分数阶耦合器中静止与运动孤子的对称性破缺转变

Dmiry V. Strunin [1] [2 3] 和 Boris A. Malomed[, , ,]

[1] School of Mathematics Physics and Computing, University of Southern Queensland, Toowoomba, Queensland 4350, Australia

[2] Department of Physical Electronics, School of Electrical Engineering,Faculty of Engineering, and Center for Light-Matter Interaction,Tel Aviv University, P.O.B. 39040, Tel Aviv, Israel

[3] Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile

我们研究双芯耦合器中的相变，其表现形式为孤子的自发对称性破缺（SSB）分岔。该耦合器的每个芯中均存在分数阶衍射和三次自聚焦，其特征由 L´evy 指数 α 描述。该系统代表具有分数阶近轴衍射或群速度色散的线性耦合光波导（后一种系统已用于近期的一项实验，并首次观测到波在有效分数阶系统中的传播）。通过数值计算和变分近似（VA），我们确定分数阶耦合器中的 SSB 属于亚临界型分岔（即一级对称性破缺相变）；与非分数阶衍射情形下极弱的亚临界性相比，其亚临界性会随分数阶特性 $2-\alpha$ 的增强而增强，$\alpha=2$。在 $\alpha\to 1$的柯西极限下，它转变为*extreme* 亚临界分岔，表现为非对称孤子的向后分支，且这些分支绝不会转而向前延伸。我们将 SSB 分岔分析扩展到运动（倾斜）孤子；这是一个非平凡问题，因为分数阶衍射不具备伽利略不变性。我们还研究了运动孤子之间的碰撞，发现了双孤子对称性破缺效应以及孤子的合并。

arXiv:2305.05643v1 [nlin.PS] 9 May 2023

I. 引言

动能算符由分数阶导数表示的 Schr¨odinger 方程，最初由 Laskin 提出，作为经典量子力学的推广 [1–3]。自由空间中一维分数阶 Schr¨odinger 方程的无量纲形式，其中*L´evy* 指数 （LI） α （由 Mandelbrot 命名 [4]），为

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2}\psi, \tag{1}$$

其中，分数阶算符定义为*Riesz* 导数 [5, 6],

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2}\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dp|p|^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'e^{ip(x-x')}\psi(x'). \tag{2}$$

它是一个非局域算符，由直接傅里叶变换与逆傅里叶变换的组合构成，分数阶微分在傅里叶空间中由因子 $|p|^{\alpha}$ 表示。在 Laskin 的分数阶量子力学中，α取值为

$$1<\alpha\leq 2. \tag{3}$$

$\alpha=2$ 的极限对应于经典 Schr¨odinger 方程，此时算符 (2) 化为通常的二阶导数。$\alpha=1$ 的情形（即“拉普拉斯算子的平方根”）称为柯西驱动项 [7, 8], ，它尤其出现在光子波函数的分数阶方程中 [9]。此外，研究发现，原有的 LI 范围 (3) 可以扩展至 $0<\alpha\leq 2$ [9]。

值得一提的是，分数阶微分还有其他定义，例如 Caputo 导数 [2], ，但 Laskin 推导分数阶薛定谔方程时得到的是采用 Riesz 导数 [1, 3]的模型。分数阶导数算子的非局部特性会在有界区域中产生本质上非平凡的后果，并涉及相应的边界条件 [8, 10]。特别是在边界条件的情形下以及在外势作用下，分数阶导数的不同定义会导致本质上不等价的结果。

尽管分数阶量子力学的实验实现仍未实现，但有人提出利用光子学中的经典波传播来模拟它，这一方法借助了薛定谔方程与光束傍轴传播方程之间广为人知的相似性 [11, 12]。这一理论设计的装置

用于模拟分数阶衍射，基于 $4f$ 光学配置。该配置利用透镜对光束进行空间傅里叶分解，然后让光束通过经过适当设计的相位板，施加局部相移，以模拟式（2）所示分数阶衍射的作用，最后使用另一透镜从傅里叶分解中还原光束 [11]。此外，也有人提出在列维晶体 [13] 和极化激元凝聚体 [14] 中模拟分数阶量子力学。

最近，已有报道在光纤激光器装置中首次实验实现有效分数阶群速度色散（而非横向衍射）[15]。尽管分数阶色散作用于时间域，但其实验模拟是借助与上文所述类似的 $4f$ 装置完成的，不同之处在于，透镜对光信号进行光谱分解和逆重组。为避免误解，需要强调的是，时间变量在光纤中充当有效坐标，而演化变量则是传播距离。因此，参考文献 [15] 中报道的有效分数阶色散模拟的是分数阶衍射的时间域对应物（参见参考文献 [16]），而不是相对于演化变量的分数阶导数；后者出现在各种反常扩散模型中 [17, 18]。当然，需要指出的是，光学中提出并报道的分数阶衍射和色散实现方案，实际上报道的是利用光对这些效应进行模拟，而非这些效应的直接作用。

通过引入外势 [，尤其是宇称-时间（$\mathcal{PT}$）对称外势 [19]-[24]]，并研究艾里波在二维几何中的传播（采用分数阶衍射算符 $\left(-\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial y^2\right)^{\alpha/2}$ [25, 26]），人们开展了分数阶衍射模型的理论研究。在光波导中实现分数阶衍射/色散后，自然会考虑材料的自聚焦克尔非线性，进而研究分数阶非线性薛定谔方程（FNLSEs）[27]。

基于分数阶非线性薛定谔方程的研究取得了许多理论成果，包括连续波的调制不稳定性 [28]，、临界或超临界塌缩 [29]，以及多种孤子类型 [30]-[27]。这些类型包括准线性的“可访问孤子” [33, 34]，、由晶格势维持的带隙孤子 [38]-[42]，、孤立涡旋 [43–45]，、多峰模 [46]-[49]，、簇 [50]，、离散孤子 [51]，和暗模 [52]。此外，人们还预测了由分数阶衍射与二次非线性相互作用产生的孤子 [53, 54]，，以及由分数阶复金兹堡-朗道方程产生的耗散孤子 [55]。

自陷非线性在双阱势中产生的一种普遍效应是自发对称性破缺（SSB）[57]。此类系统中的 SSB 现象已在多种物理情境下得到详细的理论研究 [58]-[63]，并通过实验加以研究[64]-[67]。最近，理论分析已扩展至结合分数阶衍射与对称势的非线性系统 [68]-[71]。双波导（通常以双芯光纤表示）为实现分量间对称性破缺的双分量孤子形式的 SSB 提供了合适的平台 [72, 73]。这类光纤中从对称双分量孤子向非对称双分量孤子的转变，即自发对称性破缺分岔，已得到详细的理论研究 [74]-[79]，，并最近通过实验得到了验证 [80]。另一项近期研究 [81]，在具有分数阶衍射的双芯系统中发现了若干类对称与非对称孤子。

本工作的目标是确定分数阶双芯波导中双分量孤子的对称性破缺分岔，即相应的对称性破缺相变。我们通过变分近似（VA）进行解析研究，并以系统的数值方式加以分析。一项重要发现是，系统的分数阶特性 [即式（2）中的较小 LI α] 会增强分岔的亚临界 特征 [82]。换言之，分数阶特性使双分量孤子的对称性破缺成为更加显著的一级相变。

分数阶衍射的一个重要特点是它不具有伽利略不变性。因此，运动孤子的产生以及对其对称性破缺分岔的考察都是非平凡问题；本文也对此进行了研究，而此前尚未有人探讨。我们还研究了运动孤子之间的碰撞

因此，我们 处理具有三次自聚焦非线性的线性耦合分数阶非线性薛定谔方程组 ，

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} u_1 - |u_1|^2 u_1 - u_2, \\
i\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} u_2 - |u_2|^2 u_2 - u_1,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中，$-u_2$ 和 $-u_1$ 前的耦合系数通过标度变换固定为 1。该系统唯一不可约的控制参数是 LI α。在光学中，方程（4）描述了通过光隧穿耦合的一对平行平面波导。在这种情况下，t 和 x 分别是传播距离和横向坐标。在时间域中实现的同一系统，即以 x 表示约化时间 [83]，，可被理解为一种由双芯光纤构成的激光器模型，其中具有有效分数阶色散，该模型遵循参考文献 [15] 中报道的实验方法。使用双芯光纤构建激光器是一种众所周知的选择 [84]。

还可以考虑将方程（4）视为一组耦合的 Gross-Pitaevskii 方程，用于描述由分数阶 Schr¨odinger 方程支配、填充一对平行雪茄形陷阱的量子粒子玻色-爱因斯坦凝聚体；粒子通过隧穿在这对陷阱间线性耦合。在这种情况下， t 是时间， x 是沿陷阱方向的坐标。不过，要为该凝聚体推导出这样的平均场模型，需要进行精确分析，这应作为一项独立研究的课题。尤其需要检验，该系统中的碰撞效应能否由通常的平均场三次项恰当地表示。实现该系统的实验也可能是一项颇具挑战性的目标。

本文安排如下：第 2 节介绍孤子解的构建框架，以及对其稳定性和动力学的分析。第 3 节阐述基于变分近似（VA）的分析方法。第 4 节总结静止孤子和运动孤子的数值结果。第 5 节为本文结论。

II. 孤子解的框架

对于传播常数为 k 的方程（4），其定态解（在 BEC 的应用中， $-k$ 是化学势）设为

$$u_{1,2}(x,t) = U_{1,2}(x)e^{ikt}, \tag{5}$$

其中实函数 $U_{1,\,2}(x)$ 满足方程

$$\begin{aligned} kU_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} U_1 - U_1^3 - U_2 = 0, \\ kU_2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\alpha/2} U_2 - U_2^3 - U_1 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

考虑到 $U_{1,\,2}(x)$ 是 x 的偶函数，并使用方程（2）给出的分数阶导数定义，方程（6）的显式形式可写为

$$\begin{aligned} kU_1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} p^{\alpha}dp \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px)\cos(px')U_1(x')dx' - U_1^3 - U_2 = 0, \\ kU_2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} p^{\alpha}dp \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px)\cos(px')U_2(x')dx' - U_2^3 - U_1 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

我们考虑 LI 在以下区间内的取值

$$1 < \alpha \leq 2, \tag{8}$$

众所周知，在 $\alpha \leq 1$时，分数阶非线性薛定谔方程会导致塌缩（在 $\alpha = 1$时发生临界塌缩，在 $\alpha < 1$时发生超临界塌缩） [27, 29]。

在常规衍射的情况下， $\alpha = 2$，方程（6）的显然解具有对称孤子的形式：

$$U_1 = U_2 = \sqrt{2(k-1)}\,\mathrm{sech}\left(\sqrt{2(k-1)}x\right). \tag{9}$$

该解的范数（功率）为

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(U_1(x))^2 + (U_2(x))^2\right] dx = 4\sqrt{2\,(k-1)}. \tag{10}$$

随着 N的增加，对称态通过对称性破缺而变得不稳定，并出现稳定的非对称孤子。虽然非对称孤子没有精确解，但可以精确求出它们出现时的对称性破缺点（ $\alpha = 2$ [74]）：

$$(N_{\mathrm{SSB}})_{\mathrm{exact}}\,(\alpha = 2) = 8/\sqrt{3}. \tag{11}$$

另一方面，变分近似预测该点位于

$$(N_{\mathrm{SSB}})_{\mathrm{VA}}\,(\alpha = 2) = 2\sqrt{6} \approx 4.899 \tag{12}$$

[72, 79], 该结果的相对误差为 $\simeq 6\%$。

由自发对称性破缺分岔产生的孤子不对称性由参数定义

$$\Theta = N^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(U_1(x))^2 - (U_2(x))^2 \right] dx. \tag{13}$$

该分岔通过图示表征，这些图显示了 Θ 关于 k 或 N [的函数关系，具体参见下文图 3]。方程 (4) 中运动孤子的解，即在平面波导中以斜率 c 斜向传播的光束，可设为

$$u_{1,2} = u_{1,2}(\xi \equiv x - ct, t). \tag{14}$$

相应地，方程 (4) 可用 (ξ, t) 改写为

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u_1}{\partial t} - ic\frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)^{\alpha/2} u_1 - |u_1|^2 u_1 - u_2, \\ i\frac{\partial u_2}{\partial t} - ic\frac{\partial u_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)^{\alpha/2} u_2 - |u_2|^2 u_2 - u_1. \end{aligned} \tag{15}$$

方程 (15) 的解进一步设为 $u_{1,2}(\xi, t) = U_{1,2}(\xi) e^{ikt}$ [参见方程 (5)]，，其中复函数 $U_{1,2}(\xi)$满足以下定态方程组：

$$\begin{aligned} kU_1 + ic\frac{dU_1}{d\xi} + \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)^{\alpha/2} U_1 - |U_1|^2 U_1 - U_2 = 0, \\ kU_2 + ic\frac{dU_2}{d\xi} + \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)^{\alpha/2} U_2 - |U_2|^2 U_2 - U_1 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

孤子的稳定性　　通过考察包含小扰动 $a_{1,2}$ 和 $b_{1,2}$的解来研究孤子的稳定性，

$$u_{1,2}(x,t) = \left[U_{1,2}(x) + a_{1,2}(x) e^{\lambda t} + b^*_{1,2}(x) e^{\lambda^* t} \right] e^{ikt}, \tag{17}$$

其中 λ 是不稳定性增长率，$*$ 表示复共轭。对扰动的方程（4）进行线性化，得到相应的 Bogoliubov–de Gennes 方程组：

$$\begin{aligned} \left[-(k - i\lambda) - \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)^{\alpha/2} + 2|U_{1,2}|^2 \right] a_{1,2} + U_{1,2}^2 b_{1,2} + a_{2,1} = 0, \\ \left[-(k + i\lambda) - \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}\right)^{\alpha/2} + 2|U_{1,2}|^2 \right] b_{1,2} + (U^*_{1,2})^2 a_{1,2} + b_{2,1} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

稳定性条件是，方程（18）的解只能产生满足 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ [85, 89] 的特征值。下文将通过对受扰孤子演化进行直接数值模拟，验证这些方程对孤子稳定性的预测。

III. 变分近似（VA）

为应用变分近似，我们注意到，方程（7）可由拉格朗日量导出，

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k}{2}\left(U_1^2 + U_2^2\right) \right] dx + H, \tag{19}$$

哈密顿量为

$$\begin{aligned} H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{1}{4}\left[U_1^4(x) + U_2^4(x)\right] - U_1(x)U_2(x) \right\} dx \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} p^\alpha dp \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \cos\left(p\left(x - x'\right)\right) \left[U_1(x)U_1(x') + U_2(x)U_2(x')\right], \end{aligned} \tag{20}$$

参见参考文献 [45]。非对称孤子的试探解可采用以下简单形式，其遵循上述解（9）的模式：

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{N}{2W}}\,(\cos\chi)\,\mathrm{sech}\left(\frac{x}{W}\right), u_2(x) = \sqrt{\frac{N}{2W}}\,(\sin\chi)\,\mathrm{sech}\left(\frac{x}{W}\right), \tag{21}$$

其中，变分参数为宽度 W 和范数分布角 χ，而 N 被视为给定的总范数。与该试探解对应的非对称参数 (13) 为

$$\Theta_{\mathrm{VA}} = \cos(2\chi) \equiv \sqrt{1-S^2}, \tag{22}$$

$$S \equiv \sin(2\chi) \tag{23}$$

（参数 S 将在下文使用）。将试探解 (21) 代入由式 (19) 和 (20) 定义的拉格朗日量，可得

$$L_{\mathrm{VA}} = \frac{N}{2}k - \frac{N^2}{12W}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\chi)\right) - \frac{N}{2}\sin(2\chi) + \left(1-2^{1-\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)\zeta(\alpha)\frac{N}{2(\pi W)^{\alpha}}, \tag{24}$$

其中，Γ 和 ζ 分别为 Gamma 函数和ζ函数。非对称孤子的参数由欧拉-拉格朗日方程确定，

$$\frac{\partial L_{\mathrm{VA}}}{\partial W} = \frac{\partial L_{\mathrm{VA}}}{\partial(\sin(2\chi))} = 0, \tag{25}$$

这些方程归结为关系式 $W = (N/6)\sin(2\chi)$，以及关于 $S \equiv \sin(2\chi)$ 的方程：

$$S^{\alpha-1}\left(1 - \frac{S^2}{2}\right) = \frac{\alpha}{\pi^{\alpha}}\left(1-2^{1-\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)\zeta(\alpha)\left(\frac{6}{N}\right)^{\alpha}. \tag{26}$$

特别地，通过将 $S = 1$ 代入式 (26)，可得到对称性破缺发生的阈值；此时产生从对应于 $S = 1$的对称解分支出来的非对称解族：

$$(N_{\mathrm{SSB}})_{\mathrm{VA}}(\alpha) = \frac{6}{\pi}\left[2\alpha\left(1-2^{1-\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)\zeta(\alpha)\right]^{1/\alpha}. \tag{27}$$

在 $\alpha = 2$的情况下，表达式 (27) 精确地化简为式 (12)。在相反的极限 $\alpha - 1 \to +0$ [下，见式 (8)]，式 (27) 给出

$$(N_{\mathrm{SSB}})_{\mathrm{VA}}(\alpha \to 1) = 12\pi^{-1}\ln 2 \approx 2.648. \tag{28}$$

最后，结合式（22）、（23）和（26），可隐式地得到范数 $\Theta(N)$ 对不对称性的 VA预测：

$$\left(1-\Theta_{\mathrm{VA}}^2\right)^{(\alpha-1)/2}\left(1+\Theta_{\mathrm{VA}}^2\right) = \frac{2\alpha}{\pi^{\alpha}}\left(1-2^{1-\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)\zeta(\alpha)\left(\frac{6}{N}\right)^{\alpha}. \tag{29}$$

在 $\alpha \to 1$的极限下，该关系可写成显式形式：

$$\Theta_{\mathrm{VA}}(N;\alpha\to 1) = \sqrt{\frac{(N_{\mathrm{SSB}})_{\mathrm{VA}}(\alpha\to 1)}{N} - 1}, \tag{30}$$

其中，$(N_{\mathrm{SSB}})_{\mathrm{VA}}(\alpha \to 1)$ 是式（28）给出的值。图3展示了关系（30），并将式（29）和（27）给出的预测与数值结果进行了比较。

IV. 数值结果

A. 定态的自发对称性破缺（SSB）分岔及其稳定性

通过平方算子迭代法 [85, 86] 得到了方程（7）的孤子解。随后，采用傅里叶配置法求解方程（18），得到稳定性特征值谱 λ。这两种

算法均在 Matlab 环境中实现，具体如参考文献 [85] 所述。采用伪谱方法 [85, 90–92], 对方程（4）进行了直接数值模拟

图1(a)展示了非对称孤子的典型剖面。图中的(b)和(c)表明，该孤子是不稳定的，会自发转变为稳健的呼吸子；这是一种动力学态，由于两个分量之间持续振荡而有效地呈现对称性。稳定非对称孤子的形状与图1中的相似。至于对称孤子，其中不稳定的那些会自发转变为稳定的非对称孤子，并伴有残余内部振荡（此处未详细展示）。

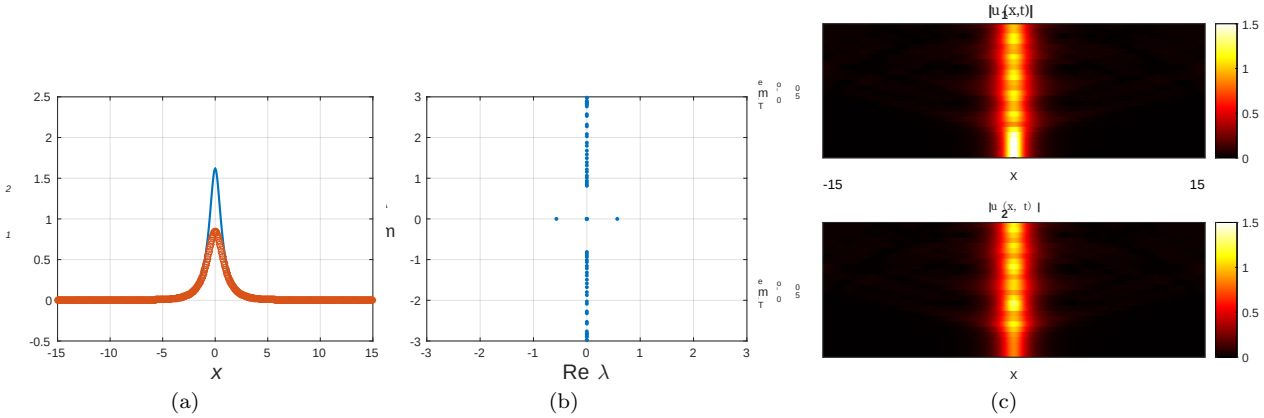

图1. 不稳定非对称孤子的平稳剖面(a)、其扰动特征值谱(b)以及扰动演化(c)，其中 $\alpha = 1.6$、 $k = 1.8$和 $N = 3.729$。稳定非对称孤子的形状与此处所示的相似。

图2和图3分别通过依赖关系 $N(k)$ 和 $\Theta(N)$展示了数值求得的平稳对称与非对称孤子族，以及将它们联系起来的自发对称性破缺分岔；其范围为LI值 $1.1 \leq \alpha \leq 2.0$，参见方程(8)（由于收敛缓慢， $\alpha < 1.1$ 的数值求解在技术上颇具挑战）。后一幅图还将结果与上文方程(29)给出的变分近似预测进行了比较。可以看出，变分近似相当准确；在固定 Θ 时，以 N 计的相对偏差在图3(a)中为 $\leq 6\%$。特别是，对于稳定分支 $\Theta(N)$，变分近似的结果相当可靠。在 $\alpha = 2$的情况下，所得结果与通常耦合器 [72, 73]的经典结果一致。

请注意，如图 2 和图 3 所示，所有解分支的（不）稳定性均符合 Vakhitov-Kolokolov判据 $dN/dk > 0$；该判据是自陷模 [85, 87] 稳定性的必要条件。具体而言，沿各自解分支向后和向前延伸的非对称孤子，其稳定与否均与该判据相符。

图 2 和图 3(a) 表明，正如预期，范数增大将导致对称孤子失稳，并通过对称性破缺分岔产生非对称孤子。与通常耦合器中已知的对称性破缺特征 $\alpha = 2$ 类似，图 3 显示该分岔属于亚临界型 [82], ，因而代表一种一级相变，并伴有滞后和双稳态。亚临界分岔产生的非对称孤子分支起初向后延伸（对应于 N的减小），随后在临界点处转而向前。这些点代表非对称孤子得以存在的 N 最小值。图 3 所揭示的一项重要结论是，分数阶特性越强，即 $2-\alpha$ 越大，对称性破缺分岔的亚临界特性越强；而在通常情形下，这一特征很弱， $\alpha = 2$。作为这一趋势的进一步表现，图 3 显示，在 $\alpha = 1.2$ 时，非对称孤子分支几乎无法延伸至临界转折点以外。额外的数值结果表明，在所考察的 k 取值范围内，对于 $\alpha = 1.1$， $\Theta(N)$ 曲线不会到达转折点。我们推测，在 $\alpha \to 1$极限下，对称性破缺分岔会变成一种没有转折点的极端亚临界分岔。事实上，图 3(a) 中绘出的由式 (30) 得到的变分近似曲线明确展示了这一特征。

值得注意的是，基于含有常规衍射和非线性双阱势的单个非线性薛定谔方程的模型中，首次报道了极端亚临界 SSB 分岔 [88],

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - [\delta(x-1) + \delta(x+1)]\,|u|^2 u, \tag{31}$$

其中 δ 是狄拉克 δ 函数，势阱之间的间距为 2，该间距由标度变换固定。方程（31）的精确解析解产生了极端亚临界分岔，非对称孤子的分支从分岔点 $N(\Theta = 0) = \frac{2}{3} + \frac{8}{27}\left(\frac{3}{4} + \ln 2\right) \approx 1.09$ 向后延伸至 $N(\Theta = 1) = 1$，且从不向前转折。

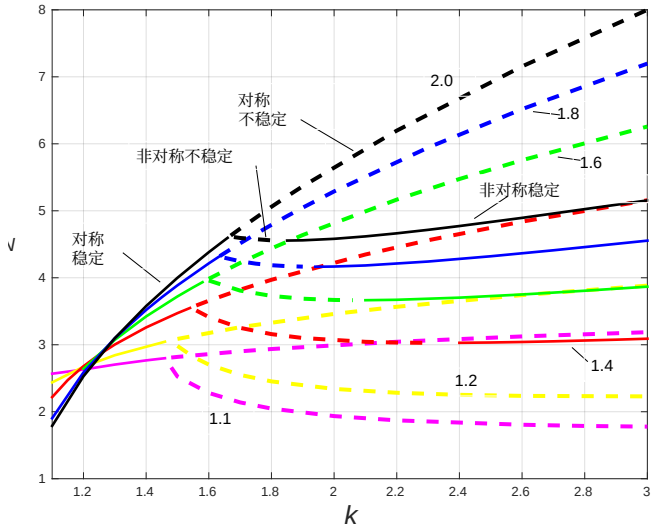

图 2. 在 LI α 的不同取值下，如标签所示，对称与非对称孤子的范数 N 随传播常数 k 的变化关系图。根据由式 (18) 得到的特征值谱，实线和虚线分别表示稳定分支和不稳定分支。

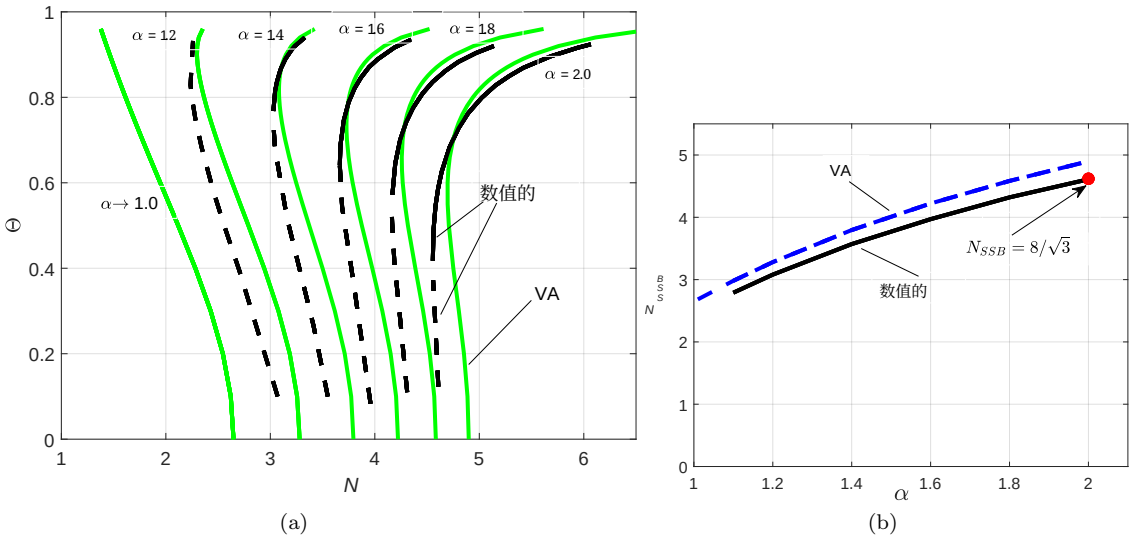

图 3. (a) 对于非对称孤子族，在 LI α 的指定取值下，对称性参数 Θ（根据式 (13) 定义）随范数的变化关系。图中同时给出了数值结果及其由 VA 根据式 (29) 预测的解析结果。对于 $\alpha \to 1$，VA 曲线根据式 (30) 绘制。数值生成分支中的实线段和虚线段分别表示稳定解和不稳定解。(b) 对称性破缺分岔点处的范数值随 LI α 的变化关系，该结果由数值解得到，并由 VA 预测，见式 (27)。在 $\alpha = 2$ 处，红点表示精确值 (11)，其与相应的数值求解结果完全相同。在 $\alpha = 1$ 处，VA 值由式 (28) 给出。

对称性破缺的基本特征是分岔点处的范数值 N_{SSB}，如方程（27）所示，变分近似对此作出了预测。数值求得的值及其变分近似预测值随 α 的变化关系显示于图 3(b) 中。数值结果与变分近似值之间的偏差不超过 6%。

除了对称与非对称孤子外，也构造了反对称孤子的解，其具有 $U_1(x) = -U_2(x)$，但它们完全不稳定（与通常耦合器中的已知情形相似，其中$\alpha = 2$ [72, 73]）。这一结论可由以下事实解释：哈密顿量 (20) 中密度为 $-U_1(x)U_2(x)$ 的线性耦合项，对于对称和非对称模式为负，而对于反对称模式为正；较高的能量（哈密顿量）意味着不稳定性。

B. 运动（倾斜）孤子的自发对称性破缺（SSB）

如上所述，伽利略不变性与分数阶衍射不相容，因此孤子的速度（倾斜） c 在方程 (16) 中成为一个非平凡参数。首先，我们讨论 c 对对称性破缺分岔的影响，这一点在以往的研究中尚未涉及。对于选定的 c值，方程 (16) 数值求解得到的分岔图如图 4(a) 所示，这表明该分岔仍具有亚临界特性。 $N(k)$ 曲线向较大的 k 偏移，这与常规衍射情况下伽利略变换的作用类似（$\alpha = 2$）：在这种情况下，通过变换消去速度项会使传播常数$\Delta k = c^2/2$发生偏移。对于图 4(a) 中给出的 $c = 0.4$ 和 0.8，这一表达式分别给出 $\Delta k(c = 0.4) = 0.08$和 $\Delta k(c = 0.8) = 0.32$，与图 4(a) 中观察到的偏移接近。常规衍射情形中不存在的一种新效应是：随着 c增大，分岔点处的范数 N_{SSB} 减小。这可以解释为，对于复剖面函数$U_{1,\ 2}(x)$，在 $c \neq 0$的情况下，耦合哈密顿量为$H_{coupling} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\{U_1(x)U_2^*(x)\}\,dx$，参见方程 (20)。由于复被积函数的振荡经过平均，耦合哈密顿量的值会降低。进而，耦合相对减弱自然会导致在非线性强到足以引发对称性破缺时， N_{SSB} 的值降低。

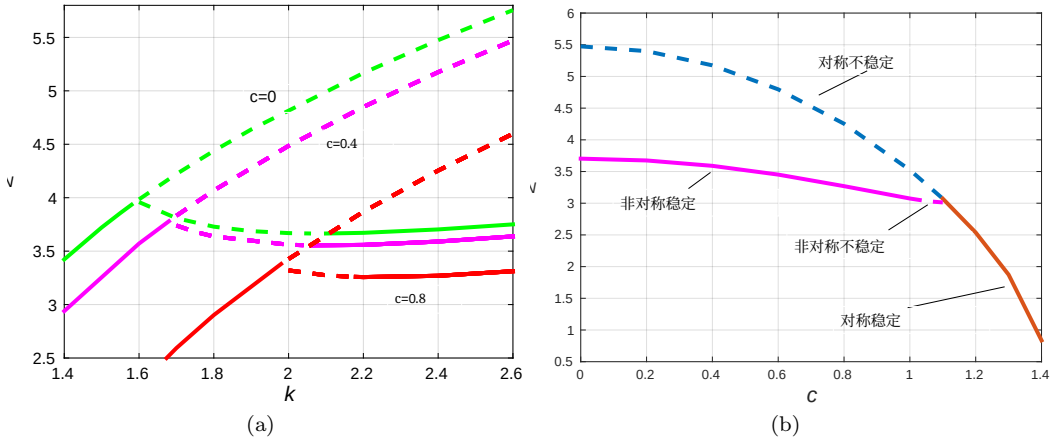

图 4。（a）在 LI $\alpha = 1.6$ 下，不同孤子速度（倾斜度） c对应的 SSB 分岔图。（b）固定 $\alpha = 1.6$、$k = 2.4$时，功率 N 与 c 的关系。

图 4(b) 展示了在固定 LI α 和传播常数 k值时， c 对稳定与不稳定的对称与非对称孤子族影响的另一种表现形式。可以看出，倾斜度 c 可用于在非对称和对称形状之间切换光束，这或可应用于光子器件的设计。对于较大的 c 值， N 呈下降趋势，尤其是对于对称孤子而言（其双分量结构并非必要，而分数阶特性仍是主导因素）。这一现象可以这样解释：较大的 c 会导致复波函数 $\psi(x)$ 快速振荡，从而使式（2）中的分数阶导数值变小。因此，为平衡孤子中的分数阶衍射所必需的自聚焦项强度（由范数值决定）也会降低。

C. 运动孤子之间的碰撞

一旦在运动（倾斜）状态下产生稳定孤子，就可以利用它们研究耦合器中孤子对的碰撞 [93]。为此，构造了两个作为方程（16）解的数值孤子 $u_1^{\pm}{}_{,2}$，其速度为 $\pm c$。随后对方程（4）进行直接数值模拟，输入为孤子对 $u_1^{\pm}{}_{,2}(x)$，分别置于 $x < 0$ 和 $x > 0$，且两者之间保持足够大的距离。

这里我们重点考察以下关于传播常数取相等值 k的相互对称孤子之间碰撞的（最自然）情形：(1) 两个稳定对称孤子；(2) 两个具有相同 k的稳定非对称孤子，处于翻转构型，其中孤子 $u_1^{+}{}_{,2}$ 具有较大的分量 u_1 和较小的分量 u_2，而 $u_1^{-}{}_{,2}$ 则相反（参见参考文献 [93]）；以及 (3) 两个稳定非对称孤子，它们互为镜像。

图5展示了稳定对称孤子以逐渐增大的速度 $\pm c$ 发生碰撞的结果。在所有情况下，碰撞后的孤子都会自然反弹：速度最低时彼此相距较远，而逐渐靠近

速度越大，彼此越近。直到速度为 $c = 0.06$ 的情况，整体图景始终完全对称，无论是每个孤子中的两个分量，还是发生碰撞的两个孤子均如此。从 $c = 0.08$ 开始，数值模拟显示碰撞诱导的自发对称性破缺开始出现，在 $c = 0.10$ 的情况下尤为明显。此时，碰撞打破了分量之间以及碰撞孤子之间的对称性。特别值得注意的是，碰撞后左侧孤子中分量 u_2 的振幅远大于碰撞前。碰撞诱导的自发对称性破缺效应可由碰撞孤子在彼此距离较小时形成的瞬态状态的不稳定性解释。通过对具有常规衍射（$\alpha = 2$）和三次-五次非线性的单方程中的孤子碰撞进行数值模拟，发现了一种定性上相似的对称性破缺机制 [94]。

随着 c 进一步增大，碰撞过程大致保持不变，与图5中所示的 $c = 0.12$情形相似，直至 $c = 0.2$ （此处未详细展示）。速度进一步增大时，对称性逐渐恢复，最终在 $c \geq 0.34$ 时发生近乎弹性的碰撞，这是快速碰撞的自然结果 [95]。

图6展示了上述定义的相互翻转态下稳定非对称孤子之间的碰撞结果。整体情况与上文所述对称孤子之间的碰撞相似。具体而言，在低速 $c \leq 0.04$ 时，孤子会反弹，而碰撞双方之间的对称性不会被打破。事实上，在这种情况下，每个孤子都会从固有非对称形状转变为近乎对称的形状，即其两个分量之间的关系近乎对称。随后，从 $c = 0.06$ 开始，碰撞诱导的自发对称性破缺效应出现，在 $c = 0.1$时导致强烈的对称性破缺，此时碰撞后状态下左侧孤子的 u_1 分量占主导。大致相同的非弹性碰撞结果会持续至 $c \simeq 0.40$ （此处未详细展示）；速度继续增大则会逐渐转变为准弹性碰撞。

互相翻转的非对称孤子发生完全非弹性碰撞并导致非常强的对称性破缺的情形，进一步由图7(a)加以说明；其中 α 和 k 的取值与图6中相同，且为 $c = 0.42$。可以观察到，在碰撞后状态中，分量 u_1 几乎完全消失，而几乎所有初始范数都以准孤子的形式被束缚在分量 u_2 中，并进行缓慢的不规则运动。实际上，新生模态的主导分量和运动方向由系统随机选择（额外的数值结果证实了这一点），这是碰撞产生的上述瞬态中的不稳定性所导致的。

最后，图7(b)展示了相同的稳定非对称孤子之间发生完全非弹性碰撞的一个例子，即它们处于未翻转构型。在这种情况下，孤子合并为一个高度非对称的静止孤子，其主导分量 u_1 与原孤子中的相同。

V. 结论

作为对分数阶衍射系统中孤子研究这一快速发展领域的贡献，我们研究了一维双芯系统中的自发对称性破缺（SSB）现象。该系统的芯层中包含 Riesz 分数阶导数和三次自聚焦，芯层之间则为线性耦合。相应的分数阶非线性薛定谔方程（FNLSE）系统可用于描述具有分数阶衍射的隧道耦合平面光波导，以及具有分数阶群速度色散的耦合波导（后一种情形近期已在实验中实现 [15], ，并可能适用于实现本文所预测的结果）。

通过系统的数值计算和基于变分近似（VA）的解析方法，我们确认该系统中的自发对称性破缺属于亚临界型分岔，即一级相变。随着分数阶特性增强，即参数 $2 - \alpha$ 增大（其中 α 是 LI（L´evy 指数）），与通常的（非分数阶）衍射情形 $\alpha = 2$下极弱的亚临界性相比，自发对称性破缺分岔的亚临界特性更加显著。当 $\alpha \to 1$时，分岔达到极端亚临界型，即非对称孤子的向后分支永不转为向前分支。尽管系统结构复杂，变分近似仍能对自发对称性破缺给出相当准确的结果。非对称孤子族的（不）稳定性完全遵循 Vakhitov-Kolokolov判据。通过数值方法，我们将自发对称性破缺分岔以及对称与非对称孤子族的研究扩展到了运动（倾斜）孤子；这对分数阶系统而言并非易事，因为分数阶系统会破坏伽利略不变性。我们还系统研究了运动孤子之间的碰撞，展示了另一种自发对称性破缺效应，以及碰撞孤子的合并。

作为对该分析的延伸，考虑一类类似的线性耦合分数阶复金兹堡-朗道方程系统可能具有一定意义，旨在预测相应激光器系统中的对称和非对称耗散孤子，以及此类孤子的束缚态；参见参考文献 [96] ，其中针对非分数阶衍射情形开展了类似分析。

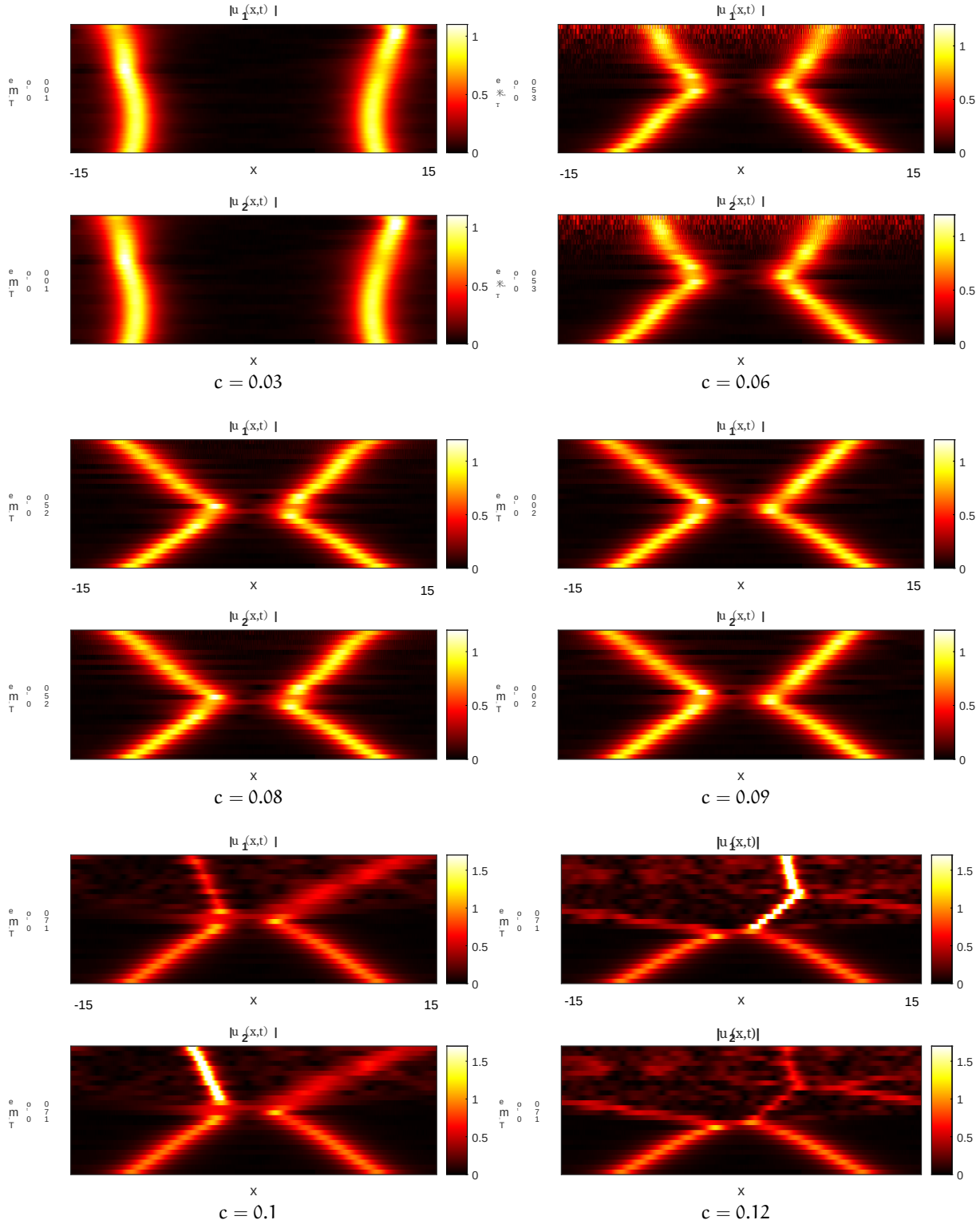

图5. 缓慢运动的对称孤子发生碰撞时对称性破缺的起始，参数为 $\alpha = 1.6$、 $k = 1.4$，速度为 $\pm c$。孤子范数为 $N = 3.420$ ($c = 0.03$), $N = 3.412$ ($c = 0.06$)， $N = 3.404$ ($c = 0.08$)， $N = 3.399$ ($c = 0.09$)， $N = 3.393$ ($c = \pm 0.10$)， $N = 3.380$ ($c = \pm 0.12$).

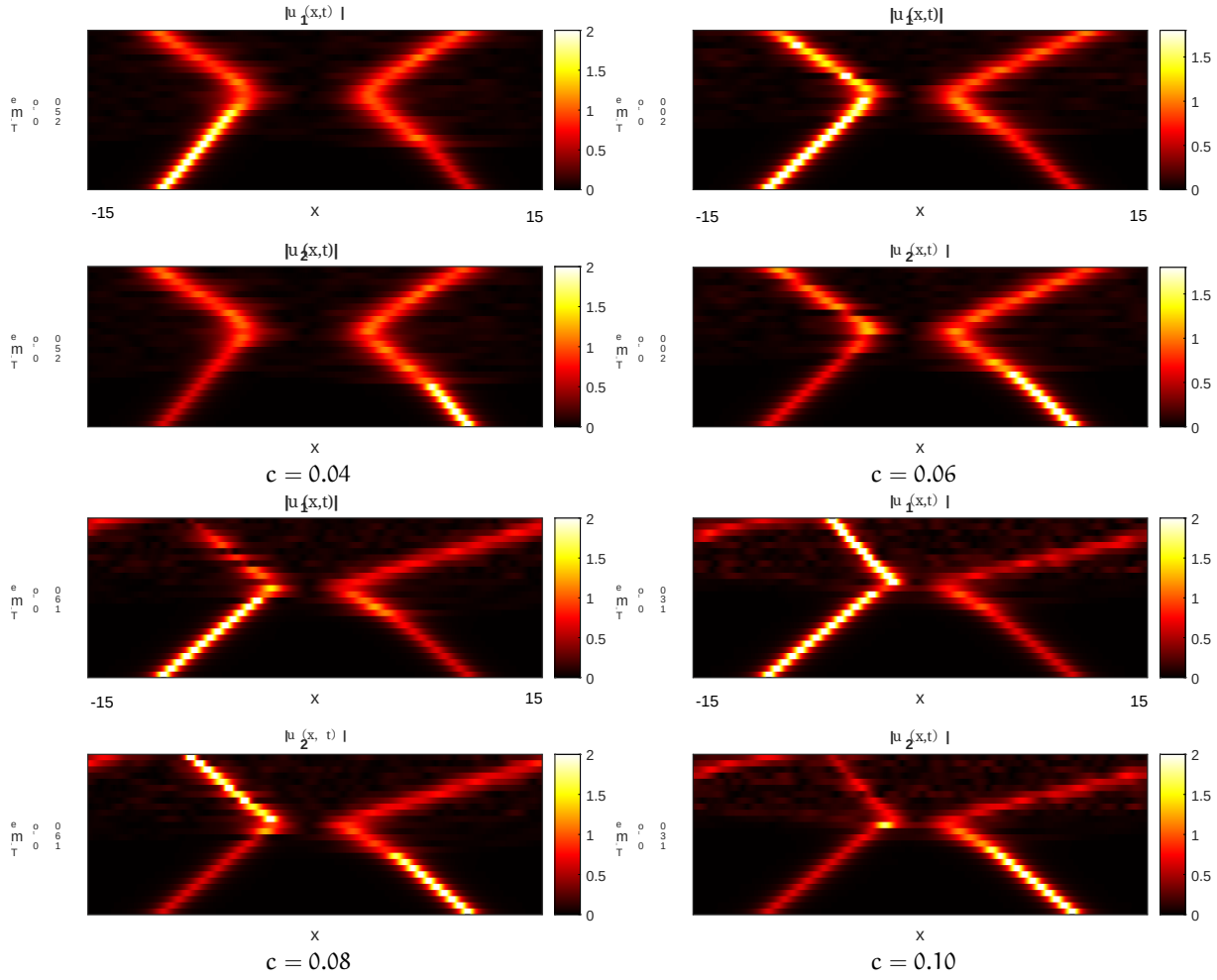

图6. 缓慢运动的相互翻转非对称孤子发生碰撞时，对称性破缺逐渐出现的过程，其中 $\alpha = 1.6$、 $k = 2.6$，速度为 $\pm c$。孤子范数分别为 $N = 3.749$ $(c = 0.04)$、 $N = 3.748$ $(c = 0.06)$、 $N = 3.746$ $(c = 0.08)$、 $N = 3.744$ $(c = 0.1)$，参见图5。

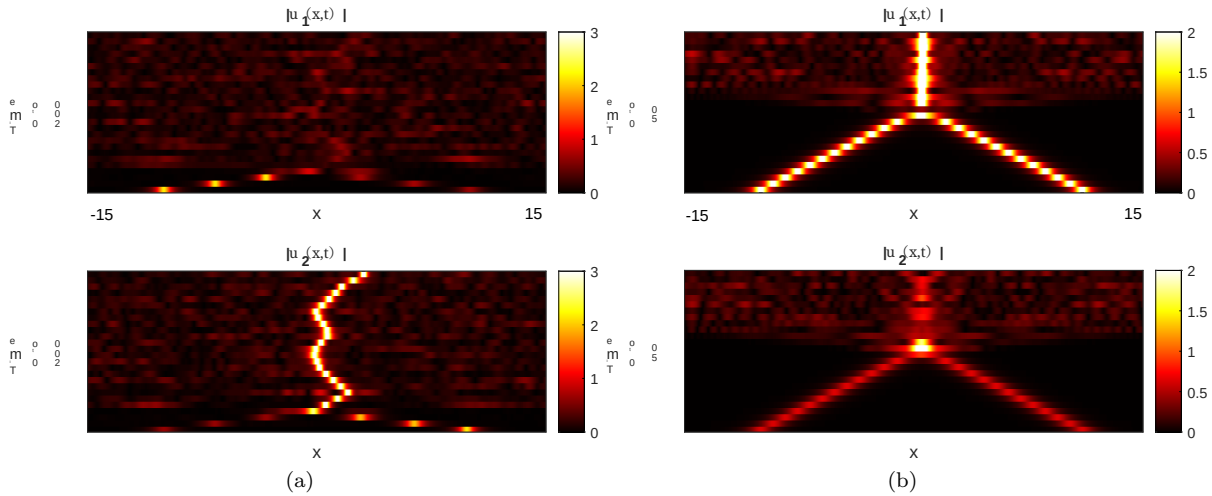

图7. 孤子在 $\alpha = 1.6$ 处以 $k = 2.6$ 发生强非弹性碰撞的示例。(a) 对于 $c = 0.42$ 和 $N = 3.627$，原本翻转的非对称孤子的碰撞后动力学。(b) 对于 $c = 0.4$ 和 $N = 3.638$，处于未翻转态并发生碰撞的非对称孤子的合并。

致谢

我们感谢 W. B. Cardoso 提供的有益讨论。B.A.M. 的工作部分得到了以色列科学基金会第 1695/22 号资助的支持。

---

[1] N. Laskin, 《分数阶量子力学与L´évy路径积分》。《物理学快报A》268，298-305（2000）。[2] S. I. Muslih、O. P. Agrawal和D. Baleanu, 《分数阶薛定

¨

49,

1746 1752 2010

inger方程及其解》，Int. J. Theor. Phys. -（）。[3] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics*（World Scientific：新加坡，2018）。[4] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*（W. H. Freeman：纽约，1982）。[5] O. P. Agrawal, 《基于Riesz分数阶导数的分数阶变分法》，J. Phys. A – Math. Theor. 40，6287 6303 2007-（）。[6] M. Cai和C. P. Li, 《关于Riesz 导数》，Fractional Calculus and Applied Analysis 22，287-301（2019）。[7] P. Garbaczewski, 《束缚势中的柯西飞行》，《物理学D辑》389，936-944（2010）。[8] M. ˙Zaba和P. Garbaczewski, 《求解分数阶薛定¨inger型谱问题：柯西振子与柯西势阱》，J. Math. Phys. 55，092103（2014）。[9] P. Garbaczewski和V. Stephanovich, 《Lévy飞行与非局域量子动力学》，J. Math. Phys. 54，072103（2013）。[10] P. Garbaczewski和V. Stephanovich, 《有界区域中的分数阶拉普拉斯算子：被杀死、反射、删失和禁戒的L´évy飞行》，《物理评论E》99，042126（2019）。[11] S. Longhi, 《光学中的分数阶薛定¨inger方程》，《光学快报》40，1117-1120（2015）。[12] Y. Zhang、X. Liu、M. R. Beli´c、W. Zhong、Y. Zhang、M. Xiao, 《分数阶薛定¨inger方程中的光束传播动力学》，《物理评论快报》115，180403（2015）。[13] B. A. Stickler, 《空间分数阶量子力学的潜在凝聚态实现：一维L´évy晶体》，《物理评论E》88，012120（2013）。[14] F. Pinsker、W. Bao、Y. Zhang、H. Ohadi、A. Dreismann和J. J. Baumberg, 《具有速度依赖质量的极化激元凝聚体中的分数阶量子力学》，Phys. Rev. B 92，195310（2015）。[15] S. Liu、Y. Zhang、B. A. Malomed和E. Karimi, 《时间域中的分数阶薛定¨inger方程实验实现》，Nature Comm. 14，222（2023）。[16] J. Fujioka、A. Espinosa和R. F. Rodriguez, 《分数阶光学孤子》，《物理学快报A》374，1126-1134（2010）。[17] F. Mainardi, 《分数阶弛豫振荡与分数阶扩散波现象》，《混沌、孤子与分形》7，1461 1477 1996-（）。[18] Y. M. Lin和C. J. Xu, 《时间分数阶扩散方程的有限差分/谱近似》，J. Comput. Phys. 225，1533-1552（2007）。[19] Y. Zhang、H. Zhong、M. R. Beli´c、Y. Zhu、W. Zhong、Y. Zhang、D. N. Christodoulides、M. Xiao, $\mathcal{PT}$分数阶薛定¨inger方程中的对称性, 《Laser Photonics Rev.》10(3)，526-531（2016）。[20] X. Yao和X. Liu, 《具有宇称-时间对称晶格势的分数阶薛定¨inger方程中的孤子》，Photonic Res. 6，875–879（2018）。[21] P. Li、J. Li、B. Han、H. Ma和D. Mihalache, $\mathcal{PT}$对称光学模式与空间分数阶薛定¨inger方程中的自发对称性破缺, 《Rom. Rep. Phys.》71，106（2019）。[22] Z. Wu 、 S. Cao 、 W. Che 、 F. Yang 、 X. Zhu 和 Y. He, 《具有饱和非线性的宇称 - 时间对称光学晶格在分数阶薛定 ¨inger方程中支持的孤子》，Results Phys. 19，103381（2020）。[23] P. Li、B. A. Malomed和D. Mihalache, 《具有 $\mathcal{PT}$对称势的分数阶非线性薛定¨inger方程中的对称性破缺分岔与幽灵态》，《光学快报》46，3267-3270（2021）。[24] L. Zeng、J. Shi、X. Lu、Y. Cai、Q. Zhu、H. Chen、H. Long和J. Li, 《具有增益与损耗的 $\mathcal{PT}$对称耦合器中的稳定与振荡孤子》，《非线性动力学》103，1831–1840（2021）。[25] S. He、B. A. Malomed、D. Mihalache、X. Peng、X. Yu、Y. He和D. Den, 《分数阶薛定¨inger方程中突发自聚焦圆形艾里-高斯涡旋光束的传播动力学》，《混沌、孤子与分形》142，110470（2021）。[26] S. He、B. A. Malomed、D. Mihalache、X. Peng、Y. He和D. Deng, 《分数阶薛定¨inger方程中径向偏振对称艾里光束的传播动力学》，《物理学快报A》404，127403（2021）。[27] B. A. Malomed, 《分数阶介质中的光学孤子与涡旋：近期成果小综述》，Photonics 8，353（2021）。[28] L. Zhang、Z. He、C. Conti、Z. Wang、Y. Hu、D. Lei、Y. Li和D. Fan, 《分数阶非线性薛定¨inger方程中的调制不稳定性》，Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 48，531-540（2017）。[29] M. Chen、S. Zeng、D. Lu、W. Hu和Q. Guo, 《具有克尔型非线性的空间分数阶薛定¨inger方程中的光学孤子、自聚焦与波塌缩》，《物理评论E》98，022211（2018）。[30] J. Fujioka、A. Espinosa和R. F. Rodr´iguez, 《分数阶光学孤子》，《物理学快报A》374，1126-1134（2010）。[31] S. Secchi和M. Squassina, 《分数阶薛定¨inger方程的孤子动力学》，Applicable Analysis，93，1702-1729（2014）。[32] S. Duo和Y. Zhang, 《求解分数阶非线性薛定¨inger方程的质量守恒傅里叶谱方法》，Computers and Mathematics with Applications 71，2257-2271（2016）。

[33] W. P. Zhong、M. R. Beli´c、B. A. Malomed、Y. Zhang和T. Huang, 《分数维中的时空可接近孤子》, 《物理评论E》94, 012216（2016）。[34] W. P. Zhong、M. R. Beli´c和Y. Zhang, 《分数维可接近孤子》, 《物理学年鉴》368，110-116（2016）。[35] Y. Hong 和 Y. Sire, 《三次分数阶非线性薛定 ¨inger 方程的一类新型行波孤子》, 《非线性》 30，1262-1286 （ 2017 ）。[36] Q. Wang、J. Li、L. Zhang和W. Xie, 《非局域非线性分数阶薛定¨inger方程中的厄米特–高斯型孤子》, 《欧洲物理快报》122，64001（2018）。[37] Q. Wang和Z. Z. Deng, 《(1+2)维各向异性非局域非线性分数阶薛定¨inger方程中的椭圆孤子》, 《IEEE光子学杂志》11，1-8（2019）。[38] C. Huang和L. Dong, 《具有光学晶格的非线性分数阶薛定¨inger方程中的带隙孤子》, 《光学快报》41，5636-5639（2016）。[39] J. Xiao、Z. Tian、C. Huang和L. Dong, 《非线性分数阶薛定¨inger方程中的表面带隙孤子》, 《光学快讯》26，2650-2658（2018）。[40] L. F. Zhang、X. Zhang、H. Z. Wu、C. X. Li、D. Pierangeli、Y. X. Gao和D. Y. Fan, 《分数阶非线性薛定¨inger方程中艾里光束的反常相互作用》, 《光学快讯》27，27936-27945（2019）。[41] L. Dong 和 Z. Tian, 《非线性分数阶周期系统中的截断布洛赫波孤子》, 《物理学年鉴》 404，57-64 （ 2019 ）。[42] L. Zeng和J. Zeng, 《具有周期调制线性势的五次及三次–五次分数阶非线性薛定¨inger方程中的一维带隙孤子》, 《非线性动力学》98，985-995（2019）。[43] P. Li、B. A. Malomed和D. Mihalache, 《具有三次-五次非线性的分数阶非线性薛定¨inger方程中的涡旋孤子》, 《混沌、孤子与分形》137，109783（2020）。[44] Q. Wang和G. Liang, 《非局域非线性分数阶薛定 ¨ **22**, 055501 2020 inger方程中的涡旋与簇孤子》, 《光学杂志》（ ）。[45] H. Sakaguchi和B. A. Malomed, 《具有分数阶动能的自旋–轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的一维和二维孤子》, 《物理学杂志B》55，155301（2022）。[46] L. Zeng和J. Zeng, 《具有空间周期调制非线性的分数阶薛定¨inger方程中的一维孤子：非线性晶格》, 《光学快报》44，2661-2664（2019）。[47] Y. Qiu、B. A. Malomed、D. Mihalache、X. Zhu、X. Peng和Y. He, 《具有束缚势的分数阶非线性薛定¨inger方程中单峰与多峰孤子的稳定化》, 《混沌、孤子与分形》140，110222（2020）。[48] P. Li、B. A. Malomed和D. Mihalache, 《由分数阶衍射与竞争性非线性支持的亚稳态孤子项链》, 《光学快讯》28，34472-33488（2020）。[49] L. Zeng、D. Mihalache、B. A. Malomed、X. Lu、Y. Cai、Q. Zhu和J. Li, 《分数维三次–五次非线性晶格中的基态与多极孤子族》, 《混沌、孤子与分形》144，110589（2021）。[50] L. Zeng和J. Zeng, 《通过定制非常规光学衍射与非线性防止高阶孤子的临界塌缩》, 《通讯物理》3，26（2020）。[51] M. I. Molina, 《分数阶离散非线性薛定¨inger方程》, 《物理学快报A》384，126180（2020）。[52] L. Zeng、B. A. Malomed、D. Mihalache、Y. Cai、X. Lu、Q. Zhu和J. Li, 《具有分数阶衍射的克尔介质中的气泡孤子与W形孤子》, 《非线性动力学》104，4253-4264（2021）。[53] J. Thirouin, 《圆周上分数阶散焦非线性薛定谔方程解的索伯列夫范数增长》, Ann. Inst. H. Poincar´é AN34，509-531（2017）。[54] L. Zeng、Y. Zhu、B. A. Malomed、D. Mihalache、Q. Wang、H. Long、Y. Cai、X. Lu和J. Li, 《二次分数阶孤子》, 《混沌、孤子与分形》154，111586（2022）。[55] Y. Qiu、B. A. Malomed、D. Mihalache、X. Zhu、L. Zhang和Y. He, 《分数阶复金兹堡–朗道模型中的孤子动力学》, 《混沌、孤子与分形》131，109471（2020）。[56] M. Romagnoli、S. Trillo和S. Wabnitz, 《非线性耦合器中的孤子开关》, 《光学与量子电子学》24，S1237–S1267（1992）。[57] *Spontaneous Symmetry Breaking, Self-Trapping, and Josephson Oscillations*, 编辑：B. A. Malomed（施普林格出版社：柏林和海德堡，2013）。[58] E. B. Davies, 《非线性薛定¨inger方程中的对称性破缺》, 《数学物理通讯》64，191-210（1979）。[59] J. C. Eilbeck、P. S. Lomdahl和A. C. Scott, 《离散自俘获方程》, 《物理学D辑》16，318-338（1985）。[60] G. J. Milburn、J. Corney、E. M. Wright和D. F. Walls, 《双阱势中原子玻色-爱因斯坦凝聚体的量子动力学》, 《物理评论A》55，4318-4324（1997）。[61] A. Smerzi、S. Fantoni、S. Giovanazzi和S. R. Shenoy, 《两个受束缚玻色-爱因斯坦凝聚体之间的量子相干原子隧穿》, 《物理评论快报》79，4950-4953（1997）。[62] S. Raghavan、A. Smerzi、S. Fantoni和S. R. Shenoy, 《两个弱耦合玻色-爱因斯坦凝聚体之间的相干振荡：约瑟夫森效应、 π 振荡与宏观量子自俘获》, 《物理评论A》59，620-633（1999）。[63] M. Matuszewski、B. A. Malomed和M. Trippenbach, 《双通道势中受束缚孤子的自发对称性破缺》, 《物理评论A》75，063621（2007）。[64] T. Heil、I. Fischer、W. Els¨asser、J. Mulet和C. R. Mirasso, 《对称延迟耦合半导体激光器中的混沌同步与自发对称性破缺》, 《物理评论快报》86，795-798（2000）。[65] M. Albiez、R. Gati、J. F¨olling、S. Hunsmann、M. Cristiani和M. K. Oberthaler, 《单个玻色约瑟夫森结中隧穿与非线性自俘获的直接观测》, 《物理评论快报》95，010402（2005）。[66] P. G. Kevrekidis、Z. Chen、B. A. Malomed、D. J. Frantzeskakis和M. I. Weinstein, 《光子晶格中的自发对称性破缺：理论与实验》, 《物理学快报A》340，275-280（2005）。

[67] A. Christ、O. J. F. Martin、Y. Ekinci、N. A. Gippius 和 S. G. Tikhodeev，《光学波长下等离激元超材料中的对称性破缺》，《纳米快报》8，2171-2175（2008）。[68] P. Li 和 C. Dai，《具有竞争性三次-五次非线性的分数阶薛定谔方程中光学孤子的双环与叉形对称性破缺分岔》，《物理学年鉴》（柏林）532，2000048（2020）。¨P. Li、B. A. Malomed 和 D. Mihalache，《分数维中空间克尔孤子的对称性破缺》，《混沌、孤子与分形》132，109602（2020）。[69] J. Chen 和 J. Zeng，《纯非线性分数阶系统中的自发对称性破缺》，《混沌》30，063131（2020）。[70] P. Li、R. Li 和 C. Dai，《分数阶衍射支持的二维光学孤子的存在性、对称性破缺分岔与稳定性》，《光学快报》29，3193-3210（2021）。[71] B. A. Malomed，《非线性光纤光学及相关领域中的变分方法》，《光学进展》43，71-193（2002）。[72] B. A. Malomed，《双芯非线性光纤中的多种动力学情形》，载于：《光纤手册》第1卷，第421-474页（G.-D. Peng 编；施普林格出版社，新加坡，2019）。[73] E. M. Wright、G. I. Stegeman 和 S. Wabnitz，《双模光纤中的孤立波衰减与对称性破缺不稳定性》，《物理评论A》40，4455-4466（1989）。[74] C. Par[75] e 和 M. F ´lorja-nczyk，《全光耦合器中孤子动力学的近似模型》，《物理评论A》41，6287-6295（1990）。´A. W. Snyder、D. J. Mitchell、L. Poladian、D. R. Rowland 和 Y. Chen，《非线性光纤耦合器物理学》，《美国光学学会期刊B》8，2101-2118（1991）。[76] A. I. Maimistov，《光脉冲在非线性隧穿耦合光波导中的传播》，Kvant. Elektron. [77] - Sov. J. Quantum Electron. - ( )。

18, 758 761 N.

[**21**, 687 690 1991]

Akhmediev 和 A. Ankiewicz，《非线性光纤耦合器中的新型孤子态与分岔现象》，《物理评论快报》70，2395-2398（1993）。[78] B. A. Malomed、I. Skinner、P. L. Chu 和 G. D. Peng，《双芯非线性光纤中的对称与非对称孤子》，《物理评论E》53，4084（1996）。[79] V. H. Nguyen、L. X. T. Tai、I. Bugar、M. Longobucco、R. Buzcynski、B. A. Malomed 和 M. Trippenbach，《双芯高非线性光纤中的可逆超快孤子切换》，《光学快报》45，5221-5224（2020）。[80] L. Zeng 和 J. Zeng，《分数阶量子耦合器》，《混沌、孤子与分形》140，110271（2020）。[81] G. Iooss 和 D. D. Joseph，[82]（施普林格出版社：纽约，1980）。 *Elementary Stability Bifurcation Theory* G. P. Agrawal，[83]（学术出版社，阿姆斯特丹，2013）。 *Nonlinear Fiber Optics* H. G. Winful 和 D. T. Walton，《通过双芯光纤激光器中的非线性耦合实现被动锁模》，《光学快报》17，1688 1690 1992-（）。[84] J. Yang，[85]，SIAM，费城，2010。 *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*J. Yang 和 T. I. Lakoba，《适用于一般非线性波动方程中孤立波的普适收敛平方算子迭代方法》，《应用数学研究》118，153–197（2007）。[86] N. G. Vakhitov 和 A.A. Kolokolov，《非线性饱和介质中波动方程的定常解》，Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz. 16，1020–1028（1973）[87] Radiophys. Quantum Electron. 16，783–789（1973）[。]T. Mayteevarunyoo、B. A. Malomed 和 G. Dong，《非线性双势阱结构中的自发对称性破缺》，《物理评论A》78，053601（2008）。[88] M. Weinstein，《非线性色散演化方程基态的李雅普诺夫稳定性》，《纯粹与应用数学通讯》39，51–67（1986）。[89] L. N. Trefethen，[90]，SIAM，费城，2000。 *Spectral Method in Matlab*J. P. Boyd，[91]，第2版，Dover，米尼奥拉，纽约州，2001。 *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*B. Guo、X. Pu 和 F. Huang，[92]，世界科学出版社，新加坡，2015。 *Fractional Partial Differential Equations and their Numerical Solutions*G. D. Peng、B. A. Malomed 和 P. L. Chu，《双芯非线性光纤模型中的孤子碰撞》，《物理学文摘》58，149-158（1998）。[93] L. Khaykovich 和 B. A. Malomed，《定常性质与物质波孤子碰撞动力学中的偏离一维性》，《物理评论A》7，023607（2006）。[94] Yu. S. Kivshar 和 B. A. Malomed，《近可积系统中的孤子动力学》，《现代物理评论》61，763-915（1989）。[95] A. Sigler 和 B. A. Malomed，《线性耦合三次-五次冈布茨-朗道方程中的孤立脉冲》，《物理学D辑》212，305 316 2005-（）。