arXiv:2305.05669v1 [math.GN] 8 May 2023

关于极端不连通紧空间中某些特殊点的注记

Joanna Jureczko

摘要

我们证明，在 ZFC 下，每个极端不连通紧空间中，任意可数离散子集都存在一个非极限点。

1 引言

本文扩展了论文 [2]，该论文在 MA 下得到了以下结果

1. 在每个极端不连通紧空间中，任意可数离散子集都存在一个非极限点。
2. 在 $G(I)$（区间 $[0,1]$ 上的 Gleason 空间）中，任意基数为 $< 2^{\omega}$ 的离散子集都存在一个非极限点。 3. Kunen关于非极限点的定理，来自 [5]。

本文证明，第一个陈述在 ZFC 中成立（无需任何额外假设）。第二个陈述也可以用类似的方法在 ZFC 中得到，因此这里不再证明；而第三个陈述因 Kunen 在 [6] 中的结果而略去。

以上所有结果都涉及对 ω^* 非齐性的研究问题。我们对齐性的理解如下：若一个空间

*数学主题分类：54D35, 54E45, 54C10. ˇ 关键词：弱 P 点，OK点，Cech 紧化，紧致空间，开映射，极端不连通空间。

X 是齐性的，当且仅当对于任意两个不同的点 x、$y \in X$，都存在一个自同构 f: $X \to Y$，使得 $f(x) = y$。

文献中已有一些已知结果，讨论了使 ω^* 呈非齐性的某类特殊点的存在性。例如， P-点就是这类点。（回顾一下：若对 p的任意一个由少于 λ 个邻域组成的族 $\mathcal{F}$，都有 $p \in int(\bigcap \mathcal{F})$，则称 $p \in X$为一个 $P(\lambda)$-点。若 $\lambda = \omega_1$，则称其为一个 P-点。）事实上，同胚 f: $X \to X$会将 P-点映射为 P-点。W. Rudin， [8], 证明了（在 CH 下）ω^*中存在 $2^{2^\omega}P$-点；然而，S. Shelah， [9], 构造了一个 ZFC 模型，其中 ω^* 没有 P-点。因此，在集合论中不可能证明 ω^*中是否存在 P-点。幸运的是，可以证明（无需任何额外假设） ω^* 中存在弱 P-点。（点 $p \in X$ 是弱 P-点，当且仅当它不是 $X \setminus \{p\}$任何可数子集的极限点。）显然，每个P-点都是弱 P-点，但反之不成立；Kunen 在 [6]中证明了这一点。为证明这一点，Kunen 使用了一种特殊的族，他称之为独立链接族，以及所谓的 OK-点这一概念。

本文的主要结果采用了对 Kunen 的 [6, 定理 3.1] 证明的一个改进，以及来自 [2] 的一些想法。

本文分为三节。第2节汇集了本文所用的主要定义和事实。第3节包含主要结果。第4节包含主要结果的推论。

本文使用的所有记号都是该领域的标准记号，并假定读者都已熟知。对于此处未引用的定义和事实，请读者参阅 [1, 3, 7]。

2 定义与前置结果

2.1. 令 κ 为一个基数。设 Y 为一个拓扑空间，且令 $p \in Y$。 p 的邻域序列 $(U_n: n \in \omega)$ 称为 κ-OK 序列，当且仅当存在 p 的邻域 $\{V_\alpha: \alpha < \kappa\}$，使得对所有 $n \geqslant 1$ 以及所有 $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < \kappa$，都有

$$V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \cap ... \cap V_{\alpha_n} \subset U_n.$$

点 $p \in Y$ 是 κ-OK 点，当且仅当 p 的每个由 ω 个邻域组成的序列都是 κ-OK。

事实 **1** [**6**]。存在一个 $p \in \omega^*$，它是 2^ω-OK。

事实 **2** [6]。设 Y是一个 T_1-空间，且 $p \in Y$。如果 p在 Y中是 2^ω-OK，那么 p是一个弱 P-点。

2.2. 考虑 ω 的一个无限子集族

$$A = \{A_k(\nu, \eta) \colon \nu < 2^\omega, \eta < 2^\omega, k < \omega\},$$

对于任意 $t \in 2^\omega \times 2^\omega$，考虑

$$A(t) = \bigcap_{\nu \in r(t)} \bigcap_{\eta \in t_\nu} A_{k_\nu}(\nu, \eta),$$

其中 $r(t) = \{\nu < 2^\omega \colon \exists_\eta (\nu, \eta) \in t\}, t_\nu = \{\eta < 2^\omega \colon (\nu, \eta) \in t\}$，且 k_ν 是 t_ν 的元素个数。

设 $\mathcal{F}$ 是 ω 上的一个滤子，fin 是 ω 的所有有限子集构成的理想。若满足以下条件，则族 A 关于 $\mathcal{F}$ 独立相连

1. 对任意 $t \in 2^\omega \times 2^\omega$ 和 $B \in \mathcal{F}$， $A(t) \cap B$ 是无限的 ，
2. 对任意 $k \leqslant n$ 以及 $\nu, \eta < 2^\omega$， $A_k(\nu, \eta) \subseteq A_n(\nu, \eta)$；
3. 对任意 $\nu < 2^\omega$ 和 $m < k_\nu$， $|\bigcap_{\eta \in t_\nu} A_m(\nu, \eta)| < \omega$。

事实 **3** [3]。存在一个关于有限集理想独立相连的族 A。

3 主要结果

本节包含四个结果。前两个探讨一个函数存在 2^ω-OK 点的问题，后两个则探讨多个函数共同存在 2^ω-OK 点的问题。由于这些结果的证明本质上不同，我们决定详细给出所有证明。

设 X 为空间（从现在起，我们假设 X 是一个 T_2-空间），并设

$$\{f_\alpha \colon f_\alpha \colon X \xrightarrow{onto} \beta\omega, \alpha < 2^\omega\}$$

为一个开映射族。

设 $\{S_\beta\colon \beta < 2^\omega\}$ 是 X 的一族非空闭子集。对于每个 $\gamma < 2^\omega$，令

$$C_\gamma = \bigcap\{S_\beta\colon \beta < \gamma\}$$

and

$$B_\gamma = \begin{cases} C_\gamma \cap f_\nu^{-1}(\omega^*) & \text{where } \nu = \min\{\beta < 2^\omega\colon C_\gamma \cap f_\beta^{-1}(\omega^*) \neq \emptyset\} \\ C_\gamma & \text{otherwise} \end{cases}$$

在定理 1 中，我们将考虑一个函数，因此必须对 B_γ 的定义稍作修改，即当 $C_\gamma \cap f^{-1}(\omega^*) \neq \emptyset$ 时，$B_\gamma = C_\gamma \cap f^{-1}(\omega^*)$。

定理 1 设 X 是一个紧致空间，且 $f\colon X \xrightarrow{onto} \beta\omega$ 是一个开映射。则存在一族 $\{U_\beta\colon \beta < 2^\omega\}$，它们是 X 的非空闭子集，使得对于每个 $\gamma < 2^\omega$

(i) 对任意 $\beta' \leqslant \beta < \gamma$，$U_\beta \subseteq U_{\beta'}$；

(ii) if $f^{-1}(\omega^*) \cap B_\gamma = \emptyset$, then $U_\gamma = f^{-1}(\{\xi\}) \cap B_\gamma$ for some $\xi \in \omega$;

(ii) 如果 $f^{-1}(\omega^*) \cap B_\gamma \neq \emptyset$，则存在一个超滤子 $\bigcup_{\beta\in 2^\omega} \mathcal{F}_\beta$，使得

(a) $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_{\beta'}$，只要 $\beta \leqslant \beta' < \gamma$(b) 对于递减序列（$V_\beta^k\colon k < \omega$），如果每个 $V_\beta^k \in \mathcal{F}_\beta$，那么存在 $W_\beta^\eta \in \mathcal{F}_{\beta+1}$，使得对于每个 $\eta \in 2^\omega$，均有每个 $k \geqslant 1$ 和每个 $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k < 2^\omega$

$$|\bigcap_{i=1}^{k} W_\beta^{\eta_i} \setminus V_\beta^k| < \omega.$$

(c) $f^{-1}(U) \cap B_\gamma \neq \emptyset$，其中 U 是属于 ω^* 的标准基的既开又闭集，使得 $\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{F}_\beta \in U$。

证明。枚举 ω 的所有子集 $\{Z_\alpha\colon \alpha < 2^\omega\}$。令

$$\{(V_\beta^k\colon k < \omega)\colon \beta < 2^\omega\}$$

是一个递减序列族（即对于任意 $k < \omega$，$V_\beta^{k+1} \subset V_\beta^k$），并且 ω 的子集的每个递减序列都被共终地列出。令

$$\{A_k(\nu, \eta)\colon k < \omega, \nu \in 2^\omega, \eta \in 2^\omega\}$$

是关于有限集理想的独立链接族。（我们不要求 $(V_\beta^k : k < \omega)$ 彼此不同。）

我们按如下方式构造 $\mathcal{F}_\beta$、指标集 I_β 和 U_β（B_β 的定义与定理前给出的一致），

(1) $\mathcal{F}_0$ 是余有限滤子，$I_0 = 2^\omega$ 和 $U_0 = X$，

(2) $\mathcal{F}_\beta$ 是 ω 上的滤子，$I_\beta \subset 2^\omega$、U_β 是 X 的非空闭子集，且 $\{A_k(\nu, \eta) : \nu \in I_\beta、1 \leqslant k < \omega、\eta \in 2^\omega\}$ 是关于 $\mathcal{F}_\beta$ 的独立链接族

(3) 若 $\gamma < \beta$，则 $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{F}_\beta$、$I_\gamma \supseteq I_\beta$、$U_\gamma \supseteq U_\beta$，

(4) 若 β 是极限，则 $\mathcal{F}_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{F}_\gamma$、$I_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} I_\gamma$、$U_\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} U_\gamma$，

(5) 对每个 $\beta \in 2^\omega$，$I_\beta \setminus I_{\beta+1}$ 都是有限的，

(6) $Z_\beta \in \mathcal{F}_\beta$ 或 $\omega \setminus Z_\beta \in \mathcal{F}_\beta$，

(7) 如果 $f(B_\beta) \cap \omega^* = \emptyset$，那么对于某个 $\xi \in \omega$，$U_\beta = B_\beta \cap f^{-1}(\{\xi\})$，

(8) 如果 $f(B_\beta) \cap \omega^* \neq \emptyset$，那么

(a) 对于某个属于 ω^* 和 $\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{F}_\gamma \in U$的标准基的既开又闭集 U，$f(B_\beta) \cap U \neq \emptyset$；(b) $U_\beta = f^{-1}(U) \subseteq B_\beta$；(c) 对于一个递减序列 $(V_\beta^k : k < \omega)$，如果每个 $V_\beta^k \in \mathcal{F}_\beta$，那么对于每个 $\eta \in 2^\omega$，都存在 $W_\beta^\eta \in \mathcal{F}_{\beta+1}$，使得对于每个 $k \geqslant 1$ 和每个 $\eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_k < 2^\omega$

$$|\bigcap_{i=1}^{k} W_\beta^{\eta_i} \setminus V_\beta^k| < \omega.$$

第一步和极限步骤已经完成。假设我们已经构造了$\mathcal{F}_\beta$、I_β 和 U_β。我们将证明后继步骤。假设

$$f(B_\beta) \cap \omega^* \neq \emptyset.$$

否则，根据（7），我们对某个 $\xi \in \omega$置 $U_{\beta+1} = B_{\beta+1} \cap f^{-1}(\{\xi\})$。于是（$ii$）成立。

分两种情形考虑。

情形 1. $\beta \equiv 0\ (mod\ 2)$。设 $\mathcal{R}$ 为由 $\mathcal{F}_\beta$ 和 Z_β生成的滤子（简称 $\mathcal{R} = [\mathcal{F}_\beta, \{Z_\beta\}]$）。如果 $\mathcal{R}$ 是真滤子，并且

$$\{A_k(\nu,\eta)\colon \nu \in I_\beta, 1 \leqslant k < \omega, \eta \in 2^\omega\}$$

是关于 $\mathcal{R}$ 的独立链接族，因此置

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = \mathcal{F}_\beta,\quad I_{\beta+1} = I_\beta,\quad U_{\beta+1} = U_\beta.$$

否则，则存在 $E \in \mathcal{F}_\beta$，使得

$$Z_\beta \cap E \cap \bigcap_{\nu\in\tau}(\bigcap_{\eta\in\sigma_\nu} A_{k_\nu}(\nu,\eta)) = \emptyset$$

对于某些 $\tau \in [I_\beta]^{<\omega}$、$k_\nu \in \omega$ 和 $\sigma_\nu \in [2^\omega]^{k_\nu}$。于是置

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = [\mathcal{F}_\beta, \bigcap_{\nu\in\tau}(\bigcap_{\eta\in\sigma_\nu} A_{k_\nu}(\nu,\eta))],$$

$$I_{\beta+1} = I_\beta \setminus \tau$$

and

$$U_{\beta+1} = f^{-1}(U) \subset B_{\beta+1},$$

其中，U 是属于 ω^* 和 $\bigcup_{\gamma<\beta}\mathcal{F}_\gamma \in U$ 的标准基的既开又闭集。

因此 $\omega \setminus Z_\beta \in \mathcal{F}_{\beta+1}$.

情况 2。$\beta \equiv 1\ (mod\ 2)$。如果对于某个 k 有 $V_\beta^k \notin \mathcal{F}_\beta$ $(1 \leqslant k < \omega)$，则置

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = \mathcal{F}_\beta,\quad I_{\beta+1} = I_\beta,\quad U_{\beta+1} = U_\beta.$$

若 $V_\beta^k \in \mathcal{F}_\beta$ 对任意 k，$(1 \leqslant k < \omega)$ 均成立，则固定 $\nu \in I_\beta$，（由 (5) 可知 I_β 非空）。考虑集合

$$W_\beta^\eta = (\bigcap_k V_\beta^k) \cap (\bigcup_{1\leqslant k<\omega}(A_k(\nu,\eta) \cap V_\beta^k \setminus V_\beta^{k+1}))$$

并令

$$\mathcal{F}_{\beta+1} = [\mathcal{F}_\beta, W_\beta^\eta],\quad I_{\beta+1} = I_\beta \setminus \{\nu\}$$

and

$$U_{\beta+1} = f^{-1}(U) \subseteq B_{\beta+1},$$

其中， U 是属于 ω^* 的标准基的既开又闭集，且 $\bigcup_{\gamma<\beta}\mathcal{F}_\gamma \in U$，

现在，我们证明 (8) 成立。取 $\eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_k < 2^\omega$ 并考虑

$$D = \bigcap_{i=1}^{k} W_\beta^{\eta_i} \setminus V_\beta^k.$$

显然，对于 $k = 1$，集合 D 为空。对于 $k > 1$，有

$$D \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A_{k-1}(\nu, \eta_i)$$

是有限的（根据独立交链族的定义）。此外，

$$W_\beta^\eta \supseteq V_\beta^k \cap A_k(\nu, \eta)$$

对于每个 k，$(1 \leqslant k < \omega)$，这验证了 (8)。 ■

定理 2 设 X 是一个紧致空间，且 $f\colon X \xrightarrow{onto} \beta\omega$ 是一个开映射。那么存在一个集合族 $\{U_\beta\colon \beta < 2^\omega\}$，满足定理 1 的 $(i) - (iii)$，使得对于每个 $x \in \bigcap\{U_\beta\colon \beta < 2^\omega\}$，要么 $f(x)$ 属于 ω，要么 $f(x)$ 是 2^ω-OK- ω^*中的点。

证明。由定理 1，存在一个族 $\{U_\beta\colon \beta \in 2^\omega\}$，它是 X 的非空闭子集，以及一个具有性质 $(i) - (iii)$ 的超滤子 $\bigcup_{\beta\in 2^\omega}\mathcal{F}_\beta$。于是，对于每个 $x \in \bigcap\{U_\beta\colon \beta \in 2^\omega\}$，只要$f_\alpha(B_\beta) \cap \omega^* = \emptyset$ 或者 $f(x)$ 是 ω^*中的一个 2^ω-OK-点，像 $f(x)$ 就属于 ω。（具有 $\bigcup_{\beta\in 2^\omega}\mathcal{F}_\beta$ 形式）只要 $f(B_\beta) \cap \omega^* \neq \emptyset$。 ■

令 $<_*$ 表示 $2^\omega \times 2^\omega$ 上的典范良序。令 $j(\alpha, \beta) \in 2^\omega \times 2^\omega$ 是 (α, β) 的直接后继，即 $(\alpha, \beta) <_* j(\alpha, \beta)$，且不存在 (γ, δ) 使得 $(\alpha, \beta) <_* (\gamma, \delta) <_* j(\alpha, \beta)$。

设 X 是一个空间，并设 $\{f_\alpha\colon f_\alpha\colon X \xrightarrow{onto} \beta\omega, \alpha < 2^\omega\}$ 是一个开映射族。设 $\{S_{\alpha,\beta}\colon (\alpha, \beta) < 2^\omega \times 2^\omega\}$ 是 X 的一个非空闭子集族。对于每个 $(\gamma, \delta) \in 2^\omega \times 2^\omega$，令

$$C_{\gamma,\delta} = \bigcap\{S_{\alpha,\beta}\colon (\alpha, \beta) <_* (\gamma, \delta)\}$$

and

$$B_{\gamma,\delta} = \begin{cases} C_{\gamma,\delta} \cap f_\mu^{-1}(\omega^*) & \text{where } \mu = \min\{\beta < 2^\omega\colon C_{\gamma,\delta} \cap f_\beta^{-1}(\omega^*) \neq \emptyset\} \\ C_{\gamma,\delta} & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 3 设 X 是一个紧致空间，并设 $\{f_\alpha\colon f_\alpha\colon X \xrightarrow{onto} \beta\omega, \alpha < 2^\omega\}$ 是一个开映射族。则存在一个族 $\{U_{\alpha,\beta}\colon (\alpha,\beta) < 2^\omega \times 2^\omega\}$，由 X 的非空闭子集组成，使得对于每个 $(\gamma,\delta) < 2^\omega \times 2^\omega$

(i) $U_{\alpha,\beta} \subseteq U_{\alpha',\beta'}$ *for any* $(\alpha',\beta') \leqslant_* (\alpha,\beta) <_* (\gamma,\delta)$;

(ii) 若 $f_\gamma^{-1}(\omega^*) \cap B_{\gamma,\ \delta} = \emptyset$，则 $U_{\gamma,\ \delta} = f_\gamma^{-1}(\{\xi\}) \cap B_{\gamma,\ \delta}$ 对于某个 $\xi \in \omega$;

(iii) 若 $f_\gamma^{-1}(\omega^*) \cap B_{\gamma,\ \delta} \neq \emptyset$，则存在一个超滤子 $\bigcup_{(\alpha,\ \beta)\in 2^\omega\times 2^\omega} \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 使得

(a) $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha',\ \beta'}$，当 $(\alpha,\beta) \leqslant_* (\alpha',\beta') <_* (\gamma,\delta)$ 时；(b) 对于递减序列 $(V_\beta^k\colon k < \omega)$，若每个 $V_\beta^k \in \mathcal{F}_\beta$，则存在 $W_{\alpha\ ,\ \beta}^\eta \in \mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$ 对每个 $\eta \in 2^\omega$，使得对于每个 $k \geqslant 1$ 和每个 $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k < 2^\omega$

$$|\bigcap_{i=1}^{k} W_{\alpha,\beta}^{\eta_i} \setminus V_{\alpha,\beta}^k| < \omega.$$

(c) $f^{-1}(U) \cap B_{\gamma,\ \delta} \neq \emptyset$，其中 U 是属于 ω^* 标准基的既开又闭集，使得 $\bigcup_{(\alpha,\ \beta)<_*(\gamma,\ \delta)} \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta} \in U$。

证明。枚举 ω 的所有子集 $\{Z_\alpha\colon \alpha < 2^\omega\}$。令

$$\{(V_\beta^k\colon k < \omega)\colon \beta < 2^\omega\}$$

为一个递减序列族，（即对于任意 $k < \omega$ 均有 $V_\beta^{k+1} \subset V_\beta^k$），并且 ω 的子集的每个递减序列都被共尾地列出。令

$$\{A_k(\nu,\eta)\colon k < \omega, \nu \in 2^\omega, \eta \in 2^\omega\}$$

为关于有限集理想的独立链接族。（我们不要求 $(V_\beta^k\colon k < \omega)$ 彼此不同。）

我们按如下方式构造 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$、指标集 $I_{\alpha,\ \beta}$ 和 $U_{\alpha,\ \beta}$（$B_{\alpha,\ \beta}$ 的定义如定理之前所述），

(1) $\mathcal{F}_{0,\ 0}$ 是余有限滤子，$I_{0,\ 0} = 2^\omega$ 和 $U_{0,\ 0} = X$,

(2) $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 是 ω 上的滤子，$I_{\alpha,\ \beta} \subset 2^\omega$，$U_{\alpha,\ \beta}$ 是 X 的非空闭子集，并且 $\{A_k(\nu,\eta)\colon \nu \in I_{\alpha,\ \beta},\ 1 \leqslant k < \omega,\ \eta \in 2^\omega\}$ 是关于 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 的独立链接族，

(3) 如果$(\gamma,\delta) <_* (\alpha,\beta)$，那么$\mathcal{F}_{\gamma,\ \delta} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$，$I_{\gamma,\ \delta} \supseteq I_{\alpha,\ \beta}$，$U_{\gamma,\ \delta} \supseteq U_{\alpha,\ \beta}$，

(4) 如果 (α,β) 是极限，那么 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta} = \bigcup_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\delta}$, $I_{\alpha,\beta} = \bigcap_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} I_{\gamma,\delta}$,$U_{\alpha,\beta} = \bigcap_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} U_{\alpha,\beta}$,

(5) $I_{\alpha,\ \beta} \setminus I_{j(\alpha,\beta)}$ 对每个 $(\alpha,\beta) \in 2^\omega \times 2^\omega$ 都是有限的，

(6) 要么 $Z_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$，要么 $\omega \setminus Z_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$，

(7) 如果 $f(B_{\alpha,\ \beta}) \cap \omega^* = \emptyset$，那么对于某个 $\xi \in \omega$，$U_{\alpha,\ \beta} = B_{\alpha,\ \beta} \cap f_\alpha^{-1}(\{\xi\})$

(8) 如果 $f_\alpha(B_{\alpha,\ \beta}) \cap \omega^* \neq \emptyset$，那么

(a) $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap U \neq \emptyset$，对于某个属于 ω^* 标准基的既开又闭集 U，以及 $\bigcup_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\delta} \in U$, (b) $U_{\alpha,\beta} = f_\alpha^{-1}(U) \subseteq B_{\alpha,\beta}$(c) 对于递减序列 $(V^k_{\alpha,\beta}: k < \omega)$，若每个 $V^k_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$，则存在 $W^\eta_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$，对每个 $\eta \in 2^\omega$，使得对每个 $k \geqslant 1$和每个 $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k < 2^\omega$

$$|\bigcap_{i=1}^{k} W^{\eta_i}_{\alpha,\beta} \setminus V^k_{\alpha,\beta}| < \omega.$$

第一步和极限步骤已完成。假设我们已经构造了$\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$, $I_{\alpha,\ \beta}$ 和 $U_{\alpha,\ \beta}$。下面证明后继步骤。

假设 $f_\alpha(B_{\alpha,\ \beta}) \cap \omega^* \neq \emptyset$。否则，根据 (7) 我们令

$$U_{j(\alpha,\beta)} = B_{j(\alpha,\beta)} \cap f_\alpha^{-1}(\{\xi\})$$

对于某个 $\xi \in \omega$。则 (ii) 成立。

考虑两种情形。

情形 1。 $\alpha + \beta \equiv 0\ (mod\ 2)$。令 $\mathcal{R}$ 为由 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 和$Z_{\alpha,\ \beta}$生成的滤子（简称 $\mathcal{R} = [\mathcal{F}_{\alpha,\beta}, \{Z_{\alpha,\beta}\}]$）。如果 $\mathcal{R}$ 是真滤子，并且

$$\{A_k(\nu,\eta): \nu \in I_{\alpha,\beta}, 1 \leqslant k < \omega, \eta \in 2^\omega\}$$

是关于 $\mathcal{R}$ 的独立链接族，则记作

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = \mathcal{F}_{\alpha,\beta},\quad I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta},\quad U_{j(\alpha,\beta)} = U_{\alpha,\beta}.$$

否则，存在 $E \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 使得

$$Z_{\alpha,\beta} \cap E \cap \bigcap_{\nu\in\tau}(\bigcap_{\eta\in\sigma_\nu} A_{k_\nu}(\nu,\eta)) = \emptyset$$

对于某些 $\tau \in [I_\beta]^{<\omega}$、 $k_\nu \in \omega$ 和 $\sigma_\nu \in [2^\omega]^{k_\nu}$。于是我们令

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = [\mathcal{F}_{\alpha,\beta}, \bigcap_{\nu\in\tau}(\bigcap_{\eta\in\sigma_\nu} A_{k_\nu}(\nu,\eta))],$$

$$I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta} \setminus \tau$$

and

$$U_{j(\alpha,\beta)} = f_\alpha^{-1}(U) \subset B_{j(\alpha,\beta)},$$

其中， U 是属于 ω^* 和 $\bigcup_{(\gamma,\ \delta)<_*(\alpha,\ \beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\ \delta}$ 的标准基的既开又闭集，

因此 $\omega \setminus Z_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)}$.

情况 2。 $\alpha + \beta \equiv 1$ （$mod\ 2$）。如果 $V^k_{\alpha,\ \beta} \notin \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$ 对于某个 k，$(1 \leqslant k < \omega)$，则令

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = \mathcal{F}_{\alpha,\beta},\quad I_{j(\alpha,\beta)} = I_\beta,\quad U_{j(\alpha,\beta)} = U_{\alpha,\beta}.$$

如果对于任意 k，$(1 \leqslant k < \omega)$ 都有 $V^k_{\alpha,\ \beta} \in \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$，则固定 $\nu \in I_{\alpha,\ \beta}$，（由 (5) 可知，$I_{\alpha,\ \beta}$ 非空）。考虑集合

$$W^\eta_{\alpha,\beta} = (\bigcap_k V^k_{\alpha,\beta}) \cap (\bigcup_{1\leqslant k<\omega} (A_k(\nu,\eta) \cap V^k_{\alpha,\beta} \setminus V^{k+1}_{\alpha,\beta}))$$

并令

$$\mathcal{F}_{j(\alpha,\beta)} = [\mathcal{F}_{\alpha,\beta}, W^\eta_{\alpha,\beta}]\ \ I_{j(\alpha,\beta)} = I_{\alpha,\beta} \setminus \{\nu\}$$

and

$$U_{j(\alpha,\beta)} = f_\alpha^{-1}(U) \subset B_{j(\alpha,\beta)},$$

其中， U 是属于 ω^* 的标准基的既开又闭集，并且 $\bigcup_{(\gamma,\delta)<_*(\alpha,\beta)} \mathcal{F}_{\gamma,\delta}$，

现在，我们证明 (8) 成立。取 $\eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_k < 2^\omega$，并考虑

$$D = \bigcap_{i=1}^k W^{\eta_i}_{\alpha,\beta} \setminus V^k_\beta.$$

显然，对于 $k=1$，集合 D 为空。对于 $k>1$，我们有

$$D \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} A_{k-1}(\nu, \eta_i)$$

是有限的（根据独立相交族的定义）。此外，

$$W_{\alpha,\beta}^{\eta} \supseteq V_{\beta}^{k} \cap A_k(\nu, \eta)$$

对每个 k，$(1 \leqslant k < \omega)$ 都满足 (8)。 ■

定理 4 设 X 是一个紧致空间，并设

$$\{f_\alpha : \alpha < 2^\omega, f_\alpha : X \xrightarrow{onto} \beta\omega\}$$

是一个开映射族。那么存在一个族 $\{U_{\alpha,\beta}: (\alpha,\beta) \in 2^\omega \times 2^\omega\}$，使得对每个 $x \in \bigcap\{U_{\alpha,\beta}: (\alpha,\beta) \in 2^\omega \times 2^\omega\}$，并且对每个$\alpha \in 2^\omega$，要么 $f_\alpha(x)$ 属于 ω，要么 $f_\alpha(x)$ 是 ω^* 中的一个2^ω-OK-点。

证明。根据定理 3，存在一个由 X 的非空闭子集构成的族 $\{U_{\alpha,\beta}: (\alpha,\beta) \in 2^\omega \times 2^\omega\}$，以及一个具有性质 (i) –(iii) 的超滤子 $\bigcup_{(\alpha,\ \beta)\in 2^\omega\times 2^\omega} \mathcal{F}_{\alpha,\ \beta}$。

那么，对于每个 $x \in \bigcap\{U_{\alpha,\beta}: (\alpha,\beta) \in 2^\omega \times 2^\omega\}$，以及每个 $\alpha \in 2^\omega$，只要 $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap \omega^* = \emptyset$ 或 $f_\alpha(x)$ 是 ω^* 中的一个 2^ω-OK-点（形式为 $\bigcup_{(\alpha,\beta)\in 2^\omega\times 2^\omega} \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$），就有 $f_\alpha(x)$ 属于 ω；当 $f_\alpha(B_{\alpha,\beta}) \cap \omega^* \neq \emptyset$ 时亦然。 ■

注。利用文献 [4]，中引入的 2^ω-soso 点这一概念，我们可以修改定理 1 和定理 3 的证明（通过改变 (8)）。

回顾一下，点 $p \in Y$ 在 Y 中是 2^ω-soso 点，当且仅当对于 p 的每个可数邻域族 $\mathcal{W}$，都存在一个由 p 的邻域组成的 2^ω-OK 序列 $(U_n: n \in \omega)$，使得 $\mathcal{W} \subset (U_n \in n \in \omega)$。

显然，2^ω-OK 蕴含 2^ω-soso。此外，如果 Y 是一个 T_1 空间，且 $p \in Y$ 是 2^ω-soso，那么 p 是一个弱 P-点。然而，2^ω-soso点的概念比 2^ω-OK 点更为复杂，因此有必要修改定理 1和定理 3的证明。

4 推论

应用定理 4和事实 2，我们立即得到以下结果。

推论 1 设 X 是一个紧致空间，并且

$$\{f_\alpha : \alpha < 2^\omega, f_\alpha : X \xrightarrow{onto} \beta\omega\}$$

是一个开映射族。那么存在一点 $x \in X$，使得对每个 $\alpha < 2^\omega$，要么对于某个 $\xi \in \omega$ 有 $f_\alpha(x) = \xi$，要么 $f_\alpha(x)$ 是 ω^*的一个弱 P-点。

应用定理 4 并对 [2, 定理 3] 的证明作相应修改，我们得到以下结果。

推论 2 设 X 是一个权为 2^ω的紧致极端不连通空间。存在一点 $x \in X$，使得 x 不是 X的任何可数离散子集的极限点。

设 $U(m) = st(\mathcal{P}(m)/\mathcal{P}^{<m}(m))$，其中 m 是一个基数，而 $\mathcal{P}^{<m}(m)$ 是所有基数小于 m的子集所构成的理想。空间 $U(m)$ 是一个F-空间。如果 m 是正则的，那么 $U(m)$ 嵌入于 $\beta m = st(\mathcal{P}(m))$ 中，且作为一个$\mathcal{P}(m)$-集。

应用定理 4 并对 [2, 定理 4] 的证明进行修改，我们得到以下结果。

推论 3 在空间 $U(m)$ 中，其中 $\omega < cf(m) \leqslant m < 2^\omega$，存在一点 x，它不是 $U(m)$ 中任何基数不大于 m 的强离散子集的极限点。

参考文献

[1] Engelking, R.，《一般拓扑学》，Heldermann 出版社，1989

[2] Frankiewicz, R.，极端不连通紧致空间中的非可达点，I，《数学基础》111(3)（1981），115–123。[3] Frankiewicz, R.，Zbierski, P.，《豪斯多夫间隙与极限》，《逻辑与数学基础研究》，North-Holland 出版社，1994。

[4] Juh´asz I., Kunen K.，小权空间中的一些点。《匈牙利数学科学研究》39(3-4)（2002），369—376。[5] Kunen, K.， βN中的一些点，《剑桥哲学学会会刊》80（1976），385-398。[6] Kunen, K.， N^*中的弱P点，《拓扑学》，第II卷（第四届专题讨论会论文集，布达佩斯，1978），第741–749页，《J´anos Bolyai 数学学会专题讨论会论文集》第23卷，North-Holland 出版社，阿姆斯特丹-纽约，1980。[7] Jech, T.，《集合论》，第三千年版，修订并扩充。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003。[8] Rudin, W.，ˇ Cech 紧化理论中的齐性问题，《杜克数学杂志》（1956），409-420。[9] Shelah, S.，《适当与不适当强迫》，剑桥大学出版社，2017。

Joanna Jureczko波兰弗罗茨瓦夫科技大学，弗罗茨瓦夫，波兰。*e-mail: joanna.jureczko@pwr.edu.pl*