arXiv:2305.05716v1 [math.CV] 9 May 2023

de Branges–Rovnyak 空间中泰勒级数的发散性

´PIERRE-OLIVIER PARISE 和 THOMAS RANSFORD

ABSTRACT. 众所周知，在某些 de Branges–Rovnyak 空间中，存在泰勒级数在范数意义下发散的函数，尽管多项式在该空间中是稠密的。通常，这一结论是通过证明泰勒部分和序列在范数意义下无界来实现的。在本文中，我们将证明，甚至可能出现泰勒部分和在范数意义下趋于无穷大的情况。我们还将针对下三角求和方法（例如 Ces`aro 平均）建立类似的结果。

1. INTRODUCTION

如今称为 de Branges–Rovnyak 空间的希尔伯特函数空间，最初由 de Branges 和 Rovnyak 在[3], 的附录中引入，用于研究散射模型。后来，多亏 Sarason 的研究（最终汇集于[14], ），这些空间被发现与算子理论有着深刻的联系。关于 de Branges–Rovnyak 空间理论的最新介绍，参见两卷本专著 [5, 6]。

令 H^∞ 表示开单位圆盘 $\mathbb{D}$上有界全纯函数构成的空间。给定 b 属于 H^∞的单位球，de Branges–Rovnyak 空间$\mathcal{H}(b)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的（唯一）再生核希尔伯特空间，其核函数为$k^b(z,w) = (1 - b(w)b(z))/(1 - \overline{w}z)$，其中 $w, z \in \mathbb{D}$。它是定义在 $\mathbb{D}$上的全纯函数希尔伯特空间，并以收缩方式包含于 Hardy空间 H^2中。

$\mathcal{H}(b)$的性质很大程度上取决于 b 是否为 H^∞单位球的极端点。特别地，$\mathcal{H}(b)$包含多项式，当且仅当 b 不是极端点；在这种情况下，多项式在 $\mathcal{H}(b)$中稠密（见 [15, IV-3]）。然而，即使多项式在 $\mathcal{H}(b)$中稠密， $\mathcal{H}(b)$中函数的泰勒级数仍可能在范数意义下发散。本文将详细考察这一现象。

在 [2, 定理 5.5] 中已证明，存在一个b 的单位球中的非极端函数，以及一个函数 $f \in \mathcal{H}(b)$，其径向膨胀满足

$$\limsup_{r\to 1^-} \|f_r\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty. \tag{1}$$

Date：2023年5月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 46E20，次要分类 40C05、40J05。*Key words and phrases.* de Branges–Rovnyak 空间、求和方法、Ces`aro 均值、一致有界原理。POP 获得 NSERC 和 FQRNT 的资助。TR 获得 NSERC 和加拿大研究主席计划的资助。

稍后，在 [4, 定理 3。1], 给出了一个非极值b 以及一个 $f \in \mathcal{H}(b)$，它们具有更强的性质：

$$\liminf_{r\to 1^-} \|f_r\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty. \tag{2}$$

此类例子的另一种构造可见 [9, 定理 1。1]。正如[4, 推论 3。4], 所指出的，关系（1）意味着

$$\limsup_{n\to\infty} \|s_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty \quad \text{and} \quad \limsup_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty, \tag{3}$$

其中 s_n（f）是 f 的泰勒部分和序列，而 σ_n（f）是它们的 Ces`àro 平均。然而，（3）的相应较强形式，即

$$\liminf_{n\to\infty} \|s_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty \quad \text{and} \quad \liminf_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty, \tag{4}$$

并不能直接由（2）推出。这引出了一个问题：是否存在满足（4）的例子。本文旨在对此问题给出肯定的回答。这并非易事，因为正如我们将看到的，存在一些 de Branges–Rovnyak 空间 $\mathcal{H}$（b）满足 lim sup$_{n\to\infty}$ $\|s_n$（f）$\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty$ 对某个 f 成立，但 lim inf$_{n\to\infty}$ $\|s_n$（f）$\|_{\mathcal{H}(b)} < \infty$对所有 f 成立。

2. Statement of main result

我们将讨论一般下三角可和方法的情形。设 $\Gamma = (\gamma_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 是一个复数无限下三角矩阵。给定一个形式幂级数 $f(z) = \sum_{k\geq 0} \widehat{f}(k) z^k$，对每个 $n \geq 0$，我们定义

$$S_n^{\Gamma}(f)(z) := \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \widehat{f}(k) z^k.$$

以下定理是我们的主要结果。

定理 2.1. 设 b 是 H^∞ 的单位球中的一个非极值点，并设 $\Gamma = (\gamma_{nk})_{n,\ k\geq 0}$ 是一个复数无限下三角矩阵。

(i) 若 sup$_{n\geq 0}$($|\gamma_{nn}|\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}$) $= \infty$，则存在 $f \in \mathcal{H}(b)$ 使得

$$\limsup \|S_n^{\Gamma}(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty.$$

(ii) 若 $\sum_{n\geq 0}$($|\gamma_{nn}|^{-2}\|z^n\|^{2}_{\mathcal{H}\ b\ (\ )}$) $< \infty$，则存在 $f \in \mathcal{H}(b)$ 使得

$$\liminf \|S_n^{\Gamma}(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty.$$

(iii) 若 $\sum_{n\geq 0}$($|\gamma_{nn}|^{-1}\|z^n\|^{1}_{\mathcal{H}\ b\ ()}$) $< \infty$，则存在 $f, g \in \mathcal{H}(b)$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle S_n^{\Gamma}(f), g\rangle_{\mathcal{H}(b)}| = \infty.$$

取 $\gamma_{nk} = \binom{n}{k}/\binom{n+\alpha}{k}$ 为$0 \le k \le n$ 可得一个重要的特例，其中 $\alpha \ge 0$。此时， $S_n^\Gamma(f)$ 就是广义 Ces`aro 均值$\sigma_n^\alpha(f)$。特别地，若 $\alpha = 0$，则 $S_n^\Gamma(f) = s_n(f)$；若 $\alpha = 1$，则 $S_n^\Gamma(f) = \sigma_n(f)$。由于

$$|\gamma_{nn}| = \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \asymp n^{-\alpha} \quad (n \to \infty),$$

我们立即得到以下推论。

推论 2.2. 设 b 是 H^∞ 的单位球中的非极值点，并且 $\alpha \ge 0$。

(i) 如果 $\sup_{n\ge0}(n^{-\alpha}\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}) = \infty$，那么存在 $f \in \mathcal{H}(b)$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \|\sigma_n^\alpha(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty.$$

(ii) 若 $\sum_{n\ge0}(n^{2\alpha}/\|z^n\|^2_{\mathcal{H}(b)}) < \infty$，则存在 $f \in \mathcal{H}(b)$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \|\sigma_n^\alpha(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty.$$

(iii) 如果 $\sum_{n\ge0}(n^{\alpha}/\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}) < \infty$，则存在 $f, g \in \mathcal{H}(b)$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle \sigma_n^\alpha(f), g\rangle_{\mathcal{H}(b)}| = \infty.$$

注。 推论 2.2 的 (i) 部分早已为人所知。它见于 [7, 定理 6。10]这里的证明截然不同，并且还导出了 (ii) 和 (iii) 两部分；我们认为这些结果是新的，即使在$s_n(f)$ 和 $\sigma_n(f)$ 这两个特殊情形下也是如此。

3. 证明主要结果

该证明基于泛函分析中的以下一致有界原理。

定理 3.1. 设 (T_n) 是复希尔伯特空间 H 上的一列有界算子。

(i) 如果 $\sup_n \|T_n\| = \infty$，则存在 $x \in H$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n x\| = \infty.$$

(ii) 如果 $\sum_n 1/\|T_n\|^2 < \infty$，那么存在 $x \in H$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| = \infty.$$

(iii) 若 $\sum_n 1/\|T_n\| < \infty$，则存在 $x, y \in H$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle T_n x, y\rangle| = \infty.$$

证明。 （i）只是标准的一致有界原理。（ii）和（iii）在 [12, 定理 3(ii) 和 6(ii)], 中得到了证明，其中它们是作为 Ball 对复数板问题的解 [1]的推论导出的。□

我们将应用这些结果，其中 $T_n = S_n^\Gamma$ 和 $H = \mathcal{H}(b)$。每个 S_n^Γ都是作用于 $\mathcal{H}(b$上的有界线性算子。下面的引理给出了其算子范数的下界。证明该引理后，定理 2.1便可立即得出。

<escape>注意， b 是 H^∞ 的单位球的非极值点，当且仅当存在一个外函数 $a \in H^\infty$ 满足 $a(0) > 0$，使得 $|b|^2 + |a|^2 = 1$几乎处处成立于 $\mathbb{T}$。此时，函数 a 是唯一确定的。更多详细信息，请参见 [14, 第四章]。我们称 (b, a) 为一个 勾股对。</escape>

引理 3.2. 设 (b, a) 是一个勾股对，且 $\Gamma = (\gamma_{nk})$ 是一个由复数组成的下三角矩阵。那么，对于所有 $n \geq 0$,

$$\|S_n^\Gamma : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)\| \geq a(0)|\gamma_{nn}|\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}.$$

证明。众所周知，若 $h \in H^2$，则 $ah \in \mathcal{H}(b)$ 且 $\|ah\|_{\mathcal{H}(b)} \leq \|h\|_{H^2}$（见 [13, 引理 4]）。特别地，令 $g_n(z) := z^n a(z)$，则有$g_n \in \mathcal{H}(b)$ 且 $\|g_n\|_{\mathcal{H}(b)} \leq 1$。此外 $g_n(z) = a(0)z^n +$（高次项），因此 $S_n^\Gamma(g_n) = \gamma_{nn}a(0)z^n$。综合这些观察，我们推得

$$\|S_n^\Gamma : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)\| \geq \frac{\|S_n^\Gamma(g_n)\|_{\mathcal{H}(b)}}{\|g_n\|_{\mathcal{H}(b)}} \geq \frac{|\gamma_{nn}a(0)|\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}}{1}.$$

这就证明了该引理。 □

4. Examples

为了利用上一节的结果，我们需要能够计算单项式 $\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}$ 的范数，或者至少对其进行估计。有一个众所周知的公式可以帮助我们做到这一点。以下结果见于 [13, 第81]页。

命题 4.1. 设 (b, a) 是一个勾股对，并设 $\phi := b/a$，即$\phi(z) = \sum_{j=0}^\infty c_j z^j$。那么

$$\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)}^2 = 1 + \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \quad (n \geq 0).$$

显然，若 (b, a) 是一个勾股对，则 $\phi := b/a \in N^+$，即斯米尔诺夫类。反过来，给定 $\phi \in N^+$，则存在唯一的勾股对 (b, a)，使得 $\phi = b/a$ （见 [16, 命题 3.1]）。因此，我们可以通过指定相应的函数 $\phi \in N^+$ 来确定$\mathcal{H}(b)$，下面的例子中我们将采用这种做法。

例 4.2. 设 $\phi(z) := z/(\zeta - z)$，其中 $\zeta \in \mathbb{T}$。

c_j 的泰勒系数 ϕ 满足 $c_0 = 0$ 和 $|c_j| = 1$，其中 $j \geq 1$，因此根据命题 4.1，我们有 $\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)} = \sqrt{n+1}$。推论 2.2 意味着存在 $f \in \mathcal{H}(b)$，使得 $\limsup_{n\to\infty} \|s_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty$。然而，这一结果并不能使我们推导出存在一个 $f \in \mathcal{H}(b)$，使得 $\liminf_{n\to\infty} \|s_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty$或 $\limsup_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} = \infty$。事实上，我们。

断言不存在 $f \in \mathcal{H}(b)$ 满足这两个结论中的任意一个，这表明推论 2.2 相当精确，至少对于此函数 ϕ。

为了证明这一论断，我们注意到，对于这一特定的 ϕ，已知$b(z) = (1-\tau)z/(\zeta - \tau z)$，其中 $\tau = (3-\sqrt{5})/2$，并且 $\mathcal{H}(b)$ 等于局部狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\zeta$，且范数相等（参见 [15, 命题 2]）。在 [11, 定理 2.4] 中证明了

$$\liminf_{n\to\infty} \|s_n(f)\|_{\mathcal{D}_\zeta} = \|f\|_{\mathcal{D}_\zeta} \quad (f \in \mathcal{D}_\zeta). \tag{5}$$

此外，[10, 定理 1.6] 中证明了，对于所有$f \in \mathcal{D}_\zeta$，$\|\sigma_n(f) - f\|_{\mathcal{D}_\zeta} \to 0$，因此特别地

$$\limsup_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{D}_\zeta} = \|f\|_{\mathcal{D}_\zeta} \quad (f \in \mathcal{D}_\zeta). \tag{6}$$

由于 $\mathcal{D}_\zeta = \mathcal{H}(b)$，因此（5）和（6）均成立，只需将其中的 $\mathcal{D}_\zeta$ 全部替换为 $\mathcal{H}(b)$，这就证实了上述论断。

例 4.3. 令 $\phi(z) = z^M/(1-z)^N$，其中 M, N 是整数，且$M \geq 0$ 和 $N \geq 1$。

在这种情况下 $|c_j| \asymp j^{N-1}$，因此由命题 4.1 可得 $\|z^n\|_{\mathcal{H}(b)} \asymp n^{N-1/2}$ as $n \to \infty$。应用推论 2.2，我们推得，若 $0 \leq \alpha < N-1$，则存在 $f \in \mathcal{H}(b)$，使得$\|\sigma_n^\alpha(f)\|_{\mathcal{H}(b)} \to \infty$ as $n \to \infty$。特别地，若 $N \geq 2$，则存在 $f \in \mathcal{H}(b)$，满足 $\|s_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} \to \infty$。同样地，若$N \geq 3$，则存在 $f \in \mathcal{H}(b)$，满足 $\|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{H}(b)} \to \infty$。这回答了引言中提出的问题。

例 4.4. 令 $\phi(z) = \exp(\beta/(1-z)^\gamma)$，其中 $\beta > 0$ 和 $\gamma \in (0, 1)$。在这种情况下，可以证明 that

$$c_j \asymp \frac{\exp(Cj^{\gamma/(\gamma+1)})}{j^{(\gamma+2)/(2\gamma+2)}} \quad (j \to \infty),$$

其中 C 是一个依赖于 β的正常数，γ (见下文附录 A)。由命题 4.1可得

$$\|z^n\|^2_{\mathcal{H}(b)} \gtrsim \frac{\exp(Cn^{\gamma/(\gamma+1)})}{n^{(\gamma+2)/(2\gamma+2)}} \quad (n \to \infty).$$

由推论 2.2可知，对于每个 $\alpha \geq 0$，存在函数 f，$g \in \mathcal{H}(b)$，使得$|\langle \sigma_n^\alpha(f) g\rangle_{\mathcal{H}(b)}| \to \infty$。特别地，$\|\sigma_n^\alpha(f)\|_{\mathcal{H}(b)} \to \infty$。

这引出了以下问题：是否存在函数 $f \in \mathcal{H}(b)$，使得对于所有 $\alpha \geq 0$，都有 $\|\sigma_n^\alpha(f)\|_{\mathcal{H}(b)} \to \infty$?

Appendix A. The Taylor coefficients of $\exp(\beta/(1-z)^\gamma)$

设 $\phi(z) := \exp(\beta/(1-z)^\gamma)$，其中 $\beta > 0$ 且 $\gamma \in (0, 1)$。该函数属于斯米尔诺夫类，因为它是 Hardy空间 H^1中某个函数的指数。为了估计其泰勒系数，我们使用 Hayman [8, 第69]页提出的斯特林公式的以下推广。

定理 A.1. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的可容许全纯函数，满足 $f(r) > 0$ 对所有 $r \in (0,1)$ 均成立。对于 $r \in (0,1)$，定义

$$\begin{aligned} M(r) &:= \sup_{|z|=r} |f(z)|, \\ A(r) &:= r(\log M(r))', \\ B(r) &:= rA'(r). \end{aligned}$$

那么，当 $n \to \infty$ 时，

$$c_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi B(r_n)}}, \tag{7}$$

其中 $r_n \in (0,1)$ 是方程 $A(r_n) = n$ 的唯一解。

可容许函数的定义较为复杂，此处不予给出。不过，上文定义的函数 $\phi(z)$ 是可容许的（见 [8, 第93] 页），因此定理 A.1 确实适用于它。由此可得以下结论。

定理 A.2. 设 $\phi(z) = \exp(\beta/(1-z)^\gamma)$，其中 $\beta > 0$ 且 $\gamma \in (0,1)$。则 $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，其中

$$c_n \sim \frac{\exp(Cn^{\gamma/(\gamma+1)})}{Dn^{(\gamma+2)/(2\gamma+2)}} \quad (n \to \infty), \tag{8}$$

并且其中

$$C = (\beta\gamma)^{1/(\gamma+1)}(1 + 1/\gamma) \quad and \quad D = \sqrt{\frac{2\pi(\gamma+1)}{(\beta\gamma)^{1/(\gamma+1)}}}. \tag{9}$$

证明。 应用定理 A.1。简单计算可得

$$M(r) = \exp\Big(\frac{\beta}{(1-r)^\gamma}\Big), \quad A(r) = \frac{\beta\gamma r}{(1-r)^{\gamma+1}}, \quad B(r) = \frac{\beta\gamma r(1+\gamma r)}{(1-r)^{\gamma+2}}.$$

此外，关系 $A(r_n) = n$ 等价于 $\beta\gamma r_n/n = (1-r_n)^{\gamma+1}$。令 $s_n := 1 - r_n$，得到

$$s_n = \Big(\frac{\beta\gamma}{n}\Big)^{1/(\gamma+1)} (1 - s_n)^{1/(\gamma+1)}.$$

特别地，当 $n \to \infty$ 时，$s_n = O(n^{-1/(\gamma+1)})$，因此

$$s_n = \Big(\frac{\beta\gamma}{n}\Big)^{1/(\gamma+1)} \Big(1 + O(n^{-1/(\gamma+1)})\Big).$$

经计算可得，

$$\begin{aligned} \log \phi(r_n) = \frac{\beta}{(1-r_n)^\gamma} = \frac{\beta}{s_n^\gamma} &= \beta\Big(\frac{n}{\beta\gamma}\Big)^{\gamma/(\gamma+1)} \Big(1 + O(n^{-1/(\gamma+1)})\Big) \\ &= \beta\Big(\frac{n}{\beta\gamma}\Big)^{\gamma/(\gamma+1)} + o(1), \end{aligned}$$

so

$$\phi(r_n) \sim \exp\Big(\frac{\beta^{1/(\gamma+1)}}{\gamma^{\gamma/(\gamma+1)}} n^{\gamma/(\gamma+1)}\Big). \tag{10}$$

此外，

$$\begin{aligned}\log(r_n^n) &= n\log(1-s_n) = -ns_n + O(ns_n^2)\\ &= -n\Big(\frac{\beta\gamma}{n}\Big)^{1/(\gamma+1)}\Big(1+O(n^{-1/(\gamma+1)})\Big) + O(n^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}\Big)\\ &= -(\beta\gamma)^{1/(\gamma+1)}n^{\gamma/(\gamma+1)} + o(1),\end{aligned}$$

so

$$r_n^n \sim \exp\Big(-(\beta\gamma)^{1/(\gamma+1)}n^{\gamma/(\gamma+1)}\Big). \tag{11}$$

最后，我们有

$$B(r_n) = \frac{\beta\gamma r_n(1+\gamma r_n)}{(1-r_n)^{\gamma+2}} \sim \frac{\beta\gamma(1+\gamma)}{s_n^{\gamma+2}} \sim \frac{1+\gamma}{(\beta\gamma)^{1/(\gamma+1)}}n^{(\gamma+2)/(\gamma+1)}. \tag{12}$$

将（10）、（11）和（12）代入（7），得到（8）和（9）。 □

References

1. K. M. Ball, *The complex plank problem* **33** 2001 4, , 《伦敦数学学会会刊》（），第 – 期。MR 2. N. Cheyrot、D. Guillot 和 T. Ransford, *De Branges-Rovnyak spaces and Dirichlet spaces* **259** 2010 9, 2366 2383 , 《函数分析杂志》（），第 – 期。MR 2674117 3. L. de Branges 和 J. Rovnyak, *Canonical models in quantum scattering theory*, 《量子力学中的微扰理论及其应用》（威斯康星大学麦迪逊分校美国陆军理论化学研究所数学研究中心高级研讨会论文集，1965 0244795 4 1966，295 392），Wiley，纽约，第 – 页。MR。O. El-Fallah、E. Fricain、K. Kellay、J. Mashreghi 和 T. Ransford, *Constructive approximation in de Branges-Rovnyak spaces* **44** 2016 2, 269 , 《构造与逼近》（），第 – 期 281。MR 3544000 5. E. Fricain 和 J. Mashreghi, *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 1*, 新数学专著丛书，第 20, 2016 3497010 6 *The theory of $\mathcal{H}$ b spaces. Vol. 2* 卷，剑桥大学出版社，剑桥，。MR。，（），新数学专著丛书，第 21 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016 3617311 7。MR。S. Ghara、J. Mashreghi 和 T. Ransford, *Summability and duality*, 《数学出版物》（即将出版）。8. W. K. Hayman, *A generalisation of Stirling's formula*, 《纯粹与应用数学杂志》196 (1956 80749 9 67 95), –。MR。J. Mashreghi 和 T. Ransford, *Outer functions and divergence in de Branges–Rovnyak spaces*, 《复分析与算子理论》（），第 – 期。MR 3780508 10。, *Hadamard multipliers on weighted Dirichlet spaces*, 《积分方程与算子理论》91 4032210 11 2019 6，52，13（），第 期，论文编号 .。MR。J. Mashreghi、M. Shirazi 和 M. Withanachchi, *Partial Taylor sums on local Dirichlet spaces* **12** 2022 6, 147, 26 , 《数学与物理分析》（），第 期，论文编号 .。MR 4507242 12 。V. Muller 和 J. Vr̆ sovsky, *Orbits of linear operators tending to infinity*, 《落基山数学杂志》**39** 2009 1, 219 230 2476809（），第 – 期。MR。D. Sarason, , 《算子理论杂志》16 1，75 1986 97 847333（），第 – 期。MR 14., *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, 阿肯色大学数学科学讲义，第 10 卷，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1994，1289670 15. Wiley-Interscience 出版物。MR。, *Local Dirichlet spaces as de Branges-Rovnyak spaces*, 《美国数学会会刊》125 (1997)，第 7 期，2133–2139。MR 1396993 13 *Doubly shift-invariant spaces in H^2*

16., *Unbounded Toeplitz operators*, 《积分方程与算子理论》61 (2008), 第 2 期, 281–298。MR 2418122

Department of Mathematics University of Hawaii at Manoa Honolulu HI , „ , 96822 USA.

Email address: parisepo@hawaii.edu

Département de mathématiques et de statistique Université Laval Québec , , „ City (Québec) G1V 0A6 Canada.

Email address: ransford@mat.ulaval.ca