arXiv:2305.05685v1 [hep-ph] 9 May 2023

非线性手征磁波

Kazuki Ikeda, [1, 2, *] Dmitri E. Kharzeev, [2, 3, †] 和 Shuzhe Shi[2, 4, ‡]

[1] *Co-design Center for Quantum Advantage, Stony Brook University, Stony Brook, New York 11794-3800, USA*

[2] *Center for Nuclear Theory, Department of Physics and Astronomy,Stony Brook University, Stony Brook, New York 11794-3800, USA*[3] *Department of Physics, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973-5000, USA*[4] *Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*

手征磁波（CMW）是一种宏观量子现象，由手征反常引起的电荷振荡与手征荷振荡相互耦合而产生。在本研究中，我们报告了首次在经典硬件上对施温格模型中手征磁波实时动力学进行的量子模拟。我们的淬火方案如下：在 $t=0$，我们突然在晶格中央放置一个电偶极子。由于手征反常，这个偶极子激发出手征磁波，并使其向晶格边缘传播。在调谐至共形临界点的施温格模型中（$\theta=\pi$、$m/g\simeq 0.2$），我们发现了以光速传播的无能隙线性手征磁波。对于无质量施温格模型（$\theta=0$，$m=0$），我们发现了有能隙的线性手征磁波，这与此前的解析分析一致。对于有质量施温格模型（其与强相互作用玻色理论对偶），我们进入非线性手征磁波的新机制，并发现了一个令人惊讶的现象。具体而言，对于 $m/g>1$，电荷振荡的频率远低于手征荷振荡的频率。对于 $m/g=4$，我们发现一种近乎静止的电偶极子解，其中包含快速振荡且受限于内部的手征荷。我们将这种解称为“Thumper”，并对其性质进行了详细研究。

引言。——在外部磁场存在的情况下，手征性不平衡（即右手费米子与左手费米子密度之差）会诱导出沿磁场方向的电流——这就是手征磁效应（CME） [1–3]; 综述见 [4–7]。手征磁效应本质上是一种非平衡现象，其根源在于手征反常所决定的手征荷不守恒。手征磁效应的非平衡性质在一种集体手征激发的出现中尤为明显：这种激发源于反常诱导的耦合，即手征荷振荡与电荷振荡之间的耦合——这就是手征磁波（CMW） [8]。

研究（$1+1$）维模型中的手征磁波物理颇具启发性，这类模型对应于（$3+1$）理论的强磁场极限。特别是，（$1+1$）维无质量量子电动力学（施温格模型）的情形已在 [8]中讨论过。众所周知，无质量施温格模型可通过玻色化精确求解，其自由有质量玻色激发可解释为规范场与手征磁波之间混合的结果 [8]。

本文将把对手征磁波的分析扩展到有质量施温格模型。该模型颇具研究价值，因为它具有禁闭性质，并且用玻色子表示时描述的是一种非线性强相互作用理论。由于有质量施温格模型无法解析求解，而我们关注的是实时非平衡行为，因此将依靠量子模拟（在经典硬件上进行）。利用量子模拟，许多关于 (1+1) 维量子场论的有趣方面已得到成功研究，相关示例见 [9–17] ，关于量子模拟方法的近期综述见 [18] 。

施温格模型。— 施温格模型的拉格朗日密度 [19]为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-g\gamma^{\mu}A_{\mu}-m)\psi. \quad (1)$$

我们用 $x^{\mu}=(t,z)$ 表示时空坐标。泡利矩阵记为 X、Y 和 Z，狄拉克矩阵采用以下约定： $\gamma^0=Z$、$\gamma^1=iY$、 $\gamma^5=\gamma^0\gamma^1=X$。在 (1+1) 维中，轴向电荷密度 $q_5(x)\equiv\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi(x)$ 与矢量流密度 $j(x)\equiv\bar{\psi}\gamma^1\psi(x)$ 之间的关系为 $q_5(x)=-j(x)$。同样，矢量电荷密度 $q(x)\equiv\bar{\psi}\gamma^0\psi(x)$ 与轴流密度 $j_5(x)\equiv\bar{\psi}\gamma^5\gamma^1\psi(x)$ 之间的关系为 $q(x)=j_5(x)$。

由于这些关系，矢量电荷守恒可以表示为

$$\partial_t q-\partial_z q_5=0. \quad (2)$$

为得到手征磁波的方程，我们将这一关系与轴电荷守恒 $\partial_\mu J_5^\mu=2i\,m\bar{\psi}\gamma^5\psi$（在没有外部电场的情况下）结合起来，并使用玻色化字典，其中 $q\to-\frac{\partial_z\phi}{\sqrt{\pi}}$、$q_5\to-\frac{\partial_t\phi}{\sqrt{\pi}}$ 和 $i\bar{\psi}\gamma^5\psi\to -c\,M\sin(2\sqrt{\pi}\phi)$，且 $M=g/\sqrt{\pi}$ 和 $c=e^{\gamma}/(2\pi)$。由此得到的施温格模型中手征磁波的方程为

$$(\partial_t^2-\partial_z^2+M^2)\phi+2\sqrt{\pi}c\,m\,M\sin(2\sqrt{\pi}\phi)=0. \quad (3)$$

显然，对于无质量情形 $m=0$，该方程是线性的，描述了质量为 $M=g/\sqrt{\pi}$ 的有能隙激发的传播——这是施温格模型中一种熟悉的非相互作用玻色表示。这种玻色激发的色散关系

可推导为无隙手征磁波与等离激元模混合的结果，参见[8]。对于有质量情形$m \neq 0$，手征磁波方程变为非线性。通过改变费米子质量的符号，可得到 $\theta = \pi$ 的情形，$m \to -m$。在 $\theta = \pi$ 和$m/g \simeq 0.3$ 附近（连续情形下），（3）中的势变得近乎平坦，动力学也接近共形，参见[17]。在这种情况下，我们预计会看到无隙线性手征磁波。

晶格哈密顿量 — 为了离散化我们的哈密顿量，我们使用交错费米子 [20, 21]

$$\psi_1(x) \to \frac{\chi_{2n}}{\sqrt{a}},\ \psi_2(x) \to \frac{\chi_{2n+1}}{\sqrt{a}}, \tag{4}$$

其中 a 是有限晶格间距。于是，与公式（1）对应的晶格哈密顿量为

$$\begin{aligned} H = &-\frac{i}{2a}\sum_{n=1}^{N-1}\left[\chi_{n+1}^{\dagger}\chi_n - \chi_n^{\dagger}\chi_{n+1}\right] \\ &+ m\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\chi_n^{\dagger}\chi_n + \frac{ag^2}{2}\sum_{n=1}^{N-1}L_n^2, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 L_n 是满足高斯定律约束的电场算符

$$L_n - L_{n-1} = \chi_n^{\dagger}\chi_n - \frac{1-(-1)^n}{2}. \tag{6}$$

为进行量子模拟，我们利用Jordan–Wigner变换将晶格哈密顿量写成自旋表示 [22]:

$$\chi_n = \frac{X_n - iY_n}{2}\prod_{i=1}^{n-1}(-iZ_i). \tag{7}$$

该模型的哈密顿量于是变为

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{4a}\sum_{n=1}^{N-1}\left[X_nX_{n+1} + Y_nY_{n+1}\right] \\ &+ \frac{m}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^nZ_n + \frac{ag^2}{2}\sum_{n=1}^{N-1}L_n^2 \end{aligned} \tag{8}$$

局部矢量荷密度和轴向荷密度分别为

$$Q_n \equiv \bar{\psi}\gamma^0\psi = \frac{Z_n + (-1)^n}{2a}, \tag{9}$$

$$Q_{5,n} \equiv \bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi = \frac{X_nY_{n+1} - Y_nX_{n+1}}{4a}. \tag{10}$$

为方便后续讨论，我们定义总电荷算符 $Q \equiv a\sum_{n=1}^{N}Q_n$，它与哈密顿量对易。在边界条件 $L_0 = 0$下，高斯定律约束（6）给出如下解

$$L_n = a\sum_{j=1}^{n}Q_j\,. \tag{11}$$

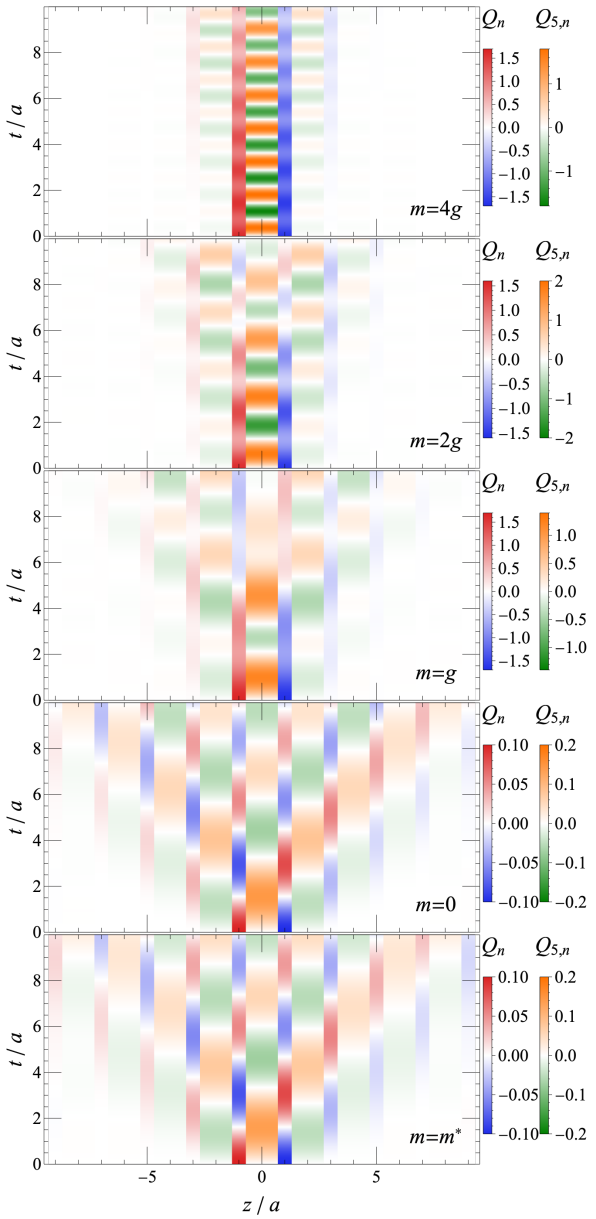


图 1.（从上到下） $m = 4g$、 $m = 2g$、 $m = g$ $m = 0$ $m = m^* = -0.2g$ 、和 下局域电荷与电流的传播。已减去真空态的期望值。（与图 1 相同，但初始条件不同。讨论时会说明初始条件是如何制备的。）

淬火方案。——为了研究手征磁波的实时动力学，我们首先制备系统的基态，然后在$t = 0$ 时刻向晶格中心引入一个电偶极子，从而实施淬火。随后，系统的时间演化由哈密顿量（8）描述。

更具体地说，哈密顿量（8）是一个高维但稀疏的矩阵。我们首先通过精确对角化得到真空态 $|0\rangle$，它是哈密顿量的基态。然后在 $t = 0$，我们引入电

偶极子，并将其置于晶格中心。我们保留最低的一百个能级以截断希尔伯特空间，并将 $t=0$ 处的态写作

$$|\psi\rangle_{t=0} = \sum_{k=0}^{N_{\text{trunc}}} c_k |k\rangle , \tag{12}$$

其中，叠加系数经过设定，使初始态在真空之上包含一个矢量荷偶极子，

$$\begin{aligned} \langle\psi| Q_n |\psi\rangle_{t=0} &= \langle 0| Q_n |0\rangle + D\,(\delta_{n,\frac{N}{2}} - \delta_{n,\frac{N}{2}+1}), \\ \langle\psi| Q_{5,n} |\psi\rangle_{t=0} &= \langle 0| Q_{5,n} |0\rangle . \end{aligned} \tag{13}$$

这里， D 是偶极子中电荷的大小；我们选择系数，使得在截断的希尔伯特空间和晶格上， D 达到最大。制备好初始态后，我们根据 $|\psi\rangle_t = e^{-iHt}|\psi\rangle_{t=0}$演化量子态，并测量局域和全局可观测量随时间的变化。

我们采用20个交错格点（$N=20$）进行计算，并将晶格间距设为 $a=0.5/g$。我们考察费米子质量的若干取值：大质量情形（$m=4g$、 $2g$和 g）、无质量情形（$m=0$）以及相变的临界质量（$m=m^*=-0.2g$）。对于每个取值，我们求解真空态和时间演化，并测量局域荷。结果见图1。这里，我们将交错费米子-反费米子对合并，以得到物理的矢量电荷密度，即 $Q(z_n) = Q_{2n-1} + Q_{2n}$；而轴向荷定义在两个格点之间的链路上，即 $Q_5(z_{n+1/2}) = 2\,Q_{5,2n}$。电荷守恒要求（2）在交错可观测量中的体现为 $\partial_t Q_{2n-1} = (Q_{5,2n-1} - Q_{5,2n-2})/a$，对于$\partial_t Q_{2n}$也同样如此；这自动导出连续性方程[1]，$\partial_t Q(z_n) = \frac{Q_5(z_{n+1/2}) - Q_5(z_{n-1/2})}{2a}$。

在每个位置，我们都观察到局域矢量荷和轴向荷的振荡；这些振荡从晶格中部向边缘传播，形成光锥结构。对于有质量的 $m\neq 0$ 情形，与无质量情形和临界点情形相比，我们观察到振荡幅度更强的阻尼。这可归因于有质量情形下手征磁波的非线性特性。

Thumper 解。——特别是在 $m=g$、 $2g$和 $4g$的有质量情形下，我们观察到，矢量荷的振荡周期远长于轴向荷的振荡周期，而且二者之比随费米子质量增加而增大。在$m=4g$ 的情形下，这一点尤为显著（见图1的上图）：电偶极子几乎静止，完全不发生振荡，而偶极子内的轴向荷则快速振荡。我们将这一解称为“thumper”。遗憾的是，到目前为止，我们还无法解析地找到式（3）对应的经典解。

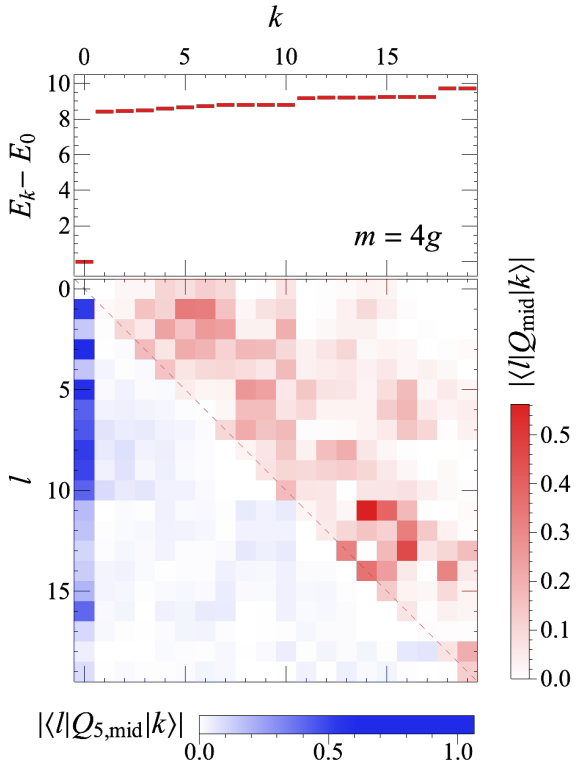


图2. 矢量荷（上三角）和轴向荷（下三角）的能级（上）及矩阵元的模（下）。注意， $|\langle l|Q|k\rangle| = |\langle k|Q|l\rangle|$，同样地，对于$Q_5$也是如此。此外， $|\langle k|Q_5|k\rangle| = 0$。

为了理解矢量荷和轴向荷以哈密顿量本征态表示的实时演化，

$$H|k\rangle = E_k|k\rangle . \tag{14}$$

我们从初始态开始

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_k c_k |k\rangle , \tag{15}$$

并考虑算符 O 在海森堡绘景中的时间依赖性

$$\begin{aligned} O(t) &\equiv \langle\Psi(t)|O|\Psi(t)\rangle \\ &= \sum_{k,l} c_l^* c_k e^{i(E_l-E_k)t}\langle l|O|k\rangle . \end{aligned} \tag{16}$$

它是不同振荡模态的叠加。在每种模态中，振荡频率是两个能量本征值之差。在图2中，我们展示了算符的能量本征值和矩阵元

[1]注意，一个物理位置包含两个晶格位置，因此其体积为 $2a$。

$Q_{\rm mid} \equiv Q(^zN/2)$ 和 $Q_{5,\ \rm mid} \equiv Q_5(^z(N+1)/2)$。虽然我们在 $Q = 0$ 子空间中提取了能量最低的 100 个态，但图中仅展示了与初始态具有非零重叠（$|c_k|^2$）的态。值得注意的是，所有激发态的能量均高于基态能量$E_k - E_0 \gtrsim 2m$，这些激发态对应于由费米子–反费米子对组成的束缚态。与此同时，不同激发态之间的能量差约为 $\mathcal{O}(g)$。从图 2（下图）可以清楚地看出，轴向荷算符主要由真空与激发束缚态之间的跃迁贡献（见最左侧一列），而矢量荷算符则主要由激发态之间的散射贡献。因此，在大质量极限 $2m \gg g$下，轴向荷的振荡频率远高于矢量荷的振荡频率。在无质量极限（$m = 0$）或临界质量 $m = m^*$ 下，真空与束缚态之间不再存在 $\sim 2m$ 质量能隙，轴向荷与矢量荷以相同的频率振荡。

结论。——我们利用经典硬件上的量子模拟，研究了无质量和有质量施温格模型中手征磁波（CMW）的实时动力学。对于调谐至共形临界点（$\theta = \pi$, $m/g \simeq 0.2$）的施温格模型，我们观测到以光速传播的无隙手征磁波。对于无质量情形，我们发现了有隙手征磁波，这与熟知的非相互作用有质量玻色子表象相对应。

在有质量施温格模型（$m/g > 1$）中，我们揭示了新型“Thumper”解的存在，其中电荷密度的振荡远慢于轴向电荷密度。特别是在$m/g = 4$ 处，我们观测到一个近乎静止的电偶极子，其内部禁闭着快速振荡的手征荷。从定性上说，这是因为当 m/g 较大时，偶极子中电荷之间的禁闭电弦难以断裂，从而阻止偶极子扩张。另一方面，手征反常与较大的费米子质量相互作用，导致电弦内部的手征荷快速振荡。因此，禁闭电弦中包含手征荷的快速涨落。探究拓扑涨落与 [23, 24] 禁闭在（3+1 维中的可能联系将会很有意义。探索真实系统中的非线性手征磁波和“Thumper”也同样值得期待。

致谢

本研究得到美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心、量子优势协同设计中心（C2QA）根据合同编号 DE-SC0012704（KI）的资助；同时还得到美国能源部科学办公室核物理办公室拨款的资助，编号为 DE-FG88ER41450（DK、SS）和 DE-SC0012704（DK）。

* kazuki.ikeda@stonybrook.edu † dmitri.kharzeev@stonybrook.edu ‡ shuzhe-shi@tsinghua.edu.cn

[1] D. Kharzeev, 《高温量子色动力学中的宇称破坏：为何可能发生，以及如何寻找它》，*Phys. Lett. B* **633** (2006) 260–264, arXiv:hep-ph/0406125。[2] D. E. Kharzeev、L. D. McLerran 和 H. J. Warringa, 《重离子碰撞中的拓扑荷变化效应：“逐事件的宇称和电荷宇称破坏”》，*Nucl.* ( ) – *Phys. A* **803** 2008 227 253, 0711 0950 arXiv: [ ] hep-ph .

[3] K. Fukushima 、 D. E. Kharzeev 和 H. J. Warringa, 《手征磁效应》， *Phys. Rev. D* **78** (2008) 074033, arXiv:0808.3382 [hep-ph]。[4] D. E. Kharzeev, 《手征磁效应与反常诱导输运》，*Prog. Part. Nucl. Phys.* **75** 2014 133 151, 1312 3348 [ ] ( ) – arXiv: . hep-ph .[5] D. E. Kharzeev、J. Liao、S. A. Voloshin 和 G. Wang, 《高能核碰撞中的手征磁效应和涡旋效应——现状报告》，*Prog. Part. Nucl.* ( ) – *Phys.* **88** 2016 1 28, 1511 04050 [ ] arXiv: . hep-ph .[6] K. Landsteiner, 《反常诱导输运札记》，*Acta Phys. Polon. B* **47** (2016) 2617, arXiv:1610.04413 [hep-th]。[7] D. E. Kharzeev 和 J. Liao, 《手征磁效应揭示重离子碰撞中的规范场拓扑》， *Nature Rev. Phys.* **3** no. 1, (2021) 55–63, arXiv:2102.06623 [hep-ph]。[8] D. E. Kharzeev 和 H.-U. Yee, 《手征磁波》， *Phys. Rev. D* **83** (2011) 085007, arXiv:1012.6026 [hep-th]。[9] N. Klco、E. F. Dumitrescu、A. J. McCaskey、T. D. Morris、R. C. Pooser、M. Sanz、E. Solano、P. Lougovski 和 M. J. Savage, 《使用量子计算机对施温格模型动力学进行量子-经典计算》，*Phys. Rev. A* **98** no. 3, (2018) 032331, arXiv:1803.03326 [quant-ph]。[10] N. Butt、S. Catterall、Y. Meurice、R. Sakai 和 J. Unmuth-Yockey, 《交错费米子无质量施温格模型的张量网络表述》，*Phys. Rev. D* **101** no. 9, (2020) 094509, arXiv:1911.01285 [hep-lat]。[11] G. Magnifico、M. Dalmonte、P. Facchi、S. Pascazio、F. V. Pepe 和 E. Ercolessi, 《$\mathbb{Z}_n$ QED 的 1+1 Schwinger-Weyl 晶格模型中的实时动力学与禁闭》，*Quantum* **4** (2020) 281, arXiv:1909.04821 [quant-ph]。[12] A. F. Shaw、P. Lougovski、J. R. Stryker 和 N. Wiebe, 《模拟格点施温格模型的量子算法》， *Quantum* **4** (2020) 306, arXiv:2002.11146 [quant-ph]。[13] D. E. Kharzeev 和 Y. Kikuchi, 《数字量子模拟中的实时手征动力学》，*Phys.* no. ( ) *Rev. Res.* **2** 2, 2020 023342, 2001 00698 arXiv: [ ] hep-ph .[14] K. Ikeda、D. E. Kharzeev 和 Y. Kikuchi, 《临界点附近陈-西蒙斯涨落的实时动力学》， *Phys. Rev. D* **103** no. 7, (2021) L071502,

arXiv:2012.02926 [hep-ph]。[15] A. Florio、D. Frenklakh、K. Ikeda、D. Kharzeev、V. Korepin、S. Shi 和 K. Yu, 《喷注产生的实时非微扰动力学：量子纠缠与真空修正》, *arXiv e-prints* (Jan., 2023) 2301.11991, 2301.11991) arXiv: . [ ] arXiv: . hep-ph . [16] K. Ikeda, 《量子场论相变点处量子能量隐形传态的临界性》, *Phys. Rev. D* **107** (Apr, 2023) L071502。https: //link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.L071502。[17] K. Ikeda、D. E. Kharzeev、R. Meyer 和 S. Shi, 《通过施温格模型中的纠缠探测临界点》, arXiv:2305.00996 [hep-ph]。[18] C. W. Bauer *et al.*, 《高能物理的量子模拟》, arXiv:2204.03381 [quant-ph]。[19] J. S. Schwinger, 《规范不变性与质量。2.》, *Phys. Rev.* **128** (1962) 2425–2429。[20] J. B. Kogut 和 L. Susskind, 《威尔逊格点规范理论的哈密顿量表述》, *Phys. Rev.* D11 (1975) 395–408。[21] L. Susskind, 《格点费米子》, *Phys. Rev.* D16 (1977) 3031–3039。[22] P. Jordan 和 E. P. Wigner, 《关于泡利不相容原理》, *Z. Phys.* **47** (1928) 631–651。[23] D. E. Kharzeev 和 E. M. Levin, 《量子色动力学 θ 真空中的色禁闭与屏蔽》, *Phys. Rev. Lett.* **114** 24, 2015 242001, 1501.04622 [ ] no. ( ) arXiv: . hep-ph .

[24] D. E. Kharzeev, 《涨落拓扑导致的色禁闭》, *Int. J. Mod. Phys. A* **31** no. 28n29, (2016) 1645023, arXiv:1509.00465 [hep-ph]。

矢量荷与轴向荷振荡的本征态分析

为完整起见，我们给出费米子质量为 $m = 2g$、 g、0 和临界质量 m^* 时，矢量荷与轴向荷算符的能量本征值和矩阵元。

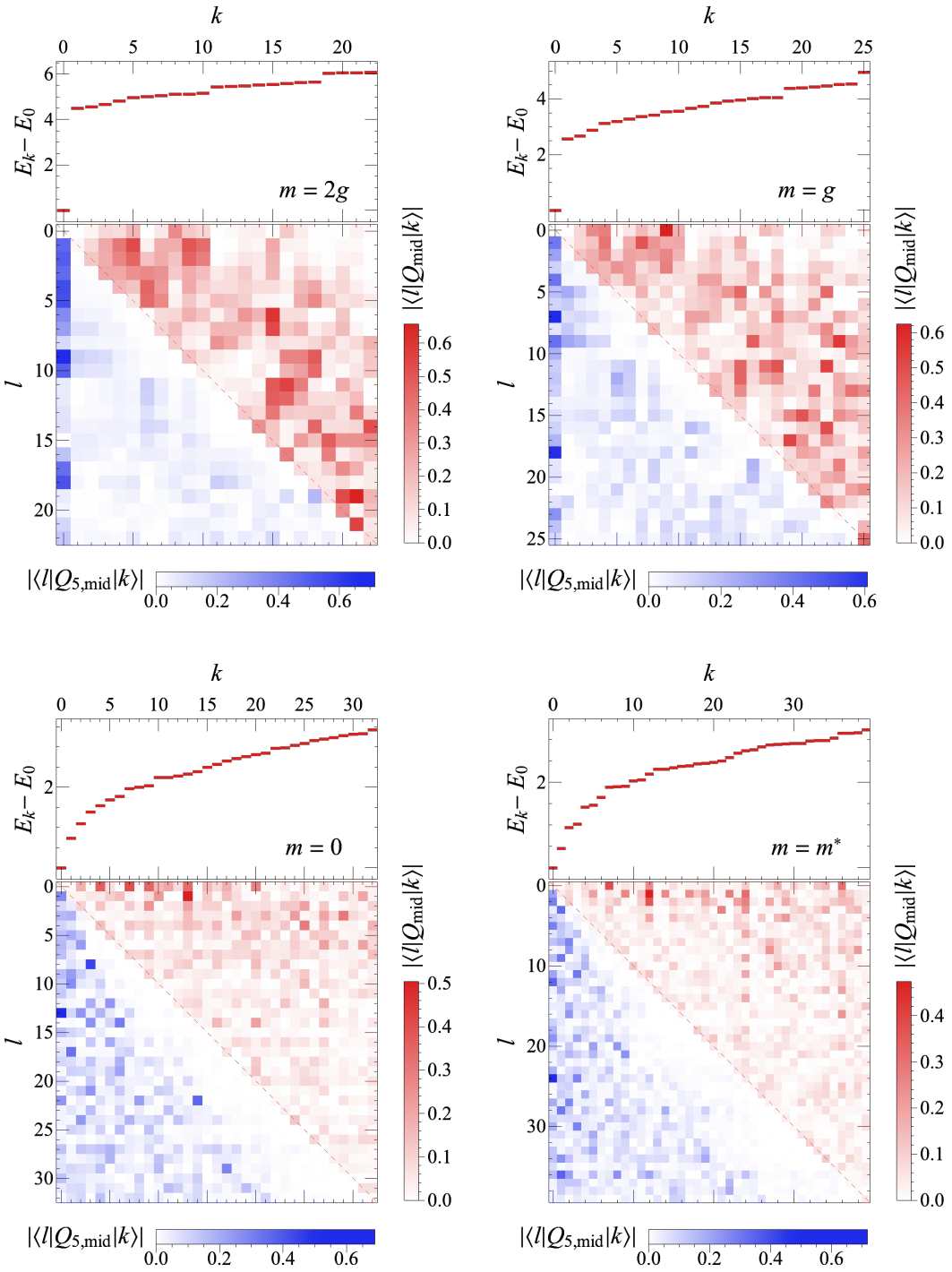


图3. 与正文中的图2相同，但对应的质量分别为 $m = 2g$ （左上）、 g （右上）、0（左下）和 m^* （右下）。