arXiv:2305.05631v1 [physics.comp-ph] 9 May 2023

面向工程师的加速度图幅值缩放地震学理解及其对地震风险分析的启示

Somayajulu L. N. Dhulipala*

摘要

由于强震记录加速度图数量稀少，地震工程分析依赖于加速度图幅值缩放来评估结构损伤/倒塌并进行目标谱匹配。本文研究缩放加速度图的地震学特征，以为未来的地震动选取和地震风险评估方法提供参考。研究表明，若将记录加速度图乘以一个正因子进行线性缩放，根据表示定理和加速度图傅里叶谱，矩震级呈对数变化，而静态应力降呈线性变化。其他地震参数，例如 Joyner-Boore距离度量和有效破裂面积，则不受加速度图缩放影响。本文提出的缩放解释通过一种地震动模拟混合方法，在时间域和频域中均得到验证。最后，本文讨论了加速度图缩放的地震学正确性。研究认为，如果一组缩放加速度图中震级（给定破裂面积和应力降分布）的情况与经验观测相似，则可认为这组加速度图在地震学上是正确的。

1. 引言

加速度图幅值缩放是将一幅记录加速度图乘以缩放因子 $\lambda \in (0, +\infty)$，从而增强其幅值，同时不改变记录的持续时间和频率成分。图1展示了这一缩放过程，由此可以观察到，记录的（即未缩放的）加速度图和缩放后的加速度图具有相同的起止时间，且其幅值之间没有相位偏移。为什么要对记录加速度图进行缩放？研究人员和工程师希望评估基础设施在极端加速度图作用下的性能，因为这些极端加速度图可能造成结构损伤并导致结构倒塌；然而，这类极端记录十分稀少 [1, 2, 3]。因此，人们采用加速度图缩放来评估结构的损伤和倒塌能力 [4, 5, 6, 7, 8, 9] ，并选择适当的地震动，用于地震结构响应分析，使其与目标反应谱相匹配 [10, 11]。这种地震动选择对于评估结构的抗震韧性也极为重要 [12, 13, 14, 15, 16], ，尤其是对于核电站等关键基础设施 [17, 18, 19]。

关于加速度图幅值缩放的研究可分为两大阵营。一方着重研究如何更高效地缩放和筛选与目标反应谱相匹配的加速度图（例如，见 [20]）。另一方则通过比较未缩放与缩放后的加速度图所得结果，着重评估非线性结构地震响应中的偏差（例如，见 [21]）。与此不同，本文退一步，着重关注缩放加速度图的地震学特征。开展此项研究的目的是将缩放因子 λ 与震级、距离、破裂面积、应力降和拐角频率等地震变量联系起来[1]。未来，这将使研究人员能够把缩放加速度图的这些地震变量与经验观测进行比较，从而确定其地震学

*通讯作者；电子邮箱：lakshd5@vt.edu[1]宽泛地说，静态应力降可视为地震发生后释放的应力大小。拐角频率将加速度图傅里叶谱中的极低频部分与中高频部分区分开来。

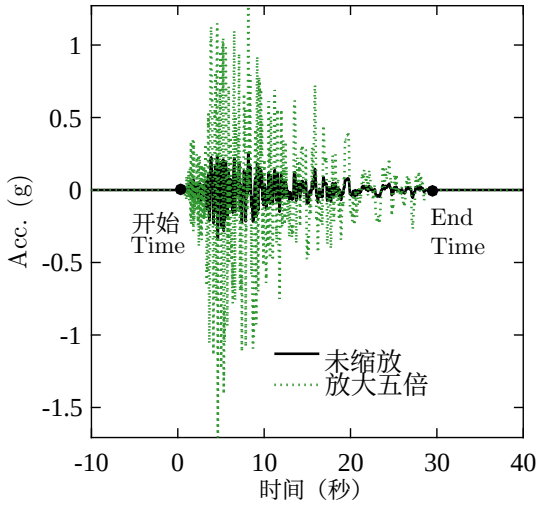

图1：萨蒂科伊台站记录的北岭地震加速度图未缩放与缩放后的对比。缩放后的加速度图振幅是未缩放加速度图的五倍，但两者随时间变化的方式相同，且彼此之间没有相位偏移。

特征对结构响应的影响，并进一步开发算法或方法，以地震学上一致的方式缩放加速度图。

缩放后的加速度图代表尚未发生的潜在地震事件。此类地震事件（或一般而言，任何地震事件）产生的地震动均由地震学表示定理 [22] 所支配。该定理结合了震源和路径效应，并从断层面上的破裂出发，以数学方式描述场址处的地震动。与表示定理相辅相成的是加速度图的傅里叶谱，其模型旨在利用应力降和拐角频率等参数来描述该加速度图的频率成分和持续时间特征 [23]。由于表示定理和傅里叶谱共同完整地呈现了加速度图，因此可借此理解加速度图缩放的地震学原理。

下一节将运用表示定理，推导缩放加速度图的震级、距离和破裂面积数值。随后，将利用加速度图傅里叶谱，将缩放因子 λ 与拐角频率、静态应力降等地震参数联系起来。接着，通过地震动模拟验证所提出的缩放解释。最后，将讨论加速度图缩放在地震学上的正确性及其对多个台站的适用性。需要指出的是，加速度图缩放也会线性缩放速度和位移记录、傅里叶谱及反应谱的幅值。这是一个显而易见的结论，后续各节将隐含地加以运用。此外，本文所说的缩放是指图1所示的加速度图幅值缩放。

2. 表示定理的见解

表示定理将断层面上的破裂与场址处的位移联系起来。它是地震学的基石，为理解地震破裂过程及其影响提供了理论和观测方面的见解。基于这一理论，人们开发了用于合成加速度图的计算技术，例如经验格林函数法 [24] 或 UCSB技术 [25] 。本小节将重新审视表示定理中的各个不同项，并探讨这些项在缩放记录地震动时的变化方式，从而对加速度图缩放进行理论研究。

设 X 和 $\boldsymbol{\xi}$ 分别为地面和断层面上各位置相对于同一坐标系的位置向量（另请参见图2）。设 t 和 τ 分别为用于跟踪地面和断层面上时间的变量。在不存在体力和牵引力的情况下，缩放地震动的表示定理为 [22]:

$$U_i^{\lambda}(\mathbf{X},t) = \lambda\, U_i(\mathbf{X},t) = \lambda \int_{\tau} d\tau \iint_{\Sigma} \left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]\; c_{jkpq}\; \mathbf{G}_{ip,q}(\mathbf{X},t;\boldsymbol{\xi},\tau)\; \nu_k\; d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \tag{1}$$

其中，U_i^{λ}(X t) 是沿 i^2 方向的缩放地面位移，$\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 是断层面 Σ 上的位移不连续，c_{jkpq}是可能随 $\boldsymbol{\xi}$ 变化的弹性模量，G$_{ip,q}$(X t; $\boldsymbol{\xi}$, τ) 是对 ξ_q 求导后的格林函数，ν_k 是 Σ 的单位法向量。值得注意的是，U_i (X t) 及其展开式中的各项（$\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$、$c_{jkpq}$、G$_{ip,q}$(X t; $\boldsymbol{\xi}$, τ) 和 ν_k）对应于断层面 Σ 上发生破裂所产生的未缩放加速度图的地面位移。位移不连续 $\left(\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]\right)$ 描述了断层面两侧之间的相对滑移速率随空间和时间的变化。由于地震期间断层面可能只有一部分发生破裂，因此，预计 $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 并非在整个断层面上都非零；$\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 非零的区域定义为破裂面积。 c_{jkpq} 代表 81 个弹性系数的集合；在非均匀介质中，这些系数可能随断层面上的空间位置而变化。由于应力张量和应变张量具有对称性，这 81 个系数中只有 21 个是独立的。如果假设断层面的材料为各向同性，独立弹性系数的数量则进一步减少为 2。格林函数项（G$_{ij}$(X t; $\boldsymbol{\xi}$, τ)）描述了在断层面上的 $\boldsymbol{\xi}$ 处施加沿 j 方向的集中脉冲力时，地球表面位置 X 沿 i 方向的位移（见图2）。断层的时间变量 τ 记录施加该脉冲力的时刻，而地表时间变量 t 则记录地面位移如何变化。该格林函数项：（1）表示地球对施加在断层面上的单位点力（在空间和时间上均集中）的响应；（2）将断层面上的位移变化传播至地表；（3）保持震源与场址位移之间恰当的时间延迟。缩放加速度图的地面位移还可进一步表示为:

$$\begin{gathered} U_i^{\lambda}(\mathbf{X},t) = \int_{\tau} d\tau \iint_{\Sigma} \lambda_1\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]\; \lambda_2 c_{jkpq}\; \lambda_3 \mathbf{G}_{ip,q}(\mathbf{X},t;\boldsymbol{\xi},\tau)\; \lambda_4 \nu_k\; d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \\ \text{and} \prod_{k=1}^{4} \lambda_k = \lambda \end{gathered} \tag{2}$$

其中，缩放因子 λ 被拆分为子因子 λ_1、λ_2、λ_3 和 λ_4，它们分别影响项 $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$、$c_{jkpq}$ $_{ij}$ τ ν_k 、G (X t; $\boldsymbol{\xi}$,)[3], 和 ，并且相对于空间和时间均为常数。需要指出的是，这些子因子应满足上述方程第二行所给出的乘积条件。此外，如果子因子 λ_k 不影响表示定理中的相应项，则其值为 1。下面将对记录加速度图进行缩放（即当 $\lambda > 1$ 或 $\lambda < 1$ 时）时这四个子因子各自的行为作出物理解释。为开展这项研究，假定未缩放的加速度图和缩放后的加速度图均源自同一震源；换言之，这些加速度图表示同一断层面上的两次独立地震活动。缩放后的加速度图代表一次尚未发生的潜在地震事件。上述假设为这次尚未实现的地震事件赋予了一个地震源，从而为分析缩放后的加速度图的地震学特征提供了起点。

2.1. 断层几何和断层强度相关术语不受加速度图缩放的影响

公式 (2) 中的 ν_k 和 c_{jkpq} 分别通过赋予断层面几何形态和强度，确立了断层面的物理存在。讨论这两个项的缩放时，将采用同一地震震源假设。

[2]将加速度图缩放 λ 倍，也会使地面位移缩放 λ 倍。[3]将格林函数的一阶导数缩放 λ 倍，也会使格林函数缩放 λ 倍。

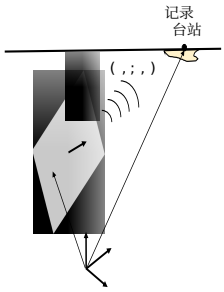

图2: 地震过程示意 图示地震过程中断层面上的破裂、地震波的传播及接收情况
在记录台　　站。

公式 (2) 中表示断层面单位法向量、描述断层几何形态的项 ν_k 不能自由缩放。如图2所示，以某个断层面为例， ν_k的分量为 $\{0.4, 0.25, 0.8818\}$[4] ，且满足向量模长 $\sqrt{\nu_k \nu_k} = 1$这一条件。这些分量不能任意乘以某个子因子 λ_4 ，因为这样的运算会违反单位向量的定义；因此， λ_4 必须为 1，且 ν_k 不能缩放。此外，同一地震震源假设也支持这一论点，因为 ν_k是现存断层的一种物理属性，应当不受缩放影响。

方程（2）中的项 c_{jkpq} 描述断层的弹性，可将位移转换为力。根据同一地震震源假设， c_{jkpq} 作为现存断层的一种物理属性，应当再次保持缩放不变。因此，方程（2）中的子因子 λ_2 必须为 1。无论如何，为了进一步讨论同一地震震源假设，下面给出当 $\lambda_2 \neq 1$ 时，有关弹性系数和波传播速度的一些数学推论。假设断层材料具有各向同性， c_{jkpq} 与 λ_2 相乘后，得到以下关系 [22]:

$$\lambda_2 \ c_{jkpq} = (\lambda_2 L_1)\delta_{jk}\delta_{pq} + (\lambda_2 L_2)(\delta_{jp}\delta_{kq} + \delta_{jq}\delta_{kp}) \tag{3}$$

其中， L_1 和 L_2 是 Lam´e 常数， δ_{xy} 是克罗内克δ；当 $x = y$ 时其值为 1，否则为 0。上述方程表明，弹性张量 c_{jkpq} 与 λ_2 相乘时，两个 Lam´e 常数都要乘以相同的子因子，因为根据定义，克罗内克δ的值只能是 0 或 1。由于杨氏模量、剪切模量和体积模量（分别为 E、 G、 K）均可用两个 Lam´e 常数表示，因此还可以证明，这些弹性模量也会乘以 λ_2，而泊松比（ν）保持不变。此外，还可以证明，材料的 P 波和 S 波速度（分别为 α、 β）会乘以 $\sqrt{\lambda_2}$，而材料密度保持不变。例如，缩放后的 Lam´e 常数、P 波速度和密度（ρ）之间的关系如下:

$$\sqrt{\frac{\lambda_2 \ L_1 + 2\lambda_2 \ L_2}{\rho}} = \sqrt{\lambda_2} \ \alpha \tag{4}$$

这些数学推论表明，如果 $\lambda_2 \neq 1$，则存在另一个地震源，其具有与生成该未缩放加速度图的地震源相同的（ν_k、 ρ、 ν）[5], 以及弹性性质的空间分布，

[4]在右手坐标系中。[5]向量 ν_k 是断层面的单位法向量，而标量 ν 是泊松比。

但（E、 G、 K、 α 和 β）经 λ_2 修改。由于无法为 λ_2 的每个任意取值确定这一替代地震源是否实际存在，因此提出了相同地震源假设。该假设虽然规定未缩放加速度图和缩放加速度图的 c_{jkpq} 相同，但有助于研究表示定理 [方程（2）]中其他项的缩放。

2.2。格林函数项：缩放后的加速度图和未缩放加速度图记录于同一地点 e

方程（2）中的格林函数项 $\left(G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\ \boldsymbol{\xi},\ \tau)\right)$ 将断层面上的位移传播至地球表面的位移，并充当震源与接收点之间的纽带。图3a以示意图形式展示了使用经验格林函数[6]（EGF； [24]）或近似格林函数对 $G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\ \boldsymbol{\xi},\ \tau)$ 进行缩放的过程。从该图可以看出，对于任意时间，未缩放和缩放后的格林函数在起止时间和极性方面具有相同的时间形状。唯一的区别是，缩放后的函数在所有时间点的振幅都大于未缩放函数，增大倍数为 λ_3。下面将使用唯一性定理研究 $G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\ \boldsymbol{\xi},\ \tau)$ 的缩放问题。

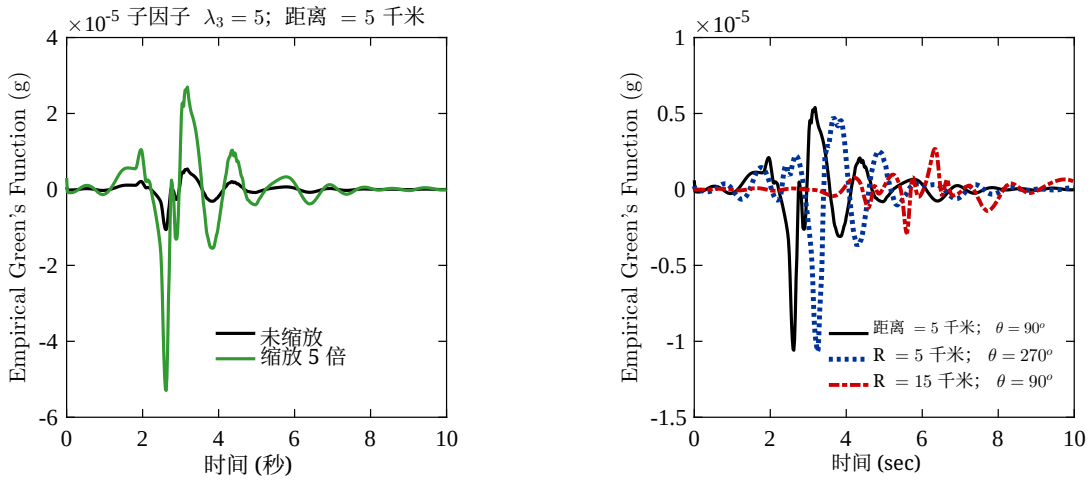

图3：（a）使用模拟的经验格林函数（EGF； [24]）演示格林函数缩放。该经验格林函数由 SCEC BBP工具 [26]模拟生成，震级为3.0。（b）三个不同场址处震级为3的地震所对应的经验格林函数。此处的角度 θ 表示记录台站相对于穿过震中的水平线的方位。

定理A（唯一性）：给定断层面上的初始力分布，场址X处的位移是唯一的。换言之，给定断层面和X处的一些初始条件，表示定理只有一个解。

证明：感兴趣的读者 可参阅 [22] 中的第2章第2.3.1节，了解定理的数学证明
A. □
推论A1：表示定理中的 $G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\ \boldsymbol{\xi},\tau)$ 是唯一的。
证明：由于表示定理的解是唯一的，只需证明 $G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\ \boldsymbol{\xi},\tau)$ 也是表示定理的一个解。对于断层面上的施加力，表示定理可写为 [22]:

$$U_i(\mathbf{X},t) = \int_\tau d\tau \iiint_V f_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\ \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{X},t;\boldsymbol{\xi},\tau)\ dV(\boldsymbol{\xi}) \tag{5}$$

[6]经验格林函数是由小地震产生的地震动，其震源可视为脉冲点源。因此，经验格林函数近似于格林函数 $G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 中的一个分量。需要注意的是，此处采用的不同场址的经验格林函数不仅具有方向相同的断层破裂（即施加力），而且由此产生的运动也沿相同方向记录。换言之，将比较不同场址的 $G_{ij}(\mathbf{X}\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 中的同一分量。

其中 $f_j(\boldsymbol{\xi},\tau)$ 是单位体积力。根据定义，格林函数是指在空间某点 $\boldsymbol{\xi}_1$、时间 τ_1 施加单位脉冲力时，X 处的位移。因此， $f_j(\boldsymbol{\xi},\tau)$ 是沿 j 方向施加的 $\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_1)$ $\delta(\tau-\tau_1)$。因此：

$$U_i(\mathbf{X},t)=\int_\tau d\tau\iiint_V \delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_1)\ \delta(\tau-\tau_1)\ \delta_{ij}\ \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{X},t;\boldsymbol{\xi},\tau)\ dV(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{X},t;\boldsymbol{\xi}_1,\tau_1) \tag{6}$$

□

下面给出另外两个推论，为缩放加速度图指定一个空间位置。讨论这些推论之前，需先介绍不等价条件。

不等价条件：从数学上讲，该条件表示为 $G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)\neq G_{ij}(X_1,t;\boldsymbol{\xi},\tau)\forall\ X_1\ (X_1\neq X)$。不等价条件表明，给定两个不同的场址 X 和 X_1，，它们各自的格林函数张量 $\left(G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)\text{ 和 }G_{ij}(X_1,t;\boldsymbol{\xi},\tau)\right)$ 的各个分量不可能全部相同。原因在于，相对于单位脉冲力的作用点 $\boldsymbol{\xi}$，两个不同场址的方位（方向余弦）和/或距离会有所不同。因此，$G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 和 $G_{ij}(X_1,t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 的极性和/或持续时间会有所不同。图3b展示了三个场址的格林函数差异，这些场址相对于 $\boldsymbol{\xi}$具有不同的方位和距离。图3b中的黑色实线和蓝色点线表明，对于距离相同但相对于 $\boldsymbol{\xi}$方位不同的场址，其对应的格林函数极性不同。另一方面，图3b中的黑色实线和红色虚线表明，对于方位相同但相对于 $\boldsymbol{\xi}$距离不同的场址，其对应的格林函数起止时间不同，因此持续时间也不同。

推论 A2：根据唯一性定理和不等价条件，运算 $\lambda_3 G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 中唯一物理上可接受的 λ_3 值是 1。

证明：假设 λ_3 不等于 1。于是推论 A1 禁止将这个缩放后的格林函数 $\left(\lambda_3 G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)\right)$ 归属于具有某个 X_1 值的场址。这是因为，对于给定的 X_1，，其格林函数 $G_{ij}(X_1,t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 是唯一的。此外， $\lambda_3 G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 也不可能等于 $G_{ij}(X_1,t;\boldsymbol{\xi},\tau)$，因为不等价条件表明，这些格林函数的元素具有不同的极性和/或持续时间。因此， λ_3 只能等于 1。 □

推论 A3：在不等价条件下，未缩放和缩放后的加速度图都对应于同一位置 X。

证明：在公式 (2) 中令 λ_3 value 等于 1，根据推论 A2，未缩放和缩放后的加速度图具有相同的格林函数 $\left(G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)\right)$。此外，由于 $G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)\neq G_{ij}(X_1,t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 在 $X\neq X_1$, 条件下，缩放加速度图所对应的 $G_{ij}(X\ t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 唯一可能的位置是 X。 □

2.3. 破裂项：缩放加速度图的震级和距离值

公式 (2) 中的项 $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 表示断层面上的破裂，其量纲为长度。公式 (2) 中其余三个子因子（λ_2、 λ_3 和 λ_4）均为 1 时，如果要将记录运动缩放 λ，那么，与 $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ (λ_1) 对应的子因子应等于 λ。换言之，记录运动的缩放必须归因于断层面上破裂幅值的缩放。这种归因的程度取决于地震震源过程的动力学。震源动力学是一个复杂的主题，需要理解高等数学和断裂力学。因此，我们采用经验方法讨论 $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 的缩放。首先，本文将该项的缩放对应到工程领域关注的地震参数，例如破裂范围、距离和震级。本文稍后将讨论经验关系，以约束这些地震参数的缩放，同时也隐含地约束 $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 的缩放。

从运动学视角来看，将 λ to $\left[U_j(\boldsymbol{\xi},\tau)\right]$ 相乘会增大破裂的振幅，但不会影响破裂的空间分布（破裂范围）或破裂对时间的依赖性。图 4a 展示了使用伽马型函数时，未缩放和缩放后的破裂函数对时间的依赖性示意图。可以看出，这两个函数以相同的方式依赖于时间。

破裂范围对加速度图缩放的不变性会影响有效破裂尺-˜寸。考虑通过对沿倾向（或沿走向）ξ_n方向] 的时间平均破裂值求和而计算的一维破裂函数 $[u$

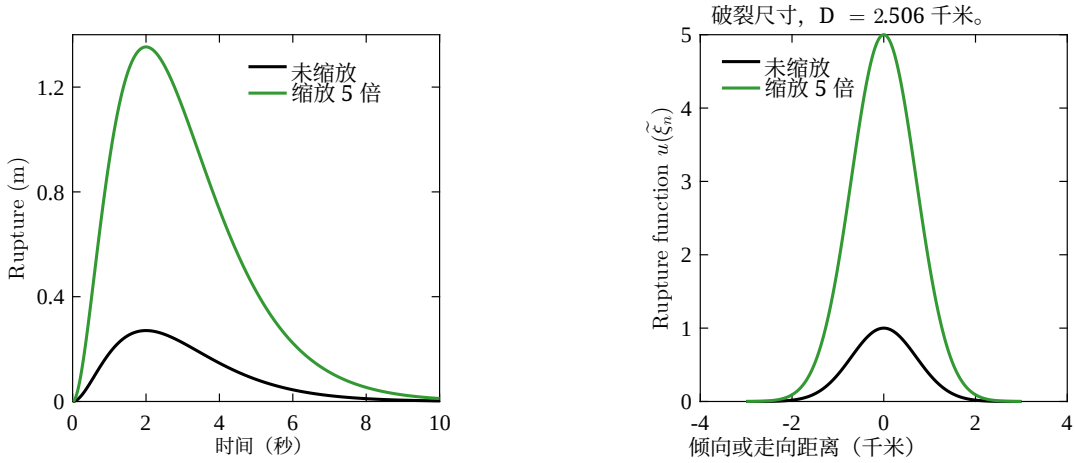

图 4：（a）使用伽马型函数说明未缩放和缩放破裂函数的破裂对时间的依赖性。可以观察到，两个函数以相同的方式依赖于时间。（b）使用高斯函数表示破裂分布，说明未缩放和缩放破裂函数的破裂对空间的依赖性。可以观察到，两个函数具有相同的破裂空间分布。因此，使用 [27] 定义（$\mathcal{D} = 2.506$ 千米）计算得到的有效破裂尺寸，对于未缩放函数和缩放函数都是相同的。

（[27]）[7]。对 $[U_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$ 进行线性缩放，也会使$[u(\tilde{\xi}_n)]$ 线性缩放，因为从 $\boldsymbol{\xi}$ 到 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 的坐标变换是线性的；换言之，$[u^\lambda(\tilde{\xi}_n)] = \lambda[u(\tilde{\xi}_n)]$。以下定理说明了对 $[u(\xi_n)]$ 进行线性缩放对有效破裂尺寸（$\mathcal{D}$）的影响。随后，一个推论表明，Joyner-Boore距离度量不受加速度图缩放影响。

定理 B：若按照 *[27]*定义有效破裂尺寸（$\mathcal{D}$），则 $\mathcal{D}$ 对于加速度图缩放是不变的。

证明：鉴于 $[u^\lambda(\tilde{\xi}_n)] = \lambda[u(\tilde{\xi}_n)]$, ，不难证明，$\mathcal{D}$ 的 [27] 定义对于加速度图缩放是不变的，因为分子和分母中的缩放因子会相互抵消：

$$\mathcal{D} = \frac{\int_{\mathcal{L}} d\mathcal{L} \int_{\tilde{\xi}_n} [u(\tilde{\xi}_n)]\,[u(\tilde{\xi}_n - \mathcal{L})]\, d\tilde{\xi}_n}{\int_{\tilde{\xi}_n} [u(\tilde{\xi}_n)]\,[u(\tilde{\xi}_n)]\, d\tilde{\xi}_n} = \frac{\int_{\mathcal{L}} d\mathcal{L} \int_{\tilde{\xi}_n} [u^\lambda(\tilde{\xi}_n)]\,[u^\lambda(\tilde{\xi}_n - \mathcal{L})]\, d\tilde{\xi}_n}{\int_{\tilde{\xi}_n} [u^\lambda(\tilde{\xi}_n)]\,[u^\lambda(\tilde{\xi}_n)]\, d\tilde{\xi}_n} \tag{7}$$

其中，$\mathcal{L}$ 是自相关函数中的滞后长度。 □

推论 B：Joyner-Boore距离度量（R_{JB}）不受加速度图缩放的影响。

证明：R_{JB} 取决于两个量：场址 X 的位置，以及有效破裂尺寸 $\mathcal{D}$ 在地表的投影。推论 A3 表明，未缩放和缩放后的加速度图均在同一场址 X 记录。定理 B 表明，未缩放和缩放后的加速度图具有相同的有效破裂尺寸 $\mathcal{D}$，因此其地表投影也相同。由于 R_{JB} 所依赖的这两个量均保持不变，R_{JB} 也不受加速度图缩放的影响。 □

图 4b 展示了在假设破裂服从高斯函数的情况下，$\mathcal{D}$ 对加速度图缩放保持恒定的示意图。关于地震强度，提出以下定理和推论。定理 C：地震矩张量（M_{pq}）随加速度图缩放呈线性变化。

[7]符号 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 表示断层面坐标系。在此坐标系中，两个方向分别沿断层面的走向和倾向，第三个方向则垂直于断层面，沿该方向破裂幅值不发生变化。因此，$[u(\tilde{\xi}_n)]$ 中的下标 n 表示倾向或走向方向。此外，断层面坐标系可以不同于一般坐标系 $\boldsymbol{\xi}$，后者用于表示断层面上的一个点。

证明：根据 $\mathbf{M}_{pq}$ [22][8] 的定义可得：

$$\mathbf{M}_{pq}^{\lambda} = \frac{\int_{\tau} d\tau \iint_{\Sigma} \lambda\big[U_i(\boldsymbol{\xi},\tau)\big]\ \nu_j\ c_{ijpq}\ d\Sigma(\boldsymbol{\xi})}{\int_{\tau} d\tau} = \lambda\ \mathbf{M}_{pq} \tag{8}$$

其中，$\mathbf{M}_{pq}^{\lambda}$ 是缩放加速度图的矩张量。从上式可以看出，线性缩放破裂幅值会使矩张量也发生线性缩放。 □

推论 C1：地震矩（M_o）随加速度图缩放呈线性变化。证明：由公式（8）及 M_o [28]的定义可得：

$$M_o^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \big(\mathbf{M}_{pq}^{\lambda}\mathbf{M}_{pq}^{\lambda}\big)^{\frac{1}{2}} = \lambda\ M_o \tag{9}$$

其中，M_o^{λ} 是缩放加速度图的地震矩。从上式可以看出，线性缩放矩张量会使地震矩也发生线性变化。 □

推论 C2：矩震级（M_w）随加速度图缩放呈对数变化。证明：由公式（9）及 M_w [29]的定义可得：

$$M_w^{\lambda} = \frac{2}{3}\ log_{10}\big(M_o^{\lambda}\big) - 6.07 = M_w + \frac{2}{3}\ log_{10}(\lambda) \tag{10}$$

其中，M_w^{λ} 是缩放加速度图的矩震级。从上式可以看出，线性缩放矩张量会使矩震级呈对数变化。 □

3. 加速度图傅里叶幅度谱的启示

前文利用表示定理深入探讨了时域中的地震动缩放。虽然未缩放和缩放后的加速度图的幅值被证明符合公式（10）的关系，但研究得出结论：缩放加速度图不会改变有效破裂尺度、记录台站的位置，因此也不会改变 Joyner-Boore距离度量。本节将在频域中研究加速度图缩放，以便将这种缩放与 Brune静态应力降和拐角频率等参数联系起来。本节获得的其他见解将与表示定理所得的结论相互印证。

图5a展示了北岭地震中未缩放和缩放后的加速度图的傅里叶幅度谱。可以看出，加速度图缩放既不会影响傅里叶幅度谱的形状，也不会影响其频率成分。然而，不同频率对应的幅值均按照缩放因子 λ 进行统一缩放。顺带一提，表示定理提供了一项总体性见解：地震动缩放会改变震源运动学，使破裂幅值放大 λ，但不会改变格林函数（传播子，用于描述路径效应），也不会改变震源的几何特征和材料特征。结合这一见解以及图5a中关于傅里叶谱形状的观察，以下表达式描述了缩放加速度图的傅里叶谱 [30]:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\lambda}(f, M_o^{\lambda}, R) = I(f)\ P(R,f)\ E^{\lambda}(M_o^{\lambda}, f)\ G(f) \tag{11}$$

其中，$I(f)$、$P(R,f)$、$E^{\lambda}(M_o^{\lambda},f)$ 和 $G(f)$ 分别表示地面运动类型、传播路径、缩放后的震源项和场地响应。 $I(f)$ 不受加速度图缩放的影响，因为它仅考虑最终地震动是加速度、速度还是位移。其余三项的缩放将在下文讨论。

[8]通过对时间取平均，排除了矩张量的时间依赖性。

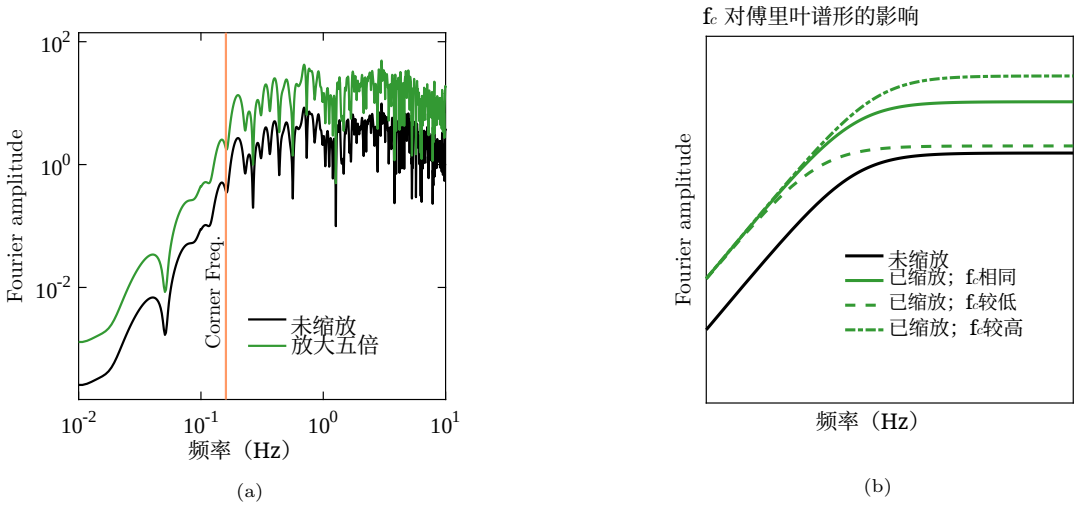

图5：（a）北岭地震中一条未缩放加速度图和一条缩放加速度图的傅里叶幅度谱。可以观察到，这些谱的形状相同，拐角频率（f_c）为 0.16赫兹。（b） f_c 对傅里叶谱形影响的示意图。只有保持未缩放谱和缩放谱的 f_c 相同，才能得到在所有频率上均匀缩放的傅里叶谱。

3.1. 路径项不受加速度图缩放影响

加速度图傅里叶谱模型中的路径项 $P(R, f)$ [方程（11）]将断层面上的地震活动与场址处的位移联系起来。该项的作用在定性上类似于表示定理中的格林函数。既然格林函数已被证明不受加速度图缩放的影响，那么可以推测， $P(R, f)$ 也具有这种不变性。如下文所示，这一推测得到了 $P(R, f)$ 通常定义方式 [30] 的支持：

$$P(R, f) = e^{\frac{-\pi f R}{Q(f)\beta}}\ Z(R) \tag{12}$$

其中， R 是震源与接收点之间的距离度量， β 是震源区的剪切波速， $Q(f)$是用于描述地震波非弹性衰减的品质因数。上式中的 $Z(R)$描述几何衰减，在最简单的线性几何衰减情况下，它与 R^{-1} 成正比。总之，除频率外， $P(R, f)$还取决于距离度量 R，通常用Joyner-Boore距离度量来定义。因此， $P(R, f)$应不受加速度图缩放的影响，因为我们已指出，缩放加速度图时 R_{JB} 保持不变。

3.2. 缩放后的震源项：应力降随加速度图缩放呈线性变化

可利用震源模型展开公式（11）中的缩放后的震源项。本文采用 ω平方震源模型 [23, 30], ，该模型将断层面视为点源。缩放后的震源项为：

$$E^{\lambda}(M_o^{\lambda}, f) = \frac{\langle R_{\Theta\Phi}\rangle}{2\sqrt{2}\pi\rho_s\beta_s^3}\ M_o^{\lambda}\ \frac{f^2}{1+(\frac{f}{f_c})^2} \tag{13}$$

其中， $\langle R_{\Theta\Phi}\rangle$ 是取决于震源几何形状的平均辐射系数； ρ_s 和 β_s分别是震源处材料的密度和剪切波速。由于加速度图缩放不会改变震源的几何和材料属性（相同地震源公理），未缩放和缩放后的加速度图中，$\langle R_{\Theta\Phi}\rangle$、$\rho_s$和 β_s 都不会改变。在公式（13）中， M_o^{λ} 是由公式（9）给出的缩放后的地震矩； f 是关注的频率， f_c 是区分傅里叶谱低频部分和高频部分的拐角频率。缩放后， f_c 保持不变

加速度图。这是因为，如图5a所示，未缩放和缩放后的加速度图的傅里叶谱形应保持一致。未缩放和缩放后的加速度图之间的 f_c 值若有任何偏差，都会导致谱形出现差异，进而使谱在各个频率上的缩放不均匀。图5b展示了 f_c 对傅里叶谱形的影响。由图可见，只有让缩放后的谱的 f_c 与未缩放谱的 f_c 相等，才能得到在所有频率上均匀缩放的傅里叶谱（这与图5a相符）。

未缩放和缩放后的加速度图具有相同的 f_c ，这有两项重要意义。首先，根据某些震源模型， f_c 与有效破裂尺寸相关。例如，Brune震源模型和Haskell模型分别将 f_c 与破裂半径以及破裂长度/宽度联系起来 [28]。根据这些模型， f_c 保持不变意味着未缩放和缩放后的加速度图源自相同的有效破裂尺寸。表示定理的见解也得出了相同结论。其次，使用Brune震源模型解读缩放加速度图的傅里叶谱时， f_c 与 M_o^λ 的关系如下 [23, 31]:

$$\begin{gathered} f_c \propto \left(\frac{\Delta\sigma^\lambda}{M_o^\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{and, } \Delta\sigma^\lambda = \lambda\ \Delta\sigma; M_o^\lambda = \lambda\ M_o \end{gathered} \tag{14}$$

其中， M_o^λ 为缩放后的地震矩， $\Delta\sigma^\lambda$ 为缩放后的Brune应力降。为确保未缩放和缩放后的加速度图具有相同的 f_c ， $\Delta\sigma^\lambda$ 必须等于 $\lambda\ \Delta\sigma$ ，因为缩放加速度图会使地震矩按线性比例缩放。也就是说，缩放加速度图的Brune应力降（$\Delta\sigma^\lambda$）等于缩放因子（λ）乘以未缩放加速度图的Brune应力降（$\Delta\sigma$）。

此前，傅里叶域中的加速度图缩放综合方法一直采用点地震源，也可以扩展到有限地震源。有限震源的缩放后的震源项可表示为 [32][9]:

$$\begin{gathered} E^\lambda(M_o^\lambda, f) = \frac{\langle R_{\Theta\Phi}\rangle}{2\sqrt{2}\pi\rho_s\beta_s^3}\ M_{oij}^\lambda\ \frac{f^2}{1+(\frac{f}{f_{cij}})^2} \\ \text{and, } f_{cij} \propto \left(\frac{\Delta\sigma^\lambda}{\overline{M}_o^\lambda}\right)^{\frac{1}{3}};\ M_{oij}^\lambda = \lambda\ M_o\ \mathcal{W}_{ij};\ \overline{M}_o^\lambda = \lambda\ M_o/N \end{gathered} \tag{15}$$

其中， ij 是将地震源离散后得到的 N 个子断层中的一个子断层的指标， $\mathcal{W}_{ij}$是 ij 子断层的滑移权重，并满足 $\mathbf{1}_{ij}\mathcal{W}_{ij} = 1$。为确保 M_o 乘以 λ时子断层拐角频率 f_{cij} 保持不变，可以再次看出 $\Delta\sigma^\lambda = \lambda\ \Delta\sigma$。也就是说，即使在有限地震源的情况下，应力降也随加速度图缩放呈线性变化。

3.3. 场地项：场地反应相对非线性不能太大

记录地震地面运动的地点通常位于数十米厚的土层之上，而土层下方是基岩（见图2）。虽然地震波在岩石中传播的距离很长，在土壤中传播的距离相对较短，但土壤在表征地表地面运动 [33]方面发挥着重要作用。土壤对地表地面运动的影响称为场地响应，在方程（11）中通过 G（f）项进行显式建模。根据场地响应是否受基岩加速度图强度影响，可将其分为非线性或线性。对于加速度图缩放而言，场地响应的相对非线性不应太大。

场地反应相对非线性定义为：与未缩放的加速度图相比，缩放后的加速度图对应的场地响应非线性程度高出（或低出）多少。按照前文所述，通过使用缩放因子 λ 对地震参数 M_w 和 $\Delta\sigma$ 进行缩放，即可生成缩放加速度图。然而，如果场地反应相对非线性较大，该缩放加速度图就不会是未缩放加速度图的 λ 倍。例如，如果场址下方的土壤非常密实，其场地响应将接近线性

[9]值得注意的是，方程（15）中 $E^\lambda(M_o^\lambda, f)$ 的表达式对指标 ij 进行隐式求和。

由未缩放和缩放后的地震参数生成的加速度图将具有相同的线性场地响应函数（图6a中的实线图）。在这种情况下，场地反应不存在相对非线性。另一方面，如果场址下方的土壤较弱，其场地响应将呈非线性，因此未缩放和缩放后的地震参数对应的场地响应会有所不同（分别为图6a中的虚线图和点线图）。产生这种差异的原因是，缩放后的地震参数（假设是向上缩放）会产生比未缩放地震参数更强的基岩运动，而非线性土壤响应无法以相同的方式将强烈和较弱的基岩运动传递到地表。

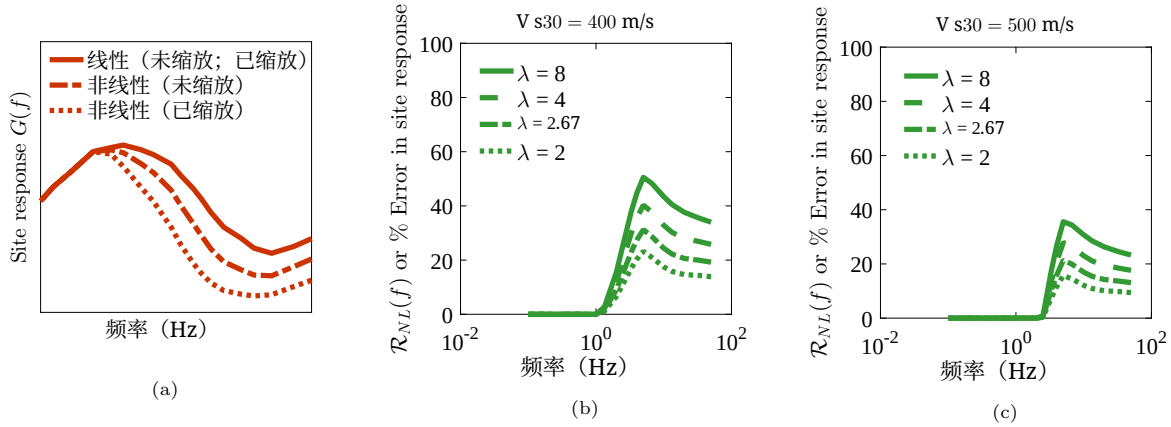

图6：(a) 线性和非线性场地反应函数的示意图 $G(f)$。需要指出的是，非线性场地反应取决于基岩运动的强度，因此未缩放和缩放后的基岩运动所对应的非线性场地反应有所不同。(b) 和 (c)：场地反应相对非线性 $\mathcal{R}_{NL}(f)$ 以百分比误差定义；参见公式（16）。$\mathcal{R}_{NL}(f)$ 给出了两个场址的数值，其中 $Vs30$ 分别为 (b) $400\ m/s$ 和 (c) $500\ m/s$，并考虑了四种基岩加速度图缩放级别。

从数学上讲，场地反应相对非线性 $\mathcal{R}_{NL}(f)$ 以百分比误差定义如下：

$$\mathcal{R}_{NL}(f) \text{ or } \% \text{ Error} = \frac{\mid G(f) - G^{\lambda}(f) \mid}{G(f)} \times 100 \tag{16}$$

其中，$G(f)$ 和 $G^{\lambda}(f)$ 分别是未缩放和缩放后的加速度图的场地反应项。除频率外，这些场地反应项还取决于场址的土壤质量和基岩运动的强度。选择 [34] 地震动预测模型的场地模型 $F_{site}(.)$ 后，未缩放和缩放后的地震参数对应的场地反应项可表示为[10]：

$$G(f) = \frac{F_{site}(f, Vs30, PGA_{rock})}{F_{site}(f, Vs_{ref}, PGA_{rock})}; \quad G^{\lambda}(f) = \frac{F_{site}(f, Vs30, PGA^{\lambda}_{rock})}{F_{site}(f, Vs_{ref}, PGA^{\lambda}_{rock})} \tag{17}$$

其中，$Vs30$ 为地表以下30米范围内的平均剪切波速，Vs_{ref} 为设定为760 m/s的参考剪切波速，PGA_{rock} 和 PGA^{λ}_{rock} 分别为地震参数未缩放和缩放时基岩的峰值地面加速度。值得注意的是，$Vs30$ 可作为场址土壤质量的替代指标，而 PGA_{rock} 和PGA^{λ}_{rock} 则可作为描述基岩运动强度的替代指标。此外，$PGA^{\lambda}_{rock} = \lambda\ PGA_{rock}$ 这是因为预期缩放后的地震参数会生成一条基岩加速度图，其幅值为未缩放地震参数生成的基岩加速度图的 λ 倍。

[10]尽管 [34] 场地模型严格适用于反应谱，但将其用于傅里叶谱是合理的，因为模型变化随频率平滑变化 [35]。

图6b和图6c分别展示了两个场址的场地反应相对非线性 $\mathcal{R}_{NL}(f)$，其 $Vs30$ 值分别为400 m/s 和 500 m/s。这些 $Vs30$ 值表明，前一个场址的土壤比后一个场址的土壤更松软。将缩放后的地震参数生成的基岩峰值地面加速度（PGA^{λ}_{rock}）设为 $2g$，并考虑四个未缩放的基岩峰值地面加速度等级（PGA_{rock}）： $0.25g$、 $0.5g$、 $0.75g$和 $1g$。换言之，通过选取8、4、2.67和2作为缩放因子（λ），计算 $\mathcal{R}_{NL}(f)$。从图6b和图6c均可看出，随着缩放因子增大， $\mathcal{R}_{NL}(f)$ 也会增大。这是预期之中的，因为较大的缩放因子会产生更强烈的基岩运动，进而使土壤产生更强的非线性。与较硬土壤（图6c）相比，较松软土壤（图6b）的场地反应相对非线性也更为显著。考虑到 λ 和 $Vs30$共同发挥的作用，可以概括地说，在坚硬土壤（或更优）场址记录的加速度图更适合进行加速度图缩放。原因在于，与松软土壤场址相比，这类场址更能线性地传递强烈的基岩运动。

4. 验证加速度图缩放的地震学解释

加速度图缩放可以通过某些地震学变量之间的相似性和差异来描述。未缩放加速度图和缩放加速度图具有相同的：同一地震源处破裂的空间和时间变化、有效破裂尺寸（因此破裂面积也相同）、Joyner-Boore距离度量以及拐角频率。然而，Brune应力降和震级会有所不同。缩放加速度图的应力降是未缩放加速度图的 λ 倍，缩放加速度图的震级为： $M^{\lambda}_{w} = M_w + 2/3\ log_{10}(\lambda)$。如果两条加速度图在波衰减和场地效应相似的情况下满足这些地震学条件，那么原则上，其中一条加速度图应为另一条的 λ倍。

4.1. 使用地震动模拟进行验证

为了验证所提出的缩放解释，我们需要比较两条满足上述条件的加速度图。实际中，由于很难找到两条满足这些条件的记录加速度图，因此将依赖地震动模拟。首先，针对特定地震源和距离，使用适当的输入值模拟一条加速度图，其中包括 M_w、 f_c和破裂尺寸。将其视为未缩放加速度图。接着，使用公式（10）给出的震级，并保持其他输入值与前一次模拟相同，模拟第二条加速度图。将其视为缩放后的模拟加速度图。最后，将第一条加速度图按 λ 倍进行显式缩放（称为显式缩放），然后比较这两条加速度图。

使用南加州地震中心宽频带平台（SCEC BBP； [26]）模拟加速度图。在可用的模拟方法中，采用UCSB方法 [25] ，因为它允许明确指定 f_c 。对于未缩放和缩放后的模拟地震动，必须将 f_c 设为相同的值。只有这样，根据Brune震源模型，应力降才会随地震矩缩放呈线性变化；见公式（14）或（15）。SCEC BBP中其他可用的模拟方法，例如 [35] 和EXSIM [36] ，会预先设定一个恒定的应力降值，该值可能取决于构造区域。因此，根据公式（14）或（15），当地震矩线性增大时， f_c 会减小。随着地震矩增大， f_c 减小符合自相似假设或恒定应力降假设 [30], ，但这会违反模拟缩放加速度图所需的地震学条件；该缩放加速度图应为未缩放加速度图的 λ 倍[11]。研究已发现地震应力降值存在变异性（例如，见 [37] 或 [38]）；本文后文将利用这种应力降变异性讨论加速度图缩放的地震学正确性。

[11]此处重新查看图5将有助于回顾 f_c 对傅里叶谱形的影响。

4.2. 显式缩放与缩放后的模拟加速度图比较

图7比较了三个地震情景——北岭、洛马普列塔和南圣安德烈亚斯——在时域中的显式缩放地震动与缩放后的模拟地震动。这三个情景所采用的震级、距离和缩放因子组合分别为（6.73，15千米，10）、（6.94，15千米，5）和（7.9，30千米，2.5）。图7左侧和右侧面板分别展示加速度和速度记录。虽然由于随机噪声，比较结果存在一些差异，但显式缩放地震动与缩放后的模拟地震动总体上吻合良好，看起来几乎完全相同。为更严格地比较显式缩放地震动与缩放后的模拟地震动，本文采用基于两个时间序列之间归一化互相关的相似度指标 [39]:

$$\mathcal{S} = \max_{\mathcal{L}} \frac{\int u^{\lambda}(t)\ \widetilde{u}^{\lambda}(t-\mathcal{L})\ dt}{\sqrt{\left[\int u^{\lambda}(t)\ u^{\lambda}(t)\ dt\right]\left[\int \widetilde{u}^{\lambda}(t)\ \widetilde{u}^{\lambda}(t)\ dt\right]}} \tag{18}$$

其中， $u^{\lambda}(t)$ 和 $\widetilde{u}^{\lambda}(t)$ 分别视为显式缩放的地震动和缩放后的模拟地震动，而 $\mathcal{L}$ 是滞后长度。符号 $\mathcal{S}$ 用于表示上述指标是一种“严格”的相似性度量，它会在每个离散时间步比较两个时间序列。值得注意的是， $\mathcal{S}$ 的取值介于 -1 和 $+1$ 之间，取值等于 $+1$ 则意味着两个时间序列相同。图7中给出的 $\mathcal{S}$ 值通常较大，但图7c除外，其中随机噪声的差异较大。总体而言，六组结果中 $\mathcal{S}$ 的平均值为 0.78；若排除图7c，平均值为 0.84。

图8以频域形式比较了显式缩放的地震动与缩放后的模拟地震动，所用的地震情景以及震级、距离和缩放因子组合均与前文相同。图8左侧和右侧分别展示了傅里叶谱和反应谱。总体而言，结果再次显示出良好的一致性，这并不意外，因为时域验证相当成功。

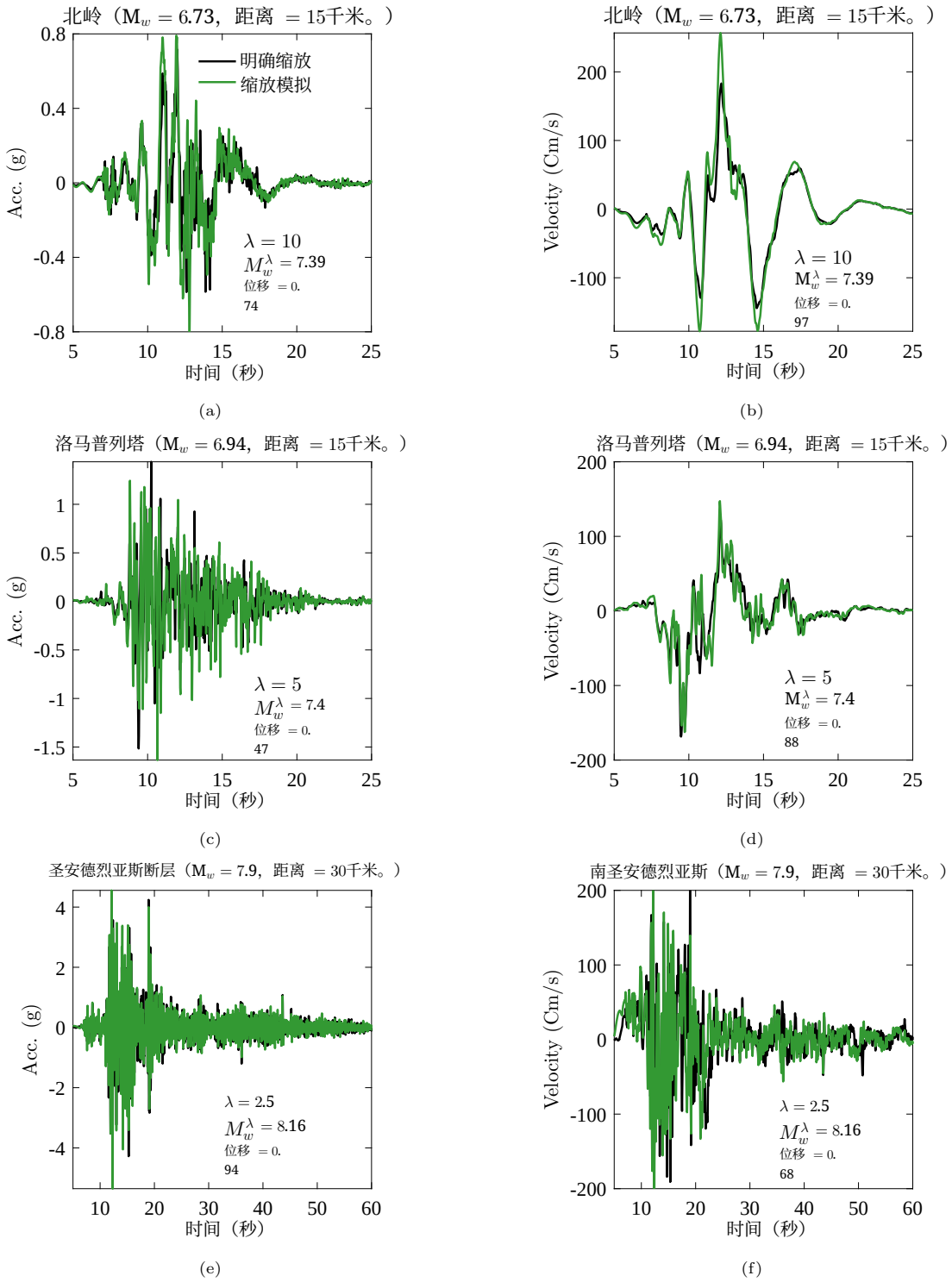

图7：针对三个地震情景——北岭、洛马普列塔和南圣安德烈亚斯，对地震动缩放的地震学解释进行时域验证。验证使用模拟地震动进行。黑色曲线表示通过显式乘以缩放因子进行缩放的地震动。绿色曲线表示根据本研究提出的地震学解释隐式生成的缩放后的地面运动。每个子图上方标出了未缩放地面运动的震级。各子图中标出了缩放因子（λ）和缩放后地面运动的震级。各子图中还显示了严格相似度度量（$\mathcal{S}$）的取值。

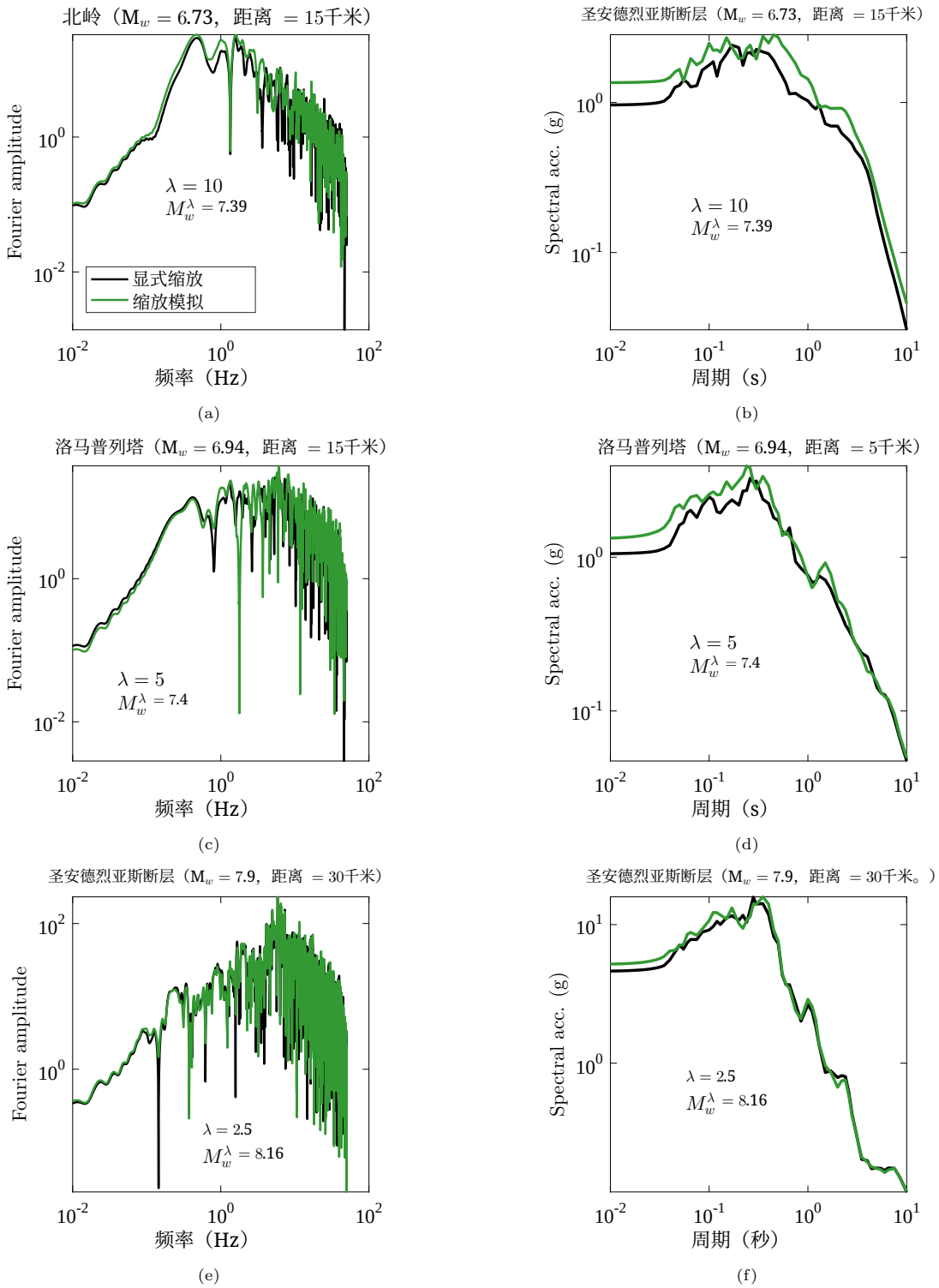

图8：三个地震情景——北岭、洛马普列塔和南圣安德烈亚斯——中地震动缩放地震学解释的频域验证。验证使用模拟地震动进行。黑色曲线表示通过显式乘以缩放因子进行缩放的地震动。绿色曲线表示根据本研究提出的地震学解释隐式生成的缩放后的地面运动。未缩放地面运动的震级标注在各子图上方。缩放因子（λ）和缩放后的地面运动的震级标注在各子图中。

5. 讨论

此外，还讨论了所提出的加速度图缩放地震学解释的两个方面。第一，该解释在一组相同的缩放后地震参数下对多个台站的适用性。第二，讨论在破裂面积固定的情况下，对应力降进行线性缩放、对震级进行对数缩放是否符合地震学原理。

5.1. 所提出的缩放解释对多个台站的适用性

所提出的加速度图缩放解释通过缩放因子 λ 修改两个地震源参数 M_w 和 $\Delta\sigma$ 。其他所有参数（例如破裂面积和拐角频率）以及地震波衰减和场地效应等条件，在未缩放和缩放后的加速度图中均设为相同。由于只修改震源参数，所提出的加速度图缩放解释适用于多个台站。也就是说，如果场址 X 处的加速度图按 λ 缩放，那么该解释表明，在任何其他场址 X_1 （$\mathrm{X}_1 \neq \mathrm{X}$）记录的加速度图也按 λ 缩放。从物理角度看，这似乎合理，因为当 X 处的加速度图被缩放时，地震源的某些方面会发生改变，而这些改变也会影响在其他场址 X_1 记录的加速度图。

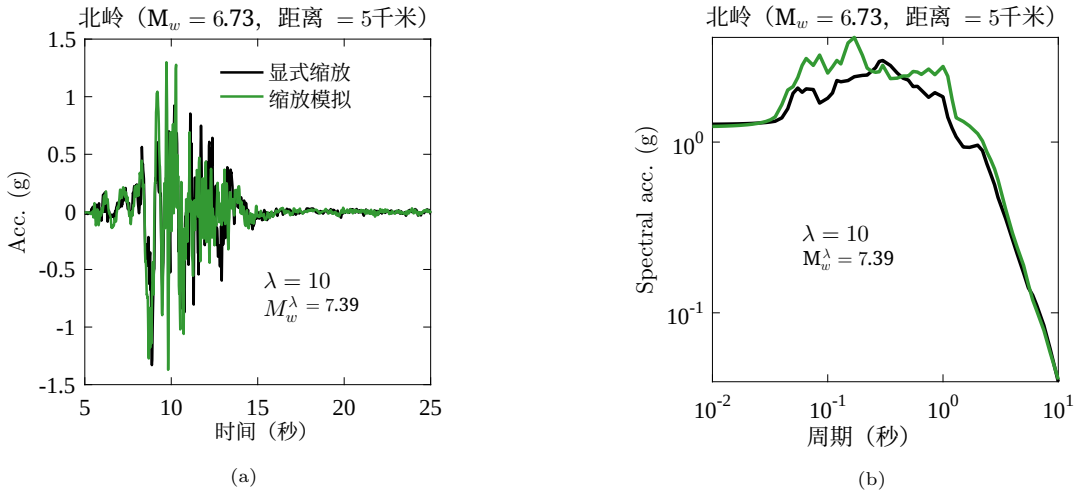

图9：所提出的加速度图缩放解释对多个台站的适用性。北岭地震中，在距离5千米处记录的显式缩放和缩放后的模拟（a）加速度图及（b）谱加速度。（与图7a和图8b中使用的15千米不同）

图9展示了一个示例，说明所提出的缩放解释适用于多个台站。在此示例中，模拟未缩放和缩放后的北岭加速度图的所有条件均与前例相同（见图7a），唯一不同的是，这些加速度图记录于距离5千米处，而非15千米处。图9a和图9b分别展示了加速度图和谱加速度，表明所提出的缩放解释在这个新场址同样有效。

5.2. 加速度图振幅缩放的地震学 加速度图振幅的地震学正确性 s 缩放

一个同时引起地震学家和地震工程师关注的问题，是加速度图缩放在地震学上的正确性。本文提出，对加速度图进行线性缩放，会使 $\Delta\sigma$ 呈线性变化，使 M_w 呈对数变化。在其他地震参数中，有人注意到，有效破裂面积 $\mathcal{A}$ 对于加速度图的缩放是不变的。进一步提出，以这种方式修改 $\Delta\sigma$ 和 M_w 在物理上是否可接受，可能不应被视为一个二元问题。原因是

给定的 $\mathcal{A}$、 M_w 和 $\Delta\sigma$ 经经验观察具有不确定性。如下文所述，可以利用概率论对这种不确定性进行量化：

$$\begin{aligned} p(M_{res}, \Delta\sigma|\mathcal{A}) &\approx p(M_{res}|\mathcal{A})\ p(\Delta\sigma|\mathcal{A}) \\ &\approx p(M_{res}|\mathcal{A})\ p(\Delta\sigma) \end{aligned} \tag{19}$$

其中， $p(.|.)$表示条件概率分布，而 M_{res} 是在给定 $\mathcal{A}$的情况下，通过预测震级与观测震级之差得到的震级残差。上述方程指出，利用 M_w 与 $\Delta\sigma$ [37, 38] 相互独立这一假设，可将联合条件概率 $p(M_{res}, \Delta\sigma|\mathcal{A})$拆分为边缘分布 $p(M_{res}|\mathcal{A})$和 $p(\Delta\sigma|\mathcal{A})$。此外，按照地震学中的一般观点，假设 $\Delta\sigma$ 与 $\mathcal{A}$相互独立。

根据方程（19）所示的 $M_{res}|\mathcal{A}$ 与 $\Delta\sigma$ 分布相互独立这一性质，一种符合地震学原理的加速度图缩放方法是，确保一组缩放后的加速度图具有与经验观测相同的 $p(M_{res}|\mathcal{A})$和 $p(\Delta\sigma)$分布。由于 $\Delta\sigma^{\lambda} = \lambda\ \Delta\sigma$ 和 $M_{res} = M_w^{\lambda} - M_w$，这些分布很容易针对这组缩放后的加速度图计算得出；缩放加速度图的破裂面积与未缩放加速度图的破裂面积相同。经验 $p(M_{res}|\mathcal{A})$分布可利用 [40] 震级—破裂面积关系计算得出：

$$p(M_{res}|\mathcal{A}) = erf\left(\frac{M_{res}}{\sigma\ \sqrt{2}}\right) \tag{20}$$

其中， M_{res} 是预测震级与观测震级之间的差值， σ 是经验关系的标准差， erf 是一个误差函数。值得注意的是，上述公式表示半正态分布的累积分布函数，并且在加速度图向上缩放时（即， $\lambda > 1$ 和 $M_{res} > 0$）有效。经验 p（$\Delta\sigma$）分布可由 [37]获得。图10展示了加速度图缩放的地震学正确性的示意图。从中可以看出，一组缩放后的加速度图（以绿色实线表示）符合经验观测到的 $M_{res}|\mathcal{A}$ 和$\Delta\sigma$ 分布，而另一组缩放组（以绿色虚线表示）则不符合。

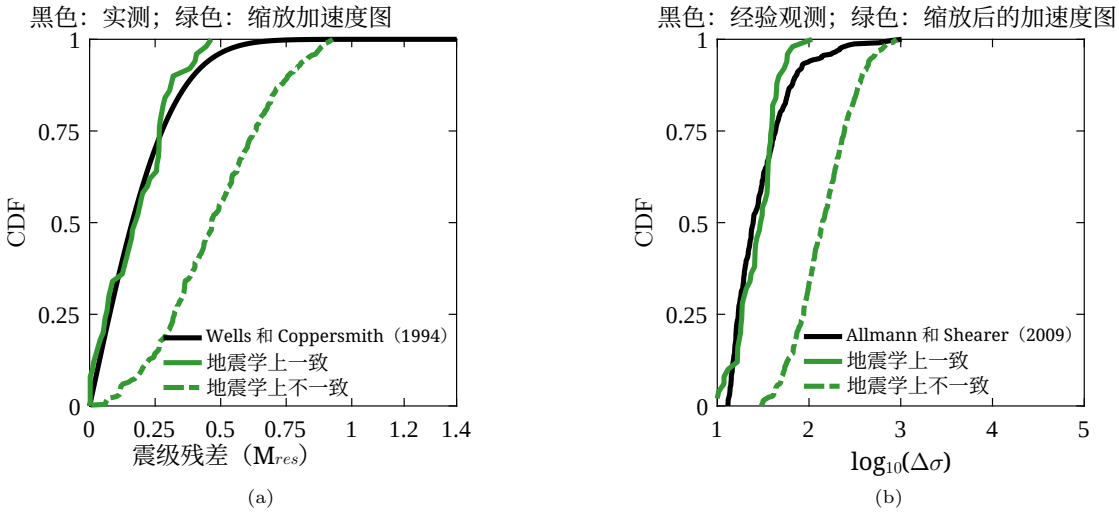

图10：通过将缩放加速度图的 (a) $p(M_{res}|\mathcal{A})$ 和 (b) $\Delta\sigma$ 分布与经验观测进行匹配，展示加速度图缩放的地震学正确性。值得注意的是，一组缩放后的加速度图（以绿色实线表示）符合经验观测到的 $M_{res}|\mathcal{A}$ 和 $\Delta\sigma$ 分布，而另一组缩放组（以绿色虚线表示）则不符合。这里假定加速度图均向上缩放（即 $\lambda > 1$）。

6. 总结与结论

由于足以导致结构模型受损或倒塌的强震记录加速度图十分稀少，因此在地震工程分析中会采用加速度图幅值缩放。如果将缩放后的加速度图用于目标谱匹配、地震反应分析和地震风险评估，那么这些加速度图应当代表尚未发生的潜在地震事件。导致加速度图被缩放的这类地震事件，其震级是多少？这些地震事件发生在距离记录台站多远的地方？破裂面积和应力降等参数又如何？本文试图通过对加速度图缩放的地震学开展理论研究，回答这类问题。

我们利用表示定理和加速度图傅里叶谱，研究了缩放后加速度图的地震学特征。得出以下结论：

- 未缩放和缩放后的加速度图在断层面上的破裂空间分布和时间分布相同。然而，缩放后的加速度图的破裂幅值（给定断层上的某一位置或某一时刻）按因子 λ 缩放。因此，缩放后的加速度图的震级变为：$M_w^\lambda = M_w + 2/3\ log_{10}(\lambda)$

- 未缩放和缩放后的加速度图具有相同的有效破裂尺度。这些加速度图还记录于同一场址，因此Joyner-Boore距离度量不受加速度图缩放的影响。

- 未缩放和缩放后的加速度图具有相似的傅里叶谱形。这意味着这些加速度图的拐角频率相同，因此静态应力降随加速度图缩放呈线性变化（$\Delta\sigma^\lambda = \lambda\ \Delta\sigma$）。

此外，还应注意，场址下方的土壤应以相同的方式将基岩运动传递至地表，无论是对于未缩放还是缩放后的加速度图；也就是说，这些加速度图之间场地响应的相对非线性不能太大。

我们采用UCSB混合方法进行地震动模拟，通过比较显式缩放的模拟地震动与（隐式）缩放的模拟地震动，验证了所提出的加速度图幅值缩放的地震学解释。研究考虑了三种地震情景：北岭、洛马普列塔和南圣安德烈亚斯。在时域中，我们使用相似性度量$\mathcal{S} \in [-1,\ +1]$（数值越高越理想）比较这些地震动。对六组加速度图和速度记录进行比较后发现，显式缩放的地震动与缩放后的模拟地震动吻合良好，$\mathcal{S}$的平均值为0.78。在频域中，这些地震动的对比结果也很好，尤其是采用傅里叶幅度谱和反应谱等表示方式时。

所提出的缩放解释的一个关键特点是建议：如果某场址的加速度图按 λ 进行缩放，那么其他场址记录的加速度图也应按 λ 进行缩放。这是因为，加速度图缩放会改变震源参数，进而影响地震源周围所有场址实际发生的地震动。最后，文中讨论了缩放的地震学正确性。建议通过确保一组缩放后的加速度图在给定破裂面积和应力降分布的情况下，其震级与经验观测相似，来实现地震学上一致的加速度图缩放。

参考文献

[1] S. L. N. Dhulipala，《基于性能的地震工程中强度指标与地震动选择的贝叶斯方法》，博士论文，弗吉尼亚理工大学（2019）25–29。[2] S. L. N. Dhulipala、A. Rodriguez-Marek、M. M. Flint，《强度指标充分性对于结构地震需求危险性分析的重要性》，第11届全国地震工程会议论文集，美国加利福尼亚州洛杉矶（2018）25–29。[3] S. L. N. Dhulipala、M. M. Flint，《多元贝叶斯推断在地震危险性评估中的能力》，《自然灾害》103（3）（2020）3123–3144。 doi:10.1007/s11069-020-04122-5。

[4] D. Vamvatsikos、C. Allin Cornell, 《增量动力分析》, 《地震工程与结构动力学》31（3）（2002）491–514。doi:10.1002/eqe.141。[5] F. Jalayer, 《直接概率地震分析：非线性动力评估的实施》, 博士论文, 斯坦福大学（2003）。[6] S. L. N. Dhulipala、A. Rodriguez-Marek、M. Bahrampouri, 《利用信息论评估非线性场地响应的强度指标充分性》, 《土动力学与地震工程》134（2020）106144。doi:10.1016/j.soildyn.2020.106144。[7] S. L. N. Dhulipala、A. Rodriguez-Marek、M. M. Flint, 《利用地震危险性分解的显著特征计算向量危险性》, 《地震谱》34（4）（2018）1893–1912。doi:10.1193/080117EQS149M。[8] S. L. N. Dhulipala、A. Rodriguez-Marek、S. Ranganathan、M. M. Flint, 《用于量化替代强度指标相对于概率地震需求分析充分性的场地一致性方法》, 《地震工程与结构动力学》47（2）（2018）377–396。doi:10.1002/eqe.2955。[9] S. L. N. Dhulipala、A. Rodriguez-Marek、M. M. Flint, 《地震危险性分解的显著特征与向量危险性计算》, 《岩土地震工程与土动力学》第五卷（2018）164–171doi:10.1061/9780784481462.016。[10] J. W. Baker、C. A. Cornell, 《谱形、ε与记录选择》, 《地震工程与结构动力学》35（9）（2006）1077–1095。[11] ASCE, 《建筑及其他结构的最小设计荷载》, 美国土木工程师学会，2016。[12] S. L. N. Dhulipala, 《功能失效危险性曲线：支持多灾种作用下系统韧性设计的基于风险的工具》, 《ASCE-ASME工程系统风险与不确定性杂志》A辑：土木工程7（2）（2021）04021014。 doi:10.1061/AJRUA6.0001131。[13] S. L. N. Dhulipala, 《高斯核方法在中层建筑地震易损性与风险评估中的应用》, 《可持续性》13（5）（2021）2973。doi:10.3390/su13052973。[14] S. L. N. Dhulipala、H. V. Burton、H. Baroud, 《用于广义灾后系统恢复建模的马尔可夫框架：从单一灾害到多灾种》, 《结构安全》91（2021）102091。 doi:10.1016/j.strusafe.2021.102091。[15] S. L. N. Dhulipala、M. M. Flint, 《利用一系列半马尔可夫过程对多灾种作用下的基础设施韧性进行建模》, 《可靠性工程与系统安全》193（2020）106659。 doi:10.1016/j.ress.2019.106659。[16] M. M. Flint、S. L. N. Dhulipala、Y. Shahtaheri、H. Tahir、T. Ladipo、M. R. Eatherton、J. L. Irish、C. G. Olgun、G. Reichard、A. Rodriguez-Marek、C. Zobel, 《制定韧性可持续建筑多灾种设计决策框架》, 第一届国际自然灾害与基础设施会议（ICONHIC2016）。[17] S. L. N. Dhulipala、C. Bolisetti、L. B. Munday、W. M. Hoffman、C. C. Yu、F. U. H. Mir、F. Kong、A. D. Lindsay、A. S. Whittaker, 《在开源计算平台中开发、验证和确认全面的声学流固耦合功能》, 《地震工程与结构动力学》51（10）（2022）2188–2219。doi:doi.org/10.1002/eqe.3659。[18] S. Veeraraghavan、C. Bolisetti、A. Slaughter、J. Coleman、S. L. N. Dhulipala、W. Hoffman、K. Kim、E. Kurt、R. Spears、L. Munday, 《MASTODON：用于关键基础设施地震分析与风险评估的开源软件》, 《核技术》207（7）（2021）1073–1095。doi:10.1080/00295450.2020.1807282。[19] S. L. N. Dhulipala、C. Bolisetti、R. Yorg、P. Hashimoto、J. L. Coleman、M. Cox, 《安全关键核设施的地震风险评估：用于基于风险的定期再评价》, 《核技术》207（11）（2021）1712–1724。doi:10.1080/00295450.2020.1792743。[20] N. Jayaram、T. Lin、J. W. Baker, 《一种计算高效的地震动选择算法，用于匹配目标反应谱的均值和方差》, 《地震谱》27（3）（2011）797–815。[21] N. Luco、P. Bazzurro, 《地震动记录的幅值缩放是否会导致有偏的非线性结构层间位移反应？》, 《地震工程与结构动力学》36（2007）1813–1835。[22] K. Aki、P. G. Richards, 《定量地震学》, 第1版，W. H. Freeman and Company，1980。[23] J. N. Brune, 《构造应力与地震产生的地震剪切波谱》, 《地球物理研究杂志》75（26）（1970）4997–5009。[24] K. Irikura, 《利用经验格林函数预测强加速度地震动》（1986）。[25] J. G. F. Crempien、R. J. Archuleta, 《UCSB方法：模拟运动学地震震源产生的宽频带地震动》, 《地震学研究快报》86（1）（2015）61–67。[26] P. J. Maechling、F. Silva、S. Callaghan、T. H. Jordan, 《SCEC宽频带平台：系统架构与软件实现》, 《地震学研究快报》86（1）（2015）27–38。[27] P. M. Mai、G. C. Beroza, 《有限断层破裂模型的震源尺度缩放特性》, 《美国地震学会通报》90（3）（2000）604–615。[28] P. M. Shearer, 《地震学导论》, 第2版，剑桥大学出版社，2009。[29] T. C. Hanks、H. Kanamori, 《矩震级标度》, 《地球物理研究杂志B：固体地球》84（B5）（1979）2348–2350。[30] D. M. Boore, 《利用随机方法模拟地震动》, 《纯粹与应用地球物理》160（3）（2003）635–676。URL [31] http://link.springer.com/10.1007/PL00012553 A. S. Baltay、T. C. Hanks, 《理解NGA-West 2数据中峰值地面加速度和峰值地面速度对震级的依赖性》, 《美国地震学会通报》104（6）（2014）2851–2865。[32] D. Motazedian、G. M. Atkinson, 《基于动态拐角频率的随机有限断层建模》, 《美国地震学会通报》95（3）（2005）995–1010。[33] S. Kramer, 《岩土地震工程》, 普伦蒂斯·霍尔出版社，纽约，1996。

[34] K. W. Campbell、Y. Bozorgnia，NGA-West2 地震动模型：PGA、PGV 和 5% 阻尼线性加速度反应谱的平均水平分量，《地震谱》30 (3) (2014) 1087–1114。[35] R. W. Graves、A. Pitarka，采用混合方法进行宽频带地震动模拟，《美国地震学会通报》100 (5A) (2010) 2095–2123。[36] G. M. Atkinson、K. Assatourians，在 SCEC宽频带平台上实现并验证 EXSIM（一种随机有限断层地震动模拟算法），《地震学研究快报》86 (1) (2015) 48–60。[37] B. P. Allmann、P. M. Shearer，中强至强地震应力降的全球变化，《地球物理研究杂志：固体地球》114 (1) (2009) 1–22。[38] A. Baltay、S. Ide、G. Prieto、G. Beroza，地震应力降与视应力的变异性，《地球物理研究快报》38 (6) (2011) 1–6。[39] A. Papoulis，《傅里叶积分及其应用》，McGraw-Hill，1962。[40] D. L. Wells、K. J. Coppersmith，震级、破裂长度、破裂宽度、破裂面积与地表位移之间的新经验关系，《美国地震学会通报》84 (4) (1994) 974–1002。