arXiv:2305.05702v1 [math.GR] 9 May 2023

刻画大类型阿廷群

ALEXANDRE MARTIN 和 NICOLAS VASKOU

摘要。我们证明，大类型 Artin 群这一类在同构下保持不变，这与 Coxeter 群的相应情况形成鲜明对比。为此，我们给出了大类型 Artin 群的纯代数刻画（即不依赖于表示图）。

作为推论，我们完整地描述了与给定的大类型 Artin 群同构的 Artin 群，并刻画了那些具有刚性的 大类型 Artin 群。

1. 引言

Artin 群和 Coxeter 群是两个受到广泛研究的群族，它们通过表示图来定义，即通过一个边标记为大于 1 的整数的有限单纯图来定义。尽管 Coxeter 群的结构与几何如今已经得到充分理解，但对于一般的 Artin 群，许多基本的开放问题仍未解决（综述见 [Cha16] ）。因此，人们引入了若干类 Artin 群，其中的附加条件提供了可用于研究这些群的新工具。这些附加条件通常涉及对表示图的限制（如在直角型、不可约型和大类型 Artin 群中），或涉及相关 Coxeter 群的性质（如在球面型、双曲型和仿射型 Artin 群中）。不过需要强调的一点是，这些类别都涉及对某个表示图的选择；原则上，一个属于某一类别的 Artin 群可能同一个不属于该类别的 Artin 群同构。因此，自然要问：这些类别中是否有些类别所涉及的是群自身的性质，而不是特定表示图的性质：

问题。 哪些类的 *Artin* 群在同构下保持不变？

本文聚焦于**大型** Artin 群，即表示图的所有标号都至少为 3 的 Artin 群。已知大型考克斯特群这一类在同构下并不保持不变。事实上，阶为 D_6 12 的二面体群（其表示图是一条标号为 6 的边）同构于直积 $D_3 \times \mathbb{Z}_2$（其表示图是一个标号为 (2,2,3) 的三角形）。相比之下，我们的主要结果是，对于 Artin 群，具有大型这一性质确实是群本身的性质，而非所选表示图的性质：

定理 A。 大型 *Artin* 群的类在同构下保持不变。

理解 Artin 群的各个类别是否在同构下保持不变，除了其本身具有研究价值之外，对于 Artin 群的同构问题也具有更广泛的意义，即确定哪些表示图会产生同构的 Artin 群。与许多关于 Artin 群的未解决问题一样，对于一般 Artin 群而言，这一问题目前仍处于完全开放的状态。（Coxeter 群中与之对应的同构问题同样尚未解决，但目前已有更多相关成果，参见例如 [Müh06]。）相反，现有文献大多侧重于解决给定 Artin 群类别内部 的同构问题。

群。例如，Droms 解决了直角阿廷群类中的同构问题 [Dro87]，，Paris 解决了球型阿廷群类中的同构问题 [Par04]。最近，第二作者解决了大型 Artin 群类中的同构问题[Vas23]。描述与给定 Artin 群同构的 Artin 群的一种可能方法，是先证明它属于一个在同构下不变且易于处理的 Artin 群类，然后在该类中解决同构问题。对于大型 Artin 群，可以采用这种方法：定理 A 与第二作者在该类中对同构问题的解决相结合，使我们能够完整描述与给定大型 Artin 群同构的 Artin 群。特别地，借助 [BMMN02] 意义下的扭等价表示图这一概念，我们可以刻画那些刚性的大型 Artin 群，即其表示图在表示图同构意义下仅有一个的群。

推论 B。设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群。若 $A_{\Gamma'}$ 是任意一个与 A_Γ 同构的 *Artin* 群，则 Γ' 与 Γ 扭转等价。特别地，当且仅当 Γ 不含带有奇数标记的分离边时，A_Γ 才是刚性的。

鉴于这对同构问题的启示，我们认为应更积极地研究哪些类的 Artin 群在同构下保持不变。目前，已知在同构下保持不变的 Artin 群类别非常少，除了大型 Artin 群及其变体之外（见推论 C）。特别是，球型 Artin 群这一类是否在同构下保持不变，尚不得而知。不过，我们提及两类具有这种不变性的群：二维 Artin 群（这类群恰好就是其极大自由阿贝尔子群秩为 2 的 Artin 群），以及直角阿廷群。对于后一类，根据 [Bau81]，给定直角阿廷群中的任意两个元素，要么彼此交换，要么生成一个自由子群，因此这类群不可能包含大型二面体阿廷子群。

尽管本文主要聚焦于大型 Artin 群，但我们的主要结果对更一般的二维 Artin 群类的同构问题也有启示，而这个问题仍未解决。在 [Vas23]，中，第二作者证明：给定一个整数 $k \geq 3$，表示图中存在一条标记为 k 的边，是二维 Artin 群的同构不变量。结合定理 A，这为二维 Artin 群的同构类提供了新的信息：

推论 C。设 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群。那么，Γ 的标签集合是所有 *Artin* 群这一类的同构不变量。特别地，超大型 *Artin* 群、*XXL* 型 *Artin* 群等群族都在同构下保持不变。

现在我们来说明本文的结构。为了将大型 Artin 群与其他 Artin 群区分开来，我们引入若干性质（以子群及元素的中心化子来表述，因此是同构不变量），这些性质能够区分表示图中来自标记为 2 的边的 $\mathbb{Z}^2$-子群与群的其他 $\mathbb{Z}^2$-子群。这种方法本质上是几何性的，并依赖于 Artin 群在 Deligne 复形上的作用。此前，这些作用曾被用于对文献 [MP21]，中二维 Artin 群的 $\mathbb{Z}^2$-子群进行分类，并用于研究文献 [MP22,Vas23] 中元素的中心化子。

在回顾相关文献结果的一节之后，我们将在第 3 节证明关键的命题 3.1，该命题为（大多数）标准生成元的共轭类提供了纯代数刻画

，这些标准生成元属于大类型 Artin 群。该命题是我们在第 4 节证明定理 A 的关键工具。

2. Artin 群及相关复形的背景

在本节的预备内容中，我们回顾 Artin 群的一些标准术语，并介绍 Deligne 复形的构造。我们还将引入 Deligne 复形的若干子集，用于理解元素中心化子的结构。

Artin 群与 Deligne 复形。我们先回顾 Artin 群的定义。**表示图** 是一个有限单纯图 Γ，其中每条连接顶点 a、b 的边都标记有一个整数 $m_{ab} \geq 2$。与 Γ 相关联的**Artin 群**是由以下表示给出的群 A_Γ：

$$\langle a \in V(\Gamma) \mid \underbrace{aba\cdots}_{m_{ab}\text{ 项}} = \underbrace{bab\cdots}_{m_{ab}\text{ 术语}} \quad \text{每当 } a、b \text{ 由 } \Gamma\text{的一条边相连时} \rangle$$

相应的 **Coxeter 群** 是通过对 A_Γ 添加关系 $a^2 = 1$（对 Γ的每个顶点 a）得到的商群。

我们回顾一些标准术语。表示图 Γ 为单条边的 Artin 群 A_Γ 称为二**面体** Artin 群。给定表示图 Γ，**标准生成元** 是 Γ的一个顶点，也就是说，它是上述 A_Γ 表示中出现的生成元之一。给定 Γ的一个诱导子图 Γ'，相应的**标准抛物子群** 是由 Γ'的顶点生成的 A_Γ 的子群。根据 van der Lek 的标准结果 [vdL83], ，这个子群同构于 Artin 群 $A_{\Gamma'}$；下文将沿用此记号表示标准抛物子群。A_Γ 的一个**抛物子群** 是标准抛物子群的共轭子群。

若相应的 Coxeter 群W_Γ 是有限群，则 Artin 群 A_Γ 为**球面型**。若 Γ 的所有标记都至少为 3，则它为**大型**；若表示图 Γ 不是离散图，且不包含由三个标准生成元生成的球面型标准抛物子群，则它是二**维的**。

Artin 群的标准抛物子群用于定义一个单纯复形，该复形将在我们证明定理 A 的过程中发挥关键作用：

定义 2.1 ([CD95])**.** 设 A_Γ 是一个 Artin 群。**（修正的）Deligne 复形** D_Γ 是如下定义的单纯复形：

- 的顶点 D_Γ 对应于 A_Γ的球面型标准抛物子群的左陪集。
- 给定一个元素 $g \in A_\Gamma$ 以及 Γ 的诱导子图的一个包含链 $\Gamma_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_k$，并且每个标准抛物子群 A_{Γ_i} 都为球面型，这些顶点

$$gA_{\Gamma_0}, \ldots, gA_{\Gamma_k}$$

张成 D_Γ的一个 k-单纯形。

群 A_Γ 通过左乘作用于 D_Γ。

对于二维 Artin 群，我们有以下重要结果：

引理 2.2 ([CD95])**.** 如果 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群，那么 *Deligne* 复形 D_Γ 是一个二维单纯复形，并且其上存在分片欧氏 *CAT(0)* 度量。

标准树与标准生成元的中心化子。

定义 2.3 ([MP22，定义 4.1])**.** 设 A_Γ 为一个二维Artin 群。设 $x \in A_\Gamma$ 为一个与标准生成元共轭的元素。不动点集 T_x :=Fix(x) 是 D_Γ 的一个凸子树，称为**标准树**。

关于标准树，我们有以下初等结果：

引理 2.4 ([HMS22，推论 2。18])。 设 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群。设 T， T' 是 D_Γ 的两棵不同标准树。那么 T， T' 要么不相交，要么交于单个顶点（对应于一个标准二面体抛物子群的陪集）。

如 [MP22]，所示，标准生成元的中心化子在该生成元的标准树上余紧作用；利用这一作用可以完整描述该中心化子。 [MP22 的注记 4.6]，中给出了这一结果，关于大类型情形的更多细节和一些具体计算，读者还可参见 [CMV23，图 1] 。本文不需要完整描述这些中心化子，只需要以下这一结果；它可直接由 [MP22] 和 [CMV23] 中给出的显式描述推出。

引理 2.5 ([MP22, 注 4。6])。 令 A_Γ 为一个二维 *Artin* 群，且令 x 为 Γ的一个顶点。令 $\overline{\Gamma}$ 为沿偶标记边的中点切割 Γ 所得的图。（特别地， Γ 的每条偶标记边在 $\overline{\Gamma}$中产生两条不同的边。）我们将 x 在 $\overline{\Gamma}$中的连通分支记为 $\overline{\Gamma}_x$ 。

中心化子 $C(x)$ 分解为如下形式的直积： $\langle x\rangle \times F$，其中 F是 A_Γ 的有限生成自由子群，其秩为 $rk(F) = |E(\overline{\Gamma}_x)| + rk\big(\pi_1(\overline{\Gamma}_x)\big)$。

由于中心化子的结构将在本文中发挥关键作用，我们引入以下术语：

记号 2.6. 如果一个群同构于形如 $\mathbb{Z} \times F$ 的直积，其中 F 是非阿贝尔自由群，则称该群具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式。

作为引理 2.5 的直接推论，我们得到：

引理 2.7. 设 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群。如果 x 是 A_Γ 的一个标准生成元，且对应于 Γ 中度至少为 2 的顶点，那么中心化子 $C(x)$ 具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式。

双曲元素的横截树和中心化子。如果 G 是一个通过等距变换作用于 CAT(0) 空间 X的群，则元素 $g \in G$ 的**最小集** 是子空间 $Min(g)$，由 X 中所有使 g 所诱导的位移达到最小的点组成。当 $g \in G$ 双曲地作用于 X时， $Min(g)$分解为直积 $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}$ 是一条无限直线。中心化子$C(g)$作用于 X，保持 $Min(g)$和 $\mathcal{T}$ 不变。双曲元素 g的一个**轴** 是 X 的一条测地线， g 在其上执行一个（非平凡的）平移。有关更多细节，请参阅 [BH13, 第二章。6]

定义 2.8 ([Vas23，引理 3.4])。 设 A_Γ 是一个二维 Artin 群，其 Deligne 复形为 D_Γ，且 $g \in A_\Gamma$ 是一个双曲作用元素。那么， g 的最小集分解为直积 $\mathcal{T}\times\mathbb{R}$，其中 $\mathcal{T}$是一棵（实）树，称为与 g相关联的**横向树** 。

引理 2.9 ([Vas23，引理 3.13、命题 3.26、引理 4.3、引理 4.13])。设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群，且 $g \in A_\Gamma$ 是一个双曲元素。那么以下情况之一成立：

- 横向树 $\mathcal{T}$是有界的，或者

- 横向树 $\mathcal{T}$ 是一条直线，并且 $Min(g)$ 是一个与由等边三角形铺砌的欧几里得平面等距的子复形，或者
- 元素 g 有一条轴包含在 D_Γ的某棵标准树中，并且 $C(g)$ 同构于二面体 *Artin* 群 $\langle x, y \mid xyxy = yxyx\rangle$.

3. 大类型 Artin 群中标准生成元的部分刻画

The 本节的目标是证明以下结 果:

命题 3.1. 设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群。那么，元素 $x \in A_\Gamma$的中心化子具有形式 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$，当且仅当它共轭于 A_Γ 的某个标准生成元的非平凡幂，其中该标准生成元既不是孤立顶点，也不是Γ 中属于偶标记边的叶顶点。

（此外，若 x 是 Γ 的孤立顶点，则有 $C(x) \cong \mathbb{Z}$；若 x 是 Γ 中包含于一条偶标记边的叶顶点，则有 $C(x) \cong \mathbb{Z}^2$。）

注 3.2。 命题 3.1 通常不能推广到二维 Artin 群。事实上，考虑这样一个 Artin 群 A_Γ：其表示图是一个三角形，系数为 $(m_{ab}, m_{ac}, m_{bc}) = (2, 4, 4)$。Vas23, 命题 3.26，引理 4.1] 中证明了，元素 $cbca$ 在 Deligne 复形D_Γ上作双曲作用，但它的中心化子同构于直积 $\mathbb{Z} \times F_2$。

命题 3.1 的证明将分成若干引理，用以描述 A_Γ 中元素的中心化子。下述结论可直接由引理 2.5 得出:

引理 3.3。 设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群，且 g 是 Γ的一个标准生成元。若 g 对应于 Γ 的一个孤立顶点，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}$。若 g 对应于包含在一条偶标记边中的 Γ 的一个叶顶点，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}^2$。□

引理 3.4。 设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群，且 $g \in A_\Gamma$ 是一个在 D_Γ上双曲地作用的元素。那么 $C(g)$ 不具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$这种形式。

证明。 根据引理 2.9，存在三种可能性。如果横截树 $\mathcal{T}$ 是有界的，那么它具有一个（唯一的）中心，该中心必然被 $C(g)$ 固定。特别地， $C(g)$ 稳定 g 的一条轴。根据 [Vas23，引理 3.23]，双曲元素的一条轴的稳定子要么同构于 $\mathbb{Z}$，要么同构于 $\mathbb{Z}^2$，具体取决于该轴是否包含在某棵标准树中。因此， $C(g)$ 不具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式。

如果 $Min(g)$ 是由等边三角形铺砌而成的欧几里得平面，那么 $C(g)$ 在该平面上作单纯形作用。由于三角形稳定子是平凡的，该作用是忠实的，因此 $C(g)$ 包含于此铺砌的对称群中，而该对称群几乎是 $\mathbb{Z}^2$。特别地， $C(g)$ 不具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式。

最后，如果 $C(g)$ 同构于二面体 Artin 群 $\langle x, y \mid xyxy = yxyx\rangle$，那么它不可能是 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式，因为这些群的阿贝尔化不同构。□

引理 3.5。 设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群，且设 $g \in A_\Gamma$ 是一个在 D_Γ 上椭圆地作用的元素，但它不与 A_Γ 的某个标准生成元的非平凡幂共轭。那么 $C(g)$ 不具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式。

证明。 经过共轭后， g 属于由某些标准生成元 $a, b \in V(\Gamma)$ 生成的二面体 Artin 子群 A_{ab}，且满足 $m_{ab} < \infty$。由于 g不共轭于任何标准生成元的非平凡幂，固定点集 $Fix(g)$ 仅含一个顶点 v_{ab}。中心化子 $C(g)$ 保持该顶点不变，因此 $C(g)$ 包含于$Stab(v_{ab}) = A_{ab}$。

如果 g 属于 A_{ab}的中心，那么 $C(g)$恰好是 A_{ab}，而它并非形如 $\mathbb{Z}\times F_{\geq 2}$，因为这些群的阿贝尔化各不相同。现在我们假设

$g \notin Z(A_{ab})$. 回顾一下，大型二面体 Artin 群的中心是无限循环群（[BS72]），并考虑中心商群 $A_{ab}/Z(A_{ab})$。众所周知（例如参见 [CHR20，第 2] 节），该商群可分解为两个循环群的自由积。我们考虑与该分解相对应的 Bass-Serre 树 T。元素 g 定义了 $A_{ab}/Z(A_{ab})$ 的一个非平凡元素 $\bar{g}$。我们有如下形式的正合列。

$$1 \to Z(A_{ab}) \to C(g) \to C(\bar{g}),$$

因此我们可以研究 $\bar{g}$ 在 $A_{ab}/Z(A_{ab})$ 中的中心化子。需要考虑两种情形：

情形 1：若 $\bar{g}$ 在 T 上椭圆地作用，则 $\bar{g}$ 有一个非平凡的不动点集 $Fix(\bar{g})$。由于 T 的边稳定子都是平凡的，$Fix(\bar{g})$ 必定是单个顶点。注意，$C(\bar{g})$ 必须包含于该顶点的稳定子中，因此它是循环群。

情形 2：若 $\bar{g}$ 在 T 上双曲地作用，则 $\bar{g}$ 在 T 中有唯一的轴，且该轴由 $C(\bar{g})$ 稳定。由于边稳定子都是平凡的，$C(\bar{g})$ 在该单纯线上忠实作用，因此 $C(\bar{g})$ 包含于单纯线的对称群中，而该对称群几乎是 $\mathbb{Z}$。

根据上述内容，我们知道 $C(\bar{g})$是几乎循环的。特别地，由此可知，$C(g)$是由无限循环群 $Z(A_{ab})$扩张一个几乎循环群（$C(\bar{g})$的某个适当子群）得到的，因此它几乎阿贝尔。于是，$C(g)$不具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$的形式。□

命题 *3.1* 的证明。由引理 3.4 和 3.5 可知，每个不能共轭于某个标准生成元的非平凡幂的元素，其中心化子都不具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$的形式。□

注 3.6。尽管本文后续部分不会用到这一点，我们还是提及以下关于 A_Γ中元素的中心化子的完整分类；该分类可由前面的证明推出：

(1) 如果 g在 D_Γ 上椭圆地作用，且 $Fix(g)$是标准树 $T := Fix(a)$，那么：
- 若 a 是一个孤立顶点，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}$。
- 若 a 是一个偶标记叶顶点的尖端，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}^2$。
- 否则，$C(g) \cong \mathbb{Z} \times F$ 对于某个有限生成非阿贝尔自由群 F。

(2) 若 g 在 D_Γ 上椭圆地作用，且 $Fix(g)$ 是一个稳定子为 A_{ab}的单个顶点 v，则：

- 若 $g \in Z(A_{ab})$，则 $C(g)$ 是一个大型二面体 Artin 群。（例如，在 (3, 3, 3) Artin 群中，$ababab$。）
- 若 $g \notin Z(A_{ab})$，但对于某个 $n \neq 0$有 $g^n \in Z(A_{ab})$，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}$。（例如，在 (3,3,3) Artin 群中，ab。）
- 若对于任意 $n \neq 0$，都有 $g^n \notin Z(A_{ab})$，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}^2$。（例如，在 (3,3,3) Artin 群中，ab^{-1}。）

(3) 若 g 在 D_Γ上双曲地作用，则：
- 若 g 有一个有界横向树，且 g 的一条轴包含在 D_Γ的一棵标准树中，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}^2$。（例如，对于 $n \neq 0$，在 (3,3,3) Artin 群中，$b^n abcabc$。）
- 若 g有一个有界横向树，且 g没有轴包含在 D_Γ的任何一棵标准树中，则 $C(g) \cong \mathbb{Z}$。（例如，当 n 足够大时，在 (3, 3, 3) Artin 群中，$(ab^{-1})^n(cb^{-1})^n$。）
- 如果 g 具有无界的横向树，且其轴包含在标准树中，$C(g) \cong \langle x, y \mid xyxy = yxyx \rangle$。（例如 $abcabc$在 (3, 3, 3) Artin 群中。）

- 如果 g 具有无界的横向树，但没有任何轴包含在标准树中，那么 $C(g) \cong \mathbb{Z}^2$。（例如 $babc$ 在 (3, 3, 3) Artin 群中。）

4. 大类型 Artin 群的刻画

本节中，我们最终将通过引入一些性质来证明定理 A，这些性质能够区分大类型 Artin 群与那些对应于含有标记为 2 的边的表示图的 Artin 群。由于区分性质取决于我们所考虑的标记为 2 的边的类型，我们引入以下定义：

定义 4.1. 设 Γ 是一个表示图。我们称 Γ 的一条边 e 为**孤立**边，如果 e 的两个顶点的度均为 1；若 e 的两个顶点的度均至少为 2，则称其为**内** 边；若 e 恰有一个顶点的度为 1，则称其为**外** 边。

标记为 2 的孤立边情形。我们首先为包含一条标记为 2 的孤立边的图引入区分性质。

定义 4.2. 设 G 是一个群，且 H 是 G 的一个与 $\mathbb{Z}^2$ 同构的子群。若对于 G 的每个与 $\mathbb{Z}^2$ 同构的子群 H'，我们都有 $H' \subseteq H$ 或 $H \cap H' = \{1\}$，则称 H 为**孤立** $\mathbb{Z}^2$。

引理 4.3. 设 A_Γ 是一个 *Artin* 群，并假设 Γ 包含一条标记为 2 的孤立边。那么 A_Γ 包含一个孤立的 $\mathbb{Z}^2$。

证明。设 Γ' 是一条标记为 2 的孤立边，并令 $\Gamma'' := \Gamma - \Gamma'$。根据 van der Lek 的一个结果 [vdL83], , 抛物子群 $A_{\Gamma'}$ 同构于 $\mathbb{Z}^2$。我们来证明该子群是一个孤立的 $\mathbb{Z}^2$。

由于 Γ' 是 Γ的一个连通分支，我们有一个自由分裂 $A_\Gamma = A_{\Gamma'} * A_{\Gamma''}$。考虑 A_Γ 在与该分裂对应的 Bass–Serre 树T 上的粗圆柱作用（不带反演），并令 v 为 T 中稳定子恰好是 $A_{\Gamma'}$的（唯一）顶点。令 H 为一个同构于 $\mathbb{Z}^2$ 且与 $A_{\Gamma'}$有非平凡交的子群。由于非几乎循环群在树上作粗圆柱作用时，要么包含 F_2，要么固定一个点；又根据假设，H 同构于 $\mathbb{Z}^2$，因此 H 包含于某个顶点稳定子中。由于边稳定子是平凡的，存在 T的一个顶点 w，使得 H的每个非平凡元素的不动点集恰好是 w。由于 H 与 $A_{\Gamma'}$ =Stab(v)有非平凡交，因此 $v = w$，从而 $H \subset A_{\Gamma''}$。□

引理 4.4。设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群。则 A_Γ 不包含孤立的 $\mathbb{Z}^2$-子群。

证明。设 H 是 A_Γ 的一个同构于 $\mathbb{Z}^2$的子群。我们先提及以下显然的事实，留给读者证明：

事实。若 H 几乎包含于 A_Γ 的一个形如 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$的子群中，则 H不是孤立的 $\mathbb{Z}^2$-子群。

大类型 Artin 群的 $\mathbb{Z}^2$-子群已在 [MP21，定理 B]中分类。特别地，在共轭意义下，需要考虑以下三种情形：

情形 1：假设 H 包含于由 Γ的两个相邻顶点 a、b 生成的一个（大类型）二面体抛物子群中。由于 $m_{ab} \geq 3$，标准结果表明，这类二面体 Artin 群几乎都具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$的形式（例如参见 [HMS22，引理 2.3]）。特别地，H 几乎包含于 A_Γ 的一个形如 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$的子群中，因此根据上述事实，它不是孤立的 $\mathbb{Z}^2$-子群。

情形 2：假设 H 包含在标准生成元 $a \in V(\Gamma)$ 的中心化子 $C(a)$ 中。注意，a 不可能是孤立顶点，因为这类元素具有

根据备注 3.3，有一个无限循环中心化子。如果 a 不是包含在偶标记边中的 Γ 的度为 1 的顶点，那么根据引理 2.7，中心化子 $C(a)$ 具有 $\mathbb{Z}\times F_{\geq 2}$ 的形式，并且由上述事实可知，H 不是孤立的 $\mathbb{Z}^2$。如果 a 是 Γ 的一个度为 1 的顶点，且与顶点 $b\in V(\Gamma)$ 相邻，其中 m_{ab} 为偶数，那么由 [MP22，引理 4.3] 可知，标准树 T_a 是有界的，其圆心为对应于 A_Γ 的陪集 A_{ab} 的顶点 v_{ab} （另见 [Vas23，备注 2.17]，其中对 T_a 给出了明确描述）。由于 $C(a)$ 稳定标准树 T_a，它也固定顶点 v_{ab}，因此 H 包含于大型二面体抛物子群 A_{ab} 中，我们回到了情形 1。

情形 3：Γ 中存在顶点 a、b、c，满足 $m_{ab}=m_{bc}=m_{ac}=3$，且使得 $H\subset C(abcabc)$。在这种情况下，由 [Vas23，引理 4.3] 可知，$C(abcabc)$ 同构于二面体 Artin 群 $\langle x,\ y\mid xyxy=yxyx\rangle$。因此，$H$ 包含在一个（大类型）二面体 Artin 群中；根据上文，该群与 $\mathbb{Z}\times F_{\geq 2}$ 几乎同构。由上文的事实可知，H 不是一个孤立的 $\mathbb{Z}^2$子群。□

由于拥有孤立的 $\mathbb{Z}^2$子群这一性质在同构下保持不变，我们得到：

推论 4.5. 如果 A_Γ 是一个 *Artin* 群，且 Γ 含有一条标记为 2 的孤立边，那么 A_Γ 不同构于大类型 *Artin* 群。□。

标记为 2 的外边情形。我们为包含标记为 2 的外边的表示图引入区分性质。

定义 4.6。设 A_Γ 是一个 Artin 群。若对于每个元素 $x\in A_\Gamma$，只要其中心化子 $C(x)$ 具有 $\mathbb{Z}\times F_{\geq 2}$ 这种形式，中心化子 $C(x)$ 就包含于集合 $\mathcal{S}_{\mathrm{dih}}$ 中所有与 A_Γ 同构的非阿贝尔二面体 Artin 群的正规闭包内，则称 A_Γ 满足性质 (P_1)。

我们强调，在上一定义中，A_Γ 中属于 $\mathcal{S}_{\mathrm{dih}}$ 的子群不要求是抛物子群。

引理 4.7。设 A_Γ 是一个大类型 *Artin* 群。则 A_Γ 满足性质 (P_1)。

证明。根据命题 3.1，中心化子具有 $\mathbb{Z}\times F_{\geq 2}$ 这种形式的元素 $x\in A_\Gamma$ 共轭于 A_Γ 的某个标准生成元的非平凡幂；由注记 3.3 可知，该标准生成元不是 Γ 的孤立顶点。设 Γ 的连通分支为 $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$，其中 x 包含于 Γ_1。由于 A_Γ 分解为 A_{Γ_i} 的自由积，因此 $C(x)$ 包含于 A_{Γ_1}。由于 A_{Γ_1} 由与 Γ_1 的边对应的大类型二面体抛物子群生成，结论得证。□

引理 4.8. 设 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群，并且假设 Γ 包含一条标记为 2 的外边。那么 A_Γ 不满足性质 (P_1)。

证明。设 e 是 Γ 中一条标记为 2 的外边，其顶点为 x、y，其中 y 的度为 1，x 的度至少为 2。由引理 2.7，中心化子 $C(x)$ 具有形式$\mathbb{Z}\times F_{\geq 2}$。我们将证明元素 $y\in C(x)$ 不属于 $\mathcal{S}_{\mathrm{dih}}$的正规闭包，由此可知 A_Γ 不满足性质 (P_1)。

令 Γ' 为由 $\Gamma-\{y\}$ 诱导的 Γ 子图。考虑 A_Γ 中一个与非阿贝尔二面体 Artin 群同构的子群 H。由 [Vas23，定理 D] 可知，H 共轭于以下两者之一：由两个生成元 a、b 生成的标准二面体抛物子群的子群（此时必有 $m_{ab}\geq 3$）；或由三个生成元 a、b、c 生成的标准抛物子群的子群（其中 $m_{ab}=m_{bc}=m_{ac}=3$）。无论哪种情况，我们都得到 H 属于 $A_{\Gamma'}$ 的正规闭包 $\langle\langle A_{\Gamma'}\rangle\rangle$。因此可知 $\langle\langle\mathcal{S}_{\mathrm{dih}}\rangle\rangle\subset\langle\langle A_{\Gamma'}\rangle\rangle$。

现在考虑同态 $f\colon A_\Gamma \to \langle y\rangle$，它将 y 映到其自身，并将 A_Γ 的其他每个标准生成元映到单位元。由于 e 是一条带有偶数标记的外边，此同态定义良好。由于 Γ' 的每个顶点都属于 $\ker(f)$，我们得到 $A_{\Gamma'}$，因此 $\langle\langle A_{\Gamma'}\rangle\rangle$ 和 $\langle\langle \mathcal{S}_{\mathrm{dih}}\rangle\rangle$ 属于 f 的核。根据构造，$y \notin \ker(f)$，因此元素 $y \in C(x)$ 不属于 $\langle\langle \mathcal{S}_{\mathrm{dih}}\rangle\rangle$，证明至此完成。□

由于性质 (P_1) 在同构下不变，我们得到：

推论 4.9。若 A_Γ 是一个 *Artin* 群，且 Γ 包含一条标记为 2 的外边，那么 A_Γ 不同构于大类型 *Artin* 群。□。

标记为 2 的内边情形。我们为包含标记为 2 的内边的表示图引入一项区分性质。

定义 4.10。设 A_Γ 是一个二维 Artin 群。若存在两个元素 x、$y \in A_\Gamma$，使得 x、y 生成一个 $\mathbb{Z}^2$-子群，且中心化子 $C(x)$ 和 $C(y)$ 均具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$ 的形式，则称 A_Γ 满足性质 (P_2)。

引理 4.11。设 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群，并假设 Γ 包含一条标记为 2 的内边。那么 A_Γ 满足性质 (P_2)。

证明。令 x, y 表示 Γ 中一条标记为 2 的内边的两个顶点。由于该边的标记为 2，van der Lek 的一个标准结果 [vdL83] 表明，抛物子群 $\langle x, y\rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}^2$。由于 x 和 y 的度都至少为 2，由引理 2.7 可知，中心化子 $C(x)$ 和 $C(y)$ 都具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$的形式。□

引理 4.12。设 A_Γ 是一个大型 *Artin* 群。那么 A_Γ 不满足性质 (P_2)。

证明。设 $x, y \in A_\Gamma$ 是两个中心化子具有 $\mathbb{Z} \times F_{\geq 2}$形式的元素，我们来证明 x, y 不能生成一个 $\mathbb{Z}^2$-子群。

由于 A_Γ 是大型的，由命题 3.1 可知，x 和 y 是标准生成元的幂的共轭元。根据 [HMS22，推论 2.16],，A_Γ 中一个标准生成元的不动点集等于它的任意非平凡幂的不动点集。因此，存在 T, T' 这两个 Deligne 复形D_Γ 的标准树，使得 $\mathrm{Fix}(x) = T$ 且 $\mathrm{Fix}(y) = T'$。根据引理 2.4，需要根据 T, T' 是相等、互不相交还是交于一个顶点，分三种情况讨论。

情形 1：如果 $T = T'$，那么 x 和 y 都稳定 D_Γ 的某条共同边。由于 D_Γ 的标准树的边根据构造具有无限循环稳定子，因此可知 $\langle x、y\rangle$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 不同构。

情形 2：如果 T 和 T' 不相交，那么由 [Mar22, Proposition C] 可知，存在一个整数 $n \geq 1$，使得 $\langle x^n, y^n\rangle$ 是 A_Γ 的非阿贝尔自由子群，特别地，$\langle x, y\rangle$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 不同构。

情形 3：如果 T 和 T' 沿着一个顶点相交，该顶点对应于由两个生成元 a, b 生成的标准抛物子群的一个陪集，那么在共轭意义下，我们可以假设 x, y 属于由两个生成元 a, b 生成的大型二面体阿廷子群，并且 x, y 是 a 或 b的幂的共轭元。由[HMS22，引理 2.8] 可得，$\langle x, y\rangle$ 不同构于 $\mathbb{Z}^2$。□

由于性质（P_2）在同构下保持不变，我们得到：

推论 4.13. 如果 A_Γ 是一个二维 *Artin* 群，且 Γ 包含一条标记为 2 的内边，那么 A_Γ 不同构于一个大类型 *Artin* 群 □。

我们终于可以证明定理 A 了。

定理 *A* 的证明。设 A_Γ 是一个大类型 Artin 群，并设 $A_{\Gamma'}$ 是一个与 A_Γ 同构的 Artin 群。由 [Vas23 的定理 E]，可知，$A_{\Gamma'}$ 是二维的。由推论 4.5 、 4.9 和 4.13 可知，Γ' 不包含任何标记为 2 的边。因此，$A_{\Gamma'}$ 也是大型的。□

注 4.14。由此立即可得大型 Artin 群的以下纯代数刻画（即独立于表示图）：Artin 群 A_Γ 是大型的，当且仅当它不是循环群、不包含 $\mathbb{Z}^3$ 的副本、没有孤立的 $\mathbb{Z}^2$、满足性质（P_1），且不满足性质（P_2）。

参考文献

[Bau81] A. Baudisch，半自由群的子群，Acta Mathematica Hungarica 38 (1981)，第 1-4 期，19–28。[BMMN02] N. Brady、J. McCammond、B. Mühlherr 和 Wa. D. Neumann，考克斯特群与 Artin 群的刚性，Geometriae Dedicata 94 (2002)，91–109。[BH13] M. R. Bridson 和 A. Haefliger，非正曲率度量空间，第 319 卷，Springer Science & Business Media，2013。[BS72] E. Brieskorn 和 K. Saito，Artin-gruppen und Coxeter-gruppen，Inventiones mathe- maticae 17 (1972)，245–271。[CHR20] L. Ciobanu、D. Holt 和 S. Rees，虚拟直积群中的方程，Journal of Algebra 545 (2020)，88–99。[Cha16] R. Charney，Artin 群相关问题，美国数学研究所（2016）。[CD95] R. Charney 和 M. W. Davis，与无限反射群相关的超平面补空间的 $K(\pi, 1)$-问题，J. Amer. Math. Soc. 8 (1995)，第 3 期，597–627。[CMV23] M. Cumplido、A. Martin 和 N. Vaskou，大型 Artin 群的抛物子群，Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 174 (2023)，第 2 期，393–414。[Dro87] C. Droms，图群的同构，Proceedings of the American Mathematical Society 100 (1987)，第 3 期，407–408。[HMS22] M. Hagen、A. Martin 和 A. Sisto，超大类型阿廷群是分层双曲的，Math. Annalen (2022)，即将刊出。[vdL83] H. van der Lek，复超平面补空间的同伦型，奈梅亨大学（1983），博士论文。[Mar22] A. Martin，二维 Artin 群的蒂茨替代定理与 Wise 幂替代定理（2022），见 arXiv:2210.06369。[MP22] A. Martin 和 P. Przytycki，双曲型二维 Artin 群的拟圆柱作用，International Mathematics Research Notices 2022 17, 13099 2022 13127 ( ), no. – .[MP 21] ———, 二维 Artin 群的阿贝尔子群，Bull. London Math. Soc. 53 (2021)，第 5 期，1338-1350。[Müh06] B. Mühlherr，考克斯特群的同构问题，The Coxeter Legacy: Reflections and Projections (2006)，1–15。[Par04] L. Paris，球面型 Artin 群在同构意义下的分类，Journal of Algebra 281 (2004)，第 2 期，666-678。[Vas23] N. Vaskou，大类型 Artin 群的同构问题（2023），见 arXiv:2201.08329v3。

ALEXANDRE MARTIN,
地址：赫瑞瓦特大学数学系及麦克斯韦数学科学研究所，英国爱丁堡 EH14 4AS。
电子邮箱：alexandre.martin@hw.ac.uk

NICOLAS VASKOU，地址：布里斯托大学数学学院，英国布里斯托 Woodland Road，BS8 1UG。电子邮箱：nicolas.vaskou@gmail.com