_j(\gamma)\delta_{jk}$，该关系简化为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(f)\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\boldsymbol{\Psi}_j^{*}(\boldsymbol{x}',\gamma), \tag{6.18a}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\boldsymbol{U}}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\hat{\boldsymbol{U}}_j^{*}(\boldsymbol{x}',\gamma)\sigma_j^2(f)\mu_j(\gamma). \tag{6.18b}$$

由于正交对角化具有唯一性，这表明 CS-SPOD 模态与谐波预解模态完全相同，且能量 k^{th} 最高的 CS-SPOD 模态对应于具有最大 $\sigma_j^2(\gamma)\mu_j(\gamma)$的预解模态。若 $\mu_j=1$ 对所有j 均成立，则 $\sigma_j^2(\gamma)=\lambda_j(\gamma)$且 $\boldsymbol{\Psi}_j(\boldsymbol{x},\gamma)=\hat{}\mathrm{U}j(\boldsymbol{x},\gamma)$，这表明排序后的 CS-SPOD 特征值等于排序后的谐波预解增益。为确定展开系数不相关的条件，我们按照 Towne 等人（2018）进行相同的推导，并证明

$$S_{\beta_j\beta_k}(\gamma)=\langle\langle\boldsymbol{S}_{FF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma),\hat{\boldsymbol{U}}_j(\boldsymbol{x},\gamma)\rangle^{*},\hat{\boldsymbol{U}}_k(\boldsymbol{x},\gamma)\rangle^{*}, \tag{6.19}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 其中 $\mathrm{S}_{FF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)=E\{\mathrm{F}(\boldsymbol{x},\gamma)\mathrm{F}^{*}(\boldsymbol{x}',\gamma)\}$ 是 $\mathrm{F}(\boldsymbol{x},\gamma)$ 的 CS-SPOD 分解张量。由于谐波预解模态相互正交，若 $\langle\mathrm{S}_{FF}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma),\ \mathrm{U}j(\boldsymbol{x},\gamma)\rangle^{*}=\hat{}\mu_j(\gamma)\mathrm{U}j(\boldsymbol{x},\gamma)$，则 $S_{\beta_j\beta_k}(\gamma)=\mu_j(\gamma)\delta_{jk}$。这可写为

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{S}_{\eta\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma)\boldsymbol{W}_{\eta}(\boldsymbol{x}')\hat{\boldsymbol{V}}_j(\boldsymbol{x}',\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\mu_j(\gamma)\hat{\boldsymbol{V}}_j(\boldsymbol{x},\gamma), \tag{6.20}$$

这与输入的 CS-SPOD 完全相同。接下来可以证明，当且仅当谐波预解算子输入模态与

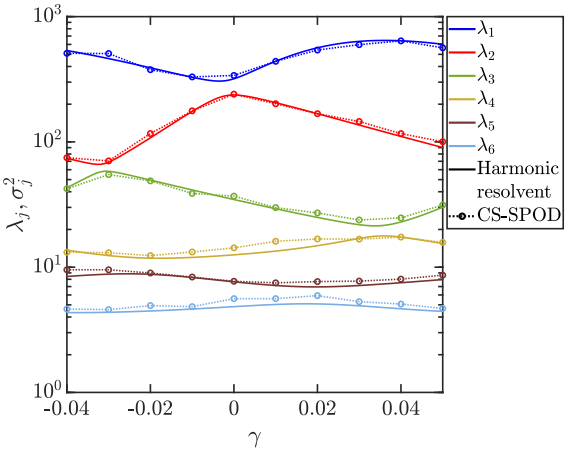


图 26：对于受白噪声强迫的金兹堡–朗道系统，比较前六个谐波预解增益 σ_j^2 和 CS-SPOD 特征值 λ_j 随 γ 的变化，其中 $A_\mu = 0.4$。

输入的循环平稳谱正交分解模态完全一致时，展开系数才互不相关。因此，我们得出结论：CS-SPOD 与谐波预解分析之间的关系，与 SPOD 和预解分析之间的关系完全相同。

接下来，我们可以针对 $\mu_j = 1$进行具体分析，得到

$$\boldsymbol{S}_{\eta\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \gamma)\boldsymbol{W}_\eta(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \tag{6.21}$$

其中 $\boldsymbol{W}_\eta(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{I}$对应 $\boldsymbol{S}_{\eta\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \gamma) = \boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$，也就是说，强迫为单位振幅白噪声。由此得到完全相同的谐波预解模态和 CS-SPOD 模态，且能量/增益也完全相同，即 $\sigma_j^2 = \lambda_j$。

我们通过比较修正的受迫金兹堡-朗道系统的 CS-SPOD 与谐波预解分析结果来展示这一结论，其中 $A_\mu = 0.4$。对于 CS-SPOD 和谐波预解分析，我们均采用 $a_1 = 5$，对应的频率范围为 $\Omega_\gamma = [-0.5, 0.5] + \gamma$。计算 CS-SPOD 时，我们使用单位方差带限白噪声对系统施加 强迫。其构造方式与前文 §5.1 中考虑的空间相关情形类似，但不包含引入空间相关性的步骤。我们采用与§5.1中相同的计算参数。

如§6所示，由于强迫为白噪声，CS-SPOD 模态与谐波预解分析模态在理论上完全相同。此外，由于内积的权重为单位值，CS-SPOD 特征值等于谐波预解分析增益。图26展示了前六个 CS-SPOD 特征值和谐波预解增益。总体而言，CS-SPOD 特征值与谐波预解增益吻合极佳。CS-SPOD 特征值中存在的少量抖动源于统计收敛。轻微的过冲或欠冲与谱泄漏和周期泄漏有关，可通过提高估计的频率分辨率来减少。与任何谱估计一样，增加数据块长度会减少数据块数量，从而导致众所周知的偏差-方差权衡。采用多窗方法（Schmidt2022）改善了 SPOD 中对偏差-方差权衡的控制，也可将其用于 CS-SPOD。

图 27 展示了 $\gamma = 0.05$处能量最高的三个 CS-SPOD 模态和谐波预解模态的时间演化幅值，我们可以看到二者几乎无法区分。CS-SPOD 模态与谐波预解模态之间的相似性通过投影 $\xi_{jk}(f) = \langle \boldsymbol{\psi}_j(\gamma)、\boldsymbol{U}_k(\gamma)\rangle_x$ 以及谐波预解算子-

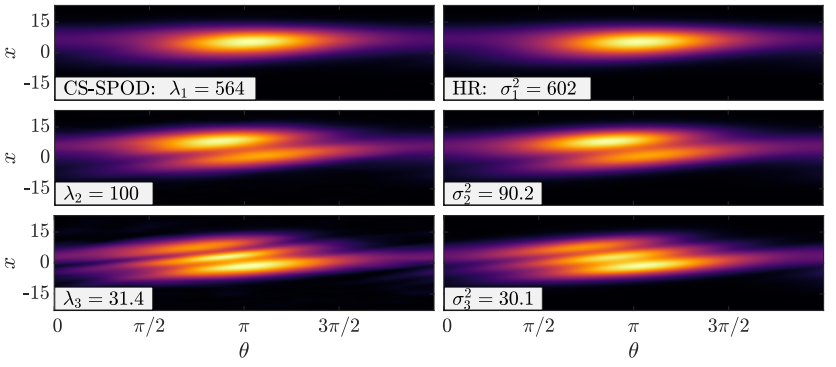
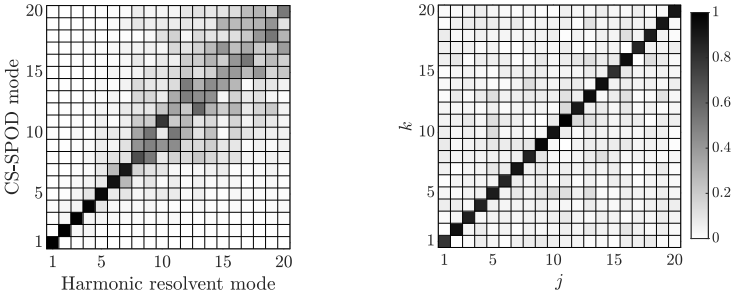


图 27：在 $A_\mu = 0.4$ 处，金兹堡-朗道系统中 $\gamma = 0.05$ 处能量最高的三个循环平稳谱正交分解模态（左）与谐波预解模态（右）的幅值对比。循环平稳谱正交分解模态的等值线范围设置为与对应的谐波预解模态相同 $[0, |\boldsymbol{\psi}_j(\boldsymbol{x}, t)|_\infty]$。



(a) ξ_{jk} (b) $\frac{|S_{\beta_j\beta_k}|}{|S_{\beta_j\beta_k}|_\infty}$

图 28：在白噪声强迫下，金兹堡-朗道系统于 $\gamma = 0.05$ 处的 CS-SPOD 与谐波预解分析模态投影系数 (a)，以及归一化谐波预解算子模态展开系数互谱密度的幅值 (b)。

模态展开系数互谱密度 $S_{\beta_j\beta_k}(\gamma)$，由 (6.19) 给出。为计算 $S_{\beta_j\beta_k}(f)$，我们对 $\boldsymbol{U}_j(\gamma)$ 和 $\boldsymbol{U}_k(\gamma)$ 分别取两个内积，然后除以 $\sigma_j(\gamma)$ 和 $\sigma_k(\gamma)$，得到

$$S_{\beta_j\beta_k}(\gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\gamma)}{\sigma_j(\gamma)\sigma_k(\gamma)} \xi_{nj}(\gamma)\xi_{nk}^*(\gamma). \tag{6.22}$$

投影 ξ_{jk} 和 $\frac{|S_{\beta_j\beta_k}|}{|S_{\beta_j\beta_k}|_\infty}$ 如图所示 28 适用于 $\gamma = 0.05$。$|S_{\beta_j\beta_k}|$ 按构造而言是对角矩阵，因此 ξ_{jk}也应为对角矩阵。前八个模态验证了这一点，但随着模态的次要程度不断增加，非对角项也愈发明显，这是由于统计收敛尚不完全。

最后，为了展示在对时周期平均流进行建模和结构提取时使用谐波预解算子和循环平稳POD的必要性，我们将结果与直接将SPOD和标准预解算子应用于时周期平均流系统的朴素方法进行比较。图29 比较了 $A_\mu = 0$、0.2 和 0.4 时的（标准）预解算子增益与SPOD特征值。当 $A_\mu = 0$时，系统处于平稳状态，预解算子增益与SPOD能量一致（正如预期），但随着 $A_\mu \neq 0$ 的增大，二者之间的差异显著增大

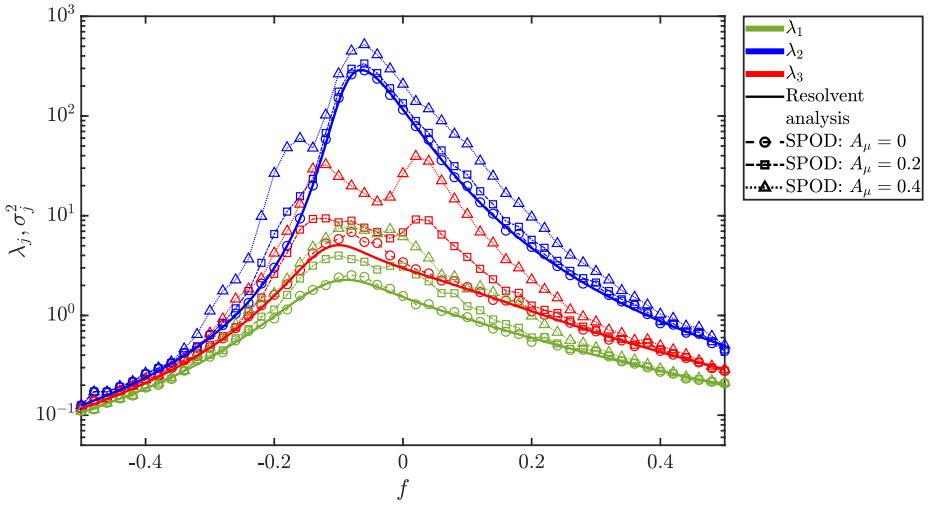


图29：对于在 $A_\mu = 0.0$,0.2 和 0.4 处受白噪声强迫的金兹堡-朗道系统，第一至第三个预解分析增益 σ_j^2 和SPOD特征值 λ_j 随频率 f 的变化对比。为清晰起见，省略了每隔一个SPOD特征值。

且基流的振荡越来越明显。对于具有周期统计特性的系统，必须使用CS-SPOD和谐波预解分析来分析这些流场。

7. 低频和高频强迫极限

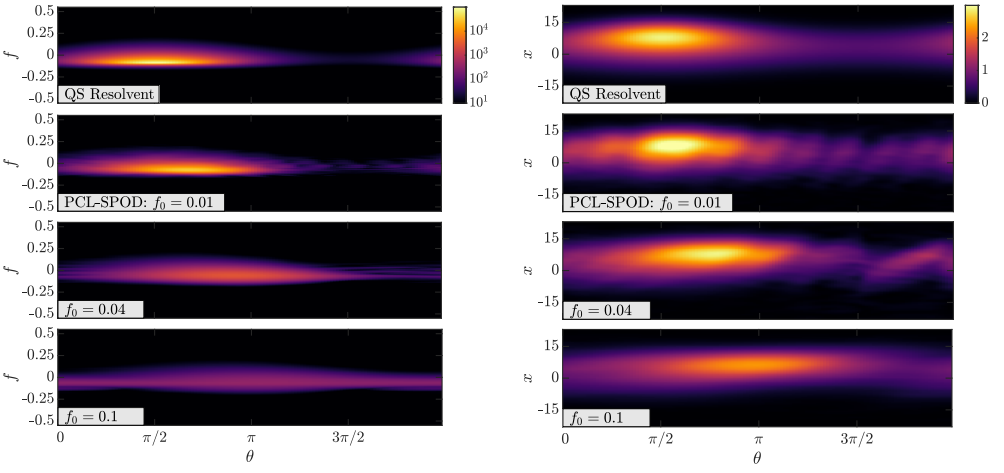
在许多流场中，强迫频率相对于所关注的动力学过程可能较低，也可能较高。在这两种情况下，都可以对分析进行简化。

对于低频强迫，CS-SPOD 和 HR 趋向于将所有频率分量联系在一起的系统，从而使对所得系统的分析变得不切实际。然而，在许多情况下，我们关注的频率远高于强迫频率。Franceschini等 (2022) 表明，在低频周期运动上演化的高频结构可以通过准稳态方法进行分析，他们将其命名为相位条件局部谱正交分解（PCL-SPOD）和准稳态（QS）预解分析。这些方法要求 $f >> f_0$ 并且在每个固定时刻（或相位） t，该相位附近的互相关张量仅取决于时间滞后 τ。在每个相位下，相位条件局部谱正交分解和准稳态预解分析均满足标准谱正交分解和预解分析的所有性质，详情请参阅 Franceschini等(2022) 的详细讨论。尽管相位条件局部谱正交分解的开发并未参考循环平稳理论和计算方法，但通过采用与 Franceschini 等 (2022) 类似的推导，相位条件局部谱正交分解可以写为

$$\int_\Omega \boldsymbol{WV}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f,t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}',f,t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \lambda\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},f,t), \tag{7.1}$$

其中 $\boldsymbol{WV}(\boldsymbol{x}、\ \boldsymbol{x}'、\ f、\ t)$ 是维格纳–维尔谱，而 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}'、\ f、\ t')$ 是仅包含单个频率分量 f 且在时间上相互独立的相位条件局部谱正交分解特征向量。这在解析上与 Franceschini等人 (2022) 中所示的相位条件局部谱正交分解完全相同，但数值上采用不同的计算程序确定。准稳态预解分析类似地可写为

$$(i2\pi f\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(t))\hat{\boldsymbol{g}}_f = \hat{\boldsymbol{\eta}}_f, \tag{7.2}$$



(a) QS预解算增益（σ_j^2）的等值线，以及（b）PCL-SPOD能量（λ_j）在 $\theta - x$ 空间中的加权模态形状随频率 f 和相位 θ的变化。 $f = 0.1$处的主导QS预解算（$\sigma_j(f)|\hat{\boldsymbol{u}}_j(\boldsymbol{x},\ f)|$）和PCL-SPOD（$\sqrt{\lambda_j}|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}',\ f,\ t)|$）模态。

图30：白噪声激励的 Ginzburg–Landau 系统在 $A_\mu = 0.2$ 和 $f_0 = 0.01$、0.04、和 0.1 处的增益模态和权重模态形状等值线。

其中， $\boldsymbol{R}(t) = (i2\pi f\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(t))$ 是QS预解算算子，并且每个时间实例 t 处的解都独立于任何其他时间实例处的解。随后，我们寻求求解能够产生最高能量响应 $\hat{\boldsymbol{g}}_f$的强迫模态 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_f$，该响应通过加权谐波预解算子的奇异值分解确定

$$\boldsymbol{W}_g^{1/2}\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{W}_\eta^{-1/2} = \widetilde{\boldsymbol{U}}_\dagger\boldsymbol{\Sigma}_\dagger\widetilde{\boldsymbol{V}}_\dagger^*, \tag{7.3}$$

其中， $\boldsymbol{W}_\eta$ 和 $\boldsymbol{W}_g$ 分别是输入空间和输出空间上的范数，其定义方式与公式6.9类似。对角矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_\dagger = \mathrm{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots]$ 包含排序后的增益，而 $\hat{\boldsymbol{V}}_\dagger = \boldsymbol{W}_F^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{V}}_\dagger$ 和 $\hat{\boldsymbol{U}}_\dagger = \boldsymbol{W}_G^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{U}}_\dagger$ 分别包含强迫模态和响应模态。

使用方程 2.9、算法 1，并采用与常规SPOD类似的步骤，我们计算了白噪声强迫下金兹堡–朗道系统在若干不同强迫频率 $f_0 = 0.01$、0.04 和 0.1 下的相位条件局部谱正交分解 $A_\mu = 0.2$。由于强迫频率显著较低，我们保存的是 2×10^5 快照，而非 4×10^4。随后，我们在图 30 中比较相位条件局部谱正交分解与 QS预解算结果，发现当 f_0较小时，两者吻合得非常好。随着 f_0 增大，由于上述两个假设受到的违背程度也随之增加，相位条件局部谱正交分解与 QS预解算结果之间的偏差也越来越大。

许多物理系统都会呈现某种形式的谱峰。如果强迫频率足够高，使得 $f + k\alpha_0$、$k \in \mathbb{Z}\ \&\ k \neq 0$ 处的能量显著低于 f处的能量，那么可以发现，CS-SPOD 和谐波预解算系统（分别由方程3.5、6.6给出）可近似为对应于 f 的分块对角项（即 Ω_γ中能量最大的分量）。此外，对于许多系统，高频强迫对低频动力学的影响并非直接作用；相反，低频是由于改变平均流的非线性相互作用而发生变化。因此，当强迫频率较大时，CS-SPOD 和谐波预解分析分别趋近于谱正交分解和标准预解分析。在图 31中，我们

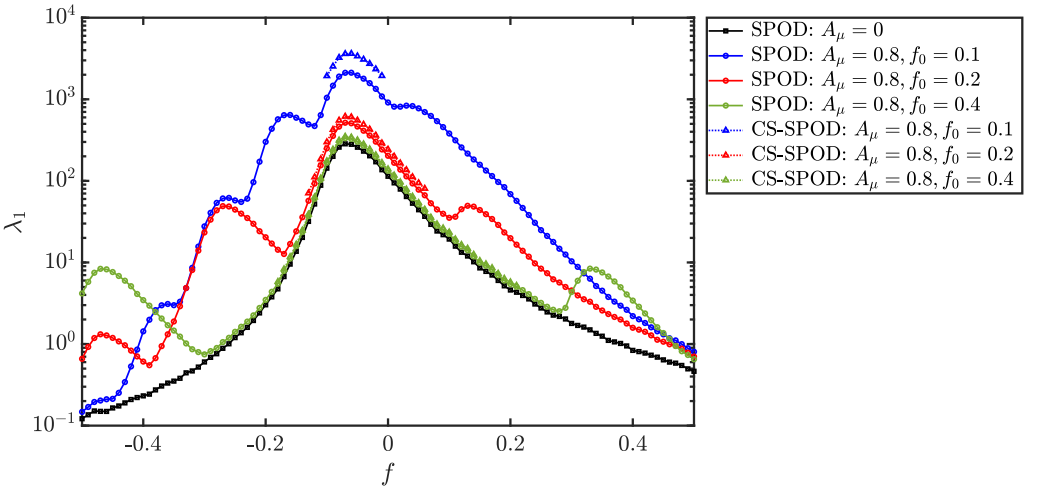


图31：白噪声强迫的金兹堡-朗道系统在 $A_\mu = 0.8$ 处、 $f_0 = 0.1$，0。2，0。4 条件下，主导 SPOD 和 CS-SPOD 特征值随频率 f 变化的对比。叠加了 $A_\mu = 0$ 对应的 SPOD 特征值，以展示强迫对谱的影响。

展示了白噪声强迫的金兹堡–朗道系统在 $A_\mu = 0.8$ 下、 $f_0 = 0.1$、0.2、0.4 时的 SPOD 特征谱和 CS-SPOD 特征谱。为评估强迫频率较大时 CS-SPOD 向 SPOD 的收敛情况，我们将 CS-SPOD 模态映射到对齐程度最高的 SPOD 模态（在相同频率集合 Ω_γ上计算）。这与 §5.1 中比较 SPOD 模态与 CS-SPOD 模态时采用的方法类似。可以看到，随着强迫频率升高，在 $f + k\alpha_0 << f$、 $k \in \mathbb{Z}$ & $k \neq 0$处能量较高的区域，CS-SPOD 特征值开始趋近于 SPOD 特征值。

8. 结论

本文提出了 CS-SPOD，用于从统计特性随时间周期性变化（即具有循环平稳统计特性）的复杂湍流中提取能量最强的相干结构。为此，我们将 Kim 等人 (1996) 开发的一维技术进行扩展，并采用快照法处理大型高维数据，使该算法能够高效处理大规模数据。本文展示了 CS-SPOD 生成的模态所具有的正交性/最优性；与对平稳流动进行 SPOD 分析类似，CS-SPOD 根据时空范数确定一组正交模态，以最优方式重构这些流动的统计特性。

与 SPOD 不同，SPOD 的模态以单一频率振荡，且其振幅随时间保持恒定；CS-SPOD 模态则以一组频率振荡，这些频率之间相隔一个基周期频率（通常为调制频率），其振幅随时间呈周期性变化，并能够最优地重构二阶统计量。我们证明，在分析平稳过程时，CS-SPOD 会自然地转化为 SPOD，从而使 CS-SPOD 的结果能够以熟悉的方式进行解释。此外，我们开发了一种高效的计算算法，用于计算 CS-SPOD，其计算成本和内存需求与 SPOD 相近，因此 CS-SPOD 能够应用于范围广泛的问题。最后，与 SPOD 和标准预解分析之间存在的关系类似（Towne 等人 2018），在谐波预解模态展开

系数彼此不相关。我们还讨论了在低频或高频强迫时可以进行的简化。

我们将 CS-SPOD 算法应用于两个数据集。第一个数据集来自一个经过修正的线性化复 Ginzburg-Landau 方程，该方程具有时间周期动力学，可作为表现出非模态增长的流场的简化模型。随着施加的时间周期性振幅增大，CS-SPOD 得到的模态对相位的依赖性也越来越强。我们通过分析模态的时间演化，以及比较 CS-SPOD 与 SPOD 所捕获的能量（前者显著更多），展示了 SPOD 无法捕捉这些动力学特性。此外，我们还表明，当系统受到单位方差白噪声强迫时，数据得到的 CS-SPOD 模态与谐波预解分析计算出的模态完全一致（统计收敛范围内）。对于循环平稳过程，我们表明，即使满足白噪声强迫条件，（标准）预解分析也无法预测时间平均统计特性。这说明，要正确分析和/或建模具有循环平稳统计特性的流场，应采用 CS-SPOD 和谐波预解分析。

接下来，我们研究了受强迫的高雷诺数湍流射流，首次在湍流流场中展示了 CS-SPOD。我们发现了相干结构，它们在重要方面不同于通过 SPOD 识别的自然射流中的对应结构。特别是，CS-SPOD 阐明了强迫如何改变相干结构的动力学。例如，低斯特劳哈尔数下的轴对称 CS-SPOD 结构在近喷嘴区域呈现出更精细尺度的轴对称开尔文-亥姆霍兹涡卷起，而这在高雷诺数自然射流中并不存在。在强迫周期中，初始剪切层变薄和变厚的相应相位下，这种卷起分别增强和减弱。

总体而言，我们的结果表明，CS-SPOD 成功地将 SPOD 扩展到了具有循环平稳统计特性的流场。这使我们能够研究各种具有时间周期统计特性的流场，例如涡轮机械、天气与气候，以及通过谐波激励进行流动控制的情形；还包括通过为主导涡脱落频率任意选择相位参考而呈现循环平稳特性的尾流。尽管我们关注的是严格的循环平稳过程，但还可以进一步推广到几乎周期流动以及受到多个不可公度频率强迫的流场。

致谢。 作者谨此感谢美国海军研究办公室在合同 N00014-20-1-2311 项下提供的支持，项目负责人为 S. Martens博士；同时感谢美国联邦航空管理局通过资助项目 13-C-AJFE-UI 提供的支持。本研究还部分使用了美国国防部高性能计算现代化计划提供的高性能计算机时和资源。本研究通过高级网络基础设施协调生态系统：服务与支持（ACCESS）计划获得 CTS120005 号资源分配，并使用了德克萨斯高级计算中心的 Stampede2。该计划由美国国家科学基金会的资助项目 # 2138259、#2138286、#2138307、#2137603 和 #2138296 提供支持。

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

附录A。

为推导式 (3.5) 给出的特征值问题，我们将 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,t') \rightarrow \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,\tau) \equiv E\{\mathrm{q}(\boldsymbol{x},t+\tau/2)\mathrm{q}^{*}(\boldsymbol{x}',t-\tau/2)\}$ 重写为 $\tau = t - t'$。回顾一下，对于循环平稳过程，两点时空相关密度是时间上的周期函数，可以表示为傅里叶级数。

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,\tau) = \sum_{n\in\mathcal{A}_n} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)e^{i2\pi n\alpha_0 t}, \tag{A 1}$$

~其中，$\boldsymbol{R}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)$ 是 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,\tau)$ 在循环频率 $n\alpha_0$ 下的循环自相关函数，而 $\mathcal{A}_n=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 通常是流场中存在的基周期频率的无限谐波集合。两点时空相关密度也可以分解为以下相移傅里叶级数。

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',t,\tau)=\sum_{n\in\mathcal{A}_n}\hat{\boldsymbol{R}}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)e^{-i\pi n\alpha_0\tau}e^{i2\pi n\alpha_0 t}, \tag{A 2}$$

其中两个傅里叶系数之间的关系为

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)e^{i\pi n\alpha_0\tau}=\hat{\boldsymbol{R}}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau). \tag{A 3}$$

尽管这种做法有些特别，但它只是对所得的傅里叶级数系数施加相移；经过傅里叶变换后，这会使循环互谱密度的中心频率发生偏移。这与循环互相关函数和循环互谱密度的对称定义与非对称定义之间的相移完全相同。因此，可以使用对称定义并施加相移，或使用非对称定义来推导 CS-SPOD。我们选择前者，因为这样后续推导更简单。此相移是确保所得特征系统为厄米正半定所必需的。将式（2.7）中的循环维纳–辛钦关系代入式（A2），再代入弗雷德霍姆特征值问题（3.3），得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n\in\mathcal{A}_n}\boldsymbol{S}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)e^{i2\pi n\alpha_0 t}e^{i2\pi(f-\frac{1}{2}n\alpha_0)\tau}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}f\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\mathrm{d}t' = \lambda\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t). \tag{A 4}$$

由于 $\tau=t-t'$，可得到以下简化结果，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\sum_{n\in\mathcal{A}_n}\boldsymbol{S}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)e^{i2\pi n\alpha_0 t}e^{i2\pi(f-\frac{1}{2}n\alpha_0)t}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}',t')e^{-i2\pi(f-\frac{1}{2}n\alpha_0)t'}\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}f dx' = \lambda\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t), \tag{A 5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega}\sum_{n\in\mathcal{A}_n}\boldsymbol{S}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',f)e^{i2\pi(f+\frac{1}{2}n\alpha_0)t}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')\hat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}',f-\frac{1}{2}n\alpha_0)\mathrm{d}f\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\lambda\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t), \tag{A 6}$$

^其中 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}',\ f)$ 是 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}',\ t')$ 的时间傅里叶变换。与谱正交分解类似，我们必须选择一种试探形式。在谱正交分解中，由于不同频率分量之间不存在相关性，因此可以一次求解一个频率。然而，由于循环平稳过程具有彼此相关的谱分量，我们无法分别求解每个频率分量。相反，我们通过将解的试探形式选为以下形式，同时求解多个耦合频率

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{m\in\mathcal{A}_m}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0)e^{i2\pi(\gamma+m\alpha_0)t}, \tag{A 7}$$

从而得到，

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},f)=\sum_{m\in\mathcal{A}_m}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0)\delta(f-(\gamma+m\alpha_0)), \tag{A 8}$$

其中，$\mathcal{A}_m=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 通常给出了该解中存在的无限个频率集合（各频率之间均相差 α_0）。$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},f)$的频移版本表示为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x},f-\frac{1}{2}n\alpha_0)=\sum_{m\in\mathcal{A}_m}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0)\delta(f-(\gamma+(m+\frac{1}{2}n)\alpha_0)). \tag{A 9}$$

代入 将这些表达式代入（A6），并对 f 进行积分，得到

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathcal{A}_n}\sum_{m'\in\mathcal{A}_m} \boldsymbol{S}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma+(m'+\frac{1}{2}n)\alpha_0)e^{i2\pi(\gamma+(n+m')\alpha_0)t}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')$$
$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m'\alpha_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \lambda\sum_{m\in\mathcal{A}_m}\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0)e^{i2\pi(\gamma+m\alpha_0)t}. \tag{A 10}$$

为使该方程在所有时刻都成立，我们进行谐波平衡，其中每个频率分量必须分别成立。这给出 $\gamma+(m'+n)\alpha_0 = \gamma+m\alpha_0 \rightarrow m'+n=m$。由此可为试探形式中的每个频率分量建立一个方程：

$$\int_\Omega \sum_{n\in\mathcal{A}_n}\sum_{m'\in\mathcal{A}_m} \boldsymbol{S}_{n\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma+(m'+\frac{1}{2}n)\alpha_0)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m'\alpha_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\delta_{n+m',m}$$
$$= \lambda\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0). \tag{A 11}$$

代入 $n=m-m'$ 后，该表达式可简化为

$$\int_\Omega \sum_{m'\in\mathcal{A}_m} \boldsymbol{S}_{(m-m')\alpha_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\gamma+\frac{1}{2}(m+m')\alpha_0)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m'\alpha_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}'$$
$$= \lambda\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\gamma+m\alpha_0), \tag{A 12}$$

其中我们忽略 $m-m'\notin\mathcal{A}_n$。展开（A12）得到最终的 CS-SPOD特征值问题（3.5）。

REFERENCES

Amaral, Filipe R, Cavalieri, André VG, Martini, Eduardo, Jordan, Peter &Towne, Aaron 2021 利用壁面测量对湍流通道流进行基于预解的估计。 *Journal of Fluid Mechanics* **927**, A17。

Antoni, Jérôme 2007 *Mechanical Systems and Signal* 循环谱分析实践。 *Processing* **21** 2 597 630

( ), –。Antoni, Jérôme 2009 *Mechanical Systems and Signal* 循环平稳性举例。 *Processing* **23** 4 987 1036

( ), –。Antoni, Jérôme, Bonnardot, Frédéric, Raad, A & El Badaoui, Mohamed 2004 旋转机械振动信号的循环平稳建模。 *Mechanical systems and signal processing* **18** 6 1285 1314

( ), –。Arbabi, Hassan & Mezić, Igor 2017 利用Koopman模态分解研究后瞬态流动的动力学。 *Physical Review Fluids* **2** (12), 124402。Aubry, Nadine 1991 *Theoretical* 本征正交分解的隐秘之美。 *and Computational Fluid Dynamics* **2** 5 6 339 352

(-), –。Aubry, Nadine, Holmes, Philip, Lumley, John L & Stone, Emily 1988 湍流边界层壁面区域相干结构的动力学。 *Journal of fluid Mechanics* **192** 115 173

, –。Bagheri, Shervin, Henningson, Dan S, Hoepffner, J & Schmid, Peter J 2009 输入—输出分析与控制设计：应用于空间发展流的线性模型。*Applied Mechanics Reviews* **62** (2)。Bendat, Julius S & Piersol Allan G 2011 *Random data: analysis and measurement* , 。约翰·威立父子公司。 *procedures*

Boyles, R & Gardner, W 1983 离散参数非平稳随机过程的循环遍历性质。 *IEEE Transactions on information theory* **29** (1), 105–114。Braun, S 1975 *Acta Acustica* 通过时域平均提取周期波形。 *united with Acustica* **32** 2 69 77

( ), –。Brereton, G. J. & Kodal, A. 1992 用于非定常湍流三重分解的频域滤波技术。 *Journal of Fluids Engineering*

114 (1), 45–51, arXiv: https://asmedigitalcollection.asme.org/fluidsengineering/article-pdf/114/1/45/5735994/45 1.pdf。Brès, Guillaume A, Ham, Frank E, Nichols, Joseph W & Lele, Sanjiva K 2017 超声速射流的非结构化大涡模拟。 *AIAA journal* **55** (4), 1164–1184。Brès, Guillaume A, Jordan, Peter, Jaunet, Vincent, Le Rallic, Maxime, Cavalieri, André VG Towne Aaron Lele Sanjiva K Colonius Tim & Schmidt Oliver T , , , , , , , 亚声 2018 速湍流射流中喷嘴出口边界层状态的重要性。 *Journal of Fluid Mechanics* **851** 83 124 , –。Brown III, William Alexander 1987 *On the theory of cyclostationary signals*。加州大学戴维斯分校。Chen, Kevin K & Rowley, Clarence W 2011 线性化复Ginzburg–Landau系统中H2最优执行器和传感器布置。 *Journal of Fluid Mechanics* **681**, 241–260。Chomaz, JM, Huerre, P & Redekopp, LG 1988 空间发展流中向局部模态和全局模态的分岔。 *Physical review letters* **60** (1), 25。Chu, Boa-Teh 1965 *Acta Mechanica* **1** 3 215 234 流场中向小扰动的能量传递（第一部分）。 (), –。Citriniti, Joseph H & George, William K 2000 利用本征正交分解重构轴对称混合层的全局速度场。 *Journal of Fluid Mechanics* **418** 137 166 , –。Cossu, Carlo & Chomaz JM 1997 *Physical review letters* **78** 23 4387 局部对流不稳定性的全局度量。 (), 。Cossu, Carlo, Pujals, Gregory & Depardon, Sebastien 2009 湍流边界层中的最优瞬态增长与超大尺度结构。 *Journal of Fluid Mechanics* **619** 79 94 , –。Crow, S. C. & Champagne, F. H. 1971 射流湍流中的有序结构。 *Journal of Fluid Mechanics* **48** 3 547 591 (), –。Dormand, John R & Prince, Peter J 1980 一族嵌入式Runge-Kutta公式。 *Journal of computational and applied mathematics* **6** (1), 19–26。Flandrin, Patrick 1998 *Time-frequency/time-scale analysis*。学术出版社。Franceschini, Lucas, Sipp, Denis, Marquet, Olivier, Moulin, Johann & Dandois,Julien 2022低频周期极限环上演化的高频涨落的识别与重构：在湍流圆柱流中的应用。 *Journal of Fluid Mechanics* **942** 。Gardner, William 1986*a* *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing* **34** 5 1111 1123 谱相关测量。 , , (), –。Gardner, William A 1972 *Tech. Rep.* 循环平稳过程的表示与估计。。马萨诸塞大学阿默斯特分校工程研究所。Gardner, William A 1986*b* 随机过程导论：信号与系统应用（（书籍））。 *New York, MacMillan Co.*, 1986, 447 。Gardner, William A 1986*c* 循环平稳时间序列的谱相关理论。*Signal processing* **11** (1), 13–36。Gardner, William A 1994 *Cyclostationarity in communications and signal processing* 1 90 循环平稳信号导论。载于，页码–。IEEE出版社，纽约。Gardner, William A 2018 统计推断的时间扭曲：将循环平稳范式从规则统计周期性拓展至科学数据中的不规则统计周期性。 *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* **2018** 1 1 25 (), –。Gardner, William A, Napolitano, Antonio & Paura, Luigi 2006循环平稳性：半个世纪的研究。 *Signal processing* **86** (4), 639–697。Gardner, William A & Robinson Enders A 1989 *Statistical spectral analysis—A nonprobabilistic theory* 。普伦蒂斯·霍尔。Gladyshev, EG 1963 具有连续时间参数的周期相关与近似周期相关随机过程。 *Theory of Probability & Its Applications* **8** (2), 173–177。Glezer, Ari, Kadioglu, Zafer & Pearlstein, Arne J 1989 扩展本征正交分解的发展及其在时间周期强迫平面混合层中的应用。 *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* **1** (8), 1363–1373。Gudzenko, LI 1959 *Radio Eng. Electron. Phys.(USSR)* 周期非平稳过程。 (), –**4** 6 220 224 。

Heidt, Liam, Colonius, Tim, Nekkanti, Akhil, Schmdit, Oliver, Maia, Igor &Jordan, Peter 2021 使用谱正交分解和预解分析研究受迫亚声速射流。在 *AIAA Aviation 2021 Forum*，第2108页。Hunt, RE & Crighton, David George 1991 空间发展介质中的流动不稳定性。*Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* **435** 1893 109 128 ( ), –。

Hurd, H.L. 1969 周期相关随机过程研究，博士论文。 *Tech. Rep.*。杜克大学，达勒姆，北卡罗来纳州。Hussain, AKMF & Reynolds, WC 1972 湍流剪切流中有组织波的力学。第2部分：实验结果。*Journal of Fluid Mechanics* **54** (2)，241–261。Hussain,
Abul Khair Muhammad Fazle & Reynolds, William C 1970 湍流剪切流中有组织波的力学。*Journal of Fluid Mechanics* **41** (2)，241–258。Jenkins,
Gwilym M 1968 *Holden-Day San* 谱分析及其 *Francisco Card Nr. 67-13840* 应用。， *Inc.*， ，。Jeun, Jinah, Nichols, Joseph W & Jovanović, Mihailo R 2016 高速轴对称等温射流噪声的输入输出分析。 *Physics of Fluids* **28** (4)，047101。Kim, Kwang-Y & North, Gerald R 1997 可调和循环平稳过程的经验正交函数。*Journal of the atmospheric sciences* **54** (19)，2416–2427。Kim, Kwang-Y, North, Gerald R & Huang, Jianping 1996 一维循环平稳时间序列的经验正交函数：计算、示例与随机建模。 *Journal of Atmospheric Sciences* **53** 7 1007 1017 ( )，–。

Lebedev, VL 1959 *Nauchn. Dokl. Vysshch. Shchk. Ser. Radiotekh. Elektron.* **2** 32 34 论具有周期特征的非平稳随机过程。，–。Lumley, J. L. 1967 非均匀湍流的结构。 *Atmospheric turbulence and radio propagation* 166 178 第–页。

Lumley, J. L. 1970 湍流中的随机工具。 *J. Fluid Mech.* **67**，413–415。Martin,
Wolfgang 1982 *ICASSP'82. IEEE* 随机信号的 *International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing* 7， 1325 时频分析。载于，，，第卷，第–1328页。IEEE。Martin, Wolfgang & Flandrin, Patrick 1985 非平稳过程的魏格纳-维尔谱分析。 *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing* ，，( )，–。 **33** 6 1461 1470

Martinsson, Per-Gunnar & Tropp, Joel A 2020 随机化数值线性代数：基础与算法。 *Acta Numerica* **29**，403–572。McKeon,
BJ & Sharma AS 2010 *J.* 湍流管流的 *FluidMech* **658** 336382 临界层框架。，。Meliga, Philippe, Pujals, Gregory & Serre, Eric 2012 使用全局稳定性分析D形圆柱绕流二维湍流流动的敏感性。 *Physics of Fluids* **24** (6)，061701。Mezić, Igor 2013 通过Koopman算子的谱性质分析流体流动。*Annual Review of Fluid Mechanics* **45**，357–378。Moarref, Rashad, Sharma, Ati S, Tropp, Joel A & McKeon, Beverley J 2013高雷诺数湍流通道中流向能量密度的基于模型的标度。 *Journal of Fluid Mechanics* **734**，275–316。Morra, Pierluigi, Semeraro, Onofrio, Henningson, Dan S & Cossu, Carlo 2019 雷诺应力在湍流壁面流预解分析中的相关性。*Journal of Fluid Mechanics* **867**，969–984。Napolitano,
Antonio 2019 *Cyclostationary processes and time series: theory, applications, and generalizations* 。学术出版社。Oberleithner, Kilian, Paschereit, Christian Oliver & Wygnanski, I 2014 旋流对相干结构增长的影响。 *Journal of Fluid Mechanics* **741**，156 199–。Padovan, Alberto, Otto, Samuel E & Rowley, Clarence W 2020通过谐波预解算子分析非线性流动中的放大机制和跨频率相互作用。 *Journal of Fluid Mechanics* **900**。Padovan, Alberto & Rowley,
Clarence W 2022 通过谐波预解算子分析次谐波流动结构的动力学：轴对称射流中涡配对的应用。 *Physical Review Fluids* **7** (7)，073903。

Picard, C & Delville J 2000 *International*，亚声速 *Journal of Heat and Fluid Flow* **21** 3 359 364
圆射流中的压力-速度耦合。( )，–。Pickering,

Ethan Rigas Georgios Nogueira Cavalieri André，，，，
V. G. Schmidt Oliver T. & Colonius Tim 2020
Petrônio A. S.，，，，，湍流射流中的抬升、开尔文–亥姆霍兹和奥尔机制。
Journal of Fluid Mechanics **896**，A2。Pickering, Ethan, Rigas, Georgios, Schmidt, Oliver T, Sipp, Denis & Colonius, Tim2021 湍流射流相干结构基于预解算子模型的最优涡黏度。
Journal of Fluid Mechanics **917**。Randall, Robert B, Antoni, Jérôme & Chobsaard, S 2001 谱相关与包络分析在轴承故障及其他循环平稳机械信号诊断中的关系。
Mechanical systems and signal processing **15** (5)，945–962。Reynolds, WC & Hussain,
AKMF 1972 湍流剪切流中有组织波的力学。第
3 *Journal of Fluid* 部分：理论模型
Mechanics **54** 2 263 288
及与实验的比较。( )，–。Rowley,

Clarence W Mezić Igor Bagheri Shervin Schlatter Philipp &，，，，，，，，
Henningson Dan S 2009
非线性流动的谱分析。 *Journal of fluid mechanics*
641 115 127 ，–。Schmid,

Peter J 2010 数值与实验数据的动态模态分解。*Journal of fluid mechanics* **656**，5–28。Schmid,
Peter J, Li, Larry, Juniper, Matthew P & Pust, O 2011 动态模态分解的应用。
Theoretical and Computational Fluid Dynamics **25** (1)，249–259。Schmidt, Oliver T 2022 使用多窗谱估计的谱正交分解。*Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **36** (5)，741–754。Schmidt,
Oliver T & Colonius, Tim 2020 谱正交分解指南。 *AIAA journal* **58**(3)，1023–1033。Schmidt,
Oliver T & Towne, Aaron 2019 谱正交分解的高效流式算法。
Computer Physics Communications **237**，98–109。Schmidt, Oliver T, Towne, Aaron, Rigas,
Georgios, Colonius, Tim & Brès,
Guillaume A 2018 射流湍流的谱分
析。 *Journal of Fluid Mechanics* **855**，953 982–。Shampine,

Lawrence F & Reichelt Mark W 1997 *SIAM journal on*，MATLAB
scientific computing **18** 1 1 22
ODE 套件。( )，–。Sharma,

AS & McKeon Beverley J 2013 *Journal*，壁面湍流中的
of Fluid Mechanics **728** 196 238
相干结构。，–。Sirovich, Lawrence 1987 湍流与相干结构动力学。I. 相干结构。
Quarterly of applied mathematics **45** (3)，561–571。Sirovich,

Lawrence 1989 *Physica D: Nonlinear* 相干结构的混沌
Phenomena **37** 1 3 126 145
动力学。(-)，–。Sonnenberger, R, Graichen, K & Erk, Pl 2000 傅里叶平均：周期流动的相位平均法。 *Experiments in fluids* **28** (3)，217–224。Towne, Aaron, Lozano-Durán, Adrián & Yang,
Xiang 2020 基于预解的估计：时空流动统计量。 *Journal of Fluid Mechanics* **883**，A17。Towne,
Aaron, Schmidt, Oliver T & Colonius, Tim 2018 谱正交分解及其与动态模态分解和预解分析的关系。*Journal of Fluid Mechanics* **847**，821–867。Welch, Peter 1967 使用快速傅里叶变换估计功率谱：一种基于短时段时间平均修正周期图的方法。
IEEE Transactions
on audio and electroacoustics **15** 2 70 73 ( )，–。