含有无限多种变体的流行病模型的渐近行为

Jean-Baptiste Burie[a]、Arnaud Ducrot[b]和Quentin Griette[b]，*

2023年5月11日

[a] 波尔多数学研究所，波尔多大学，法国国家科学研究中心，波尔多数学研究所（*IMB*），*UMR 5251*，解放大道*351*号，*F-33400*塔朗斯，法国。

[b] 诺曼底大学、勒阿弗尔大学、勒阿弗尔应用数学实验室、*FR-CNRS-3335*、诺曼底社会与文化研究所，*76600*勒阿弗尔，法国。

arXiv:2305.05699v1 [q-bio.PE] 9 May 2023

摘要

我们研究了感染均质宿主群体、具有无限多个病原体变异株的易感者-感染者-康复者流行病模型的长期动力学。我们证明，在这种情况下可以定义病原体的基本再生数$\mathcal{R}_0$，它对应着病原体持久性（$\mathcal{R}_0 > 1$）与灭绝（$\mathcal{R}_0 \leq 1$）之间的阈值。当$\mathcal{R}_0 > 1$ 且至少有一个变体达到最大适合度时，我们证明系统会达到一个可根据初始数据明确确定的平衡态。当$\mathcal{R}_0 > 1$，但没有任何变体达到最大适合度时，情况则更加复杂。我们证明，一般而言，病原体是一致持久的，而任何适合度始终低于最优适合度的变体族最终都会灭绝。我们推导出一个条件，在该条件下，病原体总种群会收敛至一个可明确计算的极限。我们还找到了反例，表明当不满足该条件时，病原体总种群可能收敛至意料之外的值，或者系统甚至会呈现永恒暂态行为，即病原体总种群在多个值之间变化。我们通过数值模拟展示了研究结果，并凸显了可能动力学的多样性。

1 引言

本文研究易感者-感染者-康复者流行病模型的大时间行为。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = \Lambda - \theta S(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k S(t) I_k(t), & t > 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n(t) = \beta_n S(t) I_n(t) - \gamma_n I_n(t), & t > 0, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.1a}$$

以及初始数据

$$S(0) = S_0 \in (0, +\infty), \qquad (I_n(0))_{n\in\mathbb{N}} = (I_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_+, \tag{1.1b}$$

其中，ℓ^1_+ 表示非负可和序列空间。

该模型描述了一个宿主种群的演变。在任意时刻 $t > 0$，宿主可以不受感染且具有免疫力（$S(t)$，易感者群体），也可以被 $n \in \mathbb{N}$ 型病原体感染（$I_n(t)$，n 型感染者群体）。参数 $\Lambda > 0$ 表示易感宿主的恒定流入，$\theta > 0$ 表示宿主在未感染时的死亡率，β_n 表示 n 型病原体的传播参数，γ_n 表示 n 型病原体的康复率。β_n 和 γ_n 均为有界序列。SIR 模型在数理流行病学文献中随处可见，并且已得到广泛研究。我们无意重述该模型的完整历史，但可以引用 Kermack 和 McKendrick（1927年）的研究，这或许是该模型首次出现在文献中；该模型随后立即被应用于孟买岛的一次鼠疫暴发。

本文考虑多种（可能有无穷多种）病原体变体竞争感染易感宿主。所有可能的基因型都列在以 $n \in \mathbb{N}$ 为索引的无限序列中，对于每种基因型，我们用 (β_n, γ_n) 表示其对应的表型，该表型由传播系数 β_n 和康复率构成

2020年数学学科分类号。34D05, 92D25, 37L15, 37N25**关键词**。常微分方程、渐近行为、种群动力学、无限维动力系统。**致谢：** J.-B.B. 和 A.D. 得到了法国国家研究署项目 ArchiV ANR-18-CE32-0004 的资助。Q.G. 获得了法国国家研究署资助项目“Indyana”（编号 ANR-21-CE40-0008）的部分资助。A.D. 和 Q.G. 感谢 Math Am-Sud 计划对项目 MATH-AMSUD-22-MATH-09 的支持。作者感谢 Pierre Magal 富有启发性的讨论，也感谢两位匿名审稿人，他们的意见极大地提升了本文的质量。

*通讯作者。电子邮箱： quentin.griette@univ-lehavre.fr

感染 γ_n。我们不具体说明连接底层变量 $n \in \mathbb{N}$ 与表型 $(\beta_n,\ \gamma_n)$ 的具体机制，而是着重研究在已知这些机制的条件下，种群在 (1.1) 下的动态。我们不考虑突变，并假设病原体为无性繁殖；因此，(1.1) 可视为纯竞争模型，其中病原体竞争单一资源（易感宿主）。

当 I_n^0 除有限个指标外均为零时，我们的问题可化为一个常微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = \Lambda - \theta S(t) - S(t)\big(\beta_1 I_1(t) + \beta_2 I_2(t) + \ldots + \beta_n I_n(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_1(t) = \beta_1 S(t) I_1(t) - \gamma_1 I_1(t) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_N(t) = \beta_N S(t) I_N(t) - \gamma_N I_N(t), \end{cases} \tag{1.2a}$$

初始数据为

$$S(0) = S_0 \in (0,+\infty), \qquad I_1(0) = I_1^0 \in (0,+\infty), \qquad \ldots, \qquad I_N(0) = I_N^0 \in (0,+\infty). \tag{1.2b}$$

在此背景下，Hsu、Hubbell 和 Waltman（1977年）以及 Hsu（1978年）证明，对于一个类似的常微分方程组，其解最终会收敛到某个平衡态；该平衡态未必唯一，但总是集中于适应度 β_n/γ_n最大的方程上。在此，我们将这些结果推广到一个无限维动力系统（考虑无穷多个变体），并证明，对于某些精心选取的系数，该系统会永远停留在暂态，绝不收敛到单一平衡态。Thieme（2011年）研究了一个相关模型，其中连续分布的宿主类别受到一种可跨类别传播的病原体感染；他证明了包括地方病平衡态全局稳定性在内的多项结果，且所需假设十分一般。尽管他的模型在性质和行为上与我们的模型不同，我们仍将其视为未来研究的启发。

多个物种竞争单一资源的问题在文献中受到广泛关注。在这一背景下，“竞争排斥原理”指出：“完全竞争者无法共存”，这意味着，若若干物种在同一地点竞争同一资源，那么从长远来看，只有一个物种能够存活。达尔文的著作中已经在一定程度上体现了这一观点，有时也称为高斯定律（Hardin，1960年）。自 20 世纪 70 年代以来，竞争者的生存问题一直吸引着数学家的关注，许多研究在多种不同情境下证明了这一性质——例如 Hsu、Hubbell 和 Waltman（1977年），Hsu（1978年），以及 Armstrong 和 McGehee（1980年）、Butler 和 Wolkowicz（1985年）、Wolkowicz 和 Lu（1992年）、Hsu、Smith 和 Waltman（1996年）、Wolkowicz 和 Xia（1997年）以及 Li（1999年）的开创性研究——而在另一些情境下，这一性质也被推翻，例如在波动环境中，见 Cushing（1980年）和 Smith（1981年）。Ackleh 和 Allen（2003年）研究了含有限种菌株的流行病模型中的竞争排斥，并描述了不同物种在某些情况下如何共存。

在我们的模型中，基因型为 n 的变体的适合度由公式 $\mathcal{R}_0^n = \frac{\Lambda\beta_n}{\theta\gamma_n} = \frac{\Lambda}{\theta}\alpha_n$ 给出，其中~~$\alpha_n := \frac{\beta_n}{\gamma_n}$~~；竞争排斥原理意味着最终保留下来的唯一基因型是使$\mathcal{R}_0^n$ 最大化的基因型。我们证明，这种说法是正确的——渐近而言，只有使适合度最大化的基因型能够存活——但并不完整。事实上，这不足以描述种群的渐近行为，尤其是在变体的适合度存在相等情形（即 $\frac{\beta_{n_1}}{\gamma_{n_1}} = \frac{\beta_{n_2}}{\gamma_{n_2}}$ 与 $n_1 \neq n_2$，且可能还有 $\gamma_1 \neq \gamma_2$）、没有任何基因型达到最大适合度，或两者兼有的情况下。在后一种情形中，我们甚至可以观察到优势变体交替出现，以及感染者总数永无休止地振荡；参见第3.2节中的第二个例子。相关模型的文献中也观察到了类似行为（例如，Hsu（1978年）已经给出了类似的描述）。例如，在 Day 和 Gandon（2007）的流行病学背景中，有研究观察到，尽管毒株 1 的 γ 值较高，而 $\mathcal{R}_0$ 值略低于毒株 2，但它仍可能在一段时间内占据主导地位。这些临界情形有助于我们理解暂态动力学；另见 Burie、Djidjou-Demasse 和 Ducrot（2020年），他们基于适合度函数在局部的平坦性，给出了相关演化模型暂态动力学的估计。

毒力或病原体传播率、个体预期寿命，以及更一般而言，身高、体重、肌肉质量、速度、腿长等任何可观测特征，都可以自然地用连续变量或离散变量表示。对种群作这样的描述似乎非常有意义，并且主要应用于涉及某种进化过程的建模研究（Magal 和 Webb 2000；Magal 2002；Barles 和 Perthame 2007；Desvillettes 等 2008；Barles、Mirrahimi 和 Perthame 2009；Bouin 等 2012；Jabin 和 Raoul 2011年；Raoul 2011；Lorz 和 Perthame 2014；Griette 2019；Ducrot 等 2022）。在许多这类模型中，突变被视为一种随时间持续发生的过程。根据具体情境，这一假设可能现实，也可能不现实。将突变建模为离散的时间事件也可能更为合理；在这种情况下，突变事件之间种群的行为可由类似于（1.1）的纯竞争方程准确描述。本研究同样秉承这一思路，对突变消失极限下发生的情况作出精确描述；预计突变算子虽小但非零的模型轨迹，至少在暂态阶段，会接近极限模型的轨迹。

本文结构如下。第 2 节介绍主要结果。第 3 节给出若干示例和数值模拟，展示不同的渐近行为。第 4 节讨论这些结果。最后，第 5 节证明我们在第 2 节中陈述的结果。

数据可用性 由于本研究未分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

2 主要结果

在本文中，我们研究满足初始数据 (1.1b) 的方程 (1.1a) 的解。在开始之前，我们先明确一下：我们使用记号 ℓ^1 表示由绝对可和实数序列构成、并赋予范数的巴拿赫空间。

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|,$$

且 ℓ^1_+ 是 ℓ^1的正锥，也就是说，它由非负可和序列构成。类似地， ℓ^∞ 表示配备范数的有界序列巴拿赫空间。

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

我们将对式 (1.1) 中出现的参数作出以下假设。

假设 2.1。 常数 $\Lambda > 0$ 和 $\theta > 0$ 已给定。序列 $\left(\beta_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ 和 $\left(\gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ 有界，并且我们假设存在常数 $0 < \beta_0 < \beta^\infty$ 和 $0 < \gamma_0 < \gamma^\infty$ ，使得

$$0 < \beta_0 \le \beta_n \le \beta^\infty \qquad \text{and} \qquad 0 < \gamma_0 \le \gamma_n \le \gamma^\infty, \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

由此假设可知，序列 $(\beta_n/\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界。我们将 α^* 定义为最大适合度：

$$\alpha^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\beta_k}{\gamma_k}.$$

接下来的假设确保最大适合度 α^* 确实由数量不可忽略的感染者实现（也可能是在无穷远处实现）。换言之，我们的模型 (1.1) 不等价于最大适合度严格较低的另一个模型。

假设 2.2。 给定 $S_0 > 0$和 $(I_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_+$ ，并假设存在一个指标序列 $n_k \in \mathbb{N}$，使得

$$I^0_{n_k} > 0 \text{ and } \lim_{k\to+\infty} \frac{\beta_{n_k}}{\gamma_{n_k}} = \alpha^*.$$

需要明确的是，假设 2.2 中的序列 n_k 可以最终 **स्थ**止；特别地，我们不假设正分量的集合是无限的。

我们将基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 定义为

$$\mathcal{R}_0 := \frac{\Lambda}{\theta}\alpha^*. \tag{2.1}$$

最后，我们作出一个技术性假设，以避免不必要的理论讨论。

假设 2.3 （有限的 ω-极限集）。 我们假设序列 γ_n 和 $\alpha_n := \frac{\beta_n}{\gamma_n}$ 的 ω-极限集是有限的，其中这些序列定义为

$$\omega\left((\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\gamma_k : k \ge n\}} \text{ and } \omega\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\alpha_k : k \ge n\}},$$

是有限的。

2.1 柯西问题：存在性与唯一性

我们的第一个结果讨论柯西问题 (1.1) 的解的存在性与唯一性。我们证明，系统 (1.1) 按 Hadamard 意义是适定的。

命题 2.4（柯西问题）。设假设 *2.1* 成立，且给定 $S_0 > 0$ *and* $(I_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_+^1$。则系统 (1.1) 存在唯一全局温和解 $\big(S(t),(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\big) \in C^0\big([0,+\infty)\mathbb{R}\big) \times C^0\big([0,+\infty)\ \ell_+^1\big)$，该解也是经典解：

$$S(t) \in C^1\big([0,+\infty),\mathbb{R}\big)\ \textit{and}\ (I_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \in C^1\big([0,+\infty),\ell_+^1\big).$$

此外，对所有 $t > 0$，映射

$$\Big(S_0,\big(I_n^0\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \in \mathbb{R}\times\ell_+^1 \longmapsto \Big(S(t),\big(I_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \in \mathbb{R}\times\ell_+^1$$

都是连续的。

作为命题 2.4 的一个重要推论，我们注意到，$(I_n(t))$ 的每个分量都可以由$S(t)$ 计算得出。更确切地说，若令

$$\overline{S}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s,$$

则有 $I_n(t)$ 的如下公式：

$$I_n(t) = e^{t\left(\beta_n\overline{S}(t)-\gamma_n\right)}, \qquad \text{for all } n\in\mathbb{N} \text{ and } t\geq 0. \tag{2.2}$$

在证明我们的结果时，我们将反复使用方程 (2.2)。

2.2 持久性与渐近行为

接下来，我们研究 $t\to+\infty$ 时方程 (1.1) 的解的渐近行为。首先证明，当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时，病原体种群会灭绝。

命题2.5（灭绝）。设假设 *2.1* 成立，且给定 $S_0 > 0$ 和 $(I_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_+^1$。假设 $R_0 < 1$，或 $R_0 = 1$ 且假设 *2.3* 成立。那么

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) = 0.$$

相反，当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时，我们可以证明病原体会长期存续。

定理 2.6（持久性）。假设 *2.1*、*2.2* 和 *2.3* 成立，并设 $R_0 > 1$。那么
我们有

$$S(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha^*}\ \textit{and}\ S'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

关于 $I_n(t)$ 的行为，我们区分两种情况。

i) 假设存在某个 $i\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{\beta_i}{\gamma_i} = \alpha^*$，且可能对多个指标成立。那么 $I_n(t)$ 在 ℓ^1 中收敛到以下渐近稳态

$$I_n^\infty = \begin{cases} 0 & \textit{if } \frac{\beta_n}{\gamma_n} < \alpha^*, \\ e^{\tau\gamma_n} I_n^0 & \textit{if } \frac{\beta_n}{\gamma_n} = \alpha^*, \end{cases} \ \textit{for all } n\in\mathbb{N},$$

其中常数 $\tau\in\mathbb{R}$ 是该方程的唯一解：

$$\sum_{\{n\in\mathbb{N}:\,\frac{\beta_n}{\gamma_n}=\alpha^*\}} \gamma_n I_n^0\, e^{\tau\gamma_n} = \frac{\theta}{\alpha^*}(\mathcal{R}_0 - 1).$$

ii) 假设对所有 $n\in\mathbb{N}$，均有 $\frac{\beta_n}{\gamma_n} < \alpha^*$. 。—那么对所有 $n\in\mathbb{N}$，当 $t\to\infty$时，有 $I_n(t)\to 0$，而

$$\liminf_{t\to+\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n(t) > 0. \tag{2.3}$$

此外，若 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个整数序列，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\beta_{n_k}}{\gamma_{n_k}} < \alpha^*,$$

于是我们有

$$\limsup_{t\to+\infty}\sum_{k\in\mathbb{N}} I_{n_k}(t) = 0. \tag{2.4}$$

定理 2.6 的证明将在第 5.3 节给出。

下面简要说明定理 2.6 的内容。我们的基本假设是，基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 大于 1，否则感染者群体就会灭绝。这里有两种典型情形。情形 i) 对应最大适合度至少由一个变体达到的情况；此时，无限系统的行为与有限系统相似：我们观察到系统无条件收敛到一个平衡态，而该平衡态可以根据初始数据计算得出。情形 ii) 中，没有任何变体达到最大适合度，情况则更为复杂。一般来说，我们只能得出两个结论：第一，病原体作为一个整体在长时间内持续存在（即 (2.3)）；第二，任何适应度始终受到统一压制的变体族最终都会灭绝（即 (2.4)）。在第 3 节中，我们将给出一个反例，说明在某些情况下，病原体总种群不会收敛到某个极限。

为了深入分析，我们可以更精确地描述病原体总种群的行为，但需要对系数作出稍强的假设。当表型值 β_n 和 γ_n 在某种意义下均匀地表现在初始状态中时，赢得竞争的病原体菌株首先是使 $\frac{\beta_n}{\gamma_n}$ 最大化的菌株，然后是使 γ_n最大化的菌株，正如我们将在命题 2.9 中展示的那样。现在我们具体说明“在某种意义下均匀地表现在初始状态中”的含义。首先，我们严格定义“最大可达恢复率”这一概念。

定义 2.7（最大可达恢复率）。 设假设 2.1 和 2.3 成立。则最大可达恢复率 为

$$\gamma^* := \sup\left\{\gamma \in \omega\left((\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) : (\alpha^*, \gamma) \in \omega\left(\left((\alpha_n, \gamma_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\},$$

其中，$\omega\left(\left((\alpha_n,\ \gamma_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 是联合序列 $\left((\alpha_n,\ \gamma_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$的 ω-极限集。换言之，γ^* 是满足 $\frac{\beta_{n_k}}{\gamma_{n_k}} \to \alpha^*$的 γ_n 的某个子序列的最大极限值。

在下面的假设中，我们要求病原体初始质量在 γ^*附近始终不可忽略。

假设 2.8。 假设假设 2.1、2.2 和 2.3成立，并令 γ^* 为定义 2.7 中的最大可达康复率。我们假设，对于每个充分小的 $\varepsilon > 0$，都存在常数 $\delta > 0$ 和$m > 0$，使得对于每个满足下述条件的值 $\alpha \in [\alpha^* - \delta, \alpha^*]$：存在 $n \in \mathbb{N}$，且 $\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \alpha$，我们有

$$\frac{\sum\limits_{\left\{n:\frac{\beta_n}{\gamma_n}=\alpha \text{ and } \gamma_n \geq \gamma^* - \varepsilon\right\}} I_n^0}{\sum\limits_{\left\{n:\frac{\beta_n}{\gamma_n}=\alpha\right\}} I_n^0} \geq m.$$

换句话说，在已知 $\alpha_n = \alpha$ 满足某条件，且α 接近 α^* 的情况下，“选中”一个满足 γ_n 接近 γ^* 的病原体的概率有一个统一的正下界。

下面举几个满足或不满足假设 2.8 的初始数据示例。如果 γ_n 收敛到其极限，那么该极限必为 γ^*，且无论初始数据 $I_n^0 > 0$为何，假设 2.8 都成立。如果$\omega\big((\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \{\gamma^1, \gamma^2\}$ 恰有两个元素 $\gamma^1 < \gamma^2$，我们就必须考察等式成立的情形 $\mathcal{A}_n := \{k:\ \alpha_k = \alpha_n\}$。为简单起见，假设 $\gamma_{2n} \to \gamma^1$ 且 $\gamma_{2n+1} \to \gamma^2$，并且 $\mathcal{A}_n = \{2n, 2n+1\}$，那么当且仅当存在 $m > 0$ 使得下式成立时，假设 2.8 成立：

$$\frac{I_{2n+1}^0}{I_{2n}^0 + I_{2n+1}^0} \geq m.$$

当假设 2.8 成立时，我们可以证明以下结果。

命题 2.9. 假设假设 *2.8* 成立，且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\frac{\beta_n}{\gamma_n} < \alpha^*$ 。那么，病原体总种群将收敛到一个正极限。

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) = \frac{\theta}{\alpha^* \gamma_\infty}(\mathcal{R}_0 - 1). \tag{2.5}$$

此外，如果 $n_k \in \mathbb{N}$ 是一个整数序列，使得

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\beta_{n_k}}{\gamma_{n_k}} = \alpha^* \ \textit{and}\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_{n_k} < \gamma^*, \tag{2.6}$$

那么我们有

$$\limsup_{t\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} I_{n_k}(t) = 0. \tag{2.7}$$

本节结果的证明将在第 5 节给出。首先，我们给出一些特定的取值，使得变体的替代动力学可以通过解析方法理解。

3 示例

本节中，我们给出一些系数的具体取值示例，在这些取值下，可以通过解析方法理解渐近动力学。我们还对相应的常微分方程组进行了数值模拟，并特别关注变体替代动力学。

我们进一步将第 3 节细分为两个小节：在第 3.1 节中，我们讨论 $\gamma_n \equiv \gamma$ 为常数序列的示例；而在第3.2节中，我们讨论 γ_n 交替取两个值的示例。

3.1 替代动力学 1：单价 γ_n

在本节中，我们研究两个给定变体的流行度之间的渐近转变时间，该时间取决于它们的特征。我们考虑 γ_n 为单价的情形，也就是说，$\gamma_n \equiv \gamma > 0$ 与 $n \in \mathbb{N}$无关。我们还假设对所有 $n \geq 0$都有 $\beta_n < \beta^*$，因此根据命题 2.9，我们已经知道质量收敛：

$$\mathcal{I}(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mathcal{I}_\infty. \tag{3.1}$$

现在注意到，总质量可改写为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{\beta_n \overline{S}(s) - \gamma_n t} = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{(\beta_n - \beta^*)\overline{S}(t)t + (\beta^* \overline{S}(t) - \gamma)t} = e^{(\beta^* \overline{S}(t) - \gamma)t} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{-(\beta^* - \beta_n)\overline{S}(t)t},$$

特别地：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) = e^{t\left(\beta^* \overline{S}(t) - \gamma\right)} F\big(t\overline{S}(t)\big), \tag{3.2}$$

其中，F 是由以下内容定义的函数。

$$F(\xi) := \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{-(\beta^* - \beta_n)\xi}. \tag{3.3}$$

注意，由于对于所有 $n \geq 0$ 都有 $\beta_n < \beta^*$，根据 (3.3) 我们有

$$\lim_{\xi \to +\infty} F(\xi) = 0.$$

因此，利用 $\sum I_n(t) = \mathcal{I}_\infty + o(1) > 0$ 这一事实，我们得到

$$\lim_{t \to +\infty} e^{(\beta^* \overline{S}(t) - \gamma)t} = +\infty.$$

此外，我们还有

$$\ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t)\right) = t\left(\beta^* \overline{S}(t) - \gamma\right) + \ln\left(F(t\overline{S}(t))\right)$$

因此，得益于定理 2.6，我们有

$$\frac{1}{t}\ln\left(F(\overline{S}(t))\right) = -\left(\beta^* \overline{S}(t) - \gamma\right) + \frac{1}{t}\ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t)\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

这些代数评注将用于估计变体的替代速度。特别是，我们将使用以下关键关系

$$\overline{S}(t) = \frac{\gamma}{\beta^*} - \frac{1}{t\beta^*}\ln\left(F(t\overline{S}(t))\right) + \frac{1}{t\beta^*}\ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t)\right). \tag{3.4}$$

3.1.1 单价型示例 1：代数–代数情形。

在本小节中，我们假设以下框架。

假设 3.1. 我们令 $\gamma_n \equiv \gamma > 0$ 为一个常数序列，并假设初始数据是代数的，且适应度趋于其最大值的收敛速度是代数的：

$$I_n^0 = \frac{1}{(n+1)^A} \text{ with } A > 1 \text{ while } \beta_n = \beta^* - \frac{1}{n+1} \text{ for all } n \geq 0. \tag{3.5}$$

命题 3.2. 在 ass 下　　设 3.1，存在足够大的常数 $C > 1$ 和 $\hat{t} > 0$，使得对所有 $t \geq \hat{t}$ 以及　　for 所有 $n \geq 0$ 一个有

$$\frac{1}{Ct} f\left(\frac{(n+1)}{\gamma t + (A-1)\ln t}\right) \leq I_n(t) \leq \frac{C}{t} f\left(\frac{(n+1)}{\gamma t + (A-1)\ln t}\right),$$

其中，剖面函数 f 定义为

$$f(X) = \exp\left(-A \ln X - \frac{1}{X\beta^*}\right). \tag{3.6}$$

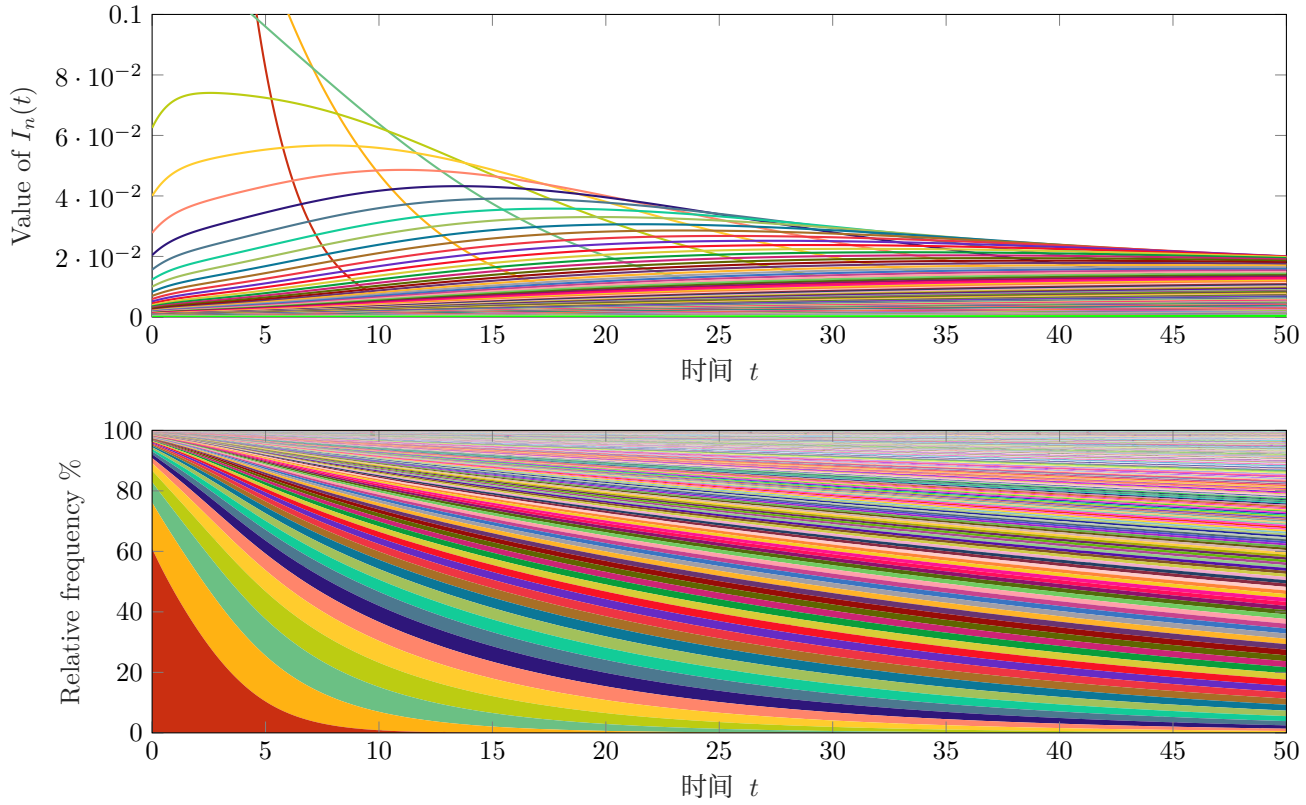

图 1： 单价型情形 1 中解 $I_n(t)$的图。颜色随机选取，因此每种变体都有不同的颜色。下图表明变异株多样性随时间增加，因为越来越多的线条具有明显的宽度。**上图：** $I_n(t)$ 的值。**下图：** 变体的相对频率随时间的变化。这是每种变体在总体人群中的比例。**参数：** $\Lambda = 1, \theta = 1, S_0 = 1, \gamma = \frac{1}{2}, A = 2, \beta^* = 1$。本次模拟共使用了 $N = 300$ 种变体。关于图中颜色的解读，请读者参阅本文的在线版本。

我们先从一个技术引理开始。

引理 3.3. 由 (3.3) 定义的函数 $F(\xi)$ 满足

$$\ln F(\xi) = -(A-1)\ln \xi + \mathcal{O}(1) \text{ as } \xi \to \infty.$$

证明。令 $u_n(\xi) := \exp\left(-A \ln(n+1) - \frac{\xi}{n+1}\right)$，使得

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi).$$

对于 $\xi > 0$，我们定义 $x(\xi) > 0$ 和 $n(\xi) \in \mathbb{N}$ 为

$$x(\xi) + 1 = \frac{\xi}{A} \text{ and } n(\xi) = \lfloor x(\xi) \rfloor \text{ the integer part of } x(\xi).$$

接下来，对于 $p \in \mathbb{N}$ 和 $\xi > 0$，我们有：

$$\frac{u_{n(\xi)+p}(\xi)}{u_{n(\xi)}(\xi)} = \left(\frac{n(\xi)+1}{n(\xi)+1+p}\right)^A \exp\left(\xi \frac{p}{(n(\xi)+1)(n(\xi)+1+p)}\right)$$

因此我们得到

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{u_{n(\xi)+p}(\xi)}{u_{n(\xi)}(\xi)}\leq\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{n(\xi)+1}{n(\xi)+1+p}\right)^{A}\exp\left(\frac{\xi}{(n(\xi)+1)}\right)$$
$$\leq(n(\xi)+1)^{A}\exp\left(\frac{\xi}{(n(\xi)+1)}\right)\sum_{k=n(\xi)+1}^{\infty}\frac{1}{k^{A}}.$$

由于

$$\sum_{k=n(\xi)+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{A}}\leq\int_{n(\xi)+1}^{+\infty}\frac{1}{y^{A}}\mathrm{d}y=\frac{1}{A-1}(n(\xi)+1)^{-(A-1)},$$

我们得到，存在某些常数 $C>0$ 和 ξ_0，且它们足够大，使得

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{u_{n(\xi)+p}(\xi)}{u_{n(\xi)}(\xi)}\leq Cn(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{(n(\xi)+1)}\right)\ \ \forall\xi>\xi_0.$$

这也可改写为

$$\sum_{p=0}^{\infty}u_{n(\xi)+p}(\xi)\leq Cn(\xi)u_{n(\xi)}(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{(n(\xi)+1)}\right)\ \ \forall\xi>\xi_0.$$

另一方面，我们有

$$\sum_{k=0}^{n(\xi)}\frac{u_k(\xi)}{u_{n(\xi)}(\xi)}=\sum_{k=0}^{n(\xi)}\left(\frac{n(\xi)+1}{k+1}\right)^{A}\exp\left(\frac{\xi}{n(\xi)+1}\frac{k-n(\xi)}{k+1}\right).$$

接下来，根据 $n(\xi)$ 的定义，我们有

$$n(\xi)\leq x(\xi)=\frac{\xi}{A}-1<n(\xi)+1,$$

以便

$$\frac{An(\xi)}{n(\xi)+1}\leq\frac{\xi-A}{n(\xi)+1}\leq A.$$

因此，存在足够大的 $\xi_1>0$，使得

$$A\geq\frac{\xi}{n(\xi)+1}\geq\frac{A}{2},\ \forall\xi>\xi_1.$$

因此，对于所有 $\xi>\xi_1$，我们有

$$\sum_{k=0}^{n(\xi)}\frac{u_k(\xi)}{u_{n(\xi)}(\xi)}\leq\sum_{k=0}^{n(\xi)}\left(\frac{n(\xi)+1}{k+1}\right)^{A}\exp\left(\frac{A}{2}\frac{k-n(\xi)}{k+1}\right)$$
$$\leq\sum_{k=0}^{n(\xi)}\left(\frac{n(\xi)+1}{k+1}\right)^{A}\exp\left(\frac{A}{2}\left(1-\frac{n(\xi)+1}{k+1}\right)\right)$$

类似地，

$$\sum_{k=0}^{n(\xi)}\frac{u_k(\xi)}{u_{n(\xi)}(\xi)}\geq\sum_{k=0}^{n(\xi)}\left(\frac{n(\xi)+1}{k+1}\right)^{A}\exp\left(A\left(1-\frac{n(\xi)+1}{k+1}\right)\right).$$

现在，利用连续函数的黎曼和

$$x\mapsto\begin{cases}0\text{ if }x\leq0\\ \frac{1}{x^{A}}\exp\left(\frac{1}{2A}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\text{ if }x>0,\end{cases}$$

注意到我们有

$$n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{A}\exp\left(\frac{1}{2A}\left(1-\frac{n+1}{k+1}\right)\right)\to\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{A}}\exp\left(\frac{1}{2A}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)dx\text{ as }n\to\infty.$$

因此，存在某个常数，仍记为 $C>1$，且 $\xi_2>0$ 足够大，使得

$$C^{-1}n(\xi)u_{n(\xi)}(\xi)\leq\sum_{k=0}^{n(\xi)}u_k(\xi)\leq Cn(\xi)u_{n(\xi)}(\xi),\ \forall\xi>\xi_2.$$

Coup　　结合上述两个估计可确保存在足够大的 $C>1$ 和 $\xi \gg 1$，使得　　t

$$F(\xi) \le Cn(\xi)u_{n(\xi)}(\xi) \le C\xi^{1-A},\ \forall \xi > \hat{\xi},$$

而当

$$F(\xi) \ge \sum_{k=0}^{n(\xi)} u_k(\xi) \ge C^{-1}n(\xi)u_{n(\xi)}(\xi).$$

至此，引理的证明完毕。

□

命题 *3.2* 的证明。 与之前一样，证明依赖于引理 3.3 和 (3.4)。事实上，利用它们可得

$$\begin{aligned}\overline{S}(t) &= \frac{\gamma}{\beta^*} - \frac{1}{t\beta^*}\ln\left(F(t\overline{S}(t))\right) + \frac{1}{t\beta^*}\ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t)\right)\\ &= \frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A-1}{\beta^*}\frac{\ln(t)}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}I_n(t) &= I_n^0 \exp\left(\left(\beta^* - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A-1}{\beta^*}\frac{\ln(t)}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right)t - \gamma t\right)\\ &= I_n^0 \exp\left((A-1)\ln(t) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A-1}{\beta^*}\frac{\ln(t)}{t}\right)t + \mathcal{O}(1)\right)\\ &= \exp\left(-A\ln(n+1) + (A-1)\ln(t) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A-1}{\beta^*}\frac{\ln(t)}{t}\right)t + \mathcal{O}(1)\right).\end{aligned}$$

对于 $n \ge 0$，可将其统一改写如下。

$$I_n(t) = e^{\mathcal{O}(1)}\frac{1}{t}\exp\left(-A\ln\frac{(n+1)}{\gamma t + (A-1)\ln t} - \frac{1}{\beta^*}\frac{\gamma t + (A-1)\ln t}{n+1}\right).$$

回顾 (3.6) 中函数 f 的定义，上述等式变为

$$I_n(t) \asymp \frac{1}{t} f\left(\frac{(n+1)}{\gamma t + (A-1)\ln t}\right) \text{ with } f(X) = \exp\left(-A\ln X - \frac{1}{X\beta^*}\right),$$

至此，引理的证明完成。 □

3.1.2 单价示例 2：指数-指数情形。

我们采用以下假设。

假设 3.4. 我们假设 $\gamma_n \equiv \gamma > 0$ 是正常数， $I_n^0 = e^{-An}$，并且对于某些常数 $A>0$、 $B>0$ 和 $C>0$，有 $\beta_n = \beta^* - Be^{-Cn}$。换言之，初始数据呈指数型，且适应度趋近其最大值的速度也呈指数型。

在这种情况下，我们可以证明函数 $F(\xi)$ 的行为类似于 $\xi^{-\frac{A}{C}}$，而 $I_{\overline{n}}(t)$ 最终会达到固定形状，并以类似于 $\frac{1}{C}\ln(t)$ 的方式向 $+\infty$ 移动。更准确地说，当 $t \to +\infty$ 时， $I_n(t)$ 的渐近行为类似于 $\mathcal{E}\big(n - n_0(t)\big)$，其中 $n_0(t) := \frac{1}{C}\ln(t)$，并且

$$\mathcal{E}(\nu) := \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta^*}Be^{-C\nu} - A\nu\right). \tag{3.7}$$

命题3.5 （渐近行为）。 设假设 3.4 成立，且 $\mathcal{E}$ 由 (3.7) 定义。设 $n_0(t) := \frac{1}{C}\ln(t)$，并令$\mu(t) := \mu_0 \ln\left(\ln t\right)\ln t$，其中 $\mu_0 > \max(C,1)$，且 $t>1$。那么存在常数 $K>0$，使得对于所有满足 $n \ge \mu(t)n_0(t)$ 的情形，我们有

$$\frac{1}{K}\mathcal{E}\big(n - n_0(t)\big) \le I_n(t) \le K\mathcal{E}\big(n - n_0(t)\big).$$

且 $\sum_{k=0}^{\lfloor \mu(t)n_0(t)\rfloor} I_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ （其中 $\lfloor \mu(t)n_0(t)\rfloor$ 是小于 $\mu(t)n_0(t)$ 的最大整数）。

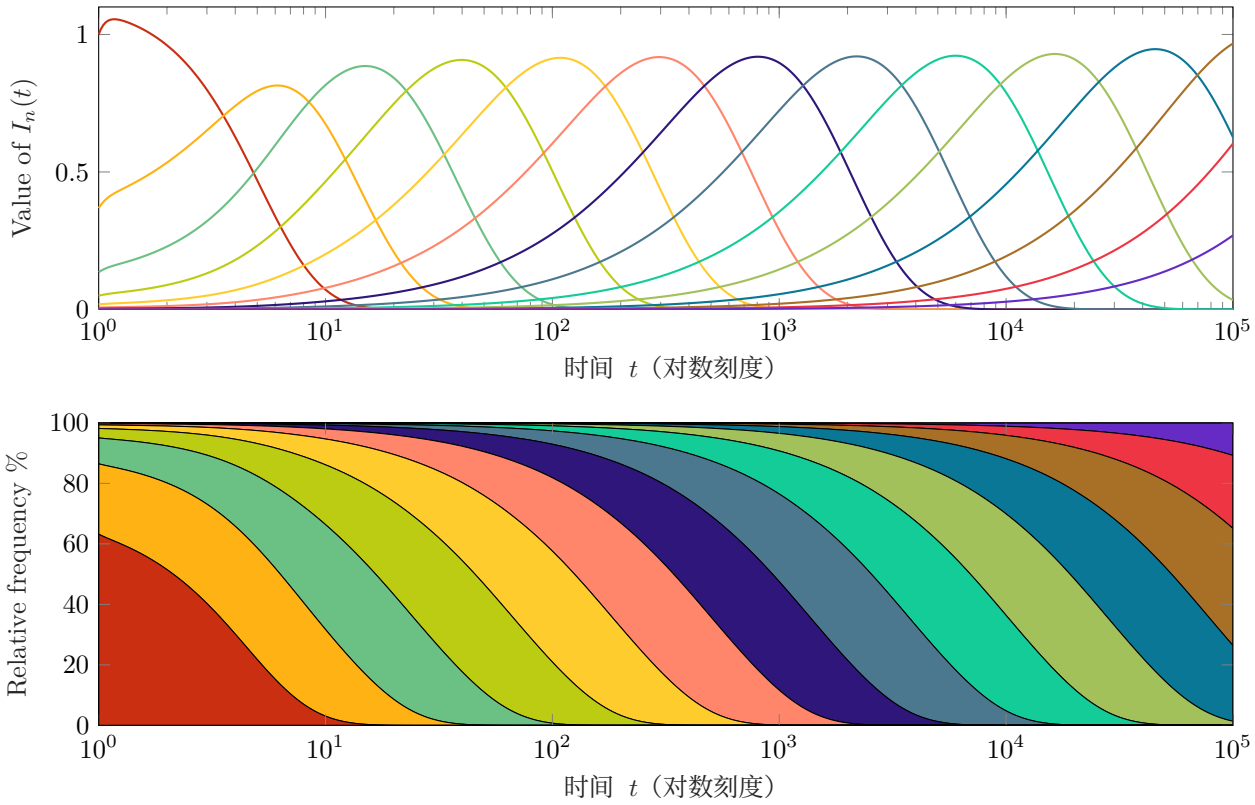

图2： 单价型情形2中解 $I_n(t)$的图像。颜色随机选取，以确保每个变体都有独特的颜色。上图表明，每个变体随时间变化的行为相似。下图表明，变体的多样性随时间推移近似保持恒定（更准确地说，种群中数量不可忽略的变体数始终大于某个正常数）。**上图：** $I_n(t)$的值。**下图：** 变体的相对频率随时间的变化。**参数：** $\Lambda = 10$, $\theta = 10$, $S_0 = 1$, $\gamma = 2$,$\beta^* = 4$, $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$。本次模拟共使用了 $N = 14$ 个变体。关于图中颜色的解释，请读者参阅本文的在线版本。

我们从 F 的渐近展开开始。

引理 3.6. 设假设 *3.4* 成立，并令 $F(\xi)$ 由 (3.3) 定义。则

$$F(\xi) = \xi^{-\frac{A}{C}} \times e^{\mathcal{O}(1)} \ as \ \xi \to \infty.$$

证明。 我们断言 F 满足以下函数方程：

$$F(\xi) = e^{-B\xi} + e^{-A} F(e^{-C}\xi).$$

事实上，

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-B\xi e^{-Cn} - An} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-An} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-B\xi)^k}{k!} \left(e^{-Cn}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-B\xi)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(A+kC)n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-B\xi)^k}{k!} \cdot \frac{1}{1 - e^{-A-kC}} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-B\xi)^k}{k!} \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-B\xi)^k}{k!} \left(\frac{1}{1 - e^{-A-kC}} - 1 \right) \\ &= e^{-B\xi} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-B\xi)^k}{k!} \frac{e^{-A-kC}}{1 - e^{-A-kC}} = e^{-B\xi} + e^{-A} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-Be^{-C}\xi)^k}{k!} = e^{-B\xi} + e^{-A} F\left(e^{-C\xi}\right). \end{aligned}$$

我们推导得出

$$\begin{aligned} F(e^C\xi) &= e^{-Be^C\xi} + e^{-A} F(\xi), \\ F(e^{2C}\xi) &= e^{-Be^{2C}\xi} + e^{-A} F(e^C\xi) = e^{-Be^{2C}\xi} + e^{-A-Be^C\xi} + e^{-2A} F(\xi), \\ F(e^{2C}\xi) &= e^{-Be^{3C}\xi} + e^{-A} F(e^{2C}\xi) = e^{-Be^{3C}\xi} + e^{-A-Be^{2C}\xi} + e^{-2A-Be^C\xi} + e^{-3A} F(\xi), \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$F(e^{nC}\xi) = e^{-nA}F(\xi) + \sum_{k=1}^{n} e^{-(n-k)A - Be^{kC}\xi} = e^{-nA}\left(F(\xi) + \sum_{k=1}^{n} e^{kA - Be^{kC}\xi}\right).$$

对于 $\xi \in [1, e^C),$，我们令 $X = \xi e^{nC}$，使得

$$n = \left\lfloor \frac{1}{C}\ln(X) \right\rfloor \text{ and } \xi = Xe^{-C\lfloor \ln(X)/C \rfloor}.$$

我们得到:

$$F(X) = \frac{1}{\exp\left(A\left\lfloor \frac{1}{C}\ln(X)\right\rfloor\right)}\left(F\left(\xi\right) + \sum_{k=1}^{n} e^{kA - Be^{kC}\xi}\right),$$

最后，由于 $X \to +\infty$,

$$F(X) = X^{-\frac{A}{C}} \times e^{\mathcal{O}(1)}.$$ □

命题*3.5*的证明。 由断言3.6可知，回忆（3.4）

$$\begin{aligned}\overline{S}(t) &= \frac{\gamma}{\beta^*} - \frac{1}{t\beta^*}\ln\left(F(t\overline{S}(t))\right) + \frac{1}{t\beta^*}\ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t)\right)\\ &= \frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A}{C\beta^*}\frac{\ln(t)}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}I_n(t) &= I_n^0 \exp\left(\left(\beta^* - Be^{-Cn}\right)\left(\frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A}{C\beta^*}\frac{\ln(t)}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right)t - \gamma t\right)\\ &= I_n^0 \exp\left(\frac{A}{C}\ln(t) - Be^{-Cn}\left(\frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A}{C\beta^*}\frac{\ln(t)}{t}\right)t + \mathcal{O}(1)\right)\\ &= \exp\left(-Be^{-Cn+\ln(t)}\left(\frac{\gamma}{\beta^*} + \frac{A}{C\beta^*}\frac{\ln(t)}{t}\right) + \frac{A}{C}\ln(t) - An + \mathcal{O}(1)\right)\\ &= \exp\left(-\left(1 + \frac{A}{C\gamma}\frac{\ln(t)}{t}\right)\frac{\gamma}{\beta^*}Be^{-C\left(n - \frac{1}{C}\ln(t)\right)} - A\left(n - \frac{1}{C}\ln(t)\right) + \mathcal{O}(1)\right)\\ &= \exp\left(-\left(1 + \frac{A}{C\gamma}\frac{\ln(t)}{t}\right)\frac{\gamma}{\beta^*}Be^{-C(n-n_0(t))} - A\big(n - n_0(t)\big) + \mathcal{O}(1)\right)\end{aligned}$$

其中 $n_0(t) = \frac{1}{C}\ln(t)$。因此，对于 $(n,t) \in \{(\tilde{n},\tilde{t}) : \tilde{n} \geq \mu(\tilde{t})n_0(\tilde{t})\}$，我们有

$$\frac{I_n(t)}{\mathcal{E}\big(n - n_0(t)\big)} = \exp\left(-\frac{A}{C\gamma}\frac{\ln(t)}{t}\frac{\gamma}{\beta^*}Be^{-C(n-n_0(t))} + \mathcal{O}(1)\right) = e^{\mathcal{O}(1)},$$

因为

$$0 \leq \frac{\ln(t)}{t}e^{-C(n-n_0(t))} \leq e^{\ln(\ln t) - \ln(t) - (\mu(t)-1)\ln(t)} = e^{(1-\mu_0)\ln(\ln t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

另一方面，如果 $n \leq \mu(t)n_0(t)$，那么

$$\begin{aligned}I_n(t) &= \exp\left[-\frac{\gamma}{\beta^*}Bte^{-Cn} - \frac{A}{C\beta^*}\ln(t)e^{-Cn} - An + \frac{A}{C}\ln(t) + \mathcal{O}(1)\right]\\ &\leq \exp\left[-\left(\frac{\gamma}{\beta^*}Bt - \frac{A}{C}\right)e^{-Cn} - An + \frac{A}{C}\left(\ln(t) - e^{-n}\right) + \mathcal{O}(1)\right] \leq e^{-An + \mathcal{O}(1)},\end{aligned}$$

因为 $n \leq \mu(t)n_0(t) = \frac{\mu_0}{C}\ln(\ln t)$，且 $\mu_0 > C$ 意味着对于较大的 t，有 $e^{-n} \geq \ln(t)^{\frac{2}{C}} \geq \ln(t)$，此时 e

$$\sum_{n=0}^{\lfloor \mu(t)n_0(t)\rfloor} I_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

根据勒贝格控制收敛定理。这证明了命题3.5。 □

3.1.3 单价型示例 3：高斯-指数情形。

假设3.7。 假设初始数据服从高斯分布，且适应度以指数速度收敛到其最大值：

$$I_n^0 = e^{-An^2} \text{ while } \beta^* - \beta_n = Be^{-Cn} \text{ for all } n \geq 0, \tag{3.8}$$

其中 $A > 0$、 $B > 0$ 和 $C > 0$ 为给定常数。

在此假设下，我们可以证明，只要 C 足够小，整个变体族的动态实际上至多同时受三个变体支配（而且大多数时候只受一个变体支配）。令 W_0 为 Lambert-W 函数的主分支，也就是说，它是满足$W_0(x)e^{W_0(x)} = x$ 的光滑实函数，其中该条件对所有 $x \geq e^{-1}$ 均成立，且 $\lim_{x\to+\infty} W_0(x) = +\infty$；详情参见 Corless等（1996）。我们定义：

$$Y(t) = \frac{1}{C} W_0\left(\frac{BC^2}{2A} t\overline{S}(t)\right). \tag{3.9}$$

命题3.8。 设假设3.7成立。若 C 足够小，则存在足够小的 $\delta > 0$ ，使得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(t) \sim \begin{cases} I_{N(t)-1}(t) + I_{N(t)}(t) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } -1/2 \leq R(t) \leq -1/2 + \delta, \\ I_{N(t)} \text{ for } t \gg 1 \text{ and } -1/2 + \delta \leq R(t) \leq 1/2 - \delta, \\ I_{N(t)}(t) + I_{N(t)+1}(t) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } 1/2 - \delta < R(t) \leq 1/2, \end{cases}$$

其中， $N(t) = \left\lfloor Y(t) + \frac{1}{2} \right\rfloor$， $R(t) = Y(t) - N(t)$ 和 $Y(t)$ 在 (3.9) 中定义。

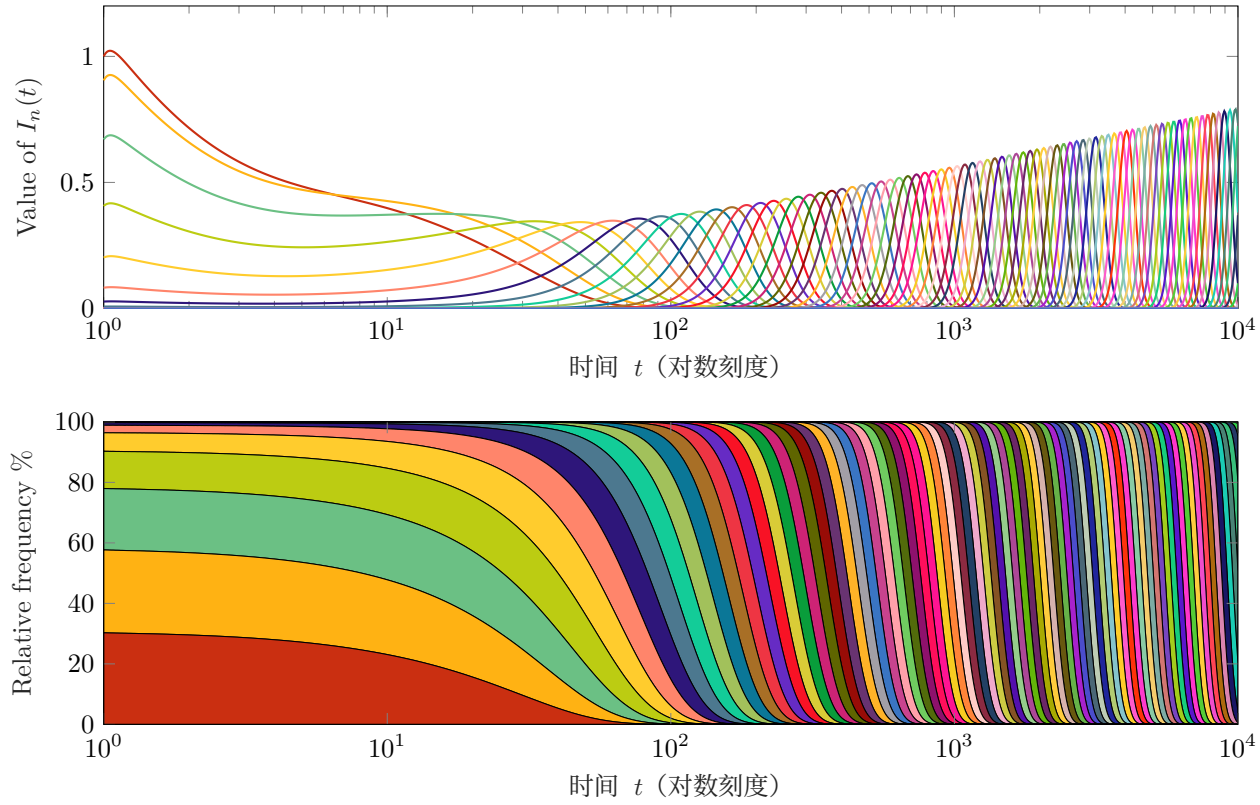

图3： 单价型情形 3 中解 $I_n(t)$ 的图像。颜色随机选取，使每个变体都有独特的颜色。底部的图像表明，变体多样性随时间推移而降低，因为变体之间分离的陡峭程度正在缓慢增加（我们的理论预测表明，在精心选定的时刻只剩下一个变体）。**上图：** $I_n(t)$ 的值。**下图：** 变体的相对频率随时间的变化。**参数：** $\Lambda = 10$, $\theta = 10$, $S_0 = 1$, $\gamma = 2$, $\beta^* = 1$, $A = 0.1$, $B = 1$, $C = 0.03$。本次模拟共使用了 $N = 100$ 个变体。关于图中颜色的解释，请读者参阅本文的在线版本。

我们将 $\xi > 0$, $x(\xi)$ 定义为所谓超越朗伯方程解处的 > 0 n

$$xe^{Cx} = \frac{BC}{2A}\xi.$$

注意， $x(\xi)$ 可以借助 Lambert-W 函数的主分支表示为 $W_0(z)$。更确切地说，$x(\xi) = \frac{1}{C} W_0\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right)$。

我们用 $n(\xi)$ 表示距离 $x(\xi)$ 最近的整数，即

$$x(\xi) = n(\xi) + r(\xi) \text{ with } n(\xi) = \left\lfloor x(\xi) + \frac{1}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N} \text{ and } r(\xi) \in [-1/2, 1/2). \tag{3.10}$$

引理3.9。 由(3.3) 定义的函数 F 满足以下渐近行为

$$F(e^{-Cr(\xi)}\xi) \sim e^{-An(\xi)^2 - B\xi e^{-Cx(\xi)}} = e^{-An(\xi)^2 - \frac{2A}{C}x(\xi)} \text{ as } \xi \to \infty.$$

证明。 我们定义函数 $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 如下

$$G(x, \xi) = Ax^2 + B\xi e^{-Cx}, \ \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.11}$$

现在我们首先断言:

$$\sum_{n=n(\xi)+1}^{\infty} e^{-G(n, e^{-Cr(\xi)}\xi)} = o\left(e^{-G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi)}\right) \text{ as } \xi \to \infty. \tag{3.12}$$

为证明这一性质，注意到对于 $p \geq 1$ ，我们有

$$\begin{aligned}
G(n(\xi)+p, e^{-Cr(\xi)}\xi) - G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi) &= Be^{-C(n(\xi)+p)}e^{-Cr(\xi)}\xi + A(n(\xi)+p)^2 - Be^{-Cn(\xi)}e^{-Cr(\xi)}\xi - An(\xi)^2 \\
&= B\left(e^{-Cp} - 1\right)e^{-Cx(\xi)}\xi + A\left(2n(\xi)p + p^2\right) \\
&= B\left(e^{-Cp} - 1\right)\frac{2A}{BC}x(\xi) + A\left(2n(\xi)p + p^2\right) \\
&= x(\xi)\left[-\left(1 - e^{-Cp}\right)\frac{2A}{C} + 2Ap\right] + A\left(p - r(\xi)\right)^2 - Ar(\xi)^2 \\
&\geq \frac{2A}{C}x(\xi)\left[-\left(1 - e^{-Cp}\right) + Cp\right] + A\left(p - 1/2\right)^2 - A/4.
\end{aligned}$$

由上述估计可得

$$\sum_{n=n(\xi)+1}^{\infty} e^{-G(n, e^{-Cr(\xi)}\xi) + G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi)} \leq e^{-\frac{2A}{C}x(\xi)\left[C - \left(1 - e^{-C}\right)\right]} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-A(p-1/2)^2 + A/4} \to 0 \text{ as } \xi \to \infty, \tag{3.13}$$

这证明了（3.17）。

接下来，我们声称有

$$\sum_{n=0}^{n(\xi)-1} e^{-G(n, e^{-Cr(\xi)}\xi)} = o\left(e^{-G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi)}\right) \text{ as } \xi \to \infty. \tag{3.14}$$

要理解这一点，请注意，对于 $1 \leq p \leq n(\xi)$，我们有

$$\begin{aligned}
G(n(\xi)-p, e^{-Cr(\xi)}\xi) - G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi) &= Be^{-C(n(\xi)-p)}e^{-Cr(\xi)}\xi + A(n(\xi)-p)^2 - Be^{-Cn(\xi)}e^{-Cr(\xi)}\xi - An(\xi)^2 \\
&= B(e^{Cp} - 1)e^{-Cx(\xi)}\xi + A[(n(\xi)-p)^2 - n(\xi)^2] \\
&= B(e^{Cp} - 1)e^{-Cx(\xi)}\xi - A[2px(\xi) - p^2 - 2pr(\xi)] \\
&= \frac{2A}{C}x(\xi)[e^{Cp} - 1 - Cp] + A(p^2 - 2pr(\xi)) \\
&\geq 2Ax(\xi)[e^C - 1 - C] + A(p^2 - p).
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\sum_{n=0}^{n(\xi)-1} e^{-G(n, e^{-Cr(\xi)}\xi) + G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi)} \leq e^{-\frac{2A}{C}x(\xi)\left[e^C - 1 - C\right]} \sum_{p=0}^{n(\xi)} e^{-A\left(p^2 - p\right)} \to 0 \text{ as } \xi \to \infty. \tag{3.15}$$

结合 (3.17) 和 (3.14) 可得

$$F\left(e^{-Cr(\xi)}\xi\right) = e^{-G(n(\xi), e^{-Cr(\xi)}\xi)}(1 + o(1)) \text{ as } \xi \to \infty.$$

证明至此完成。 □

当 C 足够小时，我们可以得到一个更精细的估计，这有助于理解序列 $(I_n(t))_{n\geq 0}$ 的长期行为。

引理 3.10. 取 $C>0$ 充分小，使得

$$e^{-C/2}(e^{2C}-1)-2C>0 \text{ and } C-e^{C/2}\left(1-e^{-2C}\right)>0. \tag{3.16}$$

则在(3.3)中定义的函数 F 满足

$$F(\xi)=\sum_{p=-1,0,1} e^{-A(n(\xi)+p)^2-B\xi e^{-C(n(\xi)+p)}}+o\left(e^{-An(\xi)^2-B\xi e^{-Cn(\xi)}}\right) \text{ as } \xi\to\infty.$$

证明. 回顾 (3.11) 中函数 G 的定义，我们来证明:

$$\sum_{p=n(\xi)+2}^{\infty} e^{-G(p,\xi)}=o\left(e^{-G(n(\xi),\xi)}\right) \text{ as } \xi\to\infty. \tag{3.17}$$

为证明这一性质，注意到对于 $p\geq 2$ ，我们有

$$\begin{aligned}
G(n(\xi)+p,\xi)-G(n(\xi),\xi) &= Be^{-C(n(\xi)+p)}\xi+A(n(\xi)+p)^2-Be^{-Cn(\xi)}\xi-An(\xi)^2\\
&= B\left(e^{-Cp}-1\right)e^{-Cx(\xi)}e^{Cr(\xi)}\xi+A\left(2n(\xi)p+p^2\right)\\
&= e^{Cr(\xi)}B\left(e^{-Cp}-1\right)\frac{2A}{BC}x(\xi)+A\left(2n(\xi)p+p^2\right)\\
&= x(\xi)\left[-e^{Cr(\xi)}\left(1-e^{-Cp}\right)\frac{2A}{C}+2Ap\right]+A\left(p-r(\xi)\right)^2-Ar(\xi)^2\\
&\geq \frac{2A}{C}x(\xi)\left[-e^{C/2}\left(1-e^{-Cp}\right)+Cp\right]+A\left(p-1/2\right)^2-A/4
\end{aligned}$$

现在，映射 $p\mapsto -e^{C/2}\left(1-e^{-Cp}\right)+Cp$ 在 $p\geq 1$ 上递增，因此

$$\sum_{n=n(\xi)+2}^{\infty} e^{-G(n,\xi)+G(n(\xi),\xi)}\leq e^{-\frac{2A}{C}x(\xi)\left[2C-e^{C/2}\left(1-e^{-2C}\right)\right]}\sum_{p=1}^{\infty}e^{-A(p-1/2)^2+A/4}. \tag{3.18}$$

最后，由 (3.16) 可得

$$2C-e^{C/2}\left(1-e^{-2C}\right)>0 \text{ for } C>0 \text{ small enough}$$

因此

$$\sum_{p=n(\xi)+2}^{\infty} e^{-G(p,\xi)+G(n(\xi),\xi)}\leq e^{-\frac{2A}{C}x(\xi)\left[2C-e^{C/2}\left(1-e^{-2C}\right)\right]}\sum_{p=1}^{\infty}e^{-A(p-1/2)^2+A/4}\to 0 \text{ as } \xi\to\infty, \tag{3.19}$$

也就是说

$$\sum_{p=n(\xi)+2}^{\infty} e^{-G(p,\xi)}=o\left(e^{-G(n(\xi),\xi)}\right) \text{ as } \xi\to\infty. \tag{3.20}$$

接下来，我们声称有

$$\sum_{p=0}^{n(\xi)-2} e^{-G(p,\xi)}=o\left(e^{-G(n(\xi),\xi)}\right) \text{ as } \xi\to\infty. \tag{3.21}$$

为说明这一点，注意对于 $2\leq p\leq n(\xi)$，我们有

$$\begin{aligned}
G(n(\xi)-p,\xi)-G(n(\xi),\xi) &= Be^{-C(n(\xi)-p)}\xi+A(n(\xi)-p)^2-Be^{-Cn(\xi)}\xi-An(\xi)^2\\
&= B(e^{Cp}-1)e^{-Cx(\xi)}e^{Cr(\xi)}\xi+A[(n(\xi)-p)^2-n(\xi)^2]\\
&= B(e^{Cp}-1)e^{-Cx(\xi)}e^{Cr(\xi)}\xi-A[2px(\xi)-p^2-2pr(\xi)]\\
&= \frac{2A}{C}x(\xi)[e^{Cr(\xi)}e^{Cp}-1-Cp]+A(p^2-2pr(\xi))\\
&= \frac{2A}{C}x(\xi)[e^{-C/2}e^{Cp}-1-Cp]+A(p^2-2pr(\xi))\\
&\geq 2Ax(\xi)[e^{-C/2}(e^{C}-1)-C]+A(p^2-p).
\end{aligned}$$

现在，映射 $p\mapsto e^{-C/2}e^{Cp}-1-Cp$ 对于 $p\geq 1$ 是递增的，因此

$$G(n(\xi)-p,\xi)-G(n(\xi),\xi)\geq 2Ax(\xi)[e^{-C/2}(e^{2C}-1)-2C]+A(p^2-p).$$

由 (3.16) 可得

$$e^{-C/2}(e^{2C}-1)-2C>0,$$

从而我们得到

$$\sum_{p=0}^{n(\xi)-2} e^{-G(p,\xi)+G(n(\xi),\xi)} \to 0 \text{ as } \xi \to \infty,$$

结论得证。 □

现在证明，当 C 足够小时，随着时间推移，至多有三个变体能够同时存活。具体引理如下。

推论 3.11. 固定满足 (3.16) 的 C，并假设假设 *3.8* 成立。对于 $t \gg 1$, $N(t)$ 和 $R(t)$，定义 $Y(t)$ 的最接近整数部分和小数部分，其中 $Y(t)$ 是方程的解

$$Y(t)=\frac{1}{C}W_0\left(\frac{BC^2}{2A}t\overline{S}(t)\right).$$

于是有以下结论：

$$\sum_{p=0}^{N(t)-2} I_p(t)+\sum_{p=N(t)+2}^{\infty} I_p(t)=o\left(I_{N(t)}(t)\right) \ as\ t\to\infty.$$

注意，使用上文引入的记号（见 (3.10)），我们有

$$N(t)=n\left(t\overline{S}(t)\right) \text{ and } R(t)=r\left(t\overline{S}(t)\right).$$

注 3.12. 上述推论意味着，至少当 C 足够小时，长期来看，同时存活的变体最多只有三种，即变体 $N(t)-1$、$N(t)$ 和 $N(t)+1$。

证明。 证明是一个 d 这是对估计式 (3.20) 和 (3.21) 的直接推论。事实上，对于所有 $n\geq 0$ 和 $t>0$，我们有

$$\frac{I_n(t)}{I_{N(t)}(t)}=e^{-A(n^2-N(t)^2)-B(e^{-Cn}-e^{-CN(t)}))t\overline{S}(t)}=e^{-G(n,t\overline{S}(t))+G(N(t),t\overline{S}(t))},$$

结果由这两个估计得出。 □

命题*3.8*的证明。 现在我们来证明，在大多数情况下，最终只能有一个变体存活。为此，沿用上文的记号，注意到我们有

$$\begin{aligned}\frac{I_{N-1}(t)}{I_{N(t)+1}(t)}&=e^{-A((N(t)-1)^2-(N(t)+1)^2)-B(e^{-C(N(t)-1)}-e^{-C(N(t)+1)}))t\overline{S}(t)}\\&=e^{-A(-4N(t)-Be^{-CN(t)-CR(t)}e^{CR(t)}(e^{C}-e^{-C}))t\overline{S}(t)}\\&=e^{4AN(t)-2A/CY(t)e^{CR(t)}(e^{C}-e^{-C}))}\\&=e^{2AN(t)\left(2-1/Ce^{CR(t)}(e^{C}-e^{-C}))\right)+\mathcal{O}(1)},\end{aligned}$$

当时时
彩开奖

$$\begin{aligned}\frac{I_{N-1}(t)}{I_{N(t)}(t)}&=e^{-A((N(t)-1)^2-N(t)^2)-B(e^{-C(N(t)-1)}-e^{-CN(t)}))t\overline{S}(t)}\\&=e^{2AN(t)\left(1-1/Ce^{CR(t)}(e^{C}-1))\right)+\mathcal{O}(1)},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{I_{N+1}(t)}{I_{N(t)}(t)}&=e^{-A((N(t)+1)^2-N(t)^2)-B(e^{-C(N(t)+1)}-e^{-CN(t)}))t\overline{S}(t)}\\&=e^{-2AN(t)\left(1+1/Ce^{CR(t)}(e^{-C}-1))\right)+\mathcal{O}(1)}.\end{aligned}$$

因此，令

$$X_1(C)=\frac{1}{C}\ln\frac{C}{\sinh(C)},\ X_2(C)=\frac{1}{C}\ln\frac{C}{e^{C}-1} \text{ and } X_3(C)=-\frac{1}{C}\ln\frac{1-e^{-C}}{C},$$

对于所有 $\delta > 0$，我们有

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ X_1(C)+\delta\le R(t)}} \frac{I_{N-1}(t)}{I_{N(t)+1}(t)} = 0, \tag{3.22}$$

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ R(t)\le X_1(C)-\delta}} \frac{I_{N+1}(t)}{I_{N(t)-1}(t)} = 0, \tag{3.23}$$

and

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ X_2(C)+\delta\le R(t)}} \frac{I_{N-1}(t)}{I_{N(t)}(t)} = 0 \text{ and } \lim_{\substack{t\to\infty \\ X_3(C)-\delta\ge R(t)}} \frac{I_{N+1}(t)}{I_{N(t)}(t)} = 0. \tag{3.24}$$

为了理解上述极限的含义，注意到

$$X_1(C) = -C/6 + \mathcal{O}(C^2),\ \ X_2(C) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(C) \text{ and } X_3(C) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(C) \text{ as } C \to 0.$$

因此，利用 (3.24)，如果 C 足够小，那么对某个足够小的 $\delta > 0$，我们有

$$I_{N(t)-1}(t) = o\big(I_{N(t)}(t)\big) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } -\frac{1}{2} + \delta \le R(t) \le \frac{1}{2},$$
$$I_{N(t)+1}(t) = o\big(I_{N(t)}(t)\big) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } -\frac{1}{2} < R(t) \le \frac{1}{2} - \delta.$$

这意味着，大多数时候（当 $R(t)$ 接近 $-1/2$ 时），只有变体 $N(t)$ 和 $N(t)-1$ 能够存活。利用 (3.23)，如果 C 足够小，那么对某个足够小的 $\delta > 0$，我们有

$$I_{N(t)+1}(t) = o\big(I_{N(t)-1}(t)\big) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } R(t) \in \left[-\frac{1}{2} + \delta, -\delta\right].$$

当 $C > 0$ 足够小时，存在足够小的 $\delta > 0$，使得变体存活情况如下图所示

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(t) \sim \begin{cases} I_{N(t)-1}(t) + I_{N(t)}(t) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } -1/2 \le R(t) \le -1/2 + \delta, \\ I_{N(t)} \text{ for } t \gg 1 \text{ and } -1/2 + \delta \le R(t) \le 1/2 - \delta, \\ I_{N(t)}(t) + I_{N(t)+1}(t) \text{ for } t \gg 1 \text{ and } 1/2 - \delta < R(t) \le 1/2. \end{cases}$$

这证明了命题3.8。 □

3.2 替代动力学 2：双价 γ_n

我们考虑序列 γ_n 仅取两个值的情形，更准确地说，假设存在两个常数 $0 < \gamma_1 < \gamma_2$，使得 $\gamma_{2n+1} \equiv \gamma_1 > 0$ 且 $\gamma_{2n} \equiv \gamma_2$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。我们的目标是给出一些例子，展示不满足假设 2.8 时可能出现的行为；具体而言，我们不假设总质量收敛。

回想 $\alpha^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta_n}{\gamma_n}$，我们可以将总质量写为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{\beta_n \overline{S}(s) - \gamma_n t} = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{\left(\frac{\beta_n}{\gamma_n} - \alpha^*\right)\gamma_n t\overline{S}(t) + \alpha^*(\gamma_n - \gamma^*)t\overline{S}(t) + \alpha^*\gamma^* t\overline{S}(t) - (\gamma_n - \gamma^*)t - \gamma^* t} \\ &= e^{\gamma^* t(\alpha^*\overline{S}(t) - 1)} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{\gamma_n\left(\frac{\beta_n}{\gamma_n} - \alpha^*\right)t\overline{S}(t) + (\gamma_n - \gamma^*)(\alpha^*\overline{S}(t) - 1)t} \\ &= e^{\gamma^* t(\alpha^*\overline{S}(t) - 1)} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{-\gamma_n\left(\alpha^* - \frac{\beta_n}{\gamma_n}\right)t\overline{S}(t) - \alpha^*(\gamma^* - \gamma_n)\left(\overline{S}(t) - \frac{1}{\alpha^*}\right)t} \\ &= e^{\gamma_1 t(\alpha^*\overline{S}(t) - 1)} \mathcal{F}\big(t, \overline{S}(t)\big), \end{aligned} \tag{3.25}$$

其中

$$\mathcal{F}\big(t, \overline{S}(t)\big) := \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^0 e^{-\gamma_n\left(\alpha^* - \frac{\beta_n}{\gamma_n}\right)t\overline{S}(t) - \alpha^*(\gamma^* - \gamma_n)\left(\overline{S}(t) - \frac{1}{\alpha^*}\right)t}. \tag{3.26}$$

由于 $\gamma_{2n+1} = \gamma_1$ 且 $\gamma_{2n} = \gamma_2$，我们令

$$\beta_n^1 := \beta_{2n+1}, \quad I_n^{0,1} := I_{2n+1}^0, \quad \beta_n^2 := \beta_{2n}, \quad \text{and } I_{2n}^{0,2} := I_{2n}^0,$$

因此，我们可以将 (3.26) 重写为

$$\mathcal{F}\big(t, \overline{S}(t)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^{0,1} e^{-\gamma_1\left(\alpha^* - \frac{\beta_n^1}{\gamma_1}\right)t\overline{S}(t)} + \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^{0,2} e^{-\gamma_2\left(\alpha^* - \frac{\beta_n^2}{\gamma_2}\right)t\overline{S}(t) - (\gamma_1 - \gamma_2)\left(\alpha^*\overline{S}(t) - 1\right)t}$$

$$= F_1\big(t\overline{S}(t)\big) + e^{-(\gamma_1-\gamma_2)(\alpha^*\overline{S}(t)-1)t}F_2\big(t\overline{S}(t)\big), \tag{3.27}$$

其中

$$F_1(\xi) := \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^{0,1} e^{-\gamma_1\left(\alpha^* - \frac{\beta_n^1}{\gamma_1}\right)\xi} \text{ and } F_2(\xi) := \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^{0,2} e^{-\gamma_2\left(\alpha^* - \frac{\beta_n^2}{\gamma_2}\right)\xi}. \tag{3.28}$$

进一步地，我们注意到，对（3.25）取对数可得

$$\gamma_1\big(\alpha^*\overline{S}(t) - 1\big)t = -\ln \mathcal{F}\big(t, \overline{S}(t)\big) + \ln \mathcal{I}(t),$$

因此，(3.27) 变为

$$\mathcal{F}\big(t, \overline{S}(t)\big) = F_1\big(t\overline{S}(t)\big) + \left(\frac{\mathcal{F}(t, \overline{S}(t))}{\mathcal{I}(t)}\right)^{\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_1}} F_2\big(t\overline{S}(t)\big). \tag{3.29}$$

在后文中，我们将假设 $\gamma_1 = 2\gamma_2$。 在这种情况下，(3.29) 是关于 $\sqrt{\mathcal{F}}$ 的二次多项式方程， $S(t)$ 对其求逆可得 $\mathcal{F}$ 的以下表达式：

$$\mathcal{F}\big(t, \overline{S}(t)\big) = \frac{1}{4\mathcal{I}(t)}\left(F_2\big(t\overline{S}(t)\big) + \sqrt{F_2\big(t\overline{S}(t)\big)^2 + 4F_1\big(t\overline{S}(t)\big)\mathcal{I}(t)}\right)^2. \tag{3.30}$$

3.2.1 双价示例 1：意外的选择

首先，让我们解释一下本小节标题的含义。根据命题 2.9，我们可以证明，最终通过竞争（在适应度选择之后）被选择的表型，是使 γ_n （在我们的情形中为 γ_1）达到最大值的表型。在本节中，我们将证明，对于某些经过精心选择的初始数据，选择过程可以使所有表达γ_1 表型的病原体消失。我们认为这是一个出乎意料的结果。我们在以下假设下开展研究。

假设 3.13。 我们假设 $\gamma_1 = 2\gamma_2$, $\beta_n^1 = \gamma_1\alpha^* - B_1e^{-C_1n}$, $I^{0,\ n}{}^1 = e^{-A_1n^2}$, $\beta_n^2 = \gamma_2\alpha^* - B_2e^{-C_2n}$ 和 $I^{0,\ n}{}^2 = e^{-A_2n}$。

我们的命题如下。

命题3.14。 在假设 3.13 下，我们有

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t) = 0 \text{ and } \lim_{t\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t) = \frac{\theta}{\gamma_2\alpha^*}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big) > 0,$$

其中， $I_n^1(t) = I_{2n+1}(t)$，且 $I_n^2(t) = I_{2n}(t)$。

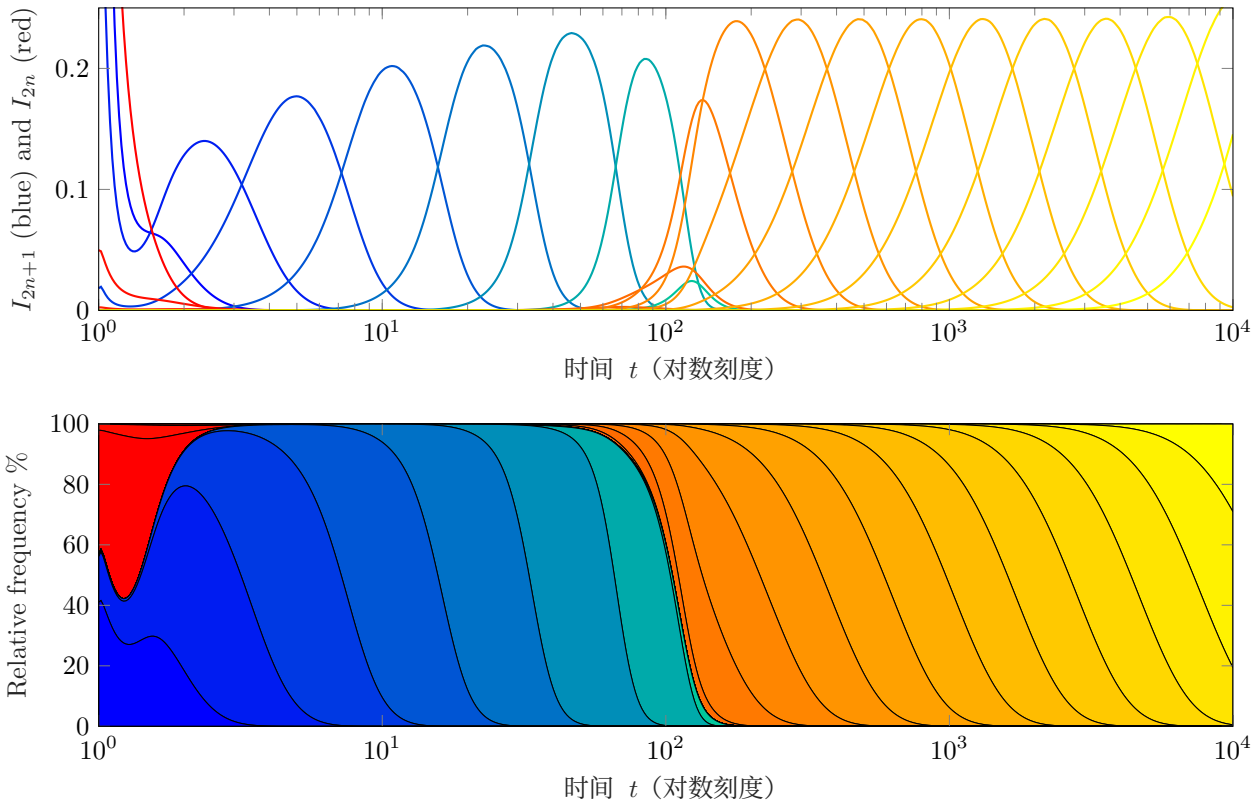

图4： 双价情形1中解 $I_n(t)$ 的图。 $I_n(t)$ 这一族分为两组：$I_{2n+1}(t) = I_n^1(t)$ 与 γ_1 相关，绘制为一组冷色（蓝色到绿色）； $I_{2n}(t) = I_n^2(t)$ 与γ_2 相关，绘制为一组暖色（红色到黄色）。两幅图（上图和下图）都表明， γ_1族起初占据优势，但最终 γ_2 族赢得竞争（在 $t \approx 10^2$之后）。 **上图：** 变体密度 $I_n(t)$ 的值。 **下图：** 变体的相对频率随时间的变化。 **参数：** $\Lambda = 10$, $\theta = 10$, $S_0 = 1$, $\alpha^* = 2$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 10$, $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $B_1 = B_2 = 10$, $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$。族1使用了共 $N_1 = 10$ 个变体，族2使用了 $N_2 = 20$ 个变体。关于图中颜色的解释，请读者参阅本文的在线版本。 –

命题*3.14*的证明。我们将 (3.30) 改写为:

$$\mathcal{F}\big(t,\overline{S}(t)\big) = \frac{F_2\big(t\overline{S}(t)\big)^2}{4\mathcal{I}(t)}\left(1+\sqrt{1+4\mathcal{I}(t)\frac{F_1\big(t\overline{S}(t)\big)}{F_2\big(t\overline{S}(t)\big)^2}}\right)^2.$$

由引理3.9可知$\mathcal{I}(t) \asymp 1$, that $F_1\big(t\underline{S}(t)\big) = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{A_1}{2C_1}\ln(t\underline{S}(t))^2}\right)$，由断言3.6可知 $F_2\big(t\underline{S}(t)\big) \asymp \big(t\underline{S}(t)\big)^{-\frac{A_2}{C_2}}$。特别地，我们得到

$$4\mathcal{I}(t)\frac{F_1\big(t\overline{S}(t)\big)}{F_2\big(t\overline{S}(t)\big)^2} = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{A_1}{2C_1}\ln(t\overline{S}(t))^2+\frac{A_2}{C_2}\ln(t\overline{S}(t))}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

从而

$$\mathcal{F}\big(t,\overline{S}(t)\big) = \frac{F_2\big(t\overline{S}(t)\big)^2}{4\mathcal{I}(t)}\big(1+o(1)\big)$$

并且由式（3.25）

$$\gamma_1(\alpha^*\overline{S}(t)-1)t = -2\ln\big(F_2(t\overline{S}(t))\big) + \mathcal{O}(1).$$

最后我们得到

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t) = e^{\gamma_1(\alpha^*\overline{S}(t)-1)t}F_1\big(t\overline{S}(t)\big) = \mathcal{O}\left(\frac{F_1\big(t\overline{S}(t)\big)}{F_2\big(t\overline{S}(t)\big)^2}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

接下来，我们证明 $\sum I_n^2(t)$ 收敛到一个正常数。我们知道 $\sum I_n^1(t) \to 0$，并且根据定理 2.6，$S(t) \to \frac{1}{\alpha^*}$，且 $S'(t) \to 0$。利用方程 (1.1a) 中的第一个方程，我们得到:

$$-\frac{S'(t)-\Lambda+\theta S(t)}{S(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n I_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n^1 I_n^1(t) + \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n^2 I_n^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n^2 I_n^2(t) + \mathcal{O}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_2 \left(\frac{\beta_n^2}{\gamma_2} - \alpha^* \right) I_n^2(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_2 \alpha^* I_n^2(t) + o(1) = \gamma_2 \alpha^* \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t) + o(1),$$

这里我们用到了 $\sum \left(\frac{\beta_n}{\gamma_2} - \alpha^* \right) I_n^2(t) \to 0$ 这一事实，下面将对此加以论证。暂且接受这一事实，让我们完成论证。现在我们有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t) = -\frac{1}{\gamma_2 \alpha^*} \left(\frac{S'(t) - \Lambda + \theta S(t)}{S(t)} \right) + o(1) = \frac{\theta}{\gamma_2 \alpha^*} \left(\frac{\Lambda}{\theta} \alpha^* - 1 \right) + o(1) = \frac{\theta}{\gamma_2 \alpha^*} (\mathcal{R}_0 - 1) + o(1),$$

这正是命题3.14的第二部分。

还需证明，当 $t \to +\infty$ 时，$\sum \left(\frac{\beta_n}{\gamma_2} - \alpha^* \right) I_n^2(t) \to 0$。任意固定 $\varepsilon > 0$。令 $I^\infty := \frac{2\Lambda}{\min(\theta, \gamma_0)}$，从而根据引理 5.3，当 t 足够大时，有 $\sum I_n^2(t) \le I^\infty$。令 $\mathcal{N}_\varepsilon$ 为由下式定义的指标集

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{\beta_n^2}{\gamma_2} - \alpha^* \right| \le \frac{\varepsilon}{2I^\infty} \right\}.$$

Then

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} \left(\frac{\beta_n}{\gamma_2} - \alpha^* \right) I_n^2(t) \le \frac{\varepsilon}{2I^\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

当 t 足够大时。另一方面，对于 $n \in \mathcal{N}_\varepsilon^c := \mathbb{N} \backslash \mathcal{N}_\varepsilon$，有 $\alpha^* - \frac{\beta_n}{\gamma_2} \ge \frac{\varepsilon}{2I^\infty}$，因此

$$I_n^2(t) = I_n^{0,2} e^{\gamma_2 \left(\frac{\beta_n}{\gamma_2} - \alpha^* \right) \overline{S}(t) t + \gamma_2 \left(\alpha^* \overline{S}(t) - 1 \right) t} \le I_n^{0,2} e^{-\frac{\gamma_2 \varepsilon}{2I^\infty} \overline{S}(t) t + \gamma_2 (\alpha^* \overline{S}(t) - 1) t} \le I_n^{0,2} \exp\left(-\frac{\gamma_2 \varepsilon}{8 I^\infty \alpha^*} t \right),$$

只要 $S(t) \ge \frac{1}{2\alpha^*}$ 且 $|\alpha^* S(t) - 1| \le \frac{\varepsilon}{8 I^\infty \alpha^*}$，这在 t 足够大时成立。因此

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon^c} I_n^2(t) \le e^{-\frac{\gamma_2 \varepsilon}{8 I^\infty \alpha^*} t} \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon^c} I_n^{0,2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

最后

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t) = \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon} I_n^2(t) + \sum_{n \in \mathcal{N}_\varepsilon^c} I_n^2(t) \le \varepsilon,$$

当 t 足够大时。命题3.14的证明至此完成。 □

3.2.2 双价示例 2：交替持续

在本小节中，我们给出一个示例，展示一种非常特殊的渐近行为：类型 γ_1 和 γ_2都 渐近持久，且在种群中交替占据优势。这导致感染者总量 $\sum I_n(t)$在两个不同的值之间波动。特别是，这表明，要获得质量的渐近行为，确实需要额外的假设（例如假设 2.8），并且定理 2.6 的结论在某种意义上是尖锐的。

我们采用以下假设。

假设 3.15. 我们假设 $\gamma_1 = 2\gamma_2$, $\beta_n^1 = \gamma_1 \alpha^* - B e^{-Cn}$, $I^{0,1}_n = I_0^1 e^{-An^2}$, $\beta_n^2 = \gamma_2 \alpha^* - \frac{B}{2} e^{-\frac{C}{3} n}$和$I^{0,2}_n = I_0^2 e^{-\frac{A}{18} n^2}$，其中 $A > 0$为某些正常数。 $B > 0$和 $C > 0$。

我们的主张如下。

命题3.16。 在假设 3.15 下，存在两个序列 $t_k^1 \to +\infty$ 和 $t_k^2 \to +\infty$，当 $k \to +\infty$时，使得

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t_k^1) = \frac{\theta}{\gamma_1 \alpha^*} (\mathcal{R}_0 - 1) > 0 \text{ and } \lim_{t \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t_k^1) = 0,$$

and

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t_k^2) = 0 \text{ and } \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t_k^2) = \frac{\theta}{\gamma_2 \alpha^*} (\mathcal{R}_0 - 1) > 0,$$

其中 $I_n^1(t) = I_{2n+1}(t)$，且 $I_n^2(t) = I_{2n}(t)$。

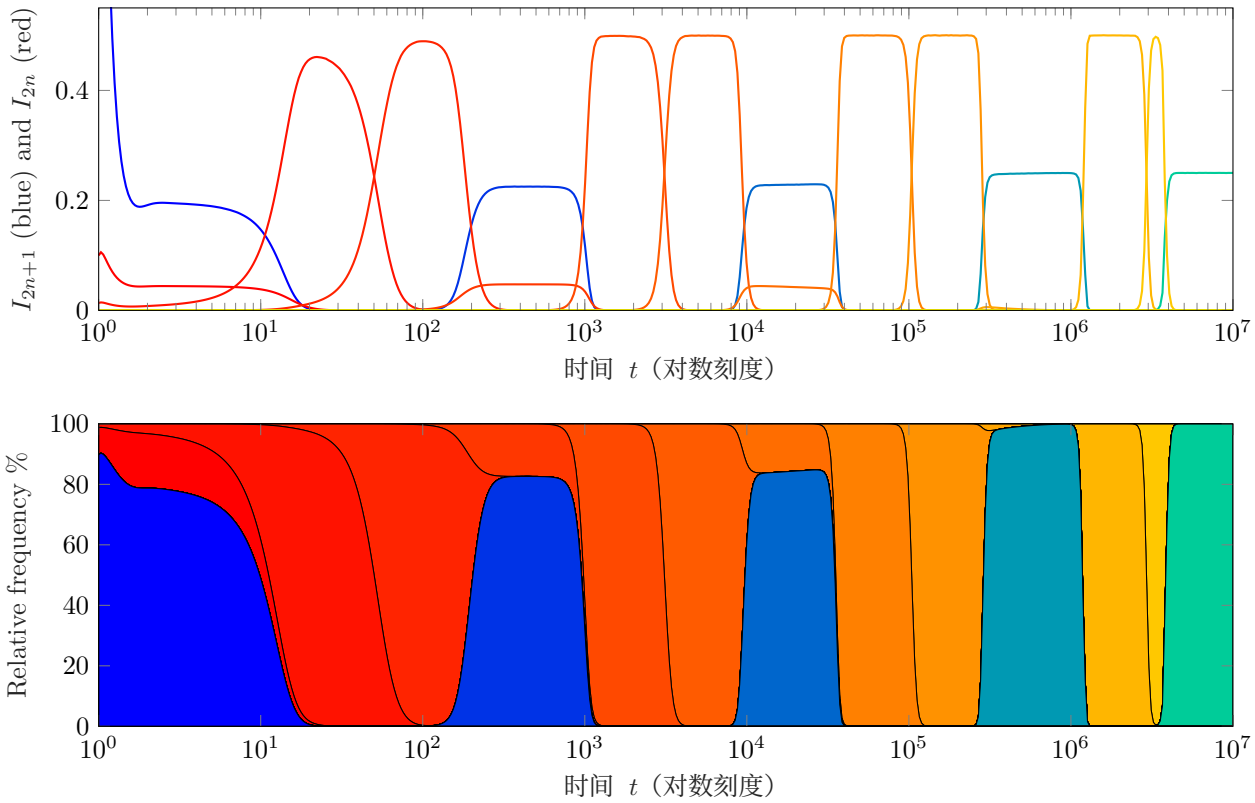

图5： 假设 3.15 下解 $I_n(t)$ 的图像。族 $I_n(t)$ 分为两组：$I_{2n+1}(t) = I_n^1(t)$ 与 γ_1 相关，绘制为一组冷色（蓝色至绿色）；$I_{2n}(t) = I_n^2(t)$ 与γ_2 相关，绘制为一组暖色（红色至黄色）。上图显示病原体总种群随时间波动。下图显示，γ_1 和 γ_2 两个族交替占据优势。**上图：** 变体密度 $I_n(t)$ 的值。**下图：** 变体的相对频率随时间的变化。与 γ_1 （蓝色至绿色）相关的族和与 γ_2 （红色至黄色）相关的族交替占据优势。**参数：** $\Lambda = 5$, $\theta = 5$, $S_0 = 1$, $\alpha^* = 2$, $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = 5$, $I_0^1 = 1$, $I_0^2 = 0.1$, $A = 36$,$B = 2$, $C = 3$。族 1 共使用了 $N_1 = 6$ 个变体，族 2 共使用了 $N_2 = 15$ 个变体。关于图中颜色的解释，请参阅本文的在线版本。

命题*3.16*的证明。 回顾（3.28）和引理3.9，我们在此情形下有：

$$F_1(e^{-Cr_1(\xi)}\xi) \sim e^{-An_1(\xi)^2 - \frac{2A}{C}x_1(\xi)},$$
$$F_2(e^{-\frac{C}{3}r_2(\xi)}\xi) \sim e^{-\frac{A}{18}n_2(\xi)^2 - \frac{A}{3C}x_2(\xi)},$$

其中

$$x_1(\xi) := n_1(\xi) + r_1(\xi) = \frac{1}{C}W_0\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right) \text{ and } x_2(\xi) := n_2(\xi) + r_2(\xi) = \frac{3}{C}W_0\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right),$$

$n_1(\xi)$ $n_2(\xi) \in \mathbb{N}$和 $r_1(\xi)$ $r_2(\xi) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。换言之，对于 $x(\xi) := \frac{1}{C}W_0\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right)$，我们有

$$n_1(\xi) = \left\lfloor x(\xi) + \frac{1}{2} \right\rfloor, \qquad n_2(\xi) = \left\lfloor 3x(\xi) + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$
$$r_1(\xi) = x(\xi) - n_1(\xi) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad r_2(\xi) = 3x(\xi) - n_2(\xi) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

令 ξ_n^1 和 ξ_n^2 由以下关系定义。

$$\xi_n^1 := \frac{2A}{BC}\left(n - \frac{1}{3}\right)e^{C\left(n-\frac{1}{3}\right)} \text{ and } \xi_n^2 := \frac{2A}{BC}\left(n + \frac{1}{3}\right)e^{C\left(n+\frac{1}{3}\right)},$$

因此，根据定义，

$$x(\xi_n^1) = n - \frac{1}{3}, \quad n_1(\xi_n^1) = n, \quad r_1(\xi_n^1) = -\frac{1}{3}, \quad n_2(\xi_n^1) = 3n - 1, \quad r_2(\xi_n^1) = 0,$$
$$x(\xi_n^2) = n + \frac{1}{3}, \quad n_1(\xi_n^2) = n, \quad r_1(\xi_n^2) = +\frac{1}{3}, \quad n_2(\xi_n^2) = 3n + 1, \quad r_2(\xi_n^2) = 0.$$

由于 $W_0(X) = \ln(X) - \ln\ln X + o(1)$（参见 Corless 等人，1996年，(4.19)，第349页），对于充分大的 n，我们有：

$$\begin{aligned} x\left(e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right) &= \frac{1}{C}\ln\left(\frac{BC^2}{2A}e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right) - \frac{1}{C}\ln\ln\left(\frac{BC^2}{2A}e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right) + o(1) \\ &= r_1(\xi_n^1) + \frac{1}{C}\ln\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right) - \frac{1}{C}\ln\ln\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right) - \frac{1}{C}\ln\left(1 + \frac{Cr_1(\xi_n^1)}{\ln\left(\frac{BC^2}{2A}\xi\right)}\right) + o(1) \\ &= x(\xi_n^1) + r_1(\xi_n^1) + o(1) = n - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + o(1) = n - \frac{2}{3} + o(1), \end{aligned}$$

因此当 n 充分大时，

$$n_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right) = \left\lfloor x\left(\xi e^{Cr_1(\xi_n^1)}\right) + \frac{1}{2}\right\rfloor = n - 1.$$

类似地，当 n 充分大时，我们有

$$x\left(\xi_n^2 e^{Cr_1(\xi_n^2)}\right) = n + \frac{2}{3} + o(1) \text{ and } n_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^2)}\xi_n^2\right) = \left\lfloor x\left(\xi e^{Cr_1(\xi_n^2)}\right) + \frac{1}{2}\right\rfloor = n + 1.$$

因此，当 n 充分大时，我们有

$$\begin{aligned} \frac{F_1(\xi_n^1)}{F_2(\xi_n^1)^2} &\sim \exp\left[-An_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right)^2 + A\left(\frac{n_2(\xi_n^1)}{3}\right)^2 - \frac{2A}{C}x_1\left(\xi_n^1 e^{Cr_1(\xi_n^1)}\right) + \frac{2A}{3C}x_2(\xi_n^1)\right] \\ &= \exp\left[A\left(\frac{n_2(\xi_n^1)}{3} - n_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right)\right)\left(\frac{n_2(\xi_n^1)}{3} + n_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right)\right) + \frac{2A}{C}\left(\frac{x_2(\xi_n^1)}{3} - x_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^1)}\xi_n^1\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[A\left(n - \frac{1}{3} - (n-1)\right)\left(n - \frac{1}{3} + n - 1\right) + \frac{2A}{C}\left(n - \frac{1}{3} + \frac{r_2(\xi_n^1)}{3} - \left(n - 1 + r_1\left(\xi_n^1 e^{Cr_1(\xi)}\right)\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{4A}{3}\left(n - \frac{2}{3}\right) + \mathcal{O}(1)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned} \frac{F_1(\xi_n^2)}{F_2(\xi_n^2)^2} &\sim \exp\left[-An_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^2)}\xi_n^2\right)^2 + A\left(\frac{n_2(\xi_n^2)}{3}\right)^2 - \frac{2A}{C}x_1\left(\xi_n^2 e^{Cr_1(\xi_n^2)}\right) + \frac{2A}{3C}x_2(\xi_n^2)\right] \\ &= \exp\left[A\left(\frac{n_2(\xi_n^2)}{3} - n_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^2)}\xi_n^2\right)\right)\left(\frac{n_2(\xi_n^2)}{3} + n_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^2)}\xi_n^2\right)\right) + \frac{2A}{C}\left(\frac{x_2(\xi_n^2)}{3} - x_1\left(e^{Cr_1(\xi_n^2)}\xi_n^2\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[A\left(n + \frac{1}{3} - (n+1)\right)\left(n + \frac{1}{3} + n + 1\right) + \frac{2A}{C}\left(n + \frac{1}{3} + \frac{r_2(\xi_n^2)}{3} - \left(n + 1 + r_1\left(\xi_n^2 e^{Cr_1(\xi)}\right)\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{4A}{3}\left(n + \frac{2}{3}\right) + \mathcal{O}(1)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

现在我们完成证明。设 t_n^1 是一个时间序列，使得 $t_n^1 S(t_n^1) = \xi_n^1$。显然，当 $n \to +\infty$时，$t_n^1 \to +\infty$。然后，回顾（3.30），我们有：

$$\mathcal{F}(t_n^1, \overline{S}(t_n^1)) = \frac{F_1(t_n^1\overline{S}(t_n^1))}{\mathcal{I}(t_n^1)}\left(\frac{F_2(t_n^1\overline{S}(t_n^1))}{\sqrt{F_1(t_n^1\overline{S}(t_n^1))}} + \sqrt{\frac{\mathcal{I}(t_n^1)F_2(t_n^1\overline{S}(t_n^1))^2}{4F_1(t_n^1\overline{S}(t_n^1))} + 1}\right)^2 = \frac{F_1(t_n^1\overline{S}(t_n^1))}{\mathcal{I}(t_n^1)}\big(1 + o(1)\big),$$

并由（3.25），

$$\gamma_1 t_n^1\left(\alpha^*\overline{S}(t_n^1) - 1\right) = -\ln F_1\big((t_n^1\overline{S}(t_n^1)\big) + \mathcal{O}(1).$$

最后，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t_n^1) &= I_0^2 e^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\gamma_1(\alpha^*\overline{S}(t_n^1)-1)}F_2\big(t_n^1\overline{S}(t_n^1)\big) = I_0^2 e^{\frac{1}{2}\left(-\ln F_1(t_n^1\overline{S}(t_n^1))+\mathcal{O}(1)\right)}F_2\big(t_n^1\overline{S}(t_n^1)\big) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{F_2(\xi_n^1)}{\sqrt{F_1(\xi_n^1)}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \end{aligned}$$

并结合（1.1a）使用定理 2.6，我们得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t_n^1) = \frac{\theta}{\gamma_1\alpha^*}\left(\mathcal{R}_0 - 1\right),$$

与命题3.14的证明中一样。命题3.16的第一部分得证。类似地，设 t_n^2 为一个时间序列，使得 $t_n^2 S(t_n^2) = \xi_n^1$。显然，当 $n \to +\infty$时， $t_n^2 \to +\infty$ 。我们有

$$\mathcal{F}(t_n^2, \overline{S}(t_n^2)) = \frac{F_2(t_n^2\overline{S}(t_n^2))}{4}\left(1+\sqrt{1+\frac{4F_1(t_n^2\overline{S}(t_n^2))}{\mathcal{I}(t_n^2)F_2(t_n^2\overline{S}(t_n^2))^2}}\right)^2 = \frac{F_2(t_n^2\overline{S}(t_n^2))^2}{4}\big(1+o(1)\big),$$

so

$$\gamma_1 t_n^2\left(\alpha^*\overline{S}(t_n^2)-1\right) = -2\ln F_2\big(t_n^2\overline{S}(t_n^2)\big) + \mathcal{O}(1),$$

and

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^1(t_n^2) = I_0^1 e^{\gamma_1(\alpha^*\overline{S}(t_n^2)-1)}F_1\big(t_n^2\overline{S}(t_n^2)\big) = I_0^1 e^{-2\ln F_1(t_n^2\overline{S}(t_n^2))+\mathcal{O}(1)}F_1\big(t_n^2\overline{S}(t_n^2)\big) = \mathcal{O}\left(\frac{F_1(\xi_n^2)}{F_2(\xi_n^2)^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

因此，最终

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n^2(t_n^2) = \frac{\theta}{\gamma_2\alpha^*}\left(\mathcal{R}_0-1\right).$$

这是命题3.16的第二部分，证明至此完成。 □

4 讨论

在进化流行病学中，有一个经典结果（Ewald 1983；Alizon等人 2009），称为“权衡假说”：进化会偏向使基本再生数$\mathcal{R}_0$达到最大的变体；在此，我们通过考虑无数种争夺宿主的变体，再次展示了这一预测的稳健性。然而，我们也超越了标准预测，表明即使在我们这个简单的模型中，流行病的渐近行为仍然具有复杂性，可能出现多种结果，从简单地收敛到全局平衡（如 Hsu（1978年）研究的有限系统，或定理 2.6 的情形 i）），到进入永久瞬态（第3.2.2节所举的例子）。

第 3 节中的例子揭示了宿主群体中病原体变异株多样性可能呈现的各种动态。其变化可能不仅取决于参数 γ_n 和 $\alpha_n = \frac{\beta_n}{\gamma_n}$的分布，也取决于与这些参数相对应的初始感染者数量；根据我们的选择，可以观察到种群中变体多样性的增强、保持或消退。例 1 展示了适合度函数按代数速度收敛、初始数据按代数速度递减的情形。图 1（底部）给出了变体相对频率的数值计算结果；具有不可忽略占比的变体数量似乎随时间增加，因此在这种情况下，多样性似乎也随时间增强（多样性增强）。图2（底部）展示了适合度函数指数快速收敛、初始数据指数递减时的数值计算结果；此时，多样性似乎大致保持不变，始终有固定数量的变体占据优势（多样性保持）。图3（底部）展示了类似的适合度函数，但采用高斯初始数据；此时，变体之间的转换随时间推移变得更加陡峭，而命题3.8中的分析表明，从渐近意义上看，随着时间推移，可能只有一个变体会在越来越长的时期内压过其他所有变体（尽管这一现象可能要经过比图3所示更长的时间才会出现）。因此，在这种情况下，我们观察到变体多样性消退。这三种不同类型的行为都可以通过解析方法证明，见命题 3.2、命题3.5和命题3.8。

图 1、图2 和图3关注的是 γ_n 为常数的情况，而在图4和图5中，我们研究了 γ_n 在两个值之间振荡的情况，并展示了此时可能出现的令人惊讶的行为。图4表明，当假设 2.8 不成立时，我们不能指望将命题 2.9 的结果推广到这种情况：事实上，在此情况下， γ_n 值最高的变体族（从蓝色到绿色）会灭绝，而 γ_n 值最低的变体族（从红色到黄色）则占据主导地位。这一点已在命题3.14中得到证明。图5表明，在某些特殊情况下，两个变体族都不会在渐近意义下始终占据种群的主导地位，而是交替占据主导地位。此外，命题3.16表明，在这种情况下，感染者总数不会收敛于某个极限值，而是在两个不同的数值之间振荡。

假设同时存在无限多个变体，是对现实的一种创造性简化，使我们能够描述自然界中可能发生的行为。有限系统的经典理论只能让我们研究一种动力学类型：收敛到唯一的平衡态。然而，对现实生活中流行病（如新冠肺炎流行病）的实际观察表明，事实并非如此（Br¨ussow 2022）。归根结底，对无限多个变体相继出现的描述，可能比有限模型更为真实地刻画所观察到的现象。

我们预测，当不同类型之间存在平等关系时，与快速动力学相关联的变体在长期内会更具优势。这似乎有些违背直觉，因为被最大化的参数 γ 恰好对应于感染期的倒数；然而，我们推测，它所选择的行为实际上与快速传播相关，而非较短的感染期。可以通过将不同的.....

与（1.1）中的康复、宿主死亡率和传播相关的系数。我们将这种精细描述留待未来的研究。

我们的工作可以从多个方向拓展。一项重要的补充是，在模型中考虑感染龄的影响，这与 Kermack 和 McKendrick 的原始论文（1927年）中的做法相同（另见 Demongeot 等人（2023年））。我们认为这是未来研究的一个令人振奋的方向。

5 数学结果的证明

5.1 命题 2.4 的证明

我们证明问题 (1.1) 是适定的。根据假设 2.1，我们注意到，由方程组 (1.1a) 右端定义的映射 $F\colon \mathbb{R}\times\ell^1\to\mathbb{R}\times\ell^1$ 在巴拿赫空间 $\mathbb{R}\times\ell^1$ 上局部 Lipschitz 连续。因此，问题 (1.1) 存在唯一的极大解 $\left(S(t),\,(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)\in C^1\left([0,T_{\max})\ \mathbb{R}\right)\times C^1\left([0,T_{\max})\ \ell^1\right)$其中 $T_{\max}>0$ 可以是无穷大的。此外，公式 (2.2) 成立，即

$$I_n(t)=e^{t\left(\beta_n\overline{S}(t)-\gamma_n\right)}I_n^0,$$

特别地，对于所有 $n\in\mathbb{N}$， I_n 都是非负函数，并且对于所有 $t>0$， $\left(I_n^0\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_+^1\longmapsto\left(I_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_+^1$ 都是连续的。

接下来，以下先验估计证明，解 $\left(S(t),(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 在 $\mathbb{R}\times\ell_+^1$ 中一致有界，因此 $T_{\max}=\infty$:

引理 5.1. 假设假设 *2.1* 成立。对于所有 $t\in[0,T_{\max})$,

$$0\le S(t)\le S_0e^{-\theta t}+\frac{\Lambda}{\theta}\left(1-e^{-\theta t}\right)\le\max\left(S_0,\frac{\Lambda}{\theta}\right),\tag{5.1}$$

$$0\le S(t)+\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n(t)\le\frac{\Lambda}{\min(\theta,\gamma_0)}+\left(S_0+\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n^0-\frac{\Lambda}{\min(\theta,\gamma_0)}\right)e^{-\min(\theta,\gamma_0)t}.\tag{5.2}$$

证明. 利用 (1.1a) 的第一个方程，我们有 $S(t)\ge0$ ；又由于 $I_n(t)$ 的正性，我们可以直接证明 $S(t)$ 满足引理中的不等式。

接下来，将 (1.1a) 中的方程相加，我们注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S(t)+\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n(t)\right)\le\Lambda-\theta S(t)-\gamma_0\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n(t),$$

由此得到 $S(t)+\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n(t)$ 的不等式。引理得证。 □

5.2 命题2.5的证明

我们首先假设 $\mathcal{R}_0<1$。设 $\varepsilon>0$ 使得

$$m=1-\mathcal{R}_0\left(1+\varepsilon\frac{\theta}{\Lambda}\right)>0,$$

存在 $t_0(\varepsilon)>0$ 使得

$$S(t)\le\frac{\Lambda}{\theta}+\varepsilon.$$

回顾一下，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，(1.1a) 的方程可写为 I_n

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n(t)=\beta_nI_nS(t)-\gamma_nI_n(t),$$

或者，根据$\mathcal{R}_0$,as 的定义

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n(t)\le\gamma_n\left(\mathcal{R}_0\frac{\theta}{\Lambda}S(t)-1\right)I_n(t).$$

对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\ge t_0(\varepsilon)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n(t)\le-m\gamma_nI_n(t),$$

因此

$$0\le\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n(t)\le e^{-m\gamma_0(t-t_0(\varepsilon))}I_n(t_0(\varepsilon)),$$

这证明了 $\lim_{t\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(t) = 0$。

接下来，由于 $S(t)$ 有界，我们考虑 $S := \liminf_{t\to+\infty} S(t)$。设 $(n_{\geq 0}) \infty$ 是一个趋于 $k \to \infty$ 的序列，当 $_{k\to\infty} S'$ 时满足 $\lim t_k(=0)_{k\to+\infty} S$ 且 $\lim t_k(=S)\beta_n$。由于 (k) 有界，根据对所有 成立的以下等式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t_k) = \Lambda - \theta S(t_k) - \sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n S(t_k) I_n(t_k)$$

pa取极限可得 $\liminf_{t\to\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\theta}$。同样地，$\limsup_{t\to\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\theta}$，因此 – e

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\theta},$$

这就完成了该命题证明的第一部分。命题2.5的第二部分将在第5.5节中证明，因为我们需要更多工具来证明它。

5.3 定理 2.6 的证明

在开始定理 2.6 的证明之前，我们先介绍一些将在本节中使用的概念。事实上，为了获得轨道的紧性，我们需要将我们的动力系统嵌入一个更大的空间中。我们在 $\mathbb{N}$ 上定义距离：

$$d(n,m) := \left|\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+m}\right| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\gamma_n - \gamma_m|, \text{ for all } n, m \in \mathbb{N}.$$

我们令 $\overline{\mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{N}$ 关于距离 d 的拓扑完备化。它本质上是包含 $\mathbb{N}$ 的关于距离 d 的最小闭集。由假设 2.3 可知，集合 $\omega(\alpha)$ 和 $\omega(\gamma)$ 都是有限集，并且，除去一个拓扑同构（在证明余下部分中我们将略去不写），有

$$\big(\overline{\mathbb{N}}, d\big) = \big([-K, +\infty) \cap \mathbb{Z}, d\big),$$

其中我们定义 $K := \#\omega(\alpha) \times \#\omega(\gamma)$，

$$\omega(\alpha) \times \omega(\gamma) =: \{(\alpha_{-i}, \gamma_{-i}), i = 1, \ldots, K\},$$

and

$$d(n,m) := \left|\frac{\mathbb{1}_{n\geq 0}}{1+n} - \frac{\mathbb{1}_{m\geq 0}}{1+m}\right| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\gamma_n - \gamma_m|, \text{ for all } n, m \in \mathbb{Z} \cap [-K, +\infty).$$

特别地，$\mathbb{N}$ 是豪斯多夫且可数的，这意味着博雷尔 σ-代数是 $\mathbb{N}$ 的所有子集组成的集合，因此任意博雷尔测度 $\mu \in \mathcal{M}\big(\mathbb{N}\big)$ 都可以表示为一个可和序列：

$$\mu = \sum_{n=-K}^{+\infty} \mu_n \delta_n,$$

其中，δ_n 是集中于 $n \in \mathbb{N}$ 的狄拉克点质量，而 $(\overline{\mu_n})_{n\geq -K}$ 是一个实数可和序列。最后，$\mathbb{N}$ 关于由 d 生成的拓扑是紧的。

接下来，我们将通过测度空间$\mathcal{M}\big(\mathbb{N}\big)$上的弱-$*$ 拓扑来证明轨道的紧性。为作区分，当空间赋予弱-$*$ 拓扑时，我们将写作 $\mathcal{M}^*(\mathbb{N})$、$\mathcal{M}^*_+(\mathbb{N})$，而不写作 $\mathcal{M}\big(\mathbb{N}\big)$、$\mathcal{M}_+(\mathbb{N})$。回顾一下，$\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 上的拓扑由范数生成

$$\|(\mu)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\|_{\mathcal{M}(\overline{\mathbb{N}})} := \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} |\mu_n|,$$

并且，$\mathcal{M}^*(\mathbb{N})$ 上的拓扑是弱-$*$ 收敛拓扑：序列 $\mu^n \rightharpoonup \mu$ 在该拓扑下收敛，当且仅当，

$$\sum_{k=-K}^{+\infty} \varphi_k \mu_k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=-K}^{+\infty} \varphi_k \mu_k,$$

对于所有 $(\varphi_n) \in C\big(\mathbb{N}\big)$，$\mathbb{N}$ 上连续序列的空间，其特征为 —

$$\big[(\varphi_k) \in C\big(\overline{\mathbb{N}}\big)\big] \iff \left[\lim_{j\to+\infty} \varphi_{k_j} = \varphi_{-i} \text{ whenever } \alpha_{k_j} \to \alpha_{-i} \text{ and } \gamma_{k_j} \to \gamma_{-i} \text{ with } k_j \to +\infty \text{ and } i > 0\right].$$

下文将考虑具有初始数据 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+\big(\mathbb{N}\big)$ 的方程 (1.1)。由于我们对 $\mathbb{N}$ 的构造，假设 2.1 和 2.3 无需针对新框架进行调整。不过，假设 2.2 需要调整。我们将假设 2.2 替换为以下内容：

假设 5.2. 给定 $S_0 > 0$、$(I_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{N})$,–并假设存在一个指标序列$n_k \in \mathbb{N}$，满足

$$I_{n_k}^0 > 0 \text{ and } \lim_{k\to+\infty} \frac{\beta_{n_k}}{\gamma_{n_k}} = \alpha^*.$$

与之前一样，指标序列 (n_k) 不必严格单调，也可以最终保持不变。下面的引理成立。

引理 5.3. 假设假设 *2.1* 成立。那么我们有

$$0 < \frac{\min(\theta,\gamma_0)}{\theta\Lambda\min(\theta,\gamma_0)+\beta^\infty} \le \liminf_{t\to+\infty} S(t) \le \limsup_{t\to+\infty} S(t) \le \frac{\Lambda}{\theta} < +\infty,$$
$$\limsup_{t\to+\infty} \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t) \le \frac{\Lambda}{\min(\theta,\gamma_0)} < +\infty.$$

证明。 上界的证明与引理 5.1 中的证明相同。接下来，我们回到方程 (1.1) 的 S 分量，并令 $\varepsilon > 0$ 给定。对于充分大的 t_0 和 $t \ge t_0$，我们有

$$S_t = \Lambda - \left(\theta + \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I_n(t)\right) S(t) \ge \Lambda - \left(\theta + \beta^\infty \frac{\Lambda}{\min(\theta,\gamma_0)} + \varepsilon\right) S(t),$$

因此

$$S(t) \ge e^{-\left(\theta+\frac{\Lambda\beta^\infty}{\min(\theta,\gamma_0)}+\varepsilon\right)(t-t_0)} S(t_0) + \frac{\Lambda\min(\theta,\gamma_0)}{(\theta+\varepsilon)\min(\theta,\gamma_0)+\Lambda\beta^\infty}\left(1 - e^{-\left(\theta+\frac{\Lambda\beta^\infty}{\min(\theta,\gamma_0)}+\varepsilon\right)(t-t_0)}\right),$$

因此，最后令 $t \to +\infty$，得到

$$\liminf_{t\to+\infty} S(t) \ge \frac{\min(\theta,\gamma_0)\Lambda}{(\theta+\varepsilon)\min(\theta,\gamma_0)+\Lambda\beta^\infty}.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们已证明

$$\liminf_{t\to+\infty} S(t) \ge \frac{\min(\theta,\gamma_0)\Lambda}{\theta\min(\theta,\gamma_0)+\Lambda\beta^\infty}.$$

引理得证。 □

引理 5.4。 假设条件 *2.1* 和 *5.2* 成立。令 $\big(S(t)\ I_i(t)\big)$ 为(1.1)的相应解。那么

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t \le \frac{1}{\alpha^*}.$$

证明。 我们注意到，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，(1.1) 的第二个分量可以写成

$$\begin{aligned} I_n(t) &= I_0^n e^{\beta_n \int_0^t S(s)\mathrm{d}s - \gamma_n t}, \\ &= I_0^n \exp\left(\gamma_n \int_0^t S(s)\mathrm{d}s \left[\frac{\beta_n}{\gamma_n} - \frac{t}{\int_0^t S(s)\mathrm{d}s}\right]\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

反设 t 引理的结论不成立，即存在 $\varepsilon > 0$ 和一个序列 $T_n \to +\infty$ 使得

$$\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} S(t)\mathrm{d}t \ge \frac{1}{\alpha^*} + \varepsilon \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

Then

$$\frac{T_n}{\int_0^{T_n} S(t)\mathrm{d}t} \le \frac{1}{\frac{1}{\alpha^*}+\varepsilon} \le \alpha^* - \varepsilon',$$

对于某个 $\varepsilon' > 0$。由于 $\alpha^* = \sup_n \frac{\beta_n}{\gamma_n}$，存在某个 $k \in \mathbb{N}$，满足 $I_k^0 > 0$，使得 $\frac{\beta_k}{\gamma_k} - \alpha^* + \varepsilon' > 0$，并且

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} I_i(T_n) \ge I_0^k \exp\left(\gamma_k \int_0^{T_n} S(s)\mathrm{d}s \left[\frac{\beta_k}{\gamma_k} - \frac{T_n}{\int_0^{T_n} S(s)\mathrm{d}s}\right]\right)$$

$$\geq I_0^k \exp\left(\gamma_k\left(\alpha_k-\alpha^*+\varepsilon'\right)\int_0^{T_n} S(s)\mathrm{d}s\right).$$

由于当 $n\to+\infty$ 时， $\int_0^{T_n} S(t)\mathrm{d}t\to+\infty$ ，因此我们有

$$\limsup_{t\to+\infty}\sum_{i\in\overline{\mathbb{N}}} I_i(t)\geq\limsup_{n\to+\infty}\sum_{i\in\overline{\mathbb{N}}} I_i(T_n)=+\infty,$$

根据引理 5.3， $I_n(t)$ 在 $\mathcal{M}_+(\mathbb{N})$ 中有界，因此这就产生了矛盾。引理的证明至此完成。 □

请注意，在上述引理中，假设 5.2 至关重要。事实上，若该假设不成立，我们就无法保证证明中定义的指标 k 对应一个严格为正的 I_k^0，因此也无法保证得到矛盾。

以下弱持久性性质成立。

引理 5.5。 假设假设 *2.1* 和 *5.2* 成立。设 $\left(S(t)\ I_n(t)\right)$ 为相应的解 (1.1)。则

$$\limsup_{t\to+\infty}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t)\geq\frac{\theta}{\beta^\infty}\left(\mathcal{R}_0-1\right)>0. \tag{5.4}$$

证明。 回顾一下，我们曾作出如下假设:

$$\mathcal{R}_0=\frac{\Lambda}{\theta}\alpha^*>1.$$

反设当 t_0 充分大时，有

$$\sum_{i\in\overline{\mathbb{N}}} I_i(t)\leq\eta<\frac{\theta}{\beta^\infty}\left(\mathcal{R}_0-1\right)\text{ for all }t\geq t_0,$$

与 $\eta>0$。

由引理 5.4 可知

$$\liminf_{t\to+\infty} S(t)\leq\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t\leq\frac{1}{\alpha^*}. \tag{5.5}$$

令 $\underline{S}:=\liminf_{t\to+\infty} S(t)$。设 $(t_n)_{n\geq0}$ 是一个趋于 ∞ 的序列，当 $n\to\infty$ 时，并且满足 $\lim_{n\to+\infty} S'(t_n)=0$ 以及 $\lim_{n\to+\infty} S(t_n)=\underline{S}$。由于当 n 足够大时， $\sum_{i\in\mathbb{N}} I_i(t_n)\leq\eta$，我们由等式可推出

$$S'(t_n)=\Lambda-\theta S(t_n)-S(t_n)\sum_{i\in\overline{\mathbb{N}}}\beta_i I_i(t_n),$$

that

$$0\geq\Lambda-\theta\underline{S}-\underline{S}\beta^\infty\eta$$

因此

$$\underline{S}\geq\frac{\Lambda}{\theta+\beta^\infty\eta}>\frac{\Lambda}{\theta+\beta^\infty\eta}=\frac{\Lambda}{\theta\mathcal{R}_0}=\frac{1}{\alpha^*},$$

这与 (5.5) 矛盾。 □

命题 5.6 (轨道的紧性与集中性). 假设假设 *2.1*、*5.2* 和 *2.3* 成立。那么，映射 $t\mapsto\left(S(t),(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)\in\mathbb{R}\times M_+^*\left(\mathbb{N}\right)$ 是连续的，且相应的轨道，

$$O\left(S_0,(I_n^0)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\right):=\left\{\left(S(t),\left(I_n(t)\right)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\right):t\geq0\right\}\subset\mathbb{R}\times\mathcal{M}_+^*\left(\overline{\mathbb{N}}\right),$$

是紧预的（对于 *th* 弱-$*$ 拓扑。此外，如果 $R_0>1$ ，且 $t_k\to+\infty$ 是一个任意序列，并且沿该序列

$$\liminf_{k\to+\infty}\sum_{n=-K}^{+\infty} I_n(t_k)>0,$$

于是可以从(t_k) 中提取出一个(t_{k_i}) 子序列，使得平移轨道

$$t\mapsto\left(S(t+t_{k_i}),(I_n(t+t_{k_i}))_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\right)$$

$\mathbb{R}\times\mathcal{M}_+^*(\mathbb{N})$ 到完整轨道 $\left(S^\infty(t)\ \left(I_n^\infty(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$，该轨道满足以下性质：

逐点收敛于

$$\sum_{n=-K}^{+\infty} I_n^\infty(t)>0 \text{ and } S^\infty(t)>0 \text{ for all } t\in\mathbb{R}, \tag{5.6}$$

and

$$\sum_{\{n:\alpha_n<\alpha^*\}} I_n^\infty(t)=0 \text{ for all } t\in\mathbb{R}. \tag{5.7}$$

最后，收敛 $S(t_{k_i}+t)\to S^\infty(t)$ 在 $C^1(\mathbb{R})$上是局部一致的。

证明。 首先我们指出

$$I_n(t)=e^{\beta_n\int_0^t S(s)\mathrm{d}s-\gamma_n t}I_n^0=e^{\gamma_n\left(\alpha_n\int_0^t S(s)\mathrm{d}s-t\right)}I_n^0.$$

由于 α_n 和 γ_n 属于$C(\mathbb{N})$，映射 $t\mapsto e^{\gamma_n\left(\alpha_n\int_0^t S_{(s)}\mathrm{d}s-t\right)}$ 从 $\mathbb{R}^+$到 $C(\mathbb{N})$连续，因此 $t\mapsto(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$从 $\mathbb{R}$到$\mathcal{M}_+^*(\mathbb{N})$连续。因此，$t\to\left(S(t),\ (I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)$确实从 $\mathbb{R}^+$到 $\mathbb{R}\times\mathcal{M}_+^*(\mathbb{N})$连续。由于 $S(t)$一致有界，且$(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ 在全变差范数下由引理 5.3一致有界，根据普罗霍罗夫定理（Bogachev，2007，第二卷，定理 8.6.2，第 202 页），该轨道在 $\mathbb{R}\times\mathcal{M}_+^*(\mathbb{N})$ 中相对紧。

令 t_k 为一个满足 $t_k\to+\infty$ 的序列。由于 $\sum_{n\in\mathbb{N}}I_n(t_k)$ 有界，我们可以从 (t_k) 中抽取一个子序列，仍记为 t_k，沿着该子序列有

$$S(t_k)\to S_0^\infty \text{ and } (I_n(t_k))_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\rightharpoonup(I_n^{\infty,0})_{n\in\overline{\mathbb{N}}}.$$

我们注意到，根据引理 5.3，$S'(t+t_k)$ 有界，并且

$$S''(t+t_k)=-\theta S'(t+t_k)-S'(t+t_k)\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\beta_n I_n(t+t_k)-S(t+t_k)\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\beta_n\left(\beta_n S(t+t_k)-\gamma_n\right)I_n(t+t_k)$$

也有界，且关于 t 局部一致。因此，经过进一步抽取并采用对角抽取过程，平移后的轨道 $S(t+t_k)$ 在 $C^1(\mathbb{R})$ 上局部一致收敛。由于

$$I_n(t_k+t)=e^{\gamma_n\left(\alpha_n\int_{t_k}^t S(t_k+\sigma)\mathrm{d}\sigma-(t-t_k)\right)}I_n(t_k),\qquad n\in\overline{\mathbb{N}},$$

我们可以在上述公式中取弱-$*$ 极限，得到

$$I_n^\infty(t):=e^{\gamma_n\left(\alpha_n\int_0^t S^\infty(\sigma)\mathrm{d}\sigma-t\right)}I_n^{\infty,0},\qquad n\in\overline{\mathbb{N}},t\in\mathbb{R}, \tag{5.8}$$

因此，$(S^\infty(t),\ (I_n^\infty(t))_{n\in\mathbb{N}})$是方程 (1.1) 的一个解，其初始数据为 $(S_0^\infty,\ (I^{\infty,}{}_n{}^0))$，且 $t\in\mathbb{R}$：一条完整轨道。 $S^\infty(t)>0$ 是引理 5.3 的推论。由于常值函数 $n\mapsto 1\in C(\mathbb{N})$，我们有

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}I_n^{\infty,0}=\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}1\cdot I_n^{\infty,0}=\lim_{k\to+\infty}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}1\cdot I_n(t_k)$$

因此，
如果

$$\liminf_{k\to+\infty}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}I_n(t_k)>0,$$

那么我们有

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}I_n^{\infty,0}>0,$$

由此并结合 (5.8)，即可证明 (5.6)。

接下来证明集中性质 (5.7)。回顾到，对于某个正常数$S>0$，$\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s\geq S$ 且 $\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s\leq\frac{1}{\alpha^*}$，因此当 $\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}S$充分大时，$t_k(s)\mathrm{d}s\leq\frac{1}{\alpha^*}+\frac{\varepsilon S}{2\alpha^*}$，从而

$$\begin{aligned}\sum_{\{n:\alpha_n<\alpha^*-\varepsilon\}}I_n(t_k)&=\sum_{\{n:\alpha_n<\alpha^*-\varepsilon\}}I_n^0\exp\left[\gamma_n t\left(\alpha^*\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}S(\sigma)\mathrm{d}\sigma-1-\left(\alpha^*-\alpha_n\right)\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k}S(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\right]\\&\leq\sum_{\{n:\alpha_n<\alpha^*-\varepsilon\}}I_n^0\exp\left[\gamma_n t\left(\alpha^*\left(\frac{1}{\alpha^*}+\frac{\varepsilon S}{2\alpha^*}\right)-1-\varepsilon S\right)\right]\\&=e^{-\gamma_0\frac{\varepsilon}{2}St}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}I_n^0\xrightarrow[k\to+\infty]{}0,\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，(5.7) 得证。

至此，命题 5.6 的证明完成。 □

现在我们可以陈述一致持久性结果了。

命题 5.7 (一致持久性). 假设假设 *2.1*、*5.2* 和 *2.3* 成立，并且 $R_0 > 1$。那么，

$$\liminf_{t\to+\infty} \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t) > 0. \tag{5.9}$$

证明。 我们来证明一致持久性性质。在非度量情形下，我们采用 Magal 和 Zhao（2005，命题 3.2）的论证。反设 (5.9) 不成立。那么，存在一个序列$t_k \to +\infty$ ，使得

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n(t_k) = 0. \tag{5.10}$$

由引理 5.3 可知 $\inf_k S(t_k) > 0$。由 (5.4) 可知，对于每个充分大的 k ，并且在必要时用子序列替换 t_k 后，存在 s_k ，满足 $t_{k-1} < s_k < t_k$ ，使得

$$\sum_{n=-K}^{+\infty} I_n(s_k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{\beta^\infty}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big) \text{ and } \sup_{\sigma\in[s_k,t_k]} \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n(\sigma) \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{\beta^\infty}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big). \tag{5.11}$$

由命题 5.6，存在 s_k 的一个子序列，仍记为 s_k，使得 $S(s_k+t) \to S_0^\infty(t)$ 且 $(I_n(s_k+t)) \to (I_n^\infty(s_k+t))$，此外，(5.6) 和 (5.7) 对极限轨道成立。

接下来我们证明（$S^\infty(t)$,$(I_n^\infty(t))$) 满足假设 2.1、2.2 和 2.3。假设 2.1 和 2.3 显然成立，因为系数 α_n 和 γ_n 的值没有改变（ $\beta_n := \gamma_n\alpha_n$ 也没有改变）。由（5.7）可得

$$\sum_{\{n\,:\,\alpha_n=\alpha^*\}} I_n^{\infty,0} = \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n^{\infty,0} - \sum_{\{n\,:\,\alpha_n<\alpha^*\}} I_n(s_k) = \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n^{\infty,0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{\beta^\infty}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big) > 0,$$

因此特别地，集合 $\{n\in\mathbb{N}:\ I^{\infty,0}_n > 0$ 和 $\alpha_n = \alpha^*\}$ 非空。于是，去掉满足$I^{\infty,0}_n = 0$的项后，我们有

$$\sup_{\{n\,:\,I_n^{\infty,0}>0\}} \frac{\beta_n}{\gamma_n} = \sup_{\{n\,:\,I_n^{\infty,0}>0\}} \alpha_n = \alpha^*,$$

沿着子序列 $I^{\infty,0}_n > 0$，假设 2.2、2.1 和 2.3 仍然成立。特别地，我们可以应用引理 5.5，从而

$$\limsup_{t\to+\infty} \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n^\infty(t) \ge \frac{\theta}{\beta^\infty}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big). \tag{5.12}$$

现在我们完成论证。设 $T_k := t_k - s_k$。有两种可能。

- T_k 有界。在这种情况下，我们进一步提取一个子序列，使得 $T_k \to T$。于是有

$$\sum_{n=-K}^{+\infty} I_n^\infty(T) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n(t_k) = 0,$$

并且根据 方程 (1.1) 的解的唯一性，我们有 $I_n^\infty(t) \equiv 0$ 对所有 $t \ge T$ 均成立。这与 (5.12).

- T_k 无界。在这种情况下，我们进一步提取一个子序列，使得 $T_k \to +\infty$。但是，由于

$$\sup_{\sigma\in[s_k,t_k]} \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n(\sigma) \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{\beta^\infty}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big),$$

我们有

$$\sup_{\sigma\in[0,+\infty)} \sum_{n=-K}^{+\infty} I_n^\infty(\sigma) \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{\beta^\infty}\big(\mathcal{R}_0 - 1\big)$$

而这再次与 (5.12) 矛盾。

Th与此矛盾 d论　证明 (5.10) 不可能成立，因此 (5.9) 成立。命题 5.7 的证明完成。 □

引理 5.8。 设假设 *2.1*、*5.2* 和 *2.3* 成立，并令 $\big(S(t)、(I_n(t))\big)$ 为 *(1.1)* 的相应解。假设 $R_0 > 1$。则

$$\liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t \ge \frac{1}{\alpha^*},$$

其中 α^* 见（2.1）。

证明: 反设引理的结论不成立，即 存在 $\varepsilon > 0$ 和一个序列$t_k \to +\infty$ ，使得

$$\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} S(t)\mathrm{d}t \le \frac{1}{\alpha^*} - \varepsilon.$$

Then

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t_k) &= \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n^0 e^{\beta_n \int_0^{t_k} S(s)\mathrm{d}s - \gamma_n t} = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n^0 e^{\gamma_n t_k\left(\frac{\beta_n}{\gamma_n}\frac{1}{t_k}\int_0^{t_k} S(s)\mathrm{d}s - 1\right)} \le \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n^0 e^{\gamma_n t_k\left(\frac{\beta_n}{\gamma_n}\left(\frac{1}{\alpha^*}-\varepsilon\right)-1\right)} \\ &\le \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n^0 e^{-\varepsilon\beta_n t_k} \le e^{-\varepsilon\beta_0 t_k}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n^0 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

因此

$$\liminf_{t\to+\infty}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t) \le \lim_{k\to+\infty}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t_k) = 0,$$

这与引理 5.7 矛盾。引理得证。 □

接下来，我们为模型中的一个特殊情形给出一个李雅普诺夫泛函。它与 Hsu 1978 年针对洛特卡-沃尔泰拉情形给出的李雅普诺夫泛函相近，不过在我们的情形下，无法将方程 (1.1a) 的第一个方程中的 $S(t)$ 因式分解；当 $\frac{\beta_n}{\gamma_n}$ 不是常数时，这会使计算变得难以处理。

命题 5.9 (李雅普诺夫泛函). 设假设 *2.1* 成立，并假定 $R_0 > 1$。令 $(S^*, I_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 (1.1a) 的一个稳态解，即 $S^* := \frac{1}{\alpha^*}$，且 $(I_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n I_n^* = \frac{\theta}{\alpha^*}\left(\mathcal{R}_0 - 1\right).$$

进一步假设，当 $I_n^* > 0$ 时，$\frac{\beta_n}{\gamma_n} \equiv \alpha^*$ 为常数，并令 $\mathcal{N}_+$ 为满足 $I_0^n > 0$ 的指标集。定义 $g(x) = x - \ln(x)$，并令

$$D(V) := \left\{(S,(I_n)_n) : S > 0, I_n = 0 \text{ whenever } I_n^* = 0, \text{ and } \inf_{n\in\mathcal{N}_+}\frac{I_n}{I_n^*} > 0\right\} \subset \mathbb{R}\times\ell^\infty\left((I_n^*)^{-1}\right),$$

其中 $\ell^\infty\left((I_n^*)^{-1}\right)$ 配备范数 $\|(\varphi_n)_n\|_{\ell^\infty((I_n^*)^{-1})} := \text{上确界}_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\varphi_n}{I_n^*}\right|$。则函数

$$V(S,(I_n)) := S^* g\left(\frac{S}{S^*}\right) - S^* + \sum_{n\in\mathcal{N}_+}\left[I_n^* g\left(\frac{I_n}{I_n^*}\right) - I_n^*\right]. \tag{5.13}$$

在开集 $D(V)$ 上关于由 $\mathbb{R}\times\ell^\infty\left((I_n^*)^{-1}\right)$诱导的拓扑是良定义且连续的。

此外，若 $\left(S(t), (I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 是方程 (*1.1*) 的一个解，满足 $\left(S(0), (I_n(0))\right) \in D(V)$，则对所有 $t \ge 0$、$t \mapsto V(S(t), (I_n(t))_n) \in C^1$，有 $\left(S(t), (I_n(t))_n\right) \in D(V)$，并且我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V\left(S(t),(I_n(t))_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\right) = -\frac{(S(t)-S^*)^2}{S(t)}\left(-\theta - \sum_{n\in\mathcal{N}_+}\alpha\gamma_n I_n^*\right). \tag{5.14}$$

证明。 首先，我们检验 $(S^*, (I_n^*)_{n\in\mathbb{N}})$ 是方程 (1.1) 的一个稳态解。事实上，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_n^*) = 0 = \gamma_n(\alpha^* S^* - 1)I_n^*,$$

and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S^*) = 0 = \Lambda - \theta S^* - S^*\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}}\alpha^*\gamma_n e^{\tau\gamma_n} I_n^0.$$

令 $\left(S(t), (I_n(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 满足 $\left(S(0), (I_n(0))\right) \in D(V)$，我们验证对所有 $t \ge 0$，都有 $\left(S(t), (I_n(t))\right) \in D(V)$。这是 $S(t) > 0$ 的结论，见引理 5.3。然后，我们注意到

$$I_n(t) = I_n(0)e^{\beta_n\int_0^t S(s)\mathrm{d}s - \gamma_n t} \ge I_n(0)e^{\beta_0\int_0^t S(s)\mathrm{d}s - \gamma_\infty t},$$

因此

$$\inf_{n\in\mathcal{N}_+}\frac{I_n(t)}{I_n^*} \ge e^{\beta_0\int_0^t S(s)\mathrm{d}s - \gamma_\infty t}\inf_{n\in\mathcal{N}_+}\frac{I_n(0)}{I_n^*} > 0,$$

并且我们已经证明，对所有 $t \geq 0$，$\big(S(t),(I_n(t))\big) \in D(V)$。$t \mapsto V\big(S(t),(I_n(t))\big)$ 的连续性和连续可微性可由经典论证得出。

接下来，记 $V_1(t) = S^* g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right)$ 和 $V_2(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} I_n^* g\left(\frac{I_n(t)}{I_n^*}\right)$，我们有

$$\begin{aligned}
V_1'(t) &= S^* \frac{S'(t)}{S^*} g'\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) = \left(\Lambda - \theta S(t) - S(t)\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I_n(t)\right)\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \\
&= \left(\Lambda - \theta S(t) - S(t)\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I_n(t) - \Lambda + \theta S^* + S^*\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I_n^*\right)\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right) \\
&= -\theta\frac{(S(t)-S^*)^2}{S(t)} + \left(S^*\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I_n^* - S(t)\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I_n(t)\right)\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right), \\
&= -\theta\frac{(S(t)-S^*)^2}{S(t)} + \frac{S(t)-S^*}{S(t)}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \alpha^*\gamma_n\big(I_n^* S^* - I_n(t)S(t)\big),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
V_2'(t) &= \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n^* \frac{I_n'(t)}{I_n^*} g'\left(\frac{I_n(t)}{I_n^*}\right) = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n\left(\alpha^* S(t) - 1\right) I_n(t)\left(1 - \frac{I_n^*}{I_n(t)}\right) \\
&= \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n\left(\alpha^* S(t) - 1\right)\left(I_n(t) - I_n^*\right) \\
&= \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n\alpha^*\left(S(t) - S^*\right)\left(I_n(t) - I_n^*\right).
\end{aligned}$$

回忆 $S^* = \frac{1}{\alpha^*}$，因此我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(S(t),(I_n(t))_n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_1(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_2(t) \\
&= -\theta\frac{(S(t)-S^*)^2}{S(t)} + \frac{S(t)-S^*}{S(t)}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \alpha^*\gamma_n\left(I_n^* S^* - I_n(t)S(t) + I_n(t)S(t) - I_n^* S(t)\right) \\
&= -\theta\frac{(S(t)-S^*)^2}{S(t)} - \frac{\left(S(t)-S^*\right)^2}{S(t)}\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \alpha^*\gamma_n I_n^*.
\end{aligned}$$

命题 5.6 得证。 □

引理 5.10。 假设假设 *2.1*、*5.2* 和 *2.3* 成立，并假设存在一个指标 $i \in \mathbb{N}$，使得 $I_i^0 > 0$ 和

$$\alpha^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta_n}{\gamma_n} = \frac{\beta_i}{\gamma_i}.$$

对于 $s < t$，令

$$\eta(t;s) := (t-s)\big(\alpha^*\overline{S}(t;s) - 1\big), \text{ where } \overline{S}(t;s) := \frac{1}{t-s}\int_s^t S(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{5.15}$$

那么存在常数 $\eta > 0$，使得对于任意 $0 \leq s < t$，有

$$-\overline{\eta} \leq \eta(t;s) \leq \overline{\eta} < +\infty. \tag{5.16}$$

此外，若 $\big(S(t),\ (I_n(t))_n\big) \in \mathbb{R}\times\mathcal{M}_+(\mathbb{N})$ 是一个一致有界的完整轨道，且满足 下极限$_{t\to-\infty}$ $\sum_{\{k:\ \alpha_k=\alpha^*\}} I_n(t) > 0$，

那么对于任意 $s < t$，都有

$$-\overline{\eta} \leq \eta(t;s) \leq \overline{\eta} < +\infty. \tag{5.17}$$

证明。 令我们将 $I_n(t)$ 写作

$$I_n(t) = I_n(s)\exp\left[\gamma_n(t-s)\left(\left(\alpha^*\overline{S}(t;s) - 1\right) - \left(\alpha^* - \frac{\beta_n}{\gamma_n}\right)\overline{S}(t;s)\right)\right] = I_n(s)e^{\gamma_n\eta(t;s) - (\alpha^*-\alpha_n)\overline{S}(t;s)}.$$

我们声称 $\eta(t;s)$ 在 t,s 中一致有界。事实上，回忆 $\alpha_n = \frac{\beta_n}{\gamma_n}$，由詹森不等式可得

$$\exp\left[\sum_{\{n:\alpha_n=\alpha^*\}} \gamma_n \eta(t;s) \frac{I_n(s)}{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)}\right] \le \sum_{\{n:\alpha_n=\alpha^*\}} e^{\gamma_n \eta(t;s)} \frac{I_n(s)}{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)},$$

因此

$$\begin{aligned}\eta(t;s) &\le \frac{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)}{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} \gamma_k I_k(s)} \ln\left[\sum_{\{n:\alpha_n=\alpha^*\}} e^{\gamma_n \eta(t;s)} \frac{I_n(s)}{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)}\right] \\ &= \frac{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)}{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} \gamma_k I_k(s)} \ln\left[\frac{\sum_{\{n:\alpha_n=\alpha^*\}} I_n(t)}{\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)}\right].\end{aligned}$$

应用引理 5.3，总质量 $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n(t)$ 有上界，并且根据命题 5.7，和 $\sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_k(s)$ 是

当 $s \to +\infty$ 时有下界；因此存在一个与 s 无关的 $\eta < +\infty$，使得

$$\eta(t;s) \le \overline{\eta}.$$

如果 $\big(S(t),(I_n(t))_n\big) \in \mathbb{R}\times\mathcal{M}_+(\mathbb{N})$ 是一条完整轨道，且 $\liminf_{t\to-\infty} \sum_{\{k:\alpha_k=\alpha^*\}} I_n(t) > 0$，那么存在一个上界 η，对所有 $t,\ s\in\mathbb{R}$ 均成立。

另一方面，我们断言，对于某个常数 η，有 $\liminf_{t\to+\infty} \eta(t;s) \ge \underline{\eta}$。事实上，反设存在一个序列 $t_k \to +\infty$ 和 $s_k \ge 0$，使得 $\eta(t_k;s_k) \to -\infty$。那么

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t) = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(s_k) e^{\gamma_n \eta(t_k;s_k) - (\alpha^*-\alpha_n)\overline{S}(t_k;s_k)} \le e^{\gamma_0 \eta(t_k;s_k)} \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(s_k) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

这与命题 5.7 矛盾。我们已证明 (5.16)。(5.17) 可用相同的论证证明。 □

接下来，我们推导出一种 LaSalle 原理（LaSalle 1960），它表明，集中在集合 $\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \alpha^*$ 上的完整轨道“几乎”是平稳的。

引理 5.11. 设假设 *2.1* 和 *2.3* 成立，并假定 $(I_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ 非平凡。进一步假设，当 $I_n^0 > 0$ 时，$\frac{\beta_n}{\gamma_n} \equiv \alpha^*$ 为常数，且 $R_0 > 1$。设 $\big(S(t),(I_n(t))_n\big)$ 是方程 (1.1) 的一条完整轨道，在 $t=0$ 时经过 (S_0,I_n^0)，并假设

$$\liminf_{t\to-\infty} \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t) > 0. \tag{5.18}$$

那么我们有

$$S(t) \equiv \frac{1}{\alpha^*} \ \textit{for all}\ t\in\mathbb{R}.$$

证明。 根据我们的假设，我们有

$$\liminf_{t\to-\infty} \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I_n(t) = \liminf_{t\to-\infty} \sum_{\{n:\alpha_n=\alpha^*\}} I_n(t) > 0. \tag{5.19}$$

因此，引理 5.10 意味着，按 (5.15) 定义的 $\eta(t;s)$ 一致有界。令 $\eta(t) := \eta(t;0)$。我们定义分布：

$$I_n^* := \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\beta_n}{\gamma_n} < \alpha^*, \\ e^{\tau\gamma_n} I_n^0, & \text{if } \frac{\beta_n}{\gamma_n} = \alpha^*, \end{cases}$$

其中 $\tau \ge 0$ 是该方程的唯一解

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n e^{\tau\gamma_n} \mathbb{1}_{\alpha_n=\alpha^*} I_n^0 = \frac{\theta}{\alpha^*}\left(\mathcal{R}_0 - 1\right).$$

那么 (I_n^*) 是一个满足 $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{I_n^0}{I_n^*} \geq e^{-|\tau|\gamma_0}$ 的平稳分布，因此命题 5.9 推出 $V\big(S(t), \text{由 (5.13) 定义的 } (I_n(t))_n\big)$沿轨道良定义且递减。

我们断言， $V\big(S(t), (I_n(t))_n\big)$ 在该轨道上为常数。事实上，任取序列 $t_k \to -\infty$；由于$S(t)$和 $\eta(t)$一致有界，我们可以从 t_k 中抽取一个子序列，仍记为 t_k，使得 $S(t_k) \to S^{-\infty}$ 且$\eta(t_k) \to \eta^{-\infty}$。于是有

$$I_n(t_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n^{-\infty} := I_n^0 e^{\gamma_n \eta^{-\infty}}, \text{ in } \mathcal{M}_+(\overline{\mathbb{N}}) \text{ and } \ell^\infty((I_n^*)^{-1}).$$

此外， $t \mapsto V(S(t), (I_n(t)))$单调递减且有界，因此存在 V^∞ 使得

$$\lim_{t\to-\infty} V(S(t), (I_n(t))) = V^\infty.$$

平移轨道$(S(t+t_k), (I_n(t+t_k))_n)$经进一步抽取后收敛到一个完整轨道$(S^{-\infty}(t), (I_n^{-\infty}(t))_n)$；对于所有 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $V(S^{-\infty}(t), (I_n^{-\infty}(t))_n) \equiv V^{-\infty}$，因此 $V'(S^{-\infty}(t), (I_n^{-\infty}(t))_n) = 0$，并由(5.14)可得

$$S^{-\infty}(t) \equiv \frac{1}{\alpha^*}, \qquad (S^{-\infty})'(t) \equiv 0, \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R},$$

并且根据 (1.1a) 的第二行，

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} I^{-\infty}(t) = \Lambda - \frac{\theta}{\alpha^*} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n e^{\gamma_n \eta^{-\infty}} I_n^0 = \frac{\theta}{\alpha^*}(\mathcal{R}_0 - 1). \tag{5.20}$$

由于 $\eta \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n e^{\gamma_n \eta} I_n^0$ 严格递增，方程 (5.20) 有唯一的解，即 $\eta = \tau$；因此 $\eta^{-\infty} = \tau$、 $I_n^{-\infty} \equiv I_n^*$ 和

$$V(S^{-\infty}, (I_n^{-\infty})_{n\in\overline{\mathbb{N}}}) = \min_{(S,(I_n))\in D(V)} V(S, (I_n)) = 0.$$

回到原来的完整轨道，由 V 在 $\mathbb{R} \times \ell^\infty((I_n^*)^{-1})$ 中的连续性，我们有 t

$$\lim_{k\to+\infty} V(S(t_k), (I_n(t_k))_n) = V(S^{-\infty}, (I_n^{-\infty})_{n\in\overline{\mathbb{N}}}) = \min_{(S,(I_n))\in D(V)} V(S, (I_n)),$$

并且由于 $V(S(t),(I_n(t))_n)$ 是递减的，这意味着

$$S(t) \equiv \frac{1}{\alpha^*}.$$

引理 5.11 得证。 □

现在我们可以证明定理 2.6。

定理 *2.6* 的证明。 回顾一下，$(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_+$ 是一个取值于 $\mathbb{N}$ 的序列；不失一般性，令

$$\omega(\alpha) \times \omega(\gamma) =: \{(\alpha_{-i}, \gamma_{-i}) : i = 1, \dots, K\},$$

如第 5.3 节开头所述，并且 $I_{-i}^0 = 0$，使得 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 作为 $\mathcal{M}_+(\mathbb{N})$ 的一个元素是良定义的，且对于所有 $t \geq 0$，新系统与原系统严格等价。

我们先处理情形 i)，并假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{\beta_{n_0}}{\gamma_{n_0}} = \alpha^*$。由引理 5.10 可知—

$$I_n(t) = I_n^0 e^{\gamma_n \eta(t;0) - (\alpha_n - \alpha^*)\overline{S}(t;0)}$$

并且 $\eta(t;0)$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致有界。令 t_k 为一个满足 $t_k \to +\infty$ 且 $\eta(t_k;0) \to \eta$ 的序列 $^\infty \in [0, \overline{\eta}]$.
Then

$$I_n(t_k) = I_n^0 e^{\gamma_n t_k(\alpha^* \overline{S}(t_k) - 1) - \gamma_n(\alpha^* - \alpha_n)t_k \overline{S}(t_k)} \Longrightarrow I_n^\infty(0) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha_n < \alpha^*, \\ I_n^0 e^{\gamma_n \eta^\infty} & \text{if } \alpha_n = \alpha^*. \end{cases}$$

根据命题 5.6，我们可以从 (t_k) 中提取一个子序列，仍记为 (t_k)，使得 $(S(t+t_k)\ I(t+t_k))$ 在 $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_+^*(\mathbb{N})$ 中收敛到一个完整轨道 $(S^\infty(t),(I_n^\infty(t)))$，且 $S^\infty > 0$；根据命题 5.7，极限 I_n^∞ 非平凡。根据命题 5.6，我们有 $I_n^\infty(t) \equiv 0$，只要 $\alpha_n < \alpha^*$；因此，只要 $I_n^\infty > 0$，就有 $\beta_n = \alpha^* \gamma_n$。于是我们可以应用引理 5.11 来证明

$$S^\infty(t) \equiv \frac{1}{\alpha^*} \text{ and } (S^\infty)'(t) \equiv 0.$$

Thus

$$0 = \Lambda - \theta S^\infty - S^\infty \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I^\infty(0) \Longrightarrow \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \beta_n I^\infty(0) = \theta\left(\frac{\Lambda}{\theta}\alpha^* - 1\right)$$

最后

$$\sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \gamma_n \mathbb{1}_{\alpha_n=\alpha^*} e^{\gamma_n \eta^\infty} I_n^0 = \frac{\theta}{\alpha^*}(\mathcal{R}_0 - 1).$$

由于左端是关于 η^∞ 的严格递增函数，因此该方程存在唯一的解 $\tau \geq 0$。由此，我们证明了 $\eta(t;0)$ 收敛到该值 $\tau \geq 0$，最后，

$$\lim_{t\to+\infty} I_n(t) = \lim_{t\to+\infty} I_n^0 e^{\gamma_n t(\alpha^* \overline{S}(t)-1)-\gamma_n(\alpha^*-\alpha_n)t\overline{S}(t)} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha_n < \alpha^*, \\ I_n^0 e^{\gamma_n \tau} & \text{if } \alpha_n = \alpha^*. \end{cases}$$

这就完成了定理 2.6 情形 i) 的证明。

接下来处理情形 ii)，并假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\frac{\beta_n}{\gamma_n} < \alpha^*$。任取 $t_k \to +\infty$。根据命题 5.6，我们可以从 t_k 中提取一个子序列，仍记为 t_k，使得平移轨道 $\left(S(t+t_k), (I_n(t+t_k))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathcal{M}_+^*(\mathbb{N})$ 中逐点收敛到一个完整轨道 $\left(S^\infty(t), (I_n^\infty(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)$，且极限 $(I_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ 根据命题 5.7 是非平凡的。由于我们的假设 $\frac{\beta_n}{\gamma_n} < \alpha^*$，对所有 $n \geq 0$ 都有 $I_n^\infty = 0$，因此只要 $I_n^\infty(0) > 0$，就有 $\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \alpha^*$。于是我们可以应用引理 5.11，得到

$$S^\infty(t) \equiv \frac{1}{\alpha^*}, \qquad (S^\infty)'(t) \equiv 0, \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

由于原序列是任意的，我们已经证明了

$$S(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha^*}, \qquad S'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \qquad I_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N},$$

质量不消失这一事实是命题 5.7 的推论，而集中性质则是命题 5.6 中的 (5.7) 的推论。由此完成了第 ii) 项的证明，并结束了定理 2.6 的证明。 □

5.4 命题 2.9 的证明

现在，在附加假设 2.8 下，我们证明命题 2.9。

命题 *2.9* 的证明。我们将证明分为几个步骤。令 $S(t) := \frac{1}{t}\int_0^t S(s)\mathrm{d}s$。我们的方法如下：固定 $\varepsilon > 0$，并证明指标集 $\mathcal{C}_\varepsilon := \{n : \alpha_n \geq \alpha^* - \varepsilon \text{ and } \gamma_n \geq \gamma^* - \varepsilon\}$ 渐近地集中全部质量。

步骤 1： 我们证明:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n S(t)<1} I_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0. \tag{5.21}$$

事实上，由于 $S(t) \rightrightarrows \frac{1}{\alpha^*}$，函数 $\mathbb{1}_{\alpha_n S(t)<1} I_n(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时逐点收敛于 0，这是因为根据我们的假设，对于所有 n，$\frac{\beta_n}{\gamma_n} = \alpha_n < \alpha^*$（事实上，对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，该函数最终恒等于 0）。此外，我们有 $\mathbb{1}_{\alpha_n S(t)<1} I_n(t) = \mathbb{1}_{\alpha_n S(t)<1} e^{t\gamma_n(\alpha^* S(t)-1)} I_n^0 \leq I_n^0$，因此该序列一致地被 $\left(I_n^0\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_+^1$ 控制。由勒贝格控制收敛定理可知，

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n S(t)<1} I_n(t) = 0,$$

这就证明了 (5.21)。

步骤 2： 我们证明，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t)\geq 1} e^{t(\gamma^*-\varepsilon)\left(\alpha_n \overline{S}(t)-1\right)} I_n^0 < +\infty. \tag{5.22}$$

事实上，令 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为集合 $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的严格递增枚举。注意，通过改变求和顺序，我们有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t)\geq 1} I_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n\}} e^{\gamma_n t\left(A_n \overline{S}(t)-1\right)} I_k^0,$$

因此，根据步骤 1，对于 t 充分大时，我们有

$$\sum_{\{n\,:\,\gamma_n \geq \gamma^*-\varepsilon\}} I_n(t) = \sum_{\{n\,:\,\gamma_n \geq \gamma^*-\varepsilon\}} \left(\mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t)<1} + \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t)\geq 1}\right) I_n(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= o(1) + \sum_{\{n\,:\,A_n \geq \frac{1}{\overline{S}(t)}\}} \sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n \text{ and } \gamma_k \geq \gamma^* - \varepsilon\}} e^{\gamma_k t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_k^0 \\
&\geq o(1) + \sum_{\{n\,:\,A_n \geq \frac{1}{\overline{S}(t)}\}} \sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n \text{ and } \gamma_k \geq \gamma^* - \varepsilon\}} e^{(\gamma^* - \varepsilon) t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_k^0 \\
&= o(1) + \sum_{\{n\,:\,A_n \geq \frac{1}{\overline{S}(t)}\}} e^{(\gamma^* - \varepsilon) t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} \sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n \text{ and } \gamma_k \geq \gamma^* - \varepsilon\}} I_k^0 \\
&= o(1) + \sum_{\{n\,:\,A_n \geq \frac{1}{\overline{S}(t)}\}} e^{(\gamma^* - \varepsilon) t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} \frac{\sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n \text{ and } \gamma_k \geq \gamma^* - \varepsilon\}} I_k^0}{\sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n\}} I_k^0} \sum_{\{k\,:\,\alpha_k = A_n\}} I_k^0 \\
&\geq o(1) + m \sum_{\{n\,:\,A_n \geq \frac{1}{\overline{S}(t)}\}} \sum_{\{\alpha_k = A_n\}} e^{(\gamma^* - \varepsilon) t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_k^0,
\end{aligned}
$$

其中 $m > 0$ 是由假设 2.8 给出的常数，误差项 $o(1)$ 汇集了当$t \to +\infty$时趋于 0 的各项。因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{n\,:\,\alpha_n \geq \alpha^* - \varepsilon\}} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} e^{t(\gamma^* - \varepsilon)\left(\alpha_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_n^0 &= \sum_{\{n\,:\,A_n \geq \frac{1}{\overline{S}(t)}\}} \sum_{\{\alpha_k = A_n\}} e^{(\gamma^* - \varepsilon) t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_k^0 \\
&\leq o(1) + \frac{1}{m} \sum_{\{n\,:\,\gamma_n \geq \gamma^* - \varepsilon\}} I_n(t) = \mathcal{O}(1).
\end{aligned}
$$

这就证明了 (5.22)。

步骤 3： 我们证明，对所有 $\varepsilon > 0$,

$$
\sum_{\{n\,:\,\alpha_n \geq \alpha^* - \varepsilon \text{ and } \gamma_n \leq \gamma^* - \varepsilon\}} I_n(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0. \tag{5.23}
$$

事实上，当 t 充分大时，我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{n\,:\,\alpha_n \geq \alpha^* - \varepsilon \text{ and } \gamma_n \leq \gamma^* - \varepsilon\}} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} I_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n \overline{S}(t) \geq 1} \sum_{\{\alpha_k = A_n\}} e^{\gamma_n t\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} \mathbb{1}_{\gamma_k \leq \gamma^* - \varepsilon} I_k^0 \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n \overline{S}(t) \geq 1} \sum_{\{\alpha_k = A_n\}} e^{t(\gamma^* - \varepsilon)\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} \mathbb{1}_{\gamma_k \leq \gamma^* - \varepsilon} I_k^0 \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n \overline{S}(t) \geq 1} e^{-t\frac{\varepsilon}{2}(A_n \overline{S}(t) - 1)} \left(\sum_{\{\alpha_k = A_n\}} I_k^0 \right) e^{t\left(\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(A_n \overline{S}(t) - 1\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t\frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n \overline{S}(t) - 1)} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} e^{t\left(\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\alpha_n \overline{S}(t) - 1\right)} \mathbb{1}_{\gamma_n \leq \gamma^* - \varepsilon} I_n^0.
\end{aligned}
$$

如有必要，缩小 ε，我们可以假设 $\frac{2\gamma^* - \varepsilon}{\varepsilon} > 1$。因此，根据 H¨older 不等式，我们有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{\{n\,:\,\alpha_n \geq \alpha^* - \varepsilon \text{ and } \gamma_n \leq \gamma^* - \varepsilon\}} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} I_n(t) &\leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t\frac{\varepsilon}{2}(\alpha_n \overline{S}(t) - 1)} \right)^{\frac{\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} e^{t\left(\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\alpha_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_n^0 \right)^{\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}}} \\
&\quad \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} e^{t\left(\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\alpha_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_n^0 \right)^{\frac{\gamma^* - \varepsilon}{\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}}} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} I_n^0 \right)^{\frac{\varepsilon}{2\gamma^* - \varepsilon}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} e^{t\left(\gamma^* - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\alpha_n \overline{S}(t) - 1\right)} I_n^0 \right)^{\frac{2(\gamma^* - \varepsilon)}{2\gamma^* - \varepsilon}}.
\end{aligned}
$$

由于 $\mathbb{1}_{\alpha_n S\text{-}(t)\ \geq 1} I_n^0$ 被一个可和序列一致有界，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$都收敛于 0，根据勒贝格控制收敛定理，我们有：

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\alpha_n \overline{S}(t) \geq 1} I_n^0 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,
$$

并且在步骤 2 中（将 ε 替换为 $\frac{\varepsilon}{2}$），我们证明了

$$\limsup_{t\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{\alpha_n\overline{S}(t)\geq 1}e^{t\left(\gamma^*-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\alpha_n\overline{S}(t)-1\right)}I_n^0<+\infty,$$

因此

$$\sum_{\{n\,:\,\alpha_n\geq\alpha^*-\varepsilon\text{ and }\gamma_n\leq\gamma^*-\varepsilon\}}\mathbb{1}_{\alpha_n\overline{S}(t)\geq 1}I_n(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

我们已证明 (5.23)。

步骤 4： 我们证明质量的收敛。为此，我们考虑定义在 $\mathbb{N}$ 上的等价系统，令 $I_{-i}^0=0$ 对于 $i\in\{\overline{-}K,\ldots,-1\}$，如同第 5.3 节开头所述。设 (t_k) 为任意满足 $t_k\to+\infty$ 的序列。由命题 5.6 可知，我们可以抽取一个子序列，仍记为 t_k，使得 $(S(t_k+t),(I_n(t_k+t))_{n\in\mathbb{N}})$ 收敛到一个完整轨道 $(S^\infty(t),(I_n^\infty(t))_{n\in\mathbb{N}})$。由定理 2.6 可知，当 $\alpha_n<\overline{\alpha}^*$ 时，$I_n^\infty(t)\equiv 0$；由步骤 3 可知，当 $\gamma_n<\gamma^*$ 时，$I_n^\infty(t)\equiv 0$。由引理 5.11，进而有 $S^\infty(t)\equiv\frac{1}{\alpha^*}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S^\infty(t)=0=\Lambda-\theta S^\infty(t)-S^\infty(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n\alpha_nI_n^\infty(t)\Longleftrightarrow\frac{1}{\alpha^*}\sum_{n=-K}^{+\infty}\gamma^*\alpha^*I_n^\infty(t)=\Lambda-\frac{\theta}{\alpha^*},$$

由此我们推得

$$\sum_{n=-K}^{+\infty}I_n^\infty(t)=\frac{\theta}{\alpha^*\gamma^*}\left(\mathcal{R}_0-1\right).$$

此外，对于满足 (2.6) 的指标序列 (n_j)，序列 $\left((\alpha_{n_j},\ \gamma_{n_j})\right)_{j\in\mathbb{N}}$ 的 ω-极限集为集合$\{(\alpha_{-i_1},\ \gamma_{-i_1})\ldots,(\alpha_{-i_N},\ \gamma_{-i_N})\}$，其中某个 $N<K$ 满足 $\gamma_{i_j}<\gamma^*$, $i=1$，…，N。根据步骤 3，我们于是得到

$$\sum_{j=0}^{+\infty}I_{n_j}(t_k+t)\xrightarrow[k\to+\infty]{}\sum_{j=1}^{N}I_{-i_j}^\infty(t)+\sum_{j=0}^{+\infty}I_{n_j}^\infty(t)\equiv 0\text{ for all }t\in\mathbb{R}.$$

由于序列 (t_k) 是任意的，我们确实已经证明 $\sum_{n=0}^{+\infty}I_n(t)$ 收敛，且其极限由 (2.5) 给出；并且对于任何满足 (2.6) 的指标序列 (n_k)，(2.7) 均成立。命题 2.9 得证。 □

5.5 R$\mathcal{R}_0=1$ =1 时的灭绝

我们继续证明命题2.5 的极限情形$\mathcal{R}_0=1$，并将证明在这种情况下感染会消亡。

命题 5.12。 假设假设 *2.1* 和 *2.3* 成立。那么，对于所有初始数据 $(S_0,(I_n^0)_{n\in\mathbb{N}})$，解$(S(t),(I_n(t))_{n\in\mathbb{N}})$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\frac{\Lambda}{\theta}\ \textit{and}\ \lim_{t\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}I_n(t)=0.$$

证明。 为证明这个命题，与第 5.3 小节中一样，我们将系统扩展为 $n\in\mathbb{N}=\{-K,\overline{-K}+1,-K+2,\cdots\}$。固定任意一个序列 (t_k)，使得 $t_k\to\infty$ as $k\to\infty$。经过抽取子列后，函数序列 $(S(t+t_k),(I_n(t+t_k))_{n\in\mathbb{N}})$ 在 t 中局部一致收敛于一个取值于 $\mathbb{R}\overline{\times}\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 的完整轨道 $(S^\infty(t),(I_n^\infty(t))_{n\in\mathbb{N}})$。现在回想一下，由引理 5.3 可知

$$S^\infty(t)\leq\frac{\Lambda}{\theta},\ \forall t\in\mathbb{R},$$

并且 $t\mapsto\left(S^\infty(t),(I_n^\infty(t))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ 是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S^\infty(t)=\Lambda-\theta S^\infty(t)-S^\infty(t)\displaystyle\sum_{i=-K}^{\infty}\beta_iI_i^\infty(t)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_n^\infty(t)=\gamma_n\left(\alpha_nS^\infty(t)-1\right)I_n^\infty(t),\ \forall n\geq-K\end{cases}$$

现在，为了完成该命题的证明，我们来证明以下结论。

$$\sum_{n\geq-K}I_n^\infty(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

为此，考虑以下量

$$\ell=\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\geq-K}I_n^\infty(t)$$

并反设 $\ell > 0$。接下来考虑一个序列 $(s_p) \subset \mathbb{R}$，使得

$$\ell = \lim_{p\to\infty} \sum_{n\geq -K} I_n^\infty(s_p).$$

如上所述，考虑函数序列 $(S^\infty(t+s_p), (I_n^\infty(t+s_p))_{n\in\mathbb{N}})$，并假设该序列可能沿某个子序列局部一致地收敛到一个完整轨道 $(\hat{S}(t), (\hat{I}_n(t))_{n\in\mathbb{N}})$，收敛所在的区域为 $t \in \mathbb{R}$，取值于 $\mathbb{R}\times\mathcal{M}(\mathbb{N})$。因此，它成为 $t\in\mathbb{R}$ 的一个解，满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{S}(t) = \Lambda - \theta\hat{S}(t) - \hat{S}(t)\displaystyle\sum_{i=-K}^{\infty}\beta_i\hat{I}_i(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_n(t) = \gamma_n\left(\alpha_n\hat{S}(t) - 1\right)\hat{I}_n(t),\ \forall n \geq -K \end{cases}$$

以及

$$\ell = \sum_{n\geq -K}\hat{I}_n(0) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\geq -K}\hat{I}_n(t).$$

现在注意，对所有 $n \geq -K$，都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_n(t) \leq \gamma_n\left(\alpha_n\frac{\Lambda}{\theta} - 1\right)\hat{I}_n(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

因此，由于 $\mathcal{R}_0 = 1$，我们有 $\frac{\Lambda}{\theta} = \frac{1}{\alpha^*}$，并且对所有满足 $\alpha_n < \alpha^*$ 的 $n \geq -K$，$\hat{I}_n(t) \equiv 0$。现在令 $J = \{n \geq -K : \alpha_n = \alpha^*\}$，则上述方程组化简为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{S}(t) = \Lambda - \theta\hat{S}(t) - \hat{S}(t)\displaystyle\sum_{j\in J}\gamma_j\alpha^*\hat{I}_j(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_n(t) = \gamma_n\left(\alpha^*\hat{S}(t) - 1\right)\hat{I}_n(t),\ \forall n \in J. \end{cases}$$

现在将 I_n–分量相加，得到

$$\sum_{n\in J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{I}_n(0) = 0 = (\alpha^*\hat{S}(0) - 1)\sum_{n\in J}\gamma_n\hat{I}_n(0),$$

因此，由于对所有 t，都有 $\hat{S}(t) \leq \frac{\Lambda}{\theta}$，我们得到：

$$\hat{S}(0) = \frac{1}{\alpha^*} = \frac{\Lambda}{\theta} \text{ and } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{S}(0) = 0.$$

将 $t = 0$ 代入 S–方程，得到

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{S}(0) = \Lambda - \theta\frac{\Lambda}{\theta} - \frac{\Lambda}{\theta}\sum_{n\in J}\gamma_n\alpha^* I_n^\infty(0).$$

这确保了

$$\alpha^*\left(\inf_{n\geq 0}\gamma_n\right)\ell \leq \sum_{n\in J}\gamma_n\alpha^* I_n^\infty(0) = 0,$$

一个矛盾，这证明了 $\ell = 0$，并完成了该命题的证明。 □

参考文献

Ackleh, A. S. 和 L. J. S. Allen（2003年）。可变种群规模流行病模型中病原体的竞争排斥与共存。《数学生物学杂志》**47.2**，第153–168页。doi: 10.1007/s00285-003-0207-9。

Alizon、S.、T. A. Hurford、N. Mideo 和 M. Van Baalen（2009）。毒力进化与权衡假说：历史、当前状况与未来。*J. Evol. Biol.* **22.2**，第 245–259 页。doi: 10.1111/j.1420-9101.2008.01658.x。

Armstrong, R. A. 和 R. McGehee（1980年）。竞争排斥。《美国博物学家》**115.2**，第 151–170 页。doi: 10.1086/283553。Barles, G., S. Mirrahimi 和 B. Perthame（2009）。洛特卡-沃尔泰拉抛物型方程或积分方程中的集中：一个一般收敛结果。《应用分析方法》**16.3**，第 321–340 页。doi: 10.4310/MAA.2009.v16.n3.a4。Barles, G. 和 B. Perthame（2007）。自适应动力学中出现的集中现象与受约束的哈密顿-雅可比方程。载于：非线性偏微分方程最新进展。第 439 卷。Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI，第 57–68 页。doi: 10.1090/conm/439/08463。

Bogachev, V. I. (2007). 测度论。第一、二卷。Springer-Verlag，柏林，第一卷：xviii+500 页，第二卷：xiv+575。doi:10.1007/978-3-540-34514-5。Bouin, E. 等（2012）。可变运动能力下的入侵前沿：表型选择、空间排序与波加速。《巴黎科学院数学报告》350.15-16，第761–766页。doi：10.1016/j.crma.2012.09.010。Br¨ussow, H.（2022）。新冠肺炎：奥密克戎——最新、毒性最低，但可能并非严重急性呼吸综合征冠状病毒2型最后一个关注变异株。《微生物学与生物技术》15.7，第1927–1939页。doi：10.1111/1751-7915.14064。Burie, J.-B., R. Djidjou-Demasse 和 A. Ducrot（2020）。源于群体遗传学的非局部问题的渐近与暂态行为。《欧洲应用数学杂志》31.1，第84–110页。doi：10.1017/s0956792518000487。Butler, G. J. 和 G. S. K. Wolkowicz（1985）。具有描述营养物摄取的一般函数类的恒化器数学模型。《工业与应用数学学会应用数学杂志》45.1，第138–151页。doi：10.1137/0145006。Corless, R. M. 等（1996）。关于Lambert W 函数。《计算数学进展》5.4，第329–359页。doi：10.1007/BF02124750。Cushing, J. M.（1980）。周期环境中的两物种竞争。《数学生物学杂志》10.4，第385–400页。doi：10.1007/BF00276097。Day, T. 和 S. Gandon（2007）。在理论进化流行病学中应用群体遗传模型。《生态学快报》10.10，第876–888页。doi：10.1111/j.1461-0248.2007.01091.x。Demongeot, J., Q. Griette, Y. Maday 和 P. Magal（2023）。一个以单个或多个感染患者队列为起点、具有感染龄的Kermack–McKendrick模型。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》479.2272，第20220381页。doi：10.1098/rspa.2022.0381。Desvillettes, L., P.-E. Jabin, S. Mischler 和 G. Raoul（2008）。连续结构化种群的选择动力学。《数学科学通讯》6.3，第729–747页。Ducrot, A., Q. Griette, Z. Liu 和 P. Magal（2022）。微分方程与种群动力学 I：入门方法。《生命科学数学建模讲义》。Jacques Demongeot 和 Glenn Webb 作序。Springer，Cham，第xx+458页。doi：10.1007/978-3-030-98136-5。Ewald, P. W.（1983）。宿主-寄生物关系、媒介生物与疾病严重程度的演化。《生态学与系统学年度评论》14.1，第465–485页。doi：10.1146/annurev.es.14.110183.002341。Griette, Q.（2019）。具有连续表型的流行病学模型中的奇异测度行波。《美国数学会汇刊》371.6，第4411–4458页。doi：10.1090/tran/7700。Hardin, G.（1960）。竞争排斥原理。《科学》131.3409，第1292–1297页。Hsu, S. B., H. L. Smith 和 P. Waltman（1996）。序Banach空间上竞争系统的竞争排斥与共存。《美国数学会汇刊》348.10，第4083–4094页。doi：10.1090/S0002-9947-96-01724-2。Hsu, S.-B.（1978）。竞争物种的极限行为。《工业与应用数学学会应用数学杂志》34.4，第760–763页。doi：10.1137/0134064。Hsu, S.-B., S. Hubbell 和 P. Waltman（1977）。微生物连续培养中单一营养物竞争的数学理论。《工业与应用数学学会应用数学杂志》32.2，第366–383页。doi：10.1137/0132030。Jabin, P.-E. 和 G. Raoul（2011）。竞争相互作用的选择动力学。《数学生物学杂志》63.3，第493–517页。doi：10.1007/s00285-010-0370-8。Kermack, W. O. 和 A. G. McKendrick（1927年）。对流行病数学理论的贡献。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》115.772，第700–721页。doi：10.1098/rspa.1927.0118。LaSalle, J. P.（1960年）。李雅普诺夫第二方法的若干扩展。IRE Trans. CT-7，第520–527页。doi：10.1109/TCT.1960.1086720。Li, B.（1999）。恒化器的全局渐近行为：一般响应函数与不同去除率。《工业与应用数学学会应用数学杂志》59.2，第411–422页。doi：10.1137/S003613999631100X。Lorz, A. 和 B. Perthame（2014）。表型结构化模型的长期行为。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》470.2167，第20140089页，10。doi：10.1098/rspa.2014.0089。Magal, P.（2002）。表型演化模型中的突变与重组。《进化方程杂志》2.1，第21–39页。doi：10.1007/s00028-002-8078-x。Magal, P. 和 G. F. Webb（2000）。表型演化模型中的突变、选择与重组。《离散与连续动力系统》6.1，第221–236页。doi：10.3934/dcds.2000.6.221。Magal, P. 和 X.-Q. Zhao（2005）。一致持久动力系统的全局吸引子与稳态。《工业与应用数学学会数学分析杂志》37.1，第251–275页。doi：10.1137/S0036141003439173。Raoul, G.（2011）。选择与消失突变作用下种群的长期演化。《应用数学学报》114.1-2，第1–14页。doi：10.1007/s10440-011-9603-0。Smith, H. L.（1981）。振荡恒化器中的竞争共存。《工业与应用数学学会应用数学杂志》40.3，第498–522页。doi：10.1137/0140042。Thieme, H. R.（2011）。无限维空间中地方病平衡态的全局稳定性：李雅普诺夫函数与正算子。《微分方程杂志》250.9，第3772–3801页。doi：10.1016/j.jde.2011.01.007。Wolkowicz, G. S. K. 和 Z. Q. Lu（1992）。恒化器竞争数学模型的全局动力学：一般响应函数与差异死亡率。《工业与应用数学学会应用数学杂志》52.1，第222–233页。doi：10.1137/0152012。Wolkowicz, G. S. K. 和 H. Xia（1997）。具有离散时滞的恒化器模型的全局渐近行为。《工业与应用数学学会应用数学杂志》57.4，第1019–1043页。doi：10.1137/S0036139995287314。