arXiv:2305.05729v1 [math.NA] 9 May 2023

多面体网格上的离散三维 divdiv 复形及其在双调和问题混合公式中的应用

Daniele A. Di Pietro 和 Marien-Lorenzo Hanot

IMAG、蒙彼利埃大学、法国国家科学研究中心、蒙彼利埃、法国
daniele.di-pietro@umontpellier.fr，marien-lorenzo.hanot@umontpellier.fr

2023年5月11日

摘要

本文遵循离散 de Rham（DDR）范式，在一般多面体网格上构造了任意阶离散 divdiv 复形。该构造基于：1）由多项式向量张成的离散空间，其各分量附属于网格实体；2）通过模仿分部积分公式得到的离散算子。我们深入研究了局部复形的代数性质，证明其在拓扑平凡的网格单元上正合。我们利用新的 DDR 复形设计了一种用于逼近双调和问题的数值格式，并对其稳定性和收敛性进行了详细分析。数值实验进一步验证了理论结果。

关键词。 divdiv 复形，离散 de Rham 方法，多面体网格，双调和问题 s，混合形式

MSC2020。 65N30，65N99，31B30

1 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为边界为 $\partial\Omega$ 的多面体区域。记 **对称** 和 **偏差** 分别为对称化和偏差算子，使得对于任意矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，有 **对称** $\boldsymbol{M} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^\top)$ 和 **偏差** $\boldsymbol{M} := \boldsymbol{M} - \frac{1}{d}(\mathrm{tr}\ \boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_d$。我们构造三维 divdiv 复形的一个离散对应形式

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,1}(\Omega) \xrightarrow{i_\Omega} \boldsymbol{H}^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad}} \boldsymbol{H}(\mathbf{sym}\,\mathbf{curl},\Omega;\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathbf{sym}\,\mathbf{curl}} \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,\mathbf{div},\Omega;\mathbb{S}) \xrightarrow{\mathrm{div}\,\mathbf{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}, \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,1} := \boldsymbol{\mathcal{P}}^0(\Omega) + \boldsymbol{x}\mathrm{P}^0(\Omega)$ 是最低阶 Raviart–Thomas 空间，$\boldsymbol{H}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ 由在 Ω 上平方可积且其梯度也平方可积的向量值函数张成，$\boldsymbol{H}$(**对称旋度**，$\Omega;\mathbb{T}$) 由取值于 $\mathbb{T} :=$ **偏差** $\mathbb{R}^{3\times3}$ 且在 Ω 上平方可积、其旋度的对称部分也平方可积的函数构成，而 $\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,\mathbf{div},\Omega;\mathbb{S})$ 由取值于 $\mathbb{S} :=$ **对称** $\mathbb{R}^{3\times3}$ 且其自身及其（按行）散度的散度均平方可积的函数构成。divdiv 复形可通过 BGG 构造 [7]，从 de Rham 复形导出；该构造为研究其理论性质提供了强有力的框架，但目前仍缺乏构造离散复形的通用蓝图。

复形（1.1）数值逼近的主要难点，源于空间和算子中都存在的代数约束。复形中各空间的有限元逼近已在 [1, 4, 6, 15]中得到发展。另一方面，对整个复形进行离散化则是近来才出现的 [26]。

上述文献讨论的是基于标准（匹配的单纯形）网格构造的空间。本文遵循 [21, 25] 提出的离散 de Rham（DDR）范式（另见 [12]，其中利用微分形式进行了最新的推广），研究在由多面体单元组成且可能具有非匹配界面的更一般网格上，对 divdiv 复形（1.1）进行离散化。这类网格的灵活性使得区域能够得到有效逼近，并可通过非协调的局部网格细化和聚合，高效利用计算资源 [2, 3, 8]。多面体方法还受益于更高层次的视角，从而能够采用精简未知量的策略，例如拟协调方法 [9, 10, 14]；关于离散复形背景下的一般框架，另见 [22] 。DDR 方法的核心思想是用离散对应物替代复形中的空间和算子。离散空间由多项式向量张成，其分量附属于网格实体；离散算子则通过仿照分部积分公式构造。将这一范式应用于 divdiv 复形的离散化，需要处理若干细节，包括张量值场的迹分解以及恰当分部积分公式的确定。我们全面研究了局部复形的代数性质，并说明如何设计空间和算子，以确保在拓扑平凡的网格单元上具有正合性。局部正合性是证明全局复形代数性质的关键要素之一，例如可遵循 [24]的范式。

随后以 DDR divdiv 复形为起点，为以下混合形式的四阶问题设计数值格式：给定 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$，求 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{div}\,\mathbf{div}, \Omega; \mathbb{S})$ 和 $u \in L^2(\Omega)$，使得

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}\, u = 0 \qquad & \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,\mathbf{div}, \Omega; \mathbb{S}), \\ -\int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}\, v = \int_\Omega f v \qquad & \forall v \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{1.2}$$

此前，针对（容易得多的）二维情形，已有研究设计了 DDR 复形，并将其应用于 Kirchhoff–Love 板 [19] 及其拟协调变体 [13]。基于新的三维 divdiv 复形的性质，我们证明了问题（1.2）中 DDR 数值格式的稳定性，以及其关于 h^{k+1} 的收敛性，其中 h 表示网格尺寸，而 k 表示该复形的多项式次数。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍设置，包括相关的分部积分公式和截断多项式空间。第 3 节研究离散 divdiv 复形及其代数性质。第 4 节给出问题（1.2）的 DDR 数值格式，并分析其稳定性与收敛性。第 5 节和第 6 节包含关于 DDR 复形代数性质的最具技术性的证明。最后，附录 A给出适用范围广泛的局部多项式空间相关结果。

2 设置

2.1 网格

对于任意（可测）集合 $Y \subset \mathbb{R}^3$，我们用h_Y 表示其直径。我们考虑 Ω上的网格 $\mathcal{M}_h := \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h \cup \mathcal{E}_h \cup \mathcal{V}_h$，其中：$\mathcal{T}_h$ 是由有限个互不相交的开多面体单元组成的集合，满足$\Omega = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T$ 和$h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T > 0$；$\mathcal{F}_h$ 是由有限个开平面面组成的集合；$\mathcal{E}_h$ 是由各个面上的开边构成的集合；$\mathcal{V}_h$ 是由各条边的端点构成的集合。下文假设，$(\mathcal{T}_h,\mathcal{F}_h)$满足 [23, 定义 1.4], 中的条件，从而这些面构成网格骨架$\bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} \partial T$的一个划分。

给定一条网格边 $E \in \mathcal{E}_h$，我们将 $\mathcal{V}_h$ 中与其两个端点对应的顶点分别记为 $V_1(E)$ 和 $V_2(E)$，并按照 $\boldsymbol{t}_E = h_E^{-1}(\boldsymbol{x}_{V_2(E)} - \boldsymbol{x}_{V_1(E)})$ 的顺序排列。为简洁起见，只要不会产生歧义，我们就不再明确指出该边，而直接写作 V_1 和 V_2。对于任意面 $F \in \mathcal{F}_h$，我们

固定一个单位法向量 $\boldsymbol{n}_F$，对于任意边 $E \in \mathrm{E}_F$，我们将 $\boldsymbol{n}_{FE}$ 记为位于包含 F 的平面内、且垂直于 E 的向量，并令其方向满足 $(\boldsymbol{t}_E,\ \boldsymbol{n}_{FE},\ \boldsymbol{n}_F)$ 构成一个右手坐标系。根据上下文，向量 $\boldsymbol{t}_E$ 和 $\boldsymbol{n}_{FE}$ 可以视为嵌入在包含 F 的平面内，或嵌入在三维空间中。

将位于网格单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 边界上的网格面组成的集合记为 $\mathcal{F}_T$。对于任意 $Y \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$，用 $\mathcal{E}_Y$ 表示 Y 的边集。同样，对于所有 $Y \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h \cup \mathcal{E}_h$，$\mathcal{V}_Y$ 表示 Y 的顶点集。

对于每个网格单元或面 $Y \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$，我们固定一个点 $\boldsymbol{x}_Y \in Y$，使得存在一个以 $\boldsymbol{x}_Y$ 为中心且包含于 Y 中的球，其直径与 h_Y 一致可比，且该性质对 h_Y 一致成立（当 $\mathcal{M}_h$ 属于定义 [23,19]所述的正则网格序列时）。

全文中，$a \lesssim b$ 表示 $a \le Cb$，其中 C 仅依赖于 Ω、网格正则性参数，以及在涉及多项式函数时相应的多项式次数。

2.2 局部多项式空间与分片多项式空间

给定整数 $n \ge 0$ 和 $l \ge 0$，$\mathbb{P}_n^l$ 表示总次数为 $\le l$ 的 n 元多项式空间；约定对于任意 l，$\mathbb{P}_0^l := \mathbb{R}$，且对于任意 n，$\mathbb{P}_n^{-1} := \{0\}$。给定 $Y \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h \cup \mathcal{E}_h$，我们用 $\mathrm{P}^\ell(Y)$ 表示由 $\mathbb{P}_3^\ell$ 中的函数在 Y 上的限制所张成的空间，并用 $\pi_{\mathcal{P},\,Y}^\ell$ 表示相应的 L^2 正交投影算子。当 Y 是网格边 $E \in \mathrm{E}_h$ 或面 $F \in \mathrm{F}_h$ 时，如有需要，我们将 $\mathrm{P}^\ell(E)$ 和 $\mathrm{P}^\ell(F)$ 分别视为 E 和 F 上的一元与二元多项式空间。将 Y 上多项式分量总次数为 $\le l$ 的向量值或矩阵值函数空间以粗体表示，并注明陪域。在全局层面，我们定义分片多项式空间

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^\ell(\mathcal{T}_h) := \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \,:\, (v_h)_{|T} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^\ell(T) \text{ for all } T \in \mathcal{T}_h \right\}. \tag{2.1}$$

2.3 局部多项式空间的直和分解

对于任意网格面 $F \in \mathrm{F}_h$ 以及任意整数 $l \ge 0$，以下向量值多项式函数的直和分解成立（参见 [5]）：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mathcal{P}}^\ell(F;\mathbb{R}^2) = \boldsymbol{\mathcal{R}}^\ell(F) \oplus \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{c},\ell}(F)\\ \text{with } \boldsymbol{\mathcal{R}}^\ell(F) := \mathbf{curl}_F\, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell+1}(F) \text{ and } \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{c},\ell}(F) := (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_F)\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(F).\end{gathered}$$

以下引理给出了一个新的直和分解，该分解将用于构造 $\boldsymbol{H}(\textbf{对称旋度}, \Omega;)$ 的离散对应形式。

引理 1（面上矩阵值多项式场的直和分解）。对于所有 $F \in \mathrm{F}_h$ 以及所有 $l \ge 0$，以下直和分解成立：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mathcal{P}}^\ell(F;\mathbb{R}^{2\times 2}) = \boldsymbol{\mathcal{CG}}^\ell(F) \oplus \boldsymbol{\mathcal{CG}}^{\mathrm{c},\ell}(F),\\ \textit{with } \boldsymbol{\mathcal{CG}}^\ell(F) := \mathbf{curl}_F\, \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell+1}(F;\mathbb{R}^2) \textit{ and } \boldsymbol{\mathcal{CG}}^{\mathrm{c},\ell}(F) := (\mathrm{Id} - \mathrm{adj})\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(F;\mathbb{R}^2) \otimes (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_F)^\intercal\right],\end{gathered} \tag{2.2}$$

其中 伴随矩阵 是作用于 2×2 矩阵的伴随矩阵算子。

证明。见附录A。 □

接下来，我们还需要使用下文所述的网格单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的矩阵值多项式函数分解。首先回顾以下结果（分别参见 [17, 引理 4.4]和 [16,引理 3.6], :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^\ell(T;\mathbb{T}) = \boldsymbol{\mathcal{SR}}^\ell(T) \oplus \boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\mathrm{c},\ell}(T),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell}(T;\mathbb{S}) = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\ell}(T) \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{c},\ell}(T), \tag{2.3}$$

with

$$\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\ell}(T) \coloneqq \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell+1}(T;\mathbb{S}), \qquad \boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\mathrm{c},\ell}(T) \coloneqq \mathbf{dev}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(T;\mathbb{R}^3)\otimes(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T)^{\mathsf{T}}\right],$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\ell}(T) \coloneqq \mathbf{hess}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell+2}(T), \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{c},\ell}(T) \coloneqq \mathbf{sym}\left[\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(T;\mathbb{T})\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T)\right],$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 与向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ 之间的叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{b}$ 按行计算。以下引理建立了 $\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\ell}(T)$ 与 $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{c},\ell+1}(T)$ 之间的联系。

引理 2（$\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\ell}(T)$ 与 $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{c},\ell+1}(T)$ 之间的联系）。结论成立

$$\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\ell}(T) = \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{c},\ell+1}(T).$$

证明。由于 $\mathrm{H}^{\mathrm{c},\ell+1}(T)\subset\mathrm{P}^{\ell+1}(T;\mathbb{S})$，旋度 $\mathrm{H}^{\mathrm{c},\ell+1}(T)\subset\mathrm{SR}^{\ell}(T)$。现在令 $\boldsymbol{\sigma}\in\mathrm{SR}^{\ell}(T)$。根据定义，存在 $\boldsymbol{\tau}\in\mathrm{P}^{\ell+1}(T;\mathbb{S})$，使得 $\boldsymbol{\sigma}=$旋度 $\boldsymbol{\tau}$。回顾（2.3），$\boldsymbol{\tau}$可分解为 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_1+\boldsymbol{\tau}_2$，其中 $(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)\in\mathrm{H}^{\ell}(T)\times\mathrm{H}^{\mathrm{c},\ell}(T)$。利用旋度 hess $=\mathbf{0}$，可得 $\boldsymbol{\sigma}=$旋度 $\boldsymbol{\tau}=$旋度 $\boldsymbol{\tau}_1+$旋度 $\boldsymbol{\tau}_2\in$旋度 $\mathrm{H}^{\mathrm{c},\ell+1}(T)$。由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\mathrm{SR}^{\ell}(T)$ 中的任意元素，故证明完毕。□

注记 3（推广至负指标）。$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\ell}(F)$、$\boldsymbol{\mathcal{CG}}^{\ell}(F)$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\ell}(T)$ 的定义自然推广至$l=-1$（此时，这些空间均变为平凡空间）。类似地，$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\ell}(T)$ 的定义也推广至$l=-2$ 和 $l=-1$，在这两种情况下都得到平凡空间。

2.4 局部缩减多项式空间

对于任意整数$l\geq0$，缩减多项式空间可由上一节所述的直和分解得到，只需降低第一个分量的次数。基于这一原则，我们定义：对于所有 $F\in\mathrm{F}_h$，

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,\ell}(F) \coloneqq \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\ell-1}(F)\oplus\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{c},\ell}(F), \tag{2.4}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{CG}}^{-,\ell}(F) \coloneqq \boldsymbol{\mathcal{CG}}^{\ell-1}(F)\oplus\boldsymbol{\mathcal{CG}}^{\mathrm{c},\ell}(F), \tag{2.5}$$

并且，对于所有$T\in\mathrm{T}_h$，

$$\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{-,\ell}(T) \coloneqq \boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\ell-1}(T)\oplus\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{\mathrm{c},\ell}(T), \tag{2.6}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{-,\ell}(T) \coloneqq \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\ell-2}(T)\oplus\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\mathrm{c},\ell}(T). \tag{2.7}$$

注意，对于$l=0$，上述所有空间均变为平凡空间。对于任意 $(\boldsymbol{\mathcal{X}},Y)\in\{(\boldsymbol{\mathcal{R}},F),(\boldsymbol{\mathcal{CG}},F),(\boldsymbol{\mathcal{SR}},T),(\boldsymbol{\mathcal{H}},T)\}$，我们用 $\boldsymbol{\pi}^{-,\ell}_{\mathcal{X},Y}$ 表示在$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-,\ell}(Y)$ 上的 L^2-正交投影。

2.5 边上切向导数的重构

我们经常需要根据函数的顶点值和 L^2-正交投影，重构函数在边上的切向导数。具体而言，令 $l\geq0$ 为整数，并用 $\partial_{\boldsymbol{t}_E}$ 表示沿 E、方向为 $\boldsymbol{t}_E$的导数，则切向导数重构 $\mathfrak{G}^{\ell}_E$：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathrm{P}^{\ell-1}(E)\to\mathrm{P}^{\ell}(E)$ 满足：对于任意 $(v_{V_1},v_{V_2},v_E)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathrm{P}^{\ell-1}(E)$，

$$\int_E \mathfrak{G}^{\ell}_E(v_{V_1},v_{V_2},v_E)\,r = -\int_E v_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}r + [\![v_V\,r]\!]_E \qquad \forall r\in\mathcal{P}^{\ell}(E), \tag{2.8}$$

其中，$[\![\cdot]\!]_E$表示一条边上顶点值之差，使得对于任意函数 $\phi\in C^0(E)$ 和任意一族顶点值 $\{w_{V_1},w_{V_2}\}$（可能满足 $w_{V_1}=w_{V_2}=1$）

$$[\![w_V\phi]\!]_E \coloneqq w_{V_2}\phi(\boldsymbol{x}_{V_2}) - w_{V_1}\phi(\boldsymbol{x}_{V_1}).$$

当参数为向量值或矩阵值时，$\mathfrak{G}^{\ell}_E$ 逐分量作用。注意到 $\mathfrak{G}^{\ell}_E$ 与一维 HHO 梯度一致（参见例如 [23, 式 (4.37)]），由此可直接推得

$$\mathfrak{G}^{\ell}_E(\phi(\boldsymbol{x}_{V_1}),\phi(\boldsymbol{x}_{V_2}),\pi^{\ell-1}_{\mathcal{P},E}\phi) = \pi^{\ell}_{\mathcal{P},E}\partial_{\boldsymbol{t}_E}\phi \qquad \forall\phi\in H^1(E). \tag{2.9}$$

2.6 迹的记号与基本结果

给定一族线性无关正交归一向量 $\boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{w}_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^3$，我们将向量 $\boldsymbol{u}$ 相对于该族的迹定义为 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{w}} \coloneqq (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$。我们还考虑其嵌入原空间

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}} \coloneqq \sum_{i\in I}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i. \tag{2.10}$$

同样，对于两组线性无关正交归一向量 $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{v}_i\}_{i\in I}$, $\boldsymbol{w} = \{\boldsymbol{w}_j\}_{j\in J}$，我们将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于这两组向量的迹定义为 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} \coloneqq (\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_j)_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbb{R}^{I\times J}$。我们还考虑将其嵌入原空间 $\widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}} \coloneqq \sum_{(i,j)\in I\times J}(\boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}_j)\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j$。

上述定义的符号将在下文中用于表示面和边上的迹，具体如下。对于一个面 F，我们考虑切平面上的一组正交归一基 $\{\boldsymbol{t}_F,1,\boldsymbol{t}_F,2\}$，其中该切平面对应于 F。对于任意向量值场 $\boldsymbol{w}\colon F\to\mathbb{R}^3$ 和任意矩阵值场 $\boldsymbol{\tau}\colon F\to\mathbb{R}^{3\times3}$，记为 $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{t},F}, \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n},F}, \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{t},F}$，以及 $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t}\boldsymbol{t},F}$，其中 $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{n}_F\}$ 且 $\boldsymbol{t} = \{\boldsymbol{t}_F,1,\boldsymbol{t}_F,2\}$。类似地，对于任意边 E，我们考虑法平面上的一组正交归一基 $\{\boldsymbol{n}_E,1,\boldsymbol{n}_E,2\}$，其中该法平面对应于 E。对于任意向量值场 $\boldsymbol{w}\colon E\to\mathbb{R}^3$ 和任意矩阵值场 $\boldsymbol{\tau}\colon E\to\mathbb{R}^{3\times3}$，记为 $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{t},E}$，以及 $\tau_{\boldsymbol{t}\boldsymbol{t},E}$，其中 $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{n}_E,1,\boldsymbol{n}_E,2\}$ 且 $\boldsymbol{t} = \{\boldsymbol{t}_E\}$。

下面的引理表明，修剪空间中函数的迹属于修剪空间。其证明与 [21, 命题 8] 的证明类似，为简洁起见，此处省略。

引理 4（修剪空间的迹）。对于任意元素 $T\in\mathcal{T}_h$ 和任意面 $F\in\mathcal{F}_T$，有

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{t}\boldsymbol{t},F} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(F;\mathbb{R}^2) \qquad \forall\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}\mathcal{R}^{-,k}(T), \tag{2.11}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{t}\boldsymbol{t},F} \in \boldsymbol{C}\mathcal{G}^{-,k}(F) \qquad \forall\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}^{-,k}(T). \tag{2.12}$$

2.7 分部积分公式

受 DDR 启发的构造中的一个关键要素是本节汇总的分部积分公式，它们既用于确定离散空间的分量，也用于重构离散微分算子及相应的势函数。

2.7.1 关于 $\boldsymbol{H}^1(T;\mathbb{R}^3)$ 的分部积分公式

设 $T\in\mathbb{T}_h$，并设 $\boldsymbol{v}\colon T:\to\mathbb{R}^3$ 为一个向量值函数，以下假定其具有所需的光滑性。对于所有足够光滑的 $\boldsymbol{\sigma}:T\to\mathbb{T}$，有

$$\begin{aligned}\int_T \mathbf{dev}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\sigma} &= -\int_T \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F\\ &= -\int_T \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \left(\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n},F}^\top\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F + \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}^\top\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F\right),\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，我们利用了 $\boldsymbol{v}$ 在 F 上的迹分解 $\boldsymbol{v} = \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n},F} + \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}$，将其分为法向分量和切向分量，从而得到第二行。

令 W $F\in\mathrm{F}_T$。对于所有 $\boldsymbol{w}\colon F\to\mathbb{R}^2$ 足够光滑且取值于 F 的切空间的函数，成立 s

$$\begin{aligned}\int_F (\mathbf{dev}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{t},F}\cdot\boldsymbol{w} &= \int_F (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{t},F}\cdot\boldsymbol{w} = \int_F \mathbf{grad}_F(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_F)\cdot\boldsymbol{w}\\ &= -\int_F (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_F)\,\mathrm{div}_F\,\boldsymbol{w} + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_F)(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}),\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中，我们利用了这样一个事实：在第一个等式中，$(\textbf{偏差梯度}\,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}\boldsymbol{t},F}$ 提取出的分量不受**偏差**算子的影响，并对 F 进行标准的分部积分，从而得到结论。对于所有

$\boldsymbol{\sigma}$： $F \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 足够光滑且取值于 F的切空间中的矩阵值；另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\int_F (\mathbf{dev}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{tt},F} : \boldsymbol{\sigma} &= \int_F \mathbf{grad}_F\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\int_F \mathrm{tr}(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})\boldsymbol{I}_2 : \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\int_F \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\cdot \mathbf{div}_F\,\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\int_F \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\ \ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} \\ &\quad + \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE}\int_E \left[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_E)\boldsymbol{t}_E^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{FE} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{FE}\right],\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中，在第二个等式中，我们对第一项使用了分部积分，并将 $\boldsymbol{v}$在 F上的切向迹分解为 $\boldsymbol{v}_{t,F}=(\boldsymbol{v}\cdot\ \boldsymbol{t}_E)$ $\boldsymbol{t}_E+(\boldsymbol{v}\cdot\ \boldsymbol{n}_{FE})\boldsymbol{n}_{FE}$，这是注意到 $(\boldsymbol{t}_E,\boldsymbol{n}_{FE})$ 在 E的每一点构成与 E 正交的平面的正交归一基之后得到的。

2.7.2 H(对称旋度, T; $\mathbb{T}$)的分部积分公式

设 $T\in\mathfrak{T}_h$。对于所有足够光滑的 $\boldsymbol{\tau}: T:\to\mathbb{T}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}: T\to\mathbb{S}$，有

$$\begin{aligned}\int_T \mathbf{sym}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma} = \int_T \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma} &= \int_T \boldsymbol{\tau} : \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\sigma} - \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F (\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}_F) : \boldsymbol{\sigma} \\ &= \int_T \boldsymbol{\tau} : \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\sigma} + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \boldsymbol{\tau} : (\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F).\end{aligned} \tag{2.16}$$

现在设 $F\in\mathfrak{F}_T$。对于足够光滑的 $r: F\to\mathbb{R}$，有

$$\int_F (\mathbf{sym}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau})_{\boldsymbol{nn},F}\, r = \int_F \mathrm{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{nt},F}\, r = \int_F \tau_{\boldsymbol{nt},F}\cdot\mathbf{curl}_F\, r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{n}_F^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\, r, \tag{2.17}$$

其中我们利用了这样一个事实：由 **(对称旋度** $\boldsymbol{\tau}$**)**$_{\boldsymbol{nn},F}$ 提取的分量位于对角线上，因此不受 **对称** 算子的影响（因此，特别地，**(对称旋度** $\boldsymbol{\tau}$**)**$_{\boldsymbol{nn},F}$ = **(旋度** $\boldsymbol{\tau}$**)**$_{\boldsymbol{nn},F}$ = 旋转$_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{nt},F}$）。

对于 $\boldsymbol{\tau}$ 的切向-切向分量，面上的标准分部积分公式（分别对应于 [25, 式 (3.12) 和 (3.15)]）给出：

$$\begin{aligned}\int_F \mathrm{div}_F\,\mathbf{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{tt},F} r &= -\int_F \mathbf{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{tt},F}\cdot\mathbf{grad}_F\, r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\mathbf{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{tt},F}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}) r \\ &= -\int_F \tau_{\boldsymbol{tt},F} : \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\, r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\tau_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{t}_E)\cdot\mathbf{grad}_F\, r \\ &\quad + \int_E (\mathbf{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{tt},F}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\, r.\end{aligned} \tag{2.18}$$

对于所有 $E\in\mathfrak{E}_F$，均有：

$$\begin{aligned}\int_E (\tau_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{t}_E)\cdot\mathbf{grad}_F\, r &= \int_E \left[(\boldsymbol{t}_E^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r + (\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\right] \\ &= \int_E \left[-\left(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_F\right)\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r + (\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\right],\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中，在第一个等式中我们将**梯度**$_F\, r = \partial_{\boldsymbol{t}_E} r\,\boldsymbol{t}_E + \partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\,\boldsymbol{n}_{FE}$记为，并在最后一行利用了 $\boldsymbol{\tau}$为无迹张量这一事实（因此，迹具有不变性，且（$\boldsymbol{t}_E$， $\boldsymbol{n}_{FE}$， $\boldsymbol{n}_F$）是 $\mathbb{R}^3$的正交归一基，$\boldsymbol{t}_E^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E + \boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_F = 0$）。此外，我们有

$$\int_E (\mathbf{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{tt},F}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,r = \int_E \mathrm{rot}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\tau_{\boldsymbol{tt},F})\,r = \int_E \left[\partial_{\boldsymbol{t}_E}(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE})\,r - \partial_{\boldsymbol{n}_{FE}}(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\,r\right]$$
$$= -\int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r + [\![(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE})\,r]\!]_E - \int_E \left[\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\,\mathbf{grad}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\boldsymbol{n}_{FE}\right] r, \quad (2.20)$$

其中，我们对第一项进行分部积分，从而得到结论。将（2.19）和（2.20）代入（2.18）最终得到

$$\int_F \mathrm{div}_F\,\mathbf{rot}_{\mathrm{F}}\,\tau_{\boldsymbol{tt},F}\,r = -\int_F \tau_{\boldsymbol{tt},F} : \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\,r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r$$
$$-\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \left(2\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_F\right)\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \left[\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\,\mathbf{grad}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E)\boldsymbol{n}_{FE}\right] r \quad (2.21)$$
$$+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}_{FE})\,r]\!]_E.$$

2.7.3 $\boldsymbol{H}$(散度 散度，T；$\mathbb{S}$)的分部积分公式

对于所有 $\boldsymbol{v}: T$ 和 $v: T\to\mathbb{R}$ 足够光滑的 $T\in\mathbb{T}_h$，有（参见 [16, 引理 4.1]）

$$\int_T \mathrm{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{v}\,v = \int_T \boldsymbol{v} : \mathbf{hess}\,v - \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}_F)\,v$$
$$-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \upsilon_{\boldsymbol{nn},F}\,\partial_{\boldsymbol{n}_F} v - \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \left[2\,\mathrm{div}_F(\upsilon_{\boldsymbol{nt},F}) + \partial_{\boldsymbol{n}_F}\upsilon_{\boldsymbol{nn},F}\right] v. \quad (2.22)$$

3 离散 divdiv 复形

在本文其余部分中，我们固定一个整数 $k\ge 0$，它对应于离散复形的多项式次数。本节重点介绍局部 DDR 复形的构造，该复形在网格单元 $T\in\mathcal{T}_h$ 上模拟（1.1），并研究其代数性质。关于 divdiv 算子的解析性质，将在第4 节中结合其在双调和问题中的应用进行研究。对其他空间和算子的解析性质进行深入研究则留待未来工作。

3.1 局部离散空间

空间 $\boldsymbol{H}^1(T;\mathbb{R}^3)$、$\boldsymbol{H}(\text{对称旋度},T;\mathbb{T})$ 和 $\boldsymbol{H}(\mathbf{div}\,\mathbf{div},T;\mathbb{S})$ 的离散对应空间分别为 $\boldsymbol{X}^k_{\text{偏差梯度},T}$、$\boldsymbol{X}^k_{\text{对称旋度},T}$ 和 $\boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$，其定义如下：

$$\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad},T} := \Big\{\underline{\boldsymbol{v}}_T = \big(\boldsymbol{v}_T, (v_{\boldsymbol{n},F},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F},G_{\boldsymbol{v},F})_{F\in\mathcal{F}_T}, (v_{\boldsymbol{t},E},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E})_{E\in\mathcal{E}_T}, (\boldsymbol{v}_V,\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V})_{V\in\mathcal{V}_T}\big) :$$
$$\boldsymbol{v}_T\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(T;\mathbb{R}^3),$$
$$v_{\boldsymbol{n},F}\in\mathcal{P}^k(F),\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(F;\mathbb{R}^2),\text{ and } G_{\boldsymbol{v},F}\in\mathcal{P}^{k-1}(F)\text{ for all } F\in\mathcal{F}_T,$$
$$v_{\boldsymbol{t},E}\in\mathcal{P}^{k-1}(E),\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(E;\mathbb{R}^2)\text{ and }\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(E;\mathbb{R}^{2\times 2})\text{ for all } E\in\mathcal{E}_T,$$
$$\boldsymbol{v}_V\in\mathbb{R}^3\text{ and }\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\text{ for all } V\in\mathcal{V}_T\Big\},$$

$$\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{sym\,curl},T} := \Big\{ \underline{\boldsymbol{\tau}}_T = \big(\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T}, (\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}, \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F})_{F\in\mathcal{F}_T}, (\boldsymbol{\tau}_E, \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\nu},E})_{E\in\mathcal{E}_T}, (\boldsymbol{\tau}_V)_{V\in\mathcal{V}_T}\big) :$$
$$\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T} \in \boldsymbol{\mathcal{SR}}^{-,k}(T),$$
$$\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,k+1}(F) \text{ and } \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F} \in \boldsymbol{\mathcal{CG}}^{-,k}(F) \text{ for all } F \in \mathcal{F}_T,$$
$$\boldsymbol{\tau}_E \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(E;\mathbb{R}^{2\times2}),\ \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(E;\mathbb{R}^2) \text{ and } \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(E;\mathbb{R}^{2\times2}) \text{ for all } E \in \mathcal{E}_T,$$
$$\boldsymbol{\tau}_V \in \mathbb{T} \text{ for all } V \in \mathcal{V}_T \Big\},$$

$$\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div\,div},T} := \Big\{ \underline{\boldsymbol{\upsilon}}_T = \big(\boldsymbol{\upsilon}_{\mathcal{H},T}, (\upsilon_F, D_{\boldsymbol{\upsilon},F})_{F\in\mathcal{F}_T}, (\boldsymbol{\upsilon}_E)_{E\in\mathcal{E}_T}\big) :$$
$$\boldsymbol{\upsilon}_{\mathcal{H},T} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^{-,k}(T),$$
$$\upsilon_F \in \mathcal{P}^{k+1}(F) \text{ and } D_{\boldsymbol{\upsilon},F} \in \mathcal{P}^{k+1}(F) \text{ for all } F \in \mathcal{F}_T,$$
$$\text{and } \boldsymbol{\upsilon}_E \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(E;\mathrm{sym}\,\mathbb{R}^{2\times2}) \text{ for all } E \in \mathcal{E}_T \Big\}.$$

这些空间中的多项式分量的含义由插值算子 $\boldsymbol{I}^k$ 偏差梯度,T:$\boldsymbol{C}^1(T;\mathbb{R}^3) \to \boldsymbol{X}^k$偏差梯度,$T$, $\boldsymbol{I}^k$对称旋度,T: $\boldsymbol{H}^3(T;\mathbb{T}) \to \underline{\boldsymbol{X}}^k$对称旋度,$T$, 以及 $\boldsymbol{I}^k$双重散度,T: $\boldsymbol{H}^2(T;\mathbb{S}) \to \boldsymbol{X}^k$双重散度,$T$给出，使得对于所有 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\upsilon}) \in \boldsymbol{C}^1(T;\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{H}^3(T;\mathbb{T}) \times \boldsymbol{H}^2(T;\mathbb{S})$,

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{dev\,grad},T}\boldsymbol{v} := \Big(&\boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}, \big(\pi^k_{\mathcal{P},F}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_F), \boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{P},F}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}), \pi^{k-1}_{\mathcal{P},F}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\big)_{F\in\mathcal{F}_T},\\ &\big(\pi^{k-1}_{\mathcal{P},E}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_E), \boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},E}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}), \boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},E}(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{nn},E}\big)_{E\in\mathcal{E}_T},\\ &\big(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_V), \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_V)\big)_{V\in\mathcal{V}_T}\Big),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{sym\,curl},T}\boldsymbol{\tau} := \Big(&\boldsymbol{\pi}^{-,k}_{\mathcal{SR},T}\boldsymbol{\tau}, \big(\boldsymbol{\pi}^{-,k+1}_{\mathcal{R},F}\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{nt},F}, \boldsymbol{\pi}^{-,k}_{\mathcal{CG},F}\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{tt},F}\big)_{F\in\mathcal{F}_T},\\ &\big(\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},E}\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\pi}^{k+1}_{\mathcal{P},E}\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{nt},E}, \boldsymbol{\pi}^{k+1}_{\mathcal{P},E}((\mathbf{grad}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{t}_E))_{\boldsymbol{nn},E}\big)_{E\in\mathcal{E}_T}, \big(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}_V)\big)_{V\in\mathcal{V}_T}\Big),\\ \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div\,div},T}\boldsymbol{\upsilon} := \Big(&\boldsymbol{\pi}^{-,k}_{\mathcal{H},T}\boldsymbol{\upsilon}, \big(\pi^{k+1}_{\mathcal{P},F}(\upsilon_{\boldsymbol{nn},F}), \pi^{k+1}_{\mathcal{P},F}(2\,\mathrm{div}_F(\boldsymbol{\upsilon}_{|F}\boldsymbol{n}_F) + \partial_{\boldsymbol{n}_F}\upsilon_{\boldsymbol{nn},F})\big)_{F\in\mathcal{F}_T}, (\boldsymbol{\pi}^{k+1}_{\mathcal{P},E}\boldsymbol{\upsilon})_{E\in\mathcal{E}_T}\Big).\end{aligned} \tag{3.2}$$

下文中，对于 $\bullet \in$ {**偏差梯度**、**对称旋度**、div div} 以及任意 $Y \in \mathrm{F}_T \cup \mathrm{E}_T$，我们分别将 $\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\bullet,Y}$ 和 $\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\bullet,Y}$记作 $\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\bullet,T}$和 $\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\bullet,T}$ 在 Y 上的限制算子，这些限制算子通过收集 Y及其边界上的多项式分量得到。

3.2 局部算子

3.2.1 离散 devgrad 算子

设 $F \in \mathcal{F}_T$。离散偏差梯度算子的法向-切向分量的离散对应物通过仿照（2.14）获得。具体地，令 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}$: $\boldsymbol{X}^k$偏差梯度，$F \to \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,k+1}(F)$满足，对于所有 $\boldsymbol{v}_F \in \boldsymbol{X}^k$偏差梯度，$F$以及所有 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,k+1}(F)$,

$$\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F \cdot \boldsymbol{w} = -\int_F v_{\boldsymbol{n},F}\,\mathrm{div}_F\,\boldsymbol{w} + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}). \tag{3.3}$$

另一方面，切向-切向分量的离散对应量通过仿照（2.15）得到。具体而言，令 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}$: $\boldsymbol{X}^k$偏差梯度,$F \to \boldsymbol{\mathcal{CG}}^{-,k}(F)$ 满足，对于所有 $\boldsymbol{v}_F \in$

$\underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{偏差梯度},F}$以及所有 $\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{CG}^{-,k}(F)$,

$$\begin{aligned}\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F:\boldsymbol{\sigma} \quad &= -\int_F \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\cdot\operatorname{div}_F\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\int_F G_{\boldsymbol{v},F}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\\ &\quad + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{FE} + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{FE}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

回顾（2.13），单元离散偏差梯度算子 $\boldsymbol{DG}^k_T$: $\underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{偏差梯度},T}\to\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{-,k}(T)$ 定义为：对于所有 $\boldsymbol{v}_T\in\underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{偏差梯度},T}$以及所有 $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{SR}}^{-,k}(T)$,

$$\int_T \boldsymbol{DG}^k_T\underline{\boldsymbol{v}}_T:\boldsymbol{\sigma} = -\int_T \boldsymbol{v}_T\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\left(v_{\boldsymbol{n},F}\,\boldsymbol{n}_F^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F + \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F\right), \tag{3.5}$$

其中提醒读者，$\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}$表示将 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}$ 嵌入到 $\mathbb{R}^3$中的嵌入。

离散偏差梯度算子 $\boldsymbol{DG}^k_T$: $\underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{偏差梯度},T}\to\underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{对称旋度},T}$作用于离散复形的空间之间，并定义为：对于所有 $\boldsymbol{v}_T\in\underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{偏差梯度},T}$有

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{DG}}^k_T\underline{\boldsymbol{v}}_T \coloneqq \Big(&\boldsymbol{DG}^k_T\underline{\boldsymbol{v}}_T, \Big(\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F, \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F\Big)_{F\in\mathcal{F}_T},\\ &\Big(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} - \tfrac{1}{3}\big(\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} + \mathfrak{G}^k_E(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E})\big)\boldsymbol{I}_2,\\ &\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E}, (\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}), \mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E})\Big)_{E\in\mathcal{E}_T},\\ &\big(\operatorname{dev}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V}\big)_{V\in\mathcal{V}_T}\Big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

下文中，将 $\boldsymbol{DG}^k_T$限制到 T的一个面或一条边 $Y\in\mathrm{F}_T\cup\mathrm{E}_T$上所得的结果（通过收集 Y及其边界上的分量得到）记为 $\boldsymbol{DG}^k_Y$。

引理 5（局部交换性质）。以下交换性质成立

$$\underline{\boldsymbol{DG}}^k_T(\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\operatorname{dev}\operatorname{grad},T}\boldsymbol{v}) = \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\operatorname{sym}\operatorname{curl},T}(\operatorname{dev}\operatorname{grad}\boldsymbol{v}) \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^3(T;\mathbb{R}^3). \tag{3.7}$$

证明。设 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^3(T;\mathbb{R}^3)$。下面检验边上的法向-法向分量关系。由（2.9）并取 $l=k$，可得 $\mathfrak{G}^k_E(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_{V_1})\cdot\boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_{V_2})\cdot\boldsymbol{t}_E, \pi^{k-1}_{\mathcal{P},E}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_E)) = \pi^k_{\mathcal{P},E}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_E)$。结合前述关系，对于所有 $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(E;\mathbb{R}^{2\times2})$,

$$\begin{aligned}\int_E\left[\cancel{\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},E}}(\operatorname{grad}\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{nn},E} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\cancel{\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},E}}(\operatorname{grad}\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{nn},E} + \cancel{\pi^k_{\mathcal{P},E}}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_E)\right)\boldsymbol{I}_2\right]:\boldsymbol{\sigma}\\ = \int_E(\operatorname{dev}\operatorname{grad}\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{nn},E}:\boldsymbol{\sigma},\end{aligned} \tag{3.8}$$

投影算子的抵消由其定义保证。再次使用（2.9），这次取 $l=k+1$，我们推得

$$\mathfrak{G}^{k+1}_E(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},E}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E})) = \boldsymbol{\pi}^{k+1}_{\mathcal{P},E}(\operatorname{dev}\operatorname{grad}\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{nt},E}, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{G}^{k+1}_E((\text{梯度}\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_{V_1}))_{\boldsymbol{nn},E}, (\text{梯度}\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_{V_2}))_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\pi}^k P_{,E}(\text{梯度}\ \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{nn},E}) = \boldsymbol{\pi}^{k+1}P_{,E}(\text{梯度}((\text{偏差梯度}\ \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{t}_E))_{\boldsymbol{nn},E}. \tag{3.10}$$

结合（3.8）、（3.9）和（3.10），可得 $\boldsymbol{DG}^k_{\underline{E}}(\underline{\boldsymbol{I}^k}_{\text{偏差梯度},E}\boldsymbol{v}) = \underline{\boldsymbol{I}^k}_{\text{对称旋度},E}(\textbf{偏差梯度}\ \boldsymbol{v})$。在面上以及单元内部，对 $\boldsymbol{DG}^k_T$ 各分量的交换关系可用类似方式证明：首先去掉定义（3.3）（分别为（3.4）和（3.5））中的投影，然后应用分部积分公式（2.14）（分别为（2.15）和（2.13））即可得出。□

3.2.2 离散对称旋度算子

边上的离散对称旋度算子 $\boldsymbol{SC}_E^{k+1}$: $\boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},E} \to \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^{k+1}(E;\ \text{对称}\ \mathbb{R}^{2\times 2})$ 定义如下：对所有 $\boldsymbol{\tau}_E \in \underline{\boldsymbol{X}}^k{}_{\text{对称旋度},E}$，有：

$$\boldsymbol{SC}_E^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_E \coloneqq \mathbb{C}\left(\boldsymbol{C}_{\tau,E} - \mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\tau}_E)\right), \tag{3.11}$$

其中 $\mathbb{C}$ 是满足以下条件的四阶张量

$$\mathbb{C}\begin{pmatrix}\eta_{11} & \eta_{12}\\ \eta_{21} & \eta_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_{12} & \frac{-\eta_{11}+\eta_{22}}{2}\\ \frac{-\eta_{11}+\eta_{22}}{2} & -\eta_{21}\end{pmatrix} \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \tag{3.12}$$

面上的对称旋度算子包含两个分量。第一个分量 $SC_{\boldsymbol{nn},F}^{k+1}$: $\boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},F} \to \mathcal{P}^{k+1}(F)$，其定义仿照（2.17）：对于所有 $\boldsymbol{\tau}_F \in \boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},F}$ 以及所有 $r \in \underline{\mathrm{P}}^{k+1}(F)$，

$$\int_F SC_{\boldsymbol{nn},F}^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_F\, r = \int_F \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F} \cdot \mathbf{curl}_F\, r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\tau_{\boldsymbol{t},E} \cdot \boldsymbol{n}_F)\, r, \tag{3.13}$$

而第二个分量 $SC_{D,F}^{k+1}$: $\boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},F} \to \mathrm{P}^{k+1}(F)$，其定义仿照（2.21）：对于所有 $\boldsymbol{\tau}_F \in \underline{\boldsymbol{X}}^k{}_{\text{对称旋度},F}$ 以及所有 $r \in \mathrm{P}^{k+1}(F)$，

$$\begin{aligned}\int_F SC_{D,F}^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_F\, r = &-\int_F \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F} : \mathbf{curl}_F\, \mathbf{grad}_F\, r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E} \cdot \boldsymbol{n}_{FE})\, \partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\\ &- \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \left(2\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{\tau}_E \boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^\top \boldsymbol{\tau}_E \boldsymbol{n}_F\right) \partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{C}_{\tau,E}\, \boldsymbol{n}_{FE})\, r\\ &+ \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} [\![(\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{\tau}_V\, \boldsymbol{n}_{FE})\, r]\!]_E.\end{aligned} \tag{3.14}$$

回顾（2.16），单元 $T \in \mathbb{T}_h$ 上的离散对称旋度算子定义如下：对于所有 $\boldsymbol{\tau}_T \in \boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},T}$ 以及所有 $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \underline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^k(T)$，

$$\begin{aligned}\int_T \boldsymbol{SC}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T : \boldsymbol{\sigma} \coloneqq &\int_T \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T} : \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\sigma} + \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \int_F \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F} : (\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\\ &+ \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \int_F \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F} \cdot (\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

最后，离散空间之间作用的离散对称旋度算子 $\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k$: $\boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},T} \to \boldsymbol{X}^k{}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$ 定义为对所有 $\boldsymbol{\tau}_T \in \boldsymbol{X}^k{}_{\text{对称旋度},T}$ 取上述定义的各分量组成的向量：

$$\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T \coloneqq \left(\boldsymbol{SC}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T, (SC_{\boldsymbol{nn},F}^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_F, SC_{D,F}^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_F)_{F\in\mathcal{F}_T}, (\boldsymbol{SC}_E^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_E)_{E\in\mathcal{E}_T}\right). \tag{3.16}$$

可以验证，插值算子满足以下交换性质：

$$\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathbf{sym\,curl},T}\boldsymbol{\tau} = \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\mathbf{sym\,curl}\,\boldsymbol{\tau}) \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}^3(T;\mathbb{T}). \tag{3.17}$$

3.2.3 离散 divdiv 算子

离散双重散度算子 DD_T^k: $\underline{\boldsymbol{X}}_{\text{散度 散度},T}^k \to \mathcal{P}^k(T)$在（2.22）之后定义：对于所有 $\underline{\boldsymbol{v}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}_{\text{散度 散度},T}^k$以及所有 $v \in \mathrm{P}^k(T)$,

$$\begin{aligned}\int_T DD_T^k \underline{\boldsymbol{v}}_T\, v = \int_T \boldsymbol{v}_{\mathcal{H},T} : \operatorname{hess} v - \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^{\top} \boldsymbol{v}_E \boldsymbol{n}_F)\, v \\ - \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \int_F v_F\, \partial_{\boldsymbol{n}_F} v - \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \int_F D_{\boldsymbol{v},F}\, v.\end{aligned} \tag{3.18}$$

根据构造，可得

$$DD_T^k \underline{\boldsymbol{I}}_{\text{div div},T}^k \boldsymbol{v} = \pi_{\mathcal{P},T}^k(\operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(T;\mathbb{S}), \tag{3.19}$$

如利用 3.2 中针对 $\boldsymbol{v}_T = \boldsymbol{I}_{\text{divdiv 写出的}(T}^k \boldsymbol{v})$，根据定义消去 L^2-正交投影算子，并结合（2.22）即可验证。

3.3 局部 DDR 复形与主要结果

对于给定的网格单元 $T \in \mathbb{T}_h$，上述定义的空间和算子可排列成如下序列

$$\mathcal{R}^{-,1}(T) \xrightarrow{\underline{\boldsymbol{I}}_{\text{dev grad},T}^k} \underline{\boldsymbol{X}}_{\text{dev grad},T}^k \xrightarrow{\underline{\boldsymbol{DG}}_T^k} \underline{\boldsymbol{X}}_{\text{sym curl},T}^k \xrightarrow{\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k} \underline{\boldsymbol{X}}_{\text{div div},T}^k \xrightarrow{DD_T^k} \mathcal{P}^k(T) \xrightarrow{0} \{0\}. \tag{3.20}$$

定理6（局部复形性质与正合性）。序列 (3.20) 构成一个复形；当 T 的拓扑平凡且 $k \geq 1$ 时，该复形正合。

备注7（条件 $k \geq 1$的作用）。条件 $k \geq 1$ 仅在保证复形尾部正合时才需要（见（3.25c）及下文的备注16 ）。复形头部在 $k = 0$下也正合（特别参见下文的（3.25a）和（3.25b））。

证明。序列（3.20）构成一个复形，这是以下关系的结果:

$$\underline{\boldsymbol{I}}_{\text{dev grad},T}^k \mathcal{R}^{-,1}(T) \subset \operatorname{Ker} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k, \tag{3.21}$$

$$\operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k \subset \operatorname{Ker} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k, \tag{3.22}$$

$$\operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k \subset \operatorname{Ker} DD_T^k, \tag{3.23}$$

$$\operatorname{Im} DD_T^k = \mathcal{P}^k(T). \tag{3.24}$$

包含关系（3.21）直接由交换性质（3.7）以及 $\operatorname{dev}\operatorname{grad}\mathrm{R}^{-,1}(T) = \mathbf{0}$ 这一事实得到。关系（3.24）经典地由 $\operatorname{div}\operatorname{div} : \boldsymbol{H}(\operatorname{div}\operatorname{div}, T; \mathbb{S}) \to L^2(T)$ 的满射性以及（3.19）推出（下文引理13针对其整体对应形式给出了更详细的论证）。最后，性质（3.22）和（3.23）在第5节中证明。

当 T 具有平凡拓扑时，该复形的正合性可表述为以下性质:

$$\underline{\boldsymbol{I}}_{\text{dev grad},T}^k \mathcal{R}^{-,1}(T) = \operatorname{Ker} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k \tag{3.25a}$$

$$\operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k = \operatorname{Ker} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k \tag{3.25b}$$

$$\operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k = \operatorname{Ker} DD_T^k \qquad \text{if } k \geq 1. \tag{3.25c}$$

这些性质将在第6节中证明。 □

4 双调和问题的混合方法

本节将讨论上述复形末端的空间在双调和问题混合离散中的应用（1.2）。在本节中， $k \geq 0$ 是与该格式多项式次数相对应的整数。

4.1 局部分量乘积

我们为 $\boldsymbol{X}^k_{\underline{\mathrm{div}}\,\mathbf{div},T}$赋予分量内积，使得对于所有 $(\underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T) \in \boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \times \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\underline{\mathrm{div}}\,\mathbf{div},T}$，

$$[\underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T]_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \coloneqq \int_T \boldsymbol{v}_{\mathcal{H},T} : \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{H},T} + h_T \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F \left(\upsilon_F\, \tau_F + h_T^2 D_{\boldsymbol{v},F}\, D_{\boldsymbol{\tau},F}\right) + h_T^2 \sum_{E\in\mathcal{E}_T} \int_E \boldsymbol{v}_E : \boldsymbol{\tau}_E. \tag{4.1}$$

并引入相应的分量范数，使得

$$|||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \coloneqq [\underline{\boldsymbol{\tau}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T]^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.2}$$

利用 L^2-正交投影算子的有界性，以及 T的面和边上的连续迹不等式，可以类似于 [21, 引理 6], 证明

$$|||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{\tau}|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \lesssim \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})} + h_T|\boldsymbol{\tau}|_{\boldsymbol{H}^1(T;\mathbb{R}^{3\times3})} + h_T^2|\boldsymbol{\tau}|_{\boldsymbol{H}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}^2(T;\mathbb{S}). \tag{4.3}$$

此外，对于所有 $\underline{\boldsymbol{\tau}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$，取 (3.18) 中的 $\underline{v} = DD^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T$，并利用柯西–施瓦茨不等式、离散逆不等式和迹不等式，以及 $|||\cdot|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$ 的定义 (4.2)，可得以下有界性：

$$\|DD^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-2}|||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.4}$$

4.2 离散对称矩阵势

为了重构对称矩阵势，我们首先需要重构次数为k的面迹。为此，对每个 $F \in \mathrm{F}_T$，我们可以运用 HHO 势重构的原理（例如，参见 [23, 第5.1节。3]），根据多项式向量 $(\upsilon_F, (\boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{\upsilon}_E\boldsymbol{n}_F)_{E\in\mathcal{E}_T}) \in \mathrm{P}^{k-1}(F) \times \left(\bigtimes_{E\in\mathrm{E}_F}\mathrm{P}^k(E)\right)$，构造一个属于 $\mathrm{P}^k(F)$ 的函数，并将其解释为定义在 T 上的某个对称矩阵值场的法向-法向迹（顺带一提，利用这些值实际上可以计算出属于 $\mathrm{P}^{k+1}(F)$ 的法向 - 法向迹，但下文不会用到）。相应的重构算子 $\gamma^k_{\boldsymbol{nn},F}$: $\boldsymbol{X}^k$ 双重散度 $_{,F} \to \mathrm{P}^k(F)$ 按构造具有多项式一致性：对于所有 $\underline{\boldsymbol{\upsilon}} \in \mathrm{P}^k(T;\mathbb{S})$，$\gamma^k_{\boldsymbol{nn},F}\boldsymbol{I}^k$ 双重散度$_{,F}\boldsymbol{\upsilon}_{|F} = \boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{\upsilon}_{|F}\boldsymbol{n}_F$。此外，以下有界性成立：

$$\|\gamma^k_{\boldsymbol{nn},F}\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_F\|_{L^2(F)} \lesssim h_F^{-\frac{1}{2}}|||\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\upsilon}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.5}$$

对称矩阵势 $\boldsymbol{P}^k_T$: $\boldsymbol{X}^k_{\text{散度 }\mathbf{散度},\,T} \to \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^k(T;\mathbb{S})$ 随后通过模仿（2.22）来定义，使得对于所有 $\boldsymbol{\upsilon}_T \in \boldsymbol{X}^k_{\text{散度 }\underline{\mathbf{散度}},\,T}$：对于所有 $(v,\ \boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{P}^{k+2}(T) \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^{c,\,k}(T)$,

$$\begin{aligned}\int_T \boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_T : (\mathbf{hess}\, v + \boldsymbol{\tau}) = \int_T DD^k_T\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_T\, v + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\upsilon}_E\boldsymbol{n}_F)\, v \\ + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \gamma^k_{\boldsymbol{nn},F}\underline{\boldsymbol{\upsilon}}_F\, \partial_{\boldsymbol{n}_F} v - \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F D_{\boldsymbol{\upsilon},F}\, v + \int_T \boldsymbol{\upsilon}_{\mathcal{H},T} : \boldsymbol{\tau}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

由构造可知，以下多项式一致性性质成立：

$$\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon} \qquad \forall \boldsymbol{\upsilon} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(T;\mathbb{S}). \tag{4.7}$$

此外，在 (4.6) 中取 $(v,\ \boldsymbol{\tau})$ 使得 $\mathbf{hess}\, v + \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{P}_T^k \boldsymbol{v}_T$（这得益于直接分解 (2.3)，因此这是可行的），利用柯西–施瓦茨不等式、离散迹不等式和逆不等式，并调用 DD_T^k 的有界性 (4.4) 以及 $\gamma_{\boldsymbol{nn},\ F}^k$ 的有界性 (4.5)，可推得：

$$\|\boldsymbol{P}_T^k \underline{\boldsymbol{v}}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})} \lesssim |||\underline{\boldsymbol{v}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{v}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.8}$$

注记 8（多项式一致对称旋度）。对于所有 $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(T;\mathbb{T})$，注意到 sym **旋度** $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(T;\mathbb{S})$，有

$$\boldsymbol{P}_T^k(\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathbf{sym}\,\mathbf{curl},T}\boldsymbol{\tau}) \overset{(3.17)}{=} \boldsymbol{P}_T^k \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\mathrm{sym}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau}) \overset{(4.7)}{=} \mathrm{sym}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\tau},$$

这表明 $\boldsymbol{P}_T^k \circ \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k$ 在T内给出了对称旋度的多项式一致逼近。类似的构造可重复进行，以获得偏差梯度的一致逼近。由于当前讨论并不需要这一构造，细节留待后续工作。

4.3 全局海森空间、重构与离散 L^2-乘积

在网格 $\mathcal{M}_h$ 上，通过对多个单元共享的边和面所附着的未知量施加单值性，将局部空间拼接起来，即可得到全局空间 $\boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}$。全局 divdiv 算子 $DD_h^k\colon \boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \to \mathrm{P}^k(\mathcal{T}_h)$ 以及对称矩阵势算子 $\boldsymbol{P}_h^k\colon \boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \to \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(\mathcal{T}_h;\mathbb{S})$（其中 $\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(\mathcal{T}_h;\mathbb{S})$ 是分片多项式空间的对称矩阵值版本（2.1））满足：对于所有 $\underline{\boldsymbol{v}}_h \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}$，

$$(DD_h^k \underline{\boldsymbol{v}}_h)_{|T} \coloneqq DD_T^k \underline{\boldsymbol{v}}_T \quad \text{and} \quad (\boldsymbol{P}_h^k \underline{\boldsymbol{v}}_h)_{|T} \coloneqq \boldsymbol{P}_T^k \underline{\boldsymbol{v}}_T \quad \text{for all } T \in \mathcal{T}_h.$$

我们定义如下 L^2 型乘积：对于所有 $(\underline{\boldsymbol{v}}_h,\ \underline{\boldsymbol{\tau}}_h) \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}$，

$$(\underline{\boldsymbol{v}}_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \coloneqq \sum_{T\in\mathcal{T}_h} (\underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T},$$

其中

$$(\underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \coloneqq \int_T \boldsymbol{P}_T^k \underline{\boldsymbol{v}}_T : \boldsymbol{P}_T^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_T + s_T(\underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T). \tag{4.9}$$

上文中，s_T 是一种对称半正定稳定化双线性型，它在保持多项式一致性的同时确保 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\ T}$ 的正定性。s_T 的一种可能表达式如下：

$$s_T(\underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T) = [\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}_T^k\underline{\boldsymbol{v}}_T - \underline{\boldsymbol{v}}_T, \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T - \underline{\boldsymbol{\tau}}_T]_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.10}$$

下述多项式一致性性质可由 (4.7) 和 (4.10) 直接推出：

$$s_T(\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{v}, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T) = 0 \qquad \forall (\boldsymbol{v}, \underline{\boldsymbol{\tau}}_T) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(T;\mathbb{S}) \times \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.11}$$

注 9（分量乘积与离散 L^2-乘积之间的区别）。局部分量乘积 L^2（由 (4.1) 定义）与局部离散 L^2-乘积（由 (4.9) 定义）的主要区别在于：当其参数为多项式函数的插值时，后者满足一致性，即

$$(\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{v}, \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{\tau})_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} = \int_T \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\tau} \qquad \forall (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(T;\mathbb{S}).$$

最后，我们通过 L^2 乘积定义其诱导范数：对于 $\bullet \in \mathcal{T}_h \cup \{h\}$，

$$\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet} \coloneqq (\underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet, \underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet)^{1/2}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet}. \tag{4.12}$$

$\|\cdot\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\ h}$ 的对偶范数记为 $\|\cdot\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h,*}$。

4.4 离散问题与主要结果

为简便起见，令 $\mathrm{Z}_h^k \coloneqq \boldsymbol{X}^k{}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \times \mathrm{P}^k(\mathrm{T}_h)$。离散问题表述如下：求 $(\boldsymbol{\sigma}_h,\ u_h) \in \mathrm{Z}_h^k$，使得

$$\begin{aligned} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} + \int_\Omega DD_h^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_h\, u_h = 0 \qquad & \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_h \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}, \\ -\int_\Omega DD_h^k \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h\, v_h = \int_\Omega f v_h \qquad & \forall v_h \in \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h), \end{aligned} \tag{4.13}$$

或者，等价地：求 $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \mathrm{Z}_h^k$，使得

$$\mathcal{A}_h((\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, u_h), (\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h)) = \int_\Omega f v_h \qquad \forall (\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h) \in \mathcal{Z}_h^k, \tag{4.14}$$

其双线性型 $\mathrm{A}_h : \mathrm{Z}_h^k \times \mathrm{Z}_h^k \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathcal{A}_h((\underline{\boldsymbol{v}}_h, w_h), (\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h)) \coloneqq (\underline{\boldsymbol{v}}_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} + \int_\Omega DD_h^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_h\, w_h - \int_\Omega DD_h^k \underline{\boldsymbol{v}}_h\, v_h.$$

下面陈述上述数值格式的主要分析结果。为此，我们在 Z_h^k 上赋予如下范数：

$$\|(\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h)\|_{\mathcal{Z},h} \coloneqq \|\underline{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} + \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall (\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h) \in \mathcal{Z}_h^k. \tag{4.15}$$

定理 10（适定性）。 成立

$$1 \lesssim \inf_{(\underline{\boldsymbol{v}}_h, w_h) \in \mathcal{Z}_h^k \setminus \{0\}} \sup_{(\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h) \in \mathcal{Z}_h^k \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{A}_h((\underline{\boldsymbol{v}}_h, w_h), (\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h))}{\|(\underline{\boldsymbol{v}}_h, w_h)\|_{\mathcal{Z},h} \|(\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h)\|_{\mathcal{Z},h}}. \tag{4.16}$$

此外，问题 (4.13)（或者，等价地，(4.14)）存在唯一解，且该解满足 s

$$\|(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h, u_h)\|_{\mathcal{Z},h} \lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

证明。见第4.6节。 □

定理 *11*（误差估计）。设 $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \boldsymbol{H}$(双重散度, Ω; $\mathbb{S}$) $\times L^2(\Omega)$ 表示连续问题 *(1.2)* 的唯一解，并假设其具有附加正则性 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega; \mathbb{S}) \cap \boldsymbol{H}^{k+1}(\mathcal{T}_h; \mathbb{S})$ 和$u \in H^{k+3}(\mathcal{T}_h)$。那么，记 $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \boldsymbol{X}^k$双重散度,$h \times P^k(\mathcal{T}_h)$ 为离散问题 *(4.13)*（或等价地，*(4.14)*）的唯一解，则有

$$\|(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h - \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\boldsymbol{\sigma}, u_h - \pi^k_{\mathcal{P},h} u)\|_{\mathcal{Z},h} \lesssim h^{k+1} \left(|\boldsymbol{\sigma}|_{\boldsymbol{H}^{k+1}(\mathcal{T}_h;\mathbb{R}^{3\times 3})} + |u|_{H^{k+3}(\mathcal{T}_h)} \right). \tag{4.17}$$

证明。见第4.7节。 □

4.5 数值算例

数值格式（4.13）使用 HArDCore 库实现（参见 https://github.com/jdroniou/HArDCore）。为了验证定理 11的误差估计，我们考虑以下人为构造的解

$$u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2z^2(1-z)^2, \qquad \boldsymbol{\sigma} = -\,\mathbf{hess}\, u$$

在区域 $\Omega = [0,1]^3$上。该方法支持任意多面体网格，因此我们考虑了三组网格序列：立方体网格、四面体网格（使用 Tetgen 生成）和 Voronoi 网格。在图 1 中，我们针对每组网格序列，绘出了（4.17）左端误差度量随网格尺寸变化的曲线，多项式次数 k 介于 0 和 3 之间。收敛曲线表明，观测到的收敛率与预测的收敛率吻合良好。对于 Tetgen 网格族，当 $k = 0$时，误差出现饱和现象。对于 $k = 1$ 时 Tetgen 网格族中最细的网格，以及 $k \in \{0,1\}$时 Voronoi 网格族中最细的网格，也观察到收敛率略有降低。不过，在这两种情况下，曲线斜率仍接近理论值。

4.6 适定性

本节证明定理 10，并先给出两个预备结果：离散 L^2-范数的一致等价性，以及离散双重散度算子的 inf-sup 条件。

引理 12 (一致范数等价性)。 回顾离散 (4.12) 和 (4.2) 的定义 L^2- 和分量范数，可得

$$\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet} \lesssim |||\underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet} \lesssim \|\underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_\bullet \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\bullet}. \tag{4.18}$$

证明。 只需证明 (4.18) 对 $\bullet = T \in \mathcal{T}_h$成立 $\bullet = h$ 的结果可通过平方、对$T \in \mathcal{T}_h$求和并开平方得到。我们先证明

$$\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \lesssim |||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.19}$$

为此，取一个任意的 $\boldsymbol{\tau}_T \in \boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$并利用 (4.10) 得到

$$s_T(\underline{\boldsymbol{\tau}}_T,\underline{\boldsymbol{\tau}}_T)^{\frac12} = |||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T - \underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \le |||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} + |||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}, \tag{4.20}$$

其中，结论由三角不等式得出。接着，我们利用插值算子的有界性 (4.3)、离散逆不等式以及 $\boldsymbol{P}^k_T$ 的有界性 (4.8) 来写出

$$\begin{aligned}|||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} &\lesssim \|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})} + h_T|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|_{\boldsymbol{H}^1(T;\mathbb{R}^{3\times3})} + h_T^2|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|_{\boldsymbol{H}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\\ &\lesssim \|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})} \lesssim |||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

将上述估计代入（4.20），得到 $s_T(\boldsymbol{\tau}_T,\boldsymbol{\tau}_T)^{\frac12} \lesssim |||\boldsymbol{\tau}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$结合 $\boldsymbol{P}^k_T$ 的有界性（4.8），可得（4.19）。

现在证明逆不等式

$$|||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \lesssim \|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \qquad \forall \underline{\boldsymbol{\tau}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}. \tag{4.22}$$

为此，我们首先利用三角不等式将其写为

$$|||\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} \le |||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T - \underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} + |||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} =: \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2. \tag{4.23}$$

对于第一项，回顾（4.10），可写为 $\mathfrak{T}_1 = s_T(\boldsymbol{\tau}_T,\boldsymbol{\tau}_T)^{\frac12} \le \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$其中，结论由 $|||\cdot|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$ 的定义（4.12）以及局部离散 L^2-乘积的定义（4.9）得出。对于第二项，利用（4.21）的第二行以及上面再次回顾的定义，可写为$\mathfrak{T}_2 \lesssim \|\boldsymbol{\tau}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$。将上述估计代入（4.23），即完成（4.22）的证明。□

Lemma 13（关于 DD^k_h的 inf-sup 条件）。 以下 *inf-sup* 条件关于 h 一致成立：

$$1 \lesssim \inf_{v_h\in\mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{\underline{\boldsymbol{\tau}}_h\in\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\setminus\{\underline{\mathbf{0}}\}} \frac{\int_\Omega DD^k_h\underline{\boldsymbol{\tau}}_h\, v_h}{\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\|v_h\|_{L^2(\Omega)}}. \tag{4.24}$$

证明。 由插值算子的有界性（4.3）、一致范数等价性（4.18）以及 $h_T \le h \lesssim 1$ 对所有 $T \in \mathcal{T}_h$，并结合（3.19），可以推得

$$\|\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\boldsymbol{\tau}\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \lesssim \|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{H}^2(\Omega;\mathbb{R}^{3\times3})} \text{ and } DD^k_h\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\boldsymbol{\tau} = \pi^k_{\mathcal{P},h}(\mathrm{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\tau}) \text{ for all } \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega;\mathbb{S}), \tag{4.25}$$

其中，$\pi^k_{\mathcal{P},h}$表示定义在 $\mathrm{P}^k(\mathcal{T}_h)$ 上的 L^2-正交投影。由于双重散度：$\boldsymbol{H}^2(\Omega;\mathbb{S}) \to L^2(\Omega)$ 是满射（见定理 3.25] 中的 [27, 第 (iv) 点），这表明 DD^k_h是 B-相容算子，符合 [11, 第 8.4.1] 节中的定义。根据其中的抽象理论，可推知式 (4.24) 成立。□

现在我们可以证明离散问题的适定性。

定理 *10*的证明。 由（4.15）， $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\,h}$关于范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},\,h}$ DD^k_h上的强制性常数为 1。结合 4.24中的 inf-sup 条件，这经典地得到（4.16）。问题（4.13）（或等价地，（4.14））的适定性随后由经典论证得到（例如，见 [20,命题 7]）。 □

4.7 误差估计

本节的目标是证明定理 11。为此，我们首先需要对离散 L^2-乘积和伴随 divdiv 一致性误差进行估计。

引理 14 （离散 L^2-乘积的一致性误差估计）。 设 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^2(\Omega;\mathbb{S})$ 并定义离散 L^2-乘积一致性误差

$$\mathcal{E}_{\mathrm{prod},h}(\boldsymbol{v};\underline{\boldsymbol{\tau}}_h)\coloneqq\int_\Omega\boldsymbol{v}:\boldsymbol{P}^k_h\underline{\boldsymbol{\tau}}_h-(\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\boldsymbol{v},\underline{\boldsymbol{\tau}}_h)_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}.\tag{4.26}$$

此外，进一步假设 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^{k+1}(\mathcal{T}_h;\mathbb{S})$，则有

$$\|\mathcal{E}_{\mathrm{prod},h}(\boldsymbol{v};\cdot)\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h,*}\lesssim h^{k+1}|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{k+1}(\mathcal{T}_h;\mathbb{R}^{3\times3})}.\tag{4.27}$$

证明。 我们先将式（4.26）分解如下：

$$\mathcal{E}_{\mathrm{prod},h}(\boldsymbol{v};\underline{\boldsymbol{\tau}}_h)=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}[\mathfrak{T}_1(T)+\mathfrak{T}_2(T)+\mathfrak{T}_3(T)]$$

其中，回忆 $\boldsymbol{P}^k_T\boldsymbol{I}^k$ 散度散度，$T(\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}$ 由式（4.7），

$$\mathfrak{T}_1(T)\coloneqq\int_T(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}):\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T,\qquad\mathfrak{T}_2(T)\coloneqq\int_T\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}):\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T,$$
$$\mathfrak{T}_3(T)\coloneqq-s_T(\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{v},\underline{\boldsymbol{\tau}}_T).$$

接下来，我们逐一估计这些项。

第一项可利用柯西–施瓦茨不等式轻松处理；对于第一个因子，结合 L^2-正交投影算子的逼近性质（见 [18, 引理 3。1] 和 [23, 定理 1。45]）；对于第二个因子，则利用 $\|\cdot\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$ 以及局部离散 L^2-乘积的定义（4.12），4.9）：

$$|\mathfrak{T}_1(T)|\lesssim\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\lesssim h^{k+1}|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{k+1}(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}.$$

对于第二项，我们先注意到

$$\|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\overset{(4.8)}{\lesssim}|||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v})|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\lesssim h^{k+1}|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{k+1}(T;\mathbb{R}^{3\times3})},\tag{4.28}$$

其中，结论可由结合有界性（4.3）得到，$\boldsymbol{I}^k$ $_{\mathrm{div}\mathbf{div},\,T}$对 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{P}}$ 所写，$_T\boldsymbol{v}$以及 L^2-正交投影算子的逼近性质和 $h_T\le h$ 对所有 $T\in\mathcal{T}_h$ 均成立。然后，我们可以像处理 $\mathfrak{T}_1(T)$那样，利用柯西–施瓦茨不等式以及（4.12）和（4.9），写成

$$|\mathfrak{T}_2(T)|\lesssim\|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\boldsymbol{P}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\lesssim h^{k+1}|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{k+1}(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}.$$

对于第三项，回顾稳定化双线性型的多项式一致性（4.11），可知对于所有 $\boldsymbol{\tau}_T\in\boldsymbol{X}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$，有：

$$\begin{aligned}|\mathfrak{T}_3(T)|&=|s_T(\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v}),\underline{\boldsymbol{\tau}}_T)|\\&\le\|\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v})\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\\&\overset{(4.18)}{\lesssim}|||\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{P},T}\boldsymbol{v})|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\overset{(4.28)}{\lesssim}h^{k+1}|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{k+1}(T;\mathbb{R}^{3\times3})}\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}.\end{aligned}$$

□

引理 15（divdiv 算子的伴随一致性误差估计）。设 $v \in H^2(\Omega)$ 满足$\widehat{\ }$，使得 $v = \partial_{\boldsymbol{n}} v = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，并定义 *divdiv* 算子的伴随一致性误差线性形式 $\mathcal{E}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}(v;\cdot) : \boldsymbol{X}^k{}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \to \mathbb{R}$，使得对于所有 $\underline{\boldsymbol{\tau}}_h \in \boldsymbol{X}^k{}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}$，有：

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}(v;\underline{\boldsymbol{\tau}}_h) \coloneqq \int_\Omega \mathbf{hess}\, v : \boldsymbol{P}_h^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_h - \int_\Omega v\, DD_h^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_h. \tag{4.29}$$

此外，假设 $v \in H^{k+3}(\mathcal{T}_h)$，则有，

$$\|\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}(v;\cdot)\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h,*} \lesssim h^{k+1}|v|_{H^{k+3}(\mathcal{T}_h)}. \tag{4.30}$$

证明。对所有 $T \in \mathcal{T}_h$，$v_T \coloneqq \pi^{k+2}_{\mathcal{P},T} v$，结合 (4.6) 对 $(\boldsymbol{\tau}, v) = (\mathbf{0}, v_T)$ 的结果以及伴随一致性误差的定义 (4.29)，可得，对于任意 $\underline{\boldsymbol{\tau}}_h \in \underline{\boldsymbol{X}}^k{}_{\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{div}},h}$，满足 $\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{div}},h} = 1$，

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}(v;\underline{\boldsymbol{\tau}}_h) = {} & \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (v_T - v)\, DD_T^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_T + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{hess}(v - v_T) : \boldsymbol{P}_T^k \underline{\boldsymbol{\tau}}_T \\
& + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{\tau}_E \boldsymbol{n}_F)(v_T - v) \\
& + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \omega_{TF} \int_F \left[\gamma^k_{\boldsymbol{nn},F} \underline{\boldsymbol{\tau}}_F\, \partial_{\boldsymbol{n}_F}(v_T - v) + D_{\boldsymbol{\tau},F}\,(v_T - v)\right],
\end{aligned}$$

其中，将 v 和 $\partial_{\boldsymbol{n}} v$ 的面或边迹代入边界项是合理的，这是由它们的单值性以及所假设的边界条件保证的。利用柯西–施瓦茨不等式、v_T 的逼近性质、$|||\cdot|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}$ 的定义 (4.2)，以及 DD_T^k 的有界性 (4.4)、$\boldsymbol{P}_T^k$ 的有界性 (4.8) 和 $\gamma^k_{\boldsymbol{nn},F}$ 的有界性 (4.5)，我们得到

$$\left|\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}(v;\underline{\boldsymbol{\tau}}_h)\right| \lesssim h^{k+1}|v|_{H^{k+3}(\mathcal{T}_h)} |||\underline{\boldsymbol{\tau}}_h|||_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \overset{(4.18)}{\lesssim} h^{k+1}|v|_{H^{k+3}(\mathcal{T}_h)}. \qquad \square$$

定理 *11*的证明。考虑到 inf-sup 条件（4.16），由 [20,定理 10], 可得

$$\|(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h - \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\boldsymbol{\sigma}, u - \pi^k_{\mathcal{P},h} u)\|_{\mathcal{Z},h} \lesssim \|\mathcal{E}_h(\boldsymbol{\sigma}, u;\cdot)\|_{\mathcal{Z},h,*}, \tag{4.31}$$

其中，$\|\cdot\|_{\mathcal{Z},h,*}$ 表示与 $\|\cdot\|_{\mathcal{Z},h}$ 对偶的范数，并且一致性误差线性形式 $\mathrm{E}_h(\boldsymbol{\sigma}, u;\cdot) : \mathrm{Z}_h^k \to \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_h(\boldsymbol{\sigma}, u; \underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h) &\coloneqq \int_\Omega f v_h - \mathcal{A}_h((\underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}\boldsymbol{\sigma}, \pi^k_{\mathcal{P},h} u), (\underline{\boldsymbol{\tau}}_h, v_h)) \\
&= \mathcal{E}_{\mathrm{prod},h}(\boldsymbol{\sigma}; \underline{\boldsymbol{\tau}}_h) + \cancel{\int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} - DD_h^k \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}\boldsymbol{\sigma})\, v_h} + \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h}(u; \underline{\boldsymbol{\tau}}_h),
\end{aligned}$$

其中，为了得到第二行，我们利用了 $f = -\mathrm{div}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma}$ 在 Ω 中几乎处处成立这一事实，加入了项 $\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{hess}\, u) : \boldsymbol{P}_h^k \boldsymbol{\tau}_h = 0$，并使用了 L^2-乘积的定义（4.26）和（4.29）以及伴随 divdiv 一致性误差的定义，而消去项则由（4.25）得到。为证明（4.17），只需使用（4.27）和（4.30）估计上述表达式右端的各项，并在注意到 $\|\underline{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},h} \le \|(\boldsymbol{\tau}_h, v_h)\|_{\mathcal{Z},h}$ 由该后一范数的定义可得之后，将所得界代入（4.31）。$\square$

5 局部复形性质

本节汇集复形性质（3.22）和（3.23）的证明。

5.1 证明 (3.22)

令 $\underline{\boldsymbol{v}_T} \in \underline{\boldsymbol{X}^k}_{\text{偏差梯度},\,T}$。我们需要证明 $\boldsymbol{SC}_T^k \boldsymbol{DG}_T^k \boldsymbol{v}_T$（将（3.6）代入（3.16）得到）的边、面和单元分量均为零。

5.1.1 边分量

给定 $E \in \mathrm{F}$ 的 E 集合$_T$，并为简洁起见令 $\Gamma_{\boldsymbol{t},\,E} \coloneqq \mathfrak{G}_E^k(\boldsymbol{v}_{V_1} \cdot \boldsymbol{t}_E,\ \boldsymbol{v}_{V_2} \cdot \boldsymbol{t}_E,\ v_{\boldsymbol{t},\,E})$，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{SC}_E^{k+1} \underline{\boldsymbol{DG}_E^k \boldsymbol{v}_E} &= \mathbb{C}\Big[\mathfrak{G}_E^{k+1}\big((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\big) \\ &\qquad - \mathfrak{G}_E^{k+1}\Big((\operatorname{dev} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\operatorname{dev} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} + \Gamma_{\boldsymbol{t},E}\right) \boldsymbol{I}_2\Big)\Big] \\ &=: \mathbb{C}\left[\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2\right].\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{G}_E^{k+1}$逐分量作用，且其参数在 $\mathfrak{T}_1$ 和 $\mathfrak{T}_2$ 中的非对角项重合，因此这些项的非对角项也彼此重合，这表明存在 $\lambda \in \mathrm{P}^{k+1}(E)$ 使得$\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2 = \lambda \boldsymbol{I}_2$。因此，

$$\boldsymbol{SC}_E^{k+1} \underline{\boldsymbol{DG}_E^k \boldsymbol{v}_E} = \mathbb{C}(\lambda \boldsymbol{I}_2) = \boldsymbol{0},$$

其中，结论由 的定义（3.12）得出。

5.1.2 面分量

现在令 $F \in \mathrm{F}_T$。对于所有 $r \in \mathrm{P}^{k+1}(F)$，利用 $SC_{\boldsymbol{nn},F}^{k+1}$with $\boldsymbol{\tau}_F = \boldsymbol{DG}_F^k \boldsymbol{v}_F$ 的定义 (3.13)，并调用 $\boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{nt},F}^k$with 的定义 (3.3)，其中测试函数为 $\boldsymbol{w} =$旋度$_F\, r \in \mathrm{R}^k(F) \subset \mathrm{R}^{-,k+1}(F)$（参见 (2.4)），再注意到在每条边 $E \in \mathrm{E}_F$ 上都有 $\operatorname{curl}_F r \cdot \boldsymbol{n}_{FE} = -\partial_{\boldsymbol{t}_E} r$，可得

$$\begin{aligned}\int_F SC_{\boldsymbol{nn},F}^{k+1} \underline{\boldsymbol{DG}_F^k \boldsymbol{v}_F}\, r &= \int_F \boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{nt},F}^k \underline{\boldsymbol{v}_F} \cdot \operatorname{curl}_F r - \sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E}, (\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}) \cdot \boldsymbol{n}_F\, r \\ &\overset{(3.3)}{=} -\int_F v_{\boldsymbol{n},F} \operatorname{div}_F \cancel{\operatorname{curl}_F r} - \sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E} \cdot \boldsymbol{n}_F)\, \partial_{\boldsymbol{t}_E} r \\ &\qquad - \sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E}, (\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}) \cdot \boldsymbol{n}_F\, r \\ &\overset{(2.8)}{=} -\sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} [\![(\boldsymbol{v}_V \cdot \boldsymbol{n}_F) r]\!]_E = 0,\end{aligned}$$

其中我们通过观察得出结论：对于任意族 $(\varphi_V)_{V \in \mathcal{V}_F} \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}_F}$，

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} [\![\varphi_V]\!]_E = 0 \tag{5.1}$$

将 $SC_{D}^{k+1},_F$ 对 $\boldsymbol{\tau}_F = \boldsymbol{DG}_F^k \boldsymbol{v}_F$ 的定义（3.14）代入，可得对所有 $r \in \mathrm{P}^{k+1}(F)$，

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &\coloneqq \int_F SC_{D,F}^{k+1} \underline{\boldsymbol{DG}_F^k \boldsymbol{v}_F}\, r \\ &= -\int_F \boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{tt},F}^k \underline{\boldsymbol{v}_F} : \operatorname{curl}_F \operatorname{grad}_F r + \sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E}, (\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}) \cdot \boldsymbol{n}_{FE}\, \partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (2\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} \boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^\top \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} \boldsymbol{n}_F)\, \partial_{\boldsymbol{t}_E} r\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \frac{2\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{n}_{FE}+\boldsymbol{n}_F^\top \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{n}_F}{3}\big[\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}+\mathfrak{G}_E^k(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E,\boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E,v_{\boldsymbol{t},E})\big]\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r\\
&-\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E})\boldsymbol{n}_{FE}\,r\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{n}_{FE}^\top\operatorname{dev}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V}\boldsymbol{n}_{FE})\,r]\!]_E,
\end{aligned}
$$

这里第四项用到了这样一个事实：$\boldsymbol{n}_{FE}$ 和 $\boldsymbol{n}_F$ 的单位欧几里得范数均为 1。

接下来，我们在上述表达式中将 $\boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{tt}}^k{}_F\boldsymbol{v}_F$ 按照（3.4）展开，其中 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{旋度}_F\boldsymbol{梯度}_F\,r\in\mathcal{CG}^{k-1}(F)\subset\mathcal{CG}^-{}^k(F)$，继续写为

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}=&\int_F \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\cdot\operatorname{div}_F\operatorname{curl}_F\operatorname{grad}_F r+\frac{1}{3}\int_F G_{\boldsymbol{v},F}\operatorname{tr}(\operatorname{curl}_F\operatorname{grad}_F r)\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2 r+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\big(-2\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\boldsymbol{n}_{FE}-\boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\boldsymbol{n}_F+\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\big)\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\mathfrak{G}_E^k(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E,\boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E,v_{\boldsymbol{t},E})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E},(\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E})\cdot\boldsymbol{n}_{FE}\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\\
&-\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\boldsymbol{n}_{FE}^\top\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E})\boldsymbol{n}_{FE}\,r\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V}\boldsymbol{n}_{FE})\,r]\!]_E-\frac{1}{3}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![r\,\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V}\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{n}_{FE}]\!]_E,
\end{aligned}
$$

其中，我们在第一次消去中使用了 $\operatorname{div}_F\operatorname{curl}_F=\boldsymbol{0}$，利用 $\operatorname{tr}(\operatorname{curl}_F\operatorname{grad}_F)=\operatorname{rot}_F\operatorname{grad}_F=0$ 这一事实消去了第二项，注意到对于所有 $E\in\mathrm{E}_F$，第三项和第四项中均有 $\boldsymbol{t}_E^\top(\operatorname{curl}_F\operatorname{grad}_F r)\boldsymbol{n}_{FE}=-\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2 r$ 和 $\boldsymbol{n}_{FE}^\top(\operatorname{curl}_F\operatorname{grad}_F r)\boldsymbol{n}_{FE}=-\partial_{\boldsymbol{t}_E}\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r$，并观察到对于所有 $E\in\mathrm{E}_F$，$\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},\,E}\boldsymbol{n}_{FE}+\boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},\,E}\boldsymbol{n}_F=\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},\,E}$，因为 $(\boldsymbol{n}_{FE},\boldsymbol{n}_F)$ 是第五项中的正交归一基。注意到 $\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{n}_{FE}=1$ 并利用 (5.1)，即可消去最后一项。

根据在该算子出现的项中对 $\mathfrak{G}_E^\bullet$ 的定义（2.8），我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}=&\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2 r+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\\
&-\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r\\
&-\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2 r+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r]\!]_E\\
&-\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r]\!]_E\\
&+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r=\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{v}_V)_{\boldsymbol{t},F}\cdot\operatorname{grad}_F r]\!]_E\overset{(5.1)}{=}0,
\end{aligned}
$$

其中，倒数第二个等式是通过化简涉及对 E 积分的项，并在观察到 $(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}}r+(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}r=(\boldsymbol{v}_V)_{\boldsymbol{t},F}\cdot$ **梯度**$_F\,r$ 后将边跳跃项合并得到的。

5.1.3 单元分量

为了完成对（3.22）的证明，我们还需证明 $\boldsymbol{SC}_T^k\boldsymbol{DG}_T^k\boldsymbol{v}_T$ 的单元分量为零。将 $\boldsymbol{SC}_T^k$ 关于 $\boldsymbol{\tau}_T=\boldsymbol{DG}_T^k\boldsymbol{v}_T$ 的定义（3.15）写出，可得对所有 $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}^{-,k}(T)$，

$$\mathfrak{T}:=\int_T\boldsymbol{SC}_T^k\boldsymbol{DG}_T^k\boldsymbol{v}_T:\boldsymbol{\sigma}=\int_T\boldsymbol{DG}_T^k\boldsymbol{v}_T:\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{tt},F}^k\boldsymbol{v}_F:(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{nt},F}^k\boldsymbol{v}_F\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}.$$

接下来，我们根据（3.5）展开 $\boldsymbol{DG}_T^k\boldsymbol{v}_T$（这是可行的，因为 $\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}\in\mathrm{SR}^{k-1}(T)\subset\mathrm{SR}^{-,k}(T)$，参见（2.6））；根据（3.4）展开 $\boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{tt},F}^k\boldsymbol{v}_F$（注意到由（2.12）可知，$(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\in\mathrm{CG}^{-,k}(F)$）；并根据（3.3）展开 $\boldsymbol{DG}_{\boldsymbol{nt},F}^k\boldsymbol{v}_F$（这是可行的，因为 $(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\in\mathrm{P}^k(F;\mathbb{R}^2)\subset\mathrm{R}^{-,k+1}(F)$）。由此得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}=&-\int_T\boldsymbol{v}_T\cdot\cancel{\operatorname{\mathbf{div}}\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}}+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\left(v_{\boldsymbol{n},F}\boldsymbol{n}_F^{\mathsf{T}}\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F+\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}^{\mathsf{T}}\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F\right)\\&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\cdot\operatorname{\mathbf{div}}_F(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}-\frac{1}{3}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F G_{\boldsymbol{v},F}\cancel{\boldsymbol{I}_2:(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\boldsymbol{n}_{FE}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{n}_{FE}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{n}_{FE}\\&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F v_{\boldsymbol{n},F}\operatorname{div}_F(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)((\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}),\end{aligned}$$

其中，我们利用恒等式 **散度 旋度** $\boldsymbol{\sigma}=0$ 消去了第一项，并利用 $\boldsymbol{\sigma}$ 具有对称性这一事实消去了第六项，因此 $(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}$ 是无迹的。注意到，根据（2.10），$\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}^{\mathsf{T}}$ **旋度** $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F=\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\cdot$（**旋度** $\boldsymbol{\sigma}$）$_{\boldsymbol{tn},F}$，并重新整理各项，我们可以继续写成

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}=&\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F v_{\boldsymbol{n},F}\cancel{\left[\boldsymbol{n}_F^{\mathsf{T}}\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F-\operatorname{\mathbf{div}}_F(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\right]}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\cdot\cancel{\left[(\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma})_{\boldsymbol{tn},F}-\operatorname{\mathbf{div}}_F(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\right]}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\boldsymbol{n}_{FE}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{n}_{FE}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{n}_{FE}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)((\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}),\end{aligned}$$

其中，前两项利用以下恒等式相互抵消： $\boldsymbol{n}_F^{\top}$旋度 $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_F$ =散度$_F$（$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F$）$_{\boldsymbol{nt},\,F}$ 以及（旋度 $\boldsymbol{\sigma}$）$_{\boldsymbol{tn},\,F}$ =散度$_F$（$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F$）$_{\boldsymbol{tt},\,F}$分别成立。将涉及边上积分的各项汇集起来，并利用（2.10）以及 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},\,E}$ 和 $\boldsymbol{w}=\{\boldsymbol{n}_{FE},\ \boldsymbol{n}_F\}$，可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &= \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\left[\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n},E}^{\top}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE}+v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E^{\top}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE}\right]\\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n},E}+v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E)^{\top}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_{FE})\\ &= -\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n},E}+v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E)^{\top}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{t}_E=0,\end{aligned}$$

其中，我们利用向量三重积公式得到第二行，并利用 $(\boldsymbol{t}_E,\boldsymbol{n}_{FE},\boldsymbol{n}_F)$ 构成右手系（即 $\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_{FE}=-\boldsymbol{t}_E$）得到第三行。最后，注意到对于任意函数族 $(\phi_E)_{E\in\mathcal{E}_T}$，只要对所有$E\in\mathrm{E}_T$ 都有 $\phi_E\in L^2(E)$，即可得出结论，

$$\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\phi_E=0. \tag{5.2}$$

这就完成了（3.22）的证明

5.2 证明 (3.23)

设$\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\in\underline{\boldsymbol{X}}_{\text{对称旋度},\,T}^{k}$。我们需要证明$DD_T^k\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T=\underline{0}$。利用3.18式中$DD_T^k$的定义，并结合 $\underline{\boldsymbol{v}}_T=\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T$，对于所有 $v\in\mathcal{P}^k(T)$，有

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}:=\int_T DD_T^k\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T\,v &= \int_T\boldsymbol{SC}_T^k\underline{\boldsymbol{\tau}}_T:\operatorname{hess}v-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\boldsymbol{SC}_E^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_E\boldsymbol{n}_F)\,v\\ &\quad-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F SC_{\boldsymbol{nn},F}^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_F\,\partial_{\boldsymbol{n}_F}v-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F SC_{D,F}^{k+1}\underline{\boldsymbol{\tau}}_F\,v=:\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}.\end{aligned}$$

接下来，我们将 $\boldsymbol{SC}_T^k$根据（3.15）展开，其中 $\boldsymbol{\sigma}=\operatorname{hess}v\in\boldsymbol{\mathcal{H}}^{k-2}(T)\subset\boldsymbol{\mathcal{H}}^{-,\,k}(T)$（参见（2.7））， 并且$\boldsymbol{SC}_E^{k+1}$，$SC_{\boldsymbol{nn},\,F}^{k+1}$，以及$SC_{D,\,F}^{k+1}$分别根据（3.11）、（3.13）和（3.14）可写为

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}=&\left.\begin{aligned}&\int_T\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T}:\cancel{\operatorname{curl}\operatorname{hess}v}\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F}:(\operatorname{hess}v\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}\cdot(\operatorname{hess}v\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\end{aligned}\right\}\mathfrak{A}\\&\left.\begin{aligned}&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\mathbb{C}\boldsymbol{C}_{\tau,E}\boldsymbol{n}_F)\,v\\&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\left(\boldsymbol{n}_{FE}^{\top}\mathbb{C}\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{\tau}_E)\boldsymbol{n}_F\right)v\end{aligned}\right\}\mathfrak{B}\\&\left.-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}\cdot\operatorname{curl}_F\partial_{\boldsymbol{n}_F}v+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\tau_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)\,\partial_{\boldsymbol{n}_F}v\right\}\mathfrak{C}\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F} : \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\, v + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} v\\
&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \left(2\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{n}_F\right)\partial_{\boldsymbol{t}_E} v\\
&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{C}_{\tau,E}\,\boldsymbol{n}_{FE}\, v + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![v\,\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_V\,\boldsymbol{n}_{FE}]\!]_E
\end{aligned}
\right\}\mathfrak{D}
$$
$$
=: 0+\mathfrak{T}_1+\cdots+\mathfrak{T}_{11}.
$$

由恒等式 $\mathfrak{T}_1 = -\mathfrak{T}_7$和 $\mathfrak{T}_2 = -\mathfrak{T}_5$可得（$\mathbf{hess}\, v\times\boldsymbol{n}_F$）$_{tt,\,F}$ =**旋度**$_F$**梯度**$_F\, v$以及$\boldsymbol{n}_F^\top$（$\mathbf{hess}\, v\times\boldsymbol{n}_F$）=**旋度**$_F\,\partial_{\boldsymbol{n}_F} v$。剩下要证明边项相消。根据定义（3.12），有 $\mathbb{C}$，对任意 $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，$\boldsymbol{n}_{FE}^\top\mathbb{C}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{n}_F = -\frac{1}{2}\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{n}_{FE} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{n}_F$因此

$$
\boldsymbol{n}_{FE}^\top\mathbb{C}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{n}_F + \boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{n}_{FE} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{\eta}. \tag{5.3}
$$

将上述方程应用于 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{C}_{\tau,E}$，并利用 $\phi_E = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_{\tau,E}$ 处的 (5.2)，我们可以推得 $\mathfrak{T}_3+\mathfrak{T}_{10}=0$。随后，我们可以合并边上的一些导数。由于 $(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)\,\partial_{\boldsymbol{n}_F} v + (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} v = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot($梯度 $v)_{\boldsymbol{n},E}$，根据 (5.2) 我们还有 $\mathfrak{T}_6+\mathfrak{T}_8=0$。令 $\mathfrak{T}_9(E) := \int_E \left(2\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{n}_{FE} + \boldsymbol{n}_F^\top\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{n}_F\right)\partial_{\boldsymbol{t}_E} v$，并注意到括号中的量等于 $\operatorname{tr}\,\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{n}_{FE}$，因为 $(\boldsymbol{n}_F,\ \boldsymbol{n}_{FE})$ 构成一个正交归一基，且迹具有不变性，于是得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}_9(E) &= \int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} v + \int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_E\boldsymbol{n}_{FE}\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} v\\
&\overset{(2.8)}{=} \int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} v - \int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{\tau}_E)\boldsymbol{n}_{FE}\, v + [\![\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_V\,\boldsymbol{n}_{FE}\, v]\!]_E\\
&\overset{(5.3)}{=} \int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} v - \int_E \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{\tau}_E)\, v\\
&\quad + \int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top\mathbb{C}\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{\tau}_E)\boldsymbol{n}_{FE}\, v + [\![\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\tau}_V\,\boldsymbol{n}_{FE}\, v]\!]_E.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\mathfrak{T}_9+\mathfrak{T}_4+\mathfrak{T}_{11} = \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{\tau}_E)\, v - \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} v\right).
$$

利用（5.2），并令 ϕ_E 等于上述表达式中的被积函数，可直接得到 $\mathfrak{T}_4+\mathfrak{T}_9+\mathfrak{T}_{11}=0$，从而证明 $\mathfrak{T}=0$，进而完成证明。

6 局部正合性

本节证明关系式（3.25），从而得到局部复形（3.20）的正合性。

6.1 证明 (3.25a)

既然已经证明了（3.21），我们只需证明

$$
\operatorname{Ker}\underline{\boldsymbol{DG}}_T^k \subset \underline{\boldsymbol{I}}_{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad},T}^k\boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,1}(T). \tag{6.1}
$$

为此，我们令$\boldsymbol{v}_T\in\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\text{偏差梯度},T}$满足$\boldsymbol{DG}_T^k\boldsymbol{v}_T=\boldsymbol{0}$，并证明存在$\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,1}(T)$使得$\boldsymbol{v}_T=\boldsymbol{I}^k_{\text{偏差梯度},h}\boldsymbol{w}$。我们从顶点和边分量入手，它们给出了$\boldsymbol{w}$的表达式；然后证明面和单元分量也等于$\boldsymbol{w}$的插值。

6.1.1 顶点值与边分量

给定一条边 $E \in \mathcal{E}_T$，其顶点为 V_1 和 V_2，施加 $\boldsymbol{DG}_E^k \underline{\boldsymbol{v}}_E = \underline{\mathbf{0}}$，对应于以下条件（参见（3.6））：

$$\operatorname{dev} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2} = \operatorname{dev} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1} = \mathbf{0}, \tag{6.2a}$$

$$\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}) = \mathbf{0}, \tag{6.2b}$$

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr} \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} + \mathfrak{G}_E^k(\boldsymbol{v}_{V_1} \cdot \boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2} \cdot \boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E})\right) \boldsymbol{I}_2 = \mathbf{0}, \tag{6.2c}$$

$$\mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E}, (\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}) = 0. \tag{6.2d}$$

由 (6.2a) 可知，对所有 $V \in \mathrm{V}_E$，存在 $\lambda_V \in \mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V} = \lambda_V \boldsymbol{I}_3$。条件 (6.2b) 随即给出 $\lambda_{V_1} \boldsymbol{I}_2 = \lambda_{V_2} \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}$，这尤其意味着 $\lambda_{V_1} = \lambda_{V_2}$。由于这一推理适用于所有边 $E \in \mathrm{E}_T$，因此存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得对所有 $V \in \mathrm{V}_T$，$\lambda_V = \lambda$，且对所有 $E \in \mathrm{E}_T$，$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} = \lambda \boldsymbol{I}_2$。将 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}$ 的这一取值代入 (6.2c)，得到 $\mathfrak{G}_E^{k+1}(\boldsymbol{v}_{V_1} \cdot \boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2} \cdot \boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E}) = \lambda$；结合 (2.8)，可得 $(\boldsymbol{v}_{V_2} - \boldsymbol{v}_{V_1}) \cdot \boldsymbol{t}_E = \lambda \mathrm{h}_E$，以及对所有 $\boldsymbol{x} \in E$，$v_{\boldsymbol{t},E}(\boldsymbol{x}) = \pi_{\mathcal{P}}^{k-1}{}_{,E}\left[\boldsymbol{v}_{V_1} + \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_{V_1})\right] \cdot \boldsymbol{t}_E$。另一方面，条件 (6.2d) 给出 $(\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E} = (\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}$。结合上述关于顶点值 $\boldsymbol{v}_V$ 的切向和法向分量的结果，可得

$$\boldsymbol{v}_{V_2} = \boldsymbol{v}_{V_1} + \lambda h_E \boldsymbol{t}_E = \boldsymbol{v}_{V_1} + \lambda \left[(\boldsymbol{v}_{V_2} - \boldsymbol{v}_{V_1}) \cdot \boldsymbol{t}_E\right] \boldsymbol{t}_E \qquad \forall E \in \mathcal{E}_T.$$

要使该条件成立，唯一的可能是存在 $\mathrm{R}^{-}{}_{,1}(T) \ni \boldsymbol{w}\colon T \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a} + \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_T) \in \mathbb{R}^3$，满足 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$，使得对于给定顶点 $V \in \mathrm{V}_T$，有 $\boldsymbol{v}_V = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_V)$（这足以使 $\boldsymbol{v}_{V'} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_{V'})$ 对所有 $V' \in \mathrm{V}_T \setminus \{V\}$ 也成立）。回想 $\boldsymbol{X}^k$ 偏差梯度上的插值算子定义（对应于将式 (3.1) 限制到 E），我们可以很容易地验证，关于 $\underline{\boldsymbol{v}}_E$ 各分量的上述条件等价于

$$\underline{\boldsymbol{v}}_E = \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\operatorname{dev}\operatorname{grad},E} \boldsymbol{w} \qquad \forall E \in \mathcal{E}_T. \tag{6.3}$$

6.1.2 面分量

令 $F \in \mathcal{F}_T$。施加 $\boldsymbol{DG}_F^k \underline{\boldsymbol{v}}_F = \underline{\mathbf{0}}$ 等价于满足以下条件，此外还需满足式（6.2）：

$$\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F} \underline{\boldsymbol{v}}_F = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F} \underline{\boldsymbol{v}}_F = \mathbf{0}.$$

施加 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F} \boldsymbol{v}_F = \mathbf{0}$ 并将式（3.3）应用于 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(F; \mathbb{R}^2)$，再结合式（6.3）可得，

$$-\int_F v_{\boldsymbol{n},F} \operatorname{div}_F \boldsymbol{z} + \sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_F)(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{n}_{FE}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(F; \mathbb{R}^2).$$

对边界项进行分部积分，并注意到 $\boldsymbol{梯度}_F(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_F) = 0$，因为函数 $T \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_F \in \mathbb{R}$ 在 F 上是常数（关于一般网格上这一结果的证明，见 [21, 命题 8]），上述条件等价于 $\int_F (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_F - v_{\boldsymbol{n},F}) \operatorname{div}_F \boldsymbol{z} = 0$ 对所有 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(F; \mathbb{R}^2)$ 均成立。由于 $\operatorname{div}_F\colon \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}(F; \mathbb{R}^2) \to \mathrm{P}^k(F)$ 是满射，这意味着

$$v_{\boldsymbol{n},F} = \boldsymbol{w}_{|F} \cdot \boldsymbol{n}_F. \tag{6.4}$$

然后令 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F} \boldsymbol{v}_F = \underline{\mathbf{0}}$ 代入（3.4），根据各自的定义消去投影算子，并使用分部积分公式（2.15），我们得到，对于所有 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\mathcal{G}}^{-}{}_{,}{}^{k}(F)$，

$$\int_F (\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{t},F} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}) \cdot \operatorname{\mathbf{div}}_F \boldsymbol{\sigma} + \int_F \left(\lambda - \frac{1}{3} G_{\boldsymbol{v},F}\right) \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = 0.$$

取 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{C}\mathcal{G}^{\mathrm{c},\,k}(F)$ 并利用 **散度**$_F : \boldsymbol{C}\mathcal{G}^{\mathrm{c},\,k}(F) \to \mathcal{P}^{k-1}(F;\ \mathbb{R}^2)$ 是满射这一事实（参见引理17），以及 迹$\boldsymbol{\sigma} = 0$，该条件可推出

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F} = \boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{P},F} \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{t},F}. \tag{6.5}$$

取 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{C}\mathcal{G}^{k-1}(F)$，利用 $\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{\sigma} = 0$ 这一事实，并注意到 $\mathrm{tr}\, \boldsymbol{C}\mathcal{G}^{k-1}(F) \to \mathrm{P}^{\,k-1}(F)$ 是满射，另一方面可得

$$G_{\boldsymbol{v},F} = 3\lambda. \tag{6.6}$$

汇总 (6.3)、(6.4)、(6.5) 和 (6.6)，并回顾上述推理对任意 $F \in \mathcal{F}_T$均成立，因此我们证明了

$$\underline{\boldsymbol{v}}_F = \underline{\boldsymbol{I}}^k_{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad},F} \boldsymbol{w} \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T. \tag{6.7}$$

6.1.3 单元分量

为完成 (6.1) 的证明，只需说明 $\boldsymbol{DG}^k_T \boldsymbol{v}_T = \mathbf{0}$ 推出

$$\boldsymbol{v}_T = \boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{P},T} \boldsymbol{w}. \tag{6.8}$$

这一关系可化为平凡的恒等式 $\mathbf{0} = \mathbf{0}$，其中 $k = 0$。接下来考虑 $k \geq 1$ 的情形。在 (3.5) 中施加 $\boldsymbol{DG}^k_T \boldsymbol{v}_T = \mathbf{0}$，并结合 (6.7)，(3.5) 可得，对所有 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathcal{R}^{\mathrm{c},\,k}(T) \subset \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathcal{R}^{-,\,k}(T)$,

$$0 = -\int_T \boldsymbol{v}_T \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \omega_{TF} \int_F \left((\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}_F)\, \boldsymbol{n}_F^{\top} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}_F + \cancel{\boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{P},F}} \widehat{\boldsymbol{w}}^{\top}_{\boldsymbol{t},F} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}_F \right) = \int_T (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_T) \cdot \mathbf{div}\, \boldsymbol{\sigma},$$

其中我们利用了(2.11)消去投影算子，并利用分部积分公式(2.13)（注意到 $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathcal{R}^{\mathrm{c},k}(T)$是无迹的）得出结论。由于$\mathbf{div} : \boldsymbol{\mathcal{S}}\mathcal{R}^{\mathrm{c},k}(T) \to \mathcal{P}^{k-1}(T;\mathbb{R}^3)$是满射，该关系意味着(6.8)，从而完成了(6.1)的证明。

6.2 (3.25b)的证明

设$\underline{\boldsymbol{\tau}}_T \in \underline{\boldsymbol{X}}^k_{\text{对称旋度},T}$满足$\underline{\boldsymbol{SC}}^k_T \underline{\boldsymbol{\tau}}_T = \underline{\mathbf{0}}$，即回顾(3.11)和(3.16)：

$$\mathbb{C}\left(\boldsymbol{C}_{\tau,E} - \mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\tau}_E) \right) = \mathbf{0} \qquad \forall E \in \mathcal{E}_T, \tag{6.9}$$

$$SC^{k+1}_{D,F} \underline{\boldsymbol{\tau}}_F = 0 \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T, \tag{6.10}$$

$$SC^{k+1}_{\boldsymbol{nn},F} \underline{\boldsymbol{\tau}}_F = 0 \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T, \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{SC}^k_T \underline{\boldsymbol{\tau}}_T = \mathbf{0}. \tag{6.12}$$

为了证明 $\mathrm{Ker}\, \boldsymbol{SC}^k_T \subset \mathrm{Im}\, \underline{\boldsymbol{DG}}^k_T$，从上述条件出发，我们将显式构造 $\boldsymbol{v}_T \in \boldsymbol{X}^k_{\text{偏差梯度},T}$使得

$$\underline{\boldsymbol{DG}}^k_T \underline{\boldsymbol{v}}_T = \underline{\boldsymbol{\tau}}_T \tag{6.13}$$

依次确定其顶点分量（参见(6.21)）、边分量（参见(6.23)）、面分量（参见(6.34)、(6.37)和(6.38)），以及单元分量（参见(6.47)）。

6.2.1 顶点分量

We 由（6.9）以及（3.12）的定义可推得 $\mathbb{C}$存在 $\lambda_E \in \mathcal{P}^{\,k+1}(E)$使得

$$\boldsymbol{C}_{\tau,E} = \mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\tau}_E) + \lambda_E \boldsymbol{I}_2. \tag{6.14}$$

对任意 $F \in \mathcal{F}_T$以及 $r \equiv 1 \in \mathcal{P}^{\,k+1}(F)$对（6.11）施加约束并计算（3.13），得到

$$0 = -\sum_{E \in \mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \tau_{\boldsymbol{t},E} \cdot \boldsymbol{n}_F. \tag{6.15}$$

另一方面，在6.10的定义SC_D^{k+1}中强制满足F，针对一般的$r \in \mathcal{P}^{k+1}(F)$，利用5.3并取$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\tau}_E$，再根据$\boldsymbol{C}_{\tau}$将$E$表示为6.14，可得：

$$
\begin{aligned}
0 = &- \int_F \boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F} : \mathbf{curl}_F\, \mathbf{grad}_F\, r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E (\tau_{\boldsymbol{t},E} \cdot \boldsymbol{n}_{FE}) \partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}_E\, \partial_{\boldsymbol{t}_E} r \\
&- \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{\tau}_E \boldsymbol{n}_{FE}\, \partial_{\boldsymbol{t}_E} r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} [\![\boldsymbol{n}_{FE}^\top \boldsymbol{\tau}_V \boldsymbol{n}_{FE}\, r]\!]_E \\
&- \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \boldsymbol{n}_{FE}^\top \mathfrak{G}_E^{k+1}((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\tau}_E) \boldsymbol{n}_{FE}\, r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \lambda_E\, r,
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

其中，抵消由（2.8）得出。将 $r \equiv 1$ 代入上述表达式，得到对于所有 $F \in \mathrm{F}_T$，$\sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \lambda_E = 0$。由于 T 的第一贝蒂数等于 0，由此关系可知，在每个 $E \in \mathrm{E}_T$ 上等于 $\int_E \lambda_E$ 的分片函数可视为 T的边骨架上的一个分片仿射函数的梯度，即存在一个族 $(\lambda_V)_{V\in\mathcal{V}_T} \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}_T}$，使得

$$
\int_E \lambda_E = [\![\lambda_V]\!]_E \qquad \forall E \in \mathcal{E}_T. \tag{6.17}
$$

由（6.15）和（6.16）可推知，对于所有 $r \in \mathcal{P}^1(T)$ 以及所有 $F \in \mathcal{F}_T$，

$$
\sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE} \int_E \left(\widehat{\tau}_{\boldsymbol{t},E} \cdot \mathbf{grad}\, r - \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}_E\, \partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \lambda_E\, r \right) = 0. \tag{6.18}
$$

我们构造一个族 $(z_V)_{V\in\mathcal{V}_T} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{V}_T}$，使得对于所有 $E \in \mathrm{E}_T$，

$$
[\![(z_V)_{\boldsymbol{n},E} \cdot \overline{\boldsymbol{w}}]\!]_E = \int_E \tau_{\boldsymbol{t},E} \cdot \overline{\boldsymbol{w}} \qquad \forall \overline{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{P}^0(E;\mathbb{R}^2), \tag{6.19}
$$

$$
[\![(z_V \cdot \boldsymbol{t}_E) \partial_{\boldsymbol{t}_E} r]\!]_E = - \int_E \left(\operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}_E\, \partial_{\boldsymbol{t}_E} r + \lambda_E\, r \right) + [\![\lambda_V\, r]\!]_E \qquad \forall r \in \mathcal{P}^1(E) \tag{6.20}
$$

如下：我们首先在一个顶点上设定任意值 V_0，然后根据关系式（6.19）和（6.20）选择相邻顶点上的值。关系式（6.18）确保了这一构造的一致性。事实上，通向给定顶点的任意路径都会为该顶点给出相同的值，因为两条路径之差是一个闭合回路，而该闭合回路可以实现为若干个面之并集的边界 $F \in \mathcal{F}_T$（因为 T 的第一贝蒂数为零）。

我们按如下方式固定所求的顶点分量 $\boldsymbol{v}_T \in \boldsymbol{X}^k$ 偏差梯度_T：

$$
\boldsymbol{v}_V \coloneqq z_V \quad \text{and} \quad \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V} \coloneqq \boldsymbol{\tau}_V + \lambda_V \boldsymbol{I}_3 \quad \text{for all } V \in \mathcal{V}_T. \tag{6.21}
$$

采用这一选择，对于所有 $V \in \mathrm{V}_E$，均成立，

$$
\mathbf{dev}\, \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V} = \mathbf{dev}\, \boldsymbol{\tau}_V + \lambda_V\, \mathbf{dev}\, \boldsymbol{I}_3 = \mathbf{dev}\, \boldsymbol{\tau}_V = \boldsymbol{\tau}_V, \tag{6.22}
$$

其中，结论由观察到 $\boldsymbol{\tau}_V$ 是无迹的而得。

6.2.2 边分量

接下来，我们为 $\boldsymbol{v}_T$ 确定满足 (6.13) 的适当边分量。具体而言，对于任意 $E \in \mathrm{E}_T$，我们定义 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(E;\mathbb{R}^{2\times2})$、$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(E;\mathbb{R}^2)$ 和 $v_{\boldsymbol{t},E} \in \mathrm{P}^{k-1}(E)$，使得对于所有 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0^{k+1}(E;\mathbb{R}^{2\times2})$、所有 $\widetilde{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0^{k+1}(E;\mathbb{R}^2)$ 以及所有满足 $\pi^1_{\mathcal{P},E} r = 0$ 的 $r \in \mathrm{P}^{k+1}(E)$，均有.....

$$
\int_E \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} : \partial_{\boldsymbol{t}_E} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = - \int_E \boldsymbol{C}_{\tau,E} : \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} + [\![((\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E} + \lambda_V \boldsymbol{I}_2) : \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}]\!]_E, \tag{6.23a}
$$

$$\int_E v_{\boldsymbol{n},E}\cdot\partial_{\boldsymbol{t}_E}\widetilde{w}=-\int_E \tau_{\boldsymbol{t},E}\cdot\widetilde{w}+[\![(v_V)_{\boldsymbol{n},E}\cdot\widetilde{w}]\!]_E, \tag{6.23b}$$

$$\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\partial^2_{\boldsymbol{t}_E}r=[\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\partial_{\boldsymbol{t}_E}r]\!]_E+\int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}r+\int_E \lambda_E\,r-[\![\lambda_V\,r]\!]_E. \tag{6.23c}$$

让我们验证，对于任意边 $E\in\mathcal{E}_T$，$\underline{\boldsymbol{DG}^k_E\boldsymbol{v}_E=\boldsymbol{\tau}_E}$提醒读者，$\boldsymbol{DG}^k_E\boldsymbol{v}_E$的分量是从（3.6）中提取的。顶点分量相同这一事实由（6.22）表示，因此我们只需考虑边分量。

对所有 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}_0(E;\mathbb{R}^{2\times2})$，均有

$$\begin{aligned}&\int_E \mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}):\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\\ &\qquad\overset{(2.8),(6.21)}{=}-\int_E \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}:\partial_{\boldsymbol{t}_E}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}+[\![((\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E}+\lambda_V\boldsymbol{I}_2):\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}]\!]_E\overset{(6.23a)}{=}\int_E \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E}:\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

另一方面，对所有 $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^0(E;\ \mathbb{R}^{2\times2})$，（2.8）与（6.21）一起给出

$$\begin{aligned}&\int_E \mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}):\overline{\boldsymbol{\sigma}}\\ &\quad=[\![(\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E}:\overline{\boldsymbol{\sigma}}]\!]_E+[\![\lambda_V\boldsymbol{I}_2:\overline{\boldsymbol{\sigma}}]\!]_E\overset{(6.17)}{=}[\![(\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E}:\overline{\boldsymbol{\sigma}}]\!]_E+\int_E \lambda_E\boldsymbol{I}_2:\overline{\boldsymbol{\sigma}}\\ &\quad=\int_E\left[\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{\tau}_E)+\lambda_E\boldsymbol{I}_2\right]:\overline{\boldsymbol{\sigma}}\overset{(6.14)}{=}\int_E \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E}:\overline{\boldsymbol{\sigma}},\end{aligned} \tag{6.25}$$

其中，在第三个等式中，我们利用了（2.8 — $\partial_{\boldsymbol{t}_E}\sigma=0$ σ $[\![\tau_{V\ \boldsymbol{nn}\ E}\ \overline{\sigma}]\!]_E=.$）$\int_E \mathfrak{G}^{k+1}_E\ \tau_{V_1\ \boldsymbol{nn}\ E}\ \tau_{V_2\ \boldsymbol{nn}\ E}\ \tau_E\ \sigma$ 以及（由于 为常数）这一事实来写出（）,:((),,(),,):。将（.）和（.）相加，并注意到 $\overline{\sigma}+\sigma$ 张成 $\mathrm{P}^{k+1}(E;\mathbb{R}^{2\times2})$，正如 $(\overline{\sigma},\sigma)$ 张成 $\mathrm{P}^{k+1}_0(E;\mathbb{R}^{2\times2})\times\mathrm{P}^0(E;\mathbb{R}^{2\times2})$，我们得出 6.24 6.25

$$\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E},(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E})=\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E}. \tag{6.26}$$

接下来，对于所有 $\boldsymbol{w}\in\mathrm{P}^{k+1}(E;\mathbb{R}^2)$，记 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}-\widetilde{\boldsymbol{w}}$，其中 $\boldsymbol{w}=\pi^0_{\mathcal{P},E}\boldsymbol{w}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_E \mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E},(\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E})\cdot\boldsymbol{w}&\overset{(2.8)}{=}-\int_E \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\partial_{\boldsymbol{t}_E}\widetilde{\boldsymbol{w}}+[\![(\boldsymbol{v}_V)_{\boldsymbol{n},E}\cdot\widetilde{\boldsymbol{w}}]\!]_E+[\![(\boldsymbol{v}_V)_{\boldsymbol{n},E}\cdot\overline{\boldsymbol{w}}]\!]_E\\ &\overset{(6.23b),(6.19)}{=}\int_E \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{w},\end{aligned}$$

因此

$$\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E},(\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E})=\tau_{\boldsymbol{t},E}. \tag{6.27}$$

最后，为了证明边分量相等，我们还需证明

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}-\frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}+\mathfrak{G}^k_E(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E,\boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E,v_{\boldsymbol{t},E})\right)\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{\tau}_E. \tag{6.28}$$

为此，我们首先注意到，对于所有 $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k+1}_0(E;\mathbb{R}^{2\times2})$，为简洁起见，令

$\check{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{迹}\ \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}_2$,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T} &:= \int_E \left[\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} + \mathfrak{G}_E^k(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E})\right)\boldsymbol{I}_2\right] : \partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{\sigma} \\
&= \int_E \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E} : \partial_{\boldsymbol{t}_E}\check{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}\int_E \mathfrak{G}_E^k(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E})\ \operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{\sigma}) \\
&\overset{(6.23a),\,(2.8)}{=} -\int_E \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E} : \check{\boldsymbol{\sigma}} + [\![\,((\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E} + \lambda_V\boldsymbol{I}_2) : \check{\boldsymbol{\sigma}}\,]\!]_E + \frac{1}{3}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\ \operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2\boldsymbol{\sigma}) \\
&\quad - \frac{1}{3}[\![\,(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{\sigma})\,]\!]_E \\
&= -\int_E \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E} : \check{\boldsymbol{\sigma}} + [\![\,(\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E} : \check{\boldsymbol{\sigma}}\,]\!]_E + \frac{1}{3}[\![\,\lambda_V\ \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,]\!]_E + \frac{1}{3}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\ \operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2\boldsymbol{\sigma}) \\
&\quad - \frac{1}{3}[\![\,(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{\sigma})\,]\!]_E \\
&\overset{(6.14),\,(2.8)}{=} \int_E \boldsymbol{\tau}_E : \partial_{\boldsymbol{t}_E}\check{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}\int_E \lambda_E\ \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{3}[\![\,\lambda_V\ \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,]\!]_E + \frac{1}{3}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\ \operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}^2\boldsymbol{\sigma}) \\
&\quad - \frac{1}{3}[\![\,(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\operatorname{tr}(\partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{\sigma})\,]\!]_E,
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

其中，我们在第四个等式中还用到了 $\boldsymbol{I}_2 : \check{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3}$迹$\boldsymbol{\sigma}$ 这一事实。取 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{v}$ 满足$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_0^{k+1}(E;\mathbb{R}^{2\times 2})$ 且满足 迹 $\boldsymbol{v} = 0$，式（ 6.29 ）给出

$$
\mathfrak{T} = \int_E \boldsymbol{\tau}_E : \partial_{\boldsymbol{t}_E}\boldsymbol{v}. \tag{6.30}
$$

对于 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 $\boldsymbol{\sigma} = r\boldsymbol{I}_2$ 某个 $r \in \mathcal{P}_0^{k+1}(E)$的情形，式（6.29）给出

$$
\mathfrak{T} = \frac{1}{3}\int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\ \partial_{\boldsymbol{t}_E} r + \frac{2}{3}\left(\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\ \partial_{\boldsymbol{t}_E}^2 r - [\![\,(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\partial_{\boldsymbol{t}_E} r\,]\!]_E - \int_E \lambda_E\, r + [\![\,\lambda_V\, r\,]\!]_E\right). \tag{6.31}
$$

特别地，若取 $r = \widetilde{r}$ 满足$\pi^1_{\mathcal{P}\text{的}E}\widetilde{r} = 0$，，将定义（6.23c）$v_{\boldsymbol{t}\text{代入}E}$ 式（6.31）可得

$$
\mathfrak{T} = \int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E \partial_{\boldsymbol{t}_E}\widetilde{r}. \tag{6.32}
$$

另一方面，取 $q = r \in \mathcal{P}_0^1(E)$,¯ 由式（6.21）、（6.20）和（6.31）可推得

$$
\mathfrak{T} = \frac{1}{3}\int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\ \partial_{\boldsymbol{t}_E}\overline{r} + \frac{2}{3}\int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\ \partial_{\boldsymbol{t}_E}\overline{r} = \int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\ \partial_{\boldsymbol{t}_E}\overline{r} \tag{6.33}
$$

注意到，当 $\boldsymbol{v}$ 张成 $\mathrm{P}_0^{k+1}(E;\ \mathbb{R}^{2\times 2})$ 的零迹子空间时，$\partial_{\boldsymbol{t}_E}\,[\boldsymbol{v} + (\widetilde{r} + r)\,\boldsymbol{I}_2]$ 张成 $\mathrm{P}^k(E;\ \mathbb{R}^{2\times 2})$；$\widetilde{r}$张成 $\mathrm{P}^{k+1}(E)$ 中在 $\mathrm{P}^1(E)$ 上的 L^2-正交投影为零的函数子空间，而 r张成 $\mathrm{P}_0^1(E)$，因此由式 (6.3$\overline{0}$)、(6.32) 和 (6.33) 可得 (6.28) 成立。将这一关系与式 (6.22)、(6.26) 和 (6.27) 结合可得

$$
\underline{\boldsymbol{DG}}_E^k\underline{\boldsymbol{v}}_E = \underline{\boldsymbol{\tau}}_E \qquad \forall E \in \mathcal{E}_T.
$$

6.2.3 面分量

令 $F \in \mathrm{F}_T$。由于 $\operatorname{div}_F\colon \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{c},k+1}(F) \to \mathrm{P}^k(F)$ 是一个同构，因此存在唯一的 $v_{\boldsymbol{n},F} \in \mathrm{P}^{\,k}(F)$，使得对于所有 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{c},k+1}(F)$,

$$
\int_F v_{\boldsymbol{n},F}\operatorname{div}_F\boldsymbol{w} = -\int_F \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}\cdot\boldsymbol{w} + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}), \tag{6.34}
$$

其中 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}$ 由 (6.23b) 定义。将这个 $v_{\boldsymbol{n},F}$ 代入 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}$ 的定义 (3.3)，并取 $\mathcal{R}^{\mathrm{c},k+1}(F)$ 中的测试函数 $\boldsymbol{w}$，我们得到 $\subset\mathcal{R}^{-,k+1}(F)$,

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{c},k+1}_{\mathcal{R},F}\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F = \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{c},k+1}_{\mathcal{R},F}\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}. \tag{6.35}$$

回顾 2.2 中 $\boldsymbol{C\mathcal{G}}^{k-1}(F)$的定义，并利用分解 $\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(F;\mathbb{R}^2) =$梯度$_F\mathcal{P}^{k+1}(F)\oplus\boldsymbol{x}^\perp\mathcal{P}^{k-1}(F)$(见 [5])，我们可以写为

$$\boldsymbol{C\mathcal{G}}^{k-1}(F) = \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\,\mathcal{P}^{k+1}(F)\oplus\mathbf{curl}_F\,\boldsymbol{x}^\perp\mathcal{P}^{k-1}(F). \tag{6.36}$$

由于 tr : 旋度$_F\,\boldsymbol{x}^\perp$P $^{k-1}(F)\ \to$P$^{k-1}(F)$ 是一个同构（注意，P $^{k-1}(F)$ =tr P$^{k-1}(F;\mathbb{R}^2)$ (2.2)= tr CG$^{k-1}(F)$ (6.36)=tr(curl$_F\,\boldsymbol{x}^\perp$P $^{k-1}(F)$)，因为 tr G$^{\mathrm{c},k-1}(F) = 0$，且 tr curl$_F$grad$_F$ =rot$_F$ grad$_F = 0$，并比较维数），我们可以唯一地定义 $G_{\boldsymbol{v},F}\in$P $^{k-1}(F)$，使其满足以下条件：对于所有 $\boldsymbol{\sigma}\in$curl$_F\,\boldsymbol{x}^\perp$P $^{k-1}(F)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_F G_{\boldsymbol{v},F}\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = &\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\boldsymbol{n}_{FE}^\top\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{FE}\\ &+\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E^\top\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{FE}-\int_F\boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F}:\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned} \tag{6.37}$$

同样，由于 $\mathbf{div}_F:\boldsymbol{C\mathcal{G}}^{\mathrm{c},k}(F)\ \to\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(F;\mathbb{R}^2)$是一个同构（参见下文引理 17），（3.4）给出唯一的

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(F;\mathbb{R}^2)\text{ such that }\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{c},k}_{C\mathcal{G},F}\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F = \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{c},k}_{C\mathcal{G},F}\boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F}. \tag{6.38}$$

接下来，我们验证上述定义的面分量（以及由（6.21）定义的顶点分量和由（6.23）定义的边分量）给出了（6.13）中的面分量等式。在定义（3.13）$SC^{k+1}_{\boldsymbol{nn},F}$时施加 $SC^{k+1}_{\boldsymbol{nn},F}\boldsymbol{\tau}_F = 0$（参见（6.11））, 得到 –

$$\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}\cdot\mathbf{curl}_F\,r = \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)\,r\qquad\forall r\in\mathcal{P}^{k+1}(F). \tag{6.39}$$

令 $r\in$P$^{k+1}(F)$，将 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\boldsymbol{v}_F$ 关于 $\boldsymbol{w} =$旋度$_F\,r\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(F;\mathbb{R}^2)\ \subset\mathcal{R}^{-,k+1}(F)$ 的定义（3.3）写出，并利用 div$_F$旋度$_F\,r = 0$ 和 旋度$_F\,r\cdot\ \boldsymbol{n}_{FE} = -\partial_{\boldsymbol{t}_E}r$ 的事实，得到

$$\begin{aligned}&\int_F\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F\cdot\mathbf{curl}_F\,r\\ &\quad= -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)\,\partial_{\boldsymbol{t}_E}r\\ &\overset{(2.8)}{=}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{v}_{V_1})_{\boldsymbol{n},E},(\boldsymbol{v}_{V_2})_{\boldsymbol{n},E},\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E})\cdot\boldsymbol{n}_F\,r-\cancel{\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_F)\,r]\!]_E}\\ &\overset{(6.27)}{=}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)r\overset{(6.39)}{=}\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}\cdot\mathbf{curl}_F\,r,\end{aligned}$$

其中，我们在消去项时对 $\varphi_V =(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_F)r$应用了（5.1）。因此，我们有 $\boldsymbol{\pi}^k_{\mathcal{R},F}\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\boldsymbol{v}_F =\underline{\boldsymbol{\pi}}^k_{\mathcal{R},F}\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}$。结合（6.35），再回忆 $\mathcal{R}^-$ 的定义（2.4），并使用[21, 式（2.14）]，可得$^{k+1}$

$$\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F = \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}. \tag{6.40}$$

对于任意 $r \in \mathrm{P}^{k+1}(F)$，写出 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt}}$ 的定义（3.4），${}_F\underline{\boldsymbol{v}}_F$ 中取 $\boldsymbol{\sigma} = \text{旋度}_F\text{梯度}_F\, r$，并注意到 $\mathrm{div}_F\text{旋度}_F\text{梯度}_F\, r = 0$、$\mathrm{tr}\,\text{旋度}_F\text{梯度}_F\, r = \mathrm{rot}_F\text{梯度}_F\, r = 0$，且对所有 $E \in \mathrm{E}_F$，有 $\boldsymbol{t}_E^\top(\text{旋度}_F\text{梯度}_F\, r)\boldsymbol{n}_{FE} = -\partial^2_{\boldsymbol{t}_E} r$ 和 $\boldsymbol{n}_{FE}^\top(\text{旋度}_F\text{梯度}_F\, r)\boldsymbol{n}_{FE} = -\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}}\partial_{\boldsymbol{t}_E} r$，于是得到

$$\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F : \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\, r = -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}}\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\partial^2_{\boldsymbol{t}_E} r =: \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2. \quad (6.41)$$

写出 $\mathfrak{T}_1 = \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\mathfrak{T}_1(E)$ 并利用 2.8) 中 $\mathfrak{G}^{k+1}_E$ 的定义，对于所有 $E \in \mathcal{E}_F$，有

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_1(E) &= \int_E \mathfrak{G}^{k+1}_E(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}, \boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{n}_{FE}, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r - [\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r]\!]_E \\ &\overset{(6.27)}{=} \int_E (\tau_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r - [\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r]\!]_E.\end{aligned} \quad (6.42)$$

为处理第二项，我们先注意到，对于所有 $r \in \mathrm{P}^{k+1}(F)$，

$$\begin{aligned}&\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E}\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r \\ &\overset{(2.8)}{=} -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},E})\, r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V})_{\boldsymbol{nn},E}\, r]\!]_E \\ &\overset{(6.26)}{=} -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\tau},E}\, r + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},V})_{\boldsymbol{nn},E}\, r]\!]_E \\ &\overset{(6.14),(6.21)}{=} -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\mathfrak{G}^{k+1}_E((\boldsymbol{\tau}_{V_1})_{\boldsymbol{nn},E}, (\boldsymbol{\tau}_{V_2})_{\boldsymbol{nn},E}, \boldsymbol{\tau}_E)\, r - 2\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \lambda_E\, r \\ &\quad + \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\tau}_V)_{\boldsymbol{nn},E}\, r]\!]_E + \cancel{2\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![\lambda_V\, r]\!]_E} \\ &\overset{(2.8)}{=} \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - 2\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \lambda_E\, r,\end{aligned}$$

其中，消去是由 5.1) 与 $\varphi_V = \lambda_V\, r$ 得出的。将此关系与 6.28) 结合，得到

$$\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathfrak{G}^k_E(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r = -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \lambda_E\, r.$$

因此，利用 2.8 中 $\mathfrak{G}^k_E$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_2 &= \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathfrak{G}^k_E(\boldsymbol{v}_{V_1}\cdot\boldsymbol{t}_E, \boldsymbol{v}_{V_2}\cdot\boldsymbol{t}_E, v_{\boldsymbol{t},E})\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\partial_{\boldsymbol{t}_E} r]\!]_E \\ &= -\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \lambda_E\, r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}[\![(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\partial_{\boldsymbol{t}_E} r]\!]_E.\end{aligned} \quad (6.43)$$

将 (6.42) 和 (6.43) 代入 (6.41) 得到

$$\begin{aligned}
&\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F : \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\, r \\
&\quad= \sum_{E\in\mathcal{E}_F} \omega_{FE}\int_E (\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{t},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}_E\,\partial_{\boldsymbol{t}_E} r - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E \lambda_E\, r \\
&\qquad - \sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\left(\llbracket(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\partial_{\boldsymbol{n}_{FE}} r\rrbracket_E + \llbracket(\boldsymbol{v}_V\cdot\boldsymbol{t}_E)\partial_{\boldsymbol{t}_E} r\rrbracket_E\right) \\
&\quad= \int_F \boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F} : \mathbf{curl}_F\,\mathbf{grad}_F\, r - \cancel{\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\llbracket\boldsymbol{v}_V\cdot\mathbf{grad}_F\, r\rrbracket_E},
\end{aligned} \tag{6.44}$$

其中，在第二个等式中我们使用了（6.16），施加了（6.10）以消去涉及 $SC^{k+1}_{D,F}\boldsymbol{\tau}_F$ 的项，并调用（5.1）及 $\varphi_V = \boldsymbol{v}_V\cdot$梯度$_F\, r$ 以消去边上的求和。由 $G_{\boldsymbol{v}}$ 的定义（6.37），$_F$ 可直接得到，对所有 $\boldsymbol{\sigma}\in$旋度$_F\,\boldsymbol{x}^{\perp}\mathrm{P}_{k-1}(F)$,

$$\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F : \boldsymbol{\sigma} = \int_F \boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F} : \boldsymbol{\sigma}. \tag{6.45}$$

回顾 6.38 式中 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t},F}$ 并结合 6.44 式和 6.45 式，以及分解式 6.36，可推得 $\boldsymbol{\pi}^{k-1}_{C\mathcal{G},F}\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{\pi}^{k-1}_{C\mathcal{G},F}\boldsymbol{\tau}_F$，最后，回顾 2.5 式并利用 [21, 公式 (2.14)],

$$\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F = \boldsymbol{\tau}_{C\mathcal{G},F}. \tag{6.46}$$

6.2.4 单元分量

最后，对于单元分量，我们利用以下事实：$\mathbf{div}: \boldsymbol{\mathcal{SR}}^{c,k}_T \to \boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(T;\mathbb{R}^3)$是一个同构，从（3.5）中求得

$$\boldsymbol{v}_T\in\boldsymbol{\mathcal{P}}^{k-1}(T;\mathbb{R}^3) \text{ such that } \boldsymbol{\pi}^{c,k}_{\mathcal{SR},T}\boldsymbol{DG}^k_T\underline{\boldsymbol{v}}_T = \boldsymbol{\pi}^{c,k}_{\mathcal{SR},T}\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T}. \tag{6.47}$$

回顾 [21, 式（2.14）],，为了证明 $\boldsymbol{\pi}^{-}_{k,\mathcal{SR},T}\boldsymbol{DG}^k_T\boldsymbol{v}_T = \underline{\boldsymbol{\tau}}_{\mathcal{SR},T}$，只需检查

$$\boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{SR},T}\boldsymbol{DG}^k_T\underline{\boldsymbol{v}}_T = \boldsymbol{\pi}^{k-1}_{\mathcal{SR},T}\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T}. \tag{6.48}$$

为证明（6.48），我们先写出 $\boldsymbol{DG}^k_T$关于 $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}^{c,l}(T)$ 的定义（3.5），并利用$\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\sigma} = 0$这一事实，以及对于所有 $F\in\mathrm{F}_T$，有（$\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\sigma}$）$\boldsymbol{n}_F = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)$，从而推得

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &:= \int_T \boldsymbol{DG}^k_T\underline{\boldsymbol{v}}_T : \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\sigma} \\
&= \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F v_{\boldsymbol{n},F}\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\cdot\boldsymbol{n}_F + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{t},F}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F) =: \mathfrak{A}+\mathfrak{B}.
\end{aligned}$$

回顾（2.12），并注意到 $\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(F;\mathbb{R}^2) \subset \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,k+1}(F)$，我们可以调用$\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}$的定义（3.3），以及$\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}$的定义（3.4），继续如下：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T} = &\left.\begin{aligned}
&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}\\
&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_F)\,\boldsymbol{n}_F^\top(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE}
\end{aligned}\right\}\mathfrak{A}\\
&\left.\begin{aligned}
&-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F \boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\underline{\boldsymbol{v}}_F:(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}-\frac{1}{3}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F G_{\boldsymbol{v},F}\,\cancel{\boldsymbol{I}_2:(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}}\\
&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n},E}\cdot\boldsymbol{n}_{FE})\,\boldsymbol{n}_{FE}^\top(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE}\\
&+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\boldsymbol{t}_E^\top(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE},
\end{aligned}\right\}\mathfrak{B}
\end{aligned}
$$

其中，第三项中的消去成立是因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 是对称的，因此 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}=0$。我们继续利用关系式 (6.40) 和 (6.46)，分别将右端第一项和第三项中的 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{nt},F}\boldsymbol{v}_F$ 替换为 $\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}$，并将 $\boldsymbol{DG}^k_{\boldsymbol{tt},F}\boldsymbol{v}_F$ 替换为 $\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F}$，合并第二项和第五项，并在 $\mathbb{R}^3$ 中使用嵌入 (2.10)（此外还利用了 $(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE}=-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{t}_E$ 这一事实），同时注意到最后一项中 $\boldsymbol{t}_E^\top(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)\boldsymbol{n}_{FE}=-\sigma_{\boldsymbol{tt},E}$，从而得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T} = &-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R},F}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{nt},F}-\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\int_F\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{CG},F}:(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}_F)_{\boldsymbol{tt},F}\\
&-\cancel{\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n},E}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{t}_E-\sum_{E\in\mathcal{F}_T}\omega_{TF}\sum_{E\in\mathcal{E}_F}\omega_{FE}\int_E v_{\boldsymbol{t},E}\,\sigma_{\boldsymbol{tt},E}}\\
&\overset{(3.15)}{=}\int_T\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{SR},T}:\operatorname{\mathbf{curl}}\boldsymbol{\sigma}-\cancel{\int_T\boldsymbol{SC}^k_T\underline{\boldsymbol{\tau}}_T:\boldsymbol{\sigma}},
\end{aligned}
\tag{6.49}
$$

其中，边项的抵消由式（5.2）推出，而结论则是零对称旋度条件（6.12）的结果。由引理 2，式（6.49）蕴含式（6.48）。

6.3 证明 (3.25c)

最后，我们通过计算各空间的维数来得出结论。这些维数是明确已知的，可以用各维几何实体的数量表示。具体而言，对于所有 $k\geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
\dim\boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,1}(T) &= 4\\
\dim\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad},T} &= 12|\mathcal{V}_T|+(7k+6)|\mathcal{E}_T|+(2k^2+3k+1)|\mathcal{F}_T|+\frac{1}{2}(k^3+3k^2+2k),\\
\dim\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathbf{sym}\,\mathbf{curl},T} &= 8|\mathcal{V}_T|+(10k+16)|\mathcal{E}_T|+(3k^2+8k+3)|\mathcal{F}_T|+\frac{1}{6}(8k^3+33k^2+25k),\\
\dim\underline{\boldsymbol{X}}^k_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T} &= -3+(3k+6)|\mathcal{E}_T|+(k^2+5k+6)|\mathcal{F}_T|+(k^3+5k^2+5k),\\
\dim\boldsymbol{\mathcal{P}}^k(T) &= 1+\frac{1}{6}(k^3+6k^2+11k).
\end{aligned}
$$

此外，根据上文证明的正合性，我们有

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k &= \dim \underline{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad},T}^k - \dim \operatorname{Ker} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k \overset{(3.25a)}{=} \dim \underline{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{dev}\,\mathbf{grad},T}^k - \dim \boldsymbol{\mathcal{R}}^{-,1}(T) \\
&= -4 + 12|\mathcal{V}_T| + (7k+6)|\mathcal{E}_T| + (2k^2+3k+1)|\mathcal{F}_T| + \frac{1}{2}(k^3+3k^2+2k), \\
\dim \operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k &= \dim \underline{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{sym}\,\mathbf{curl},T}^k - \dim \operatorname{Ker} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k \overset{(3.25b)}{=} \dim \underline{\boldsymbol{X}}_{\mathbf{sym}\,\mathbf{curl},T}^k - \dim \operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{DG}}_T^k \\
&= 4 - 4|\mathcal{V}_T| + (3k+10)|\mathcal{E}_T| + (k^2+5k+2)|\mathcal{F}_T| + \frac{1}{6}(5k^3+24k^2+19k), \\
\dim \operatorname{Ker} DD_T^k &= \dim \underline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}^k - \dim \operatorname{Im} DD_T^k \overset{(3.25c)}{=} \dim \underline{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{div}\,\mathbf{div},T}^k - \dim \boldsymbol{\mathcal{P}}^k(T) \\
&= -4 + (3k+6)|\mathcal{E}_T| + (k^2+5k+6)|\mathcal{F}_T| + \frac{1}{6}(5k^3+24k^2+19k).
\end{aligned}$$

因此，

$$\dim \operatorname{Ker} DD_T^k - \dim \operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^k = 4\left(|\mathcal{V}_T| - |\mathcal{E}_T| + |\mathcal{F}_T| - 2\right).$$

<escape>具有平凡拓扑的单元的欧拉示性数给出恒等式 $|\mathcal{V}_T| - |\mathcal{E}_T| + |\mathbb{F}$ 的 E 集合$_T| = 2$。因此，核空间的维数 DD_T^k =像空间的维数 $\underline{\boldsymbol{SC}}_T^k$。利用局部复形性质（3.23），我们得出结论。</escape>

注记 16（情形 $k = 0$）。当 $k = 0$ 时，上述公式不成立。事实上，它们给出的单元上的维数（-3）为负。问题源于 $\dim \boldsymbol{\mathcal{H}}^{-1}(T)$ =$\dim \boldsymbol{\mathcal{H}}^{-2}(T)$。修正这些公式后，我们得到

$$\dim \operatorname{Ker} DD_T^0 - \dim \operatorname{Im} \underline{\boldsymbol{SC}}_T^0 = 4\left(|\mathcal{V}_T| - |\mathcal{E}_T| + |\mathcal{F}_T|\right) - 5 = 3,$$

表明正合性不适用于 $k = 0$。

A 关于局部多项式空间的结果

引理 17（多项式空间之间的面散度同构）。算子 $\mathbf{div}_F : \boldsymbol{CG}^{\mathrm{c},\ell}(F) \to \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(F;\mathbb{R}^2)$ 是一个同构。

证明。取 $\boldsymbol{x}_F = \mathbf{0}$，并写作 $\boldsymbol{x} = (x, y)^\top$。由 (2.2)，可得

$$\boldsymbol{CG}^{\mathrm{c},\ell}(F) = \left\{ \boldsymbol{A}(P_1,P_2) := \begin{pmatrix} x\,P_1 & y\,P_1 \\ x\,P_2 & y\,P_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y\,P_2 & -y\,P_1 \\ -x\,P_2 & x\,P_1 \end{pmatrix} : P_1, P_2 \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(F) \right\}.$$

一般 $\boldsymbol{A}(P_1, P_2)$ 的散度因此为

$$\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}(P_1,P_2) = \begin{pmatrix} (x\partial_x + 2y\partial_y + 3)P_1 - y\partial_x P_2 \\ (2x\partial_x + y\partial_y + 3)P_2 - x\partial_y P_1 \end{pmatrix}.$$

该表达式对单项式表现良好：给定两组非负整数 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2)，上述关于 $P_1(x, y) = x^{i_1}y^{j_1}$ 和 $P_2(x, y) = \lambda x^{i_2}y^{j_2}, \lambda \in \mathbb{R}$ 的表达式变为

$$\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}(x^{i_1}y^{j_1}, \lambda x^{i_2}y^{j_2}) = \begin{pmatrix} (i_1+2j_1+3)x^{i_1}y^{j_1} - \lambda i_2 x^{i_2-1}y^{j_2+1} \\ \lambda(2i_2+j_2+3)x^{i_2}y^{j_2} - j_1 x^{i_1+1}y^{j_1-1} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

为证明 div_F 的单射性，我们来说明 $\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}(P_1,P_2) \equiv 0$ 意味着 P_1 和 P_2恒等于零。由 (A.1) 可知，P_1 中的每个单项式 $x^i y^j$ 都必须由 P_2 中的某个单项式$x^{i+1}y^{j-1}$ 抵消，反之亦然。若 $j = 0$，则 (A.1) 的第一分量中不会出现来自 P_2 的项，因此必须有 $(i+3)x^i = 0$（这不可能，因为 $i \geq 0$）；否则，必定存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}(x^i y^j, \lambda x^{i+1}y^{j-1}) = \begin{pmatrix} [i+2j+3-(i+1)\lambda]\, x^i y^j \\ [\lambda(2i+j+4) - j]\, x^{i+1}y^{j-1} \end{pmatrix} \equiv 0.$$

这一条件要求 $\lambda = \frac{i+2j+3}{i+1} = \frac{j}{2i+j+4}$，即，

$$(i+2j+3)(2i+j+4) = (i+1)j \implies 2(i+j)^2 + 10(i+j) + 10 = 0,$$

这是不可能满足的，这表明，要使$\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}(P_1, P_2) \equiv 0$成立，唯一的可能是$P_1 = P_2 \equiv 0$，即$\mathbf{div}_F$在$\boldsymbol{CG}^{c,\ell}(F)$上是单射。

现在，我们证明其满射性，即证明每个向量值场都可以表示为$\boldsymbol{CG}^{\ell}(F)$中某个元素的散度。为此，只需考虑一个分量为单项式、另一个分量为零的情形。设(i, j)为一对满足$i + j \le l$的非负整数，则上述计算给出，对于$j > 0$和$\lambda = \frac{j}{2i+j+4}$，

$$\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}\left(x^i y^j, \frac{j}{2i+j+4} x^{i+1} y^{j-1}\right) = \frac{2(i+j)^2 + 10(i+j) + 12}{2i+j+4} \begin{pmatrix} x^i y^j \\ 0 \end{pmatrix}$$

由对称性可得，

$$\mathbf{div}_F\, \boldsymbol{A}\left(\frac{i}{i+2j+4} x^{i-1} y^{j+1}, x^i y^j\right) = \frac{2(i+j)^2 + 10(i+j) + 12}{i+2j+4} \begin{pmatrix} 0 \\ x^i y^j \end{pmatrix},$$

由此完成证明，因为$\{x^i y^j : \ i \ge 0、\ j \ge 0和 i + j \le l - 1\}$是$\mathrm{P}^{\ell-1}(F)$的一组基，其张量积则是$\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\ell-1}(F; \mathbb{R}^2)$的一组基。□

引理 1 的证明。引理 17 给出 $\mathrm{CG}^{\ell}(F) \cap \mathrm{CG}^{c,\ell}(F) = \{0\}$。我们只需验证 $\dim \mathrm{P}^{\ell}(F; \mathbb{R}^{2\times 2}) = 2l^2 + 6l + 4 = \dim \mathrm{CG}^{\ell}(F) + \dim \mathrm{CG}^{c,\ell}(F)$。我们可以利用同构 $\mathrm{curl}_F : \mathrm{P}_0^{\ell+1}(F) \to \mathrm{R}^{\ell}(F)$，如下计算 $\mathrm{CG}^{\ell}(F)$ 的维数：$\dim \mathrm{CG}^{\ell}(F) = 2\big(\dim \mathrm{P}^{\ell+1}(F) - 1\big) = l^2 + 5l + 4$。另一方面，根据引理 17，$\mathrm{CG}^{c,\ell}(F)$ 的维数为：$\dim \mathrm{CG}^{c,\ell}(F) = \dim \mathrm{P}^{\ell-1}(F; \mathbb{R}^2) = l^2 + l$。将上述表达式相加，即得结论。□

致谢

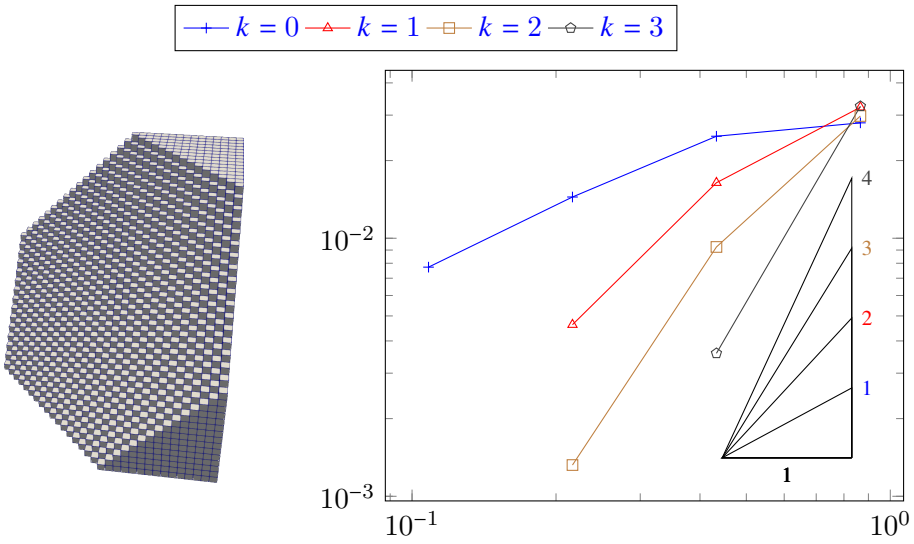
谨此感谢法国国家科研署 （ANR）和 I-Site MUSE 通过资助项目 ANR-16-IDEX-0006“RHAMNUS”提供的部分支持。Daniele Di Pietro 感谢 ANR 通过资助项目 ANR-20-MRS2-0004“NEMESIS”提供的部分支持。

参考文献

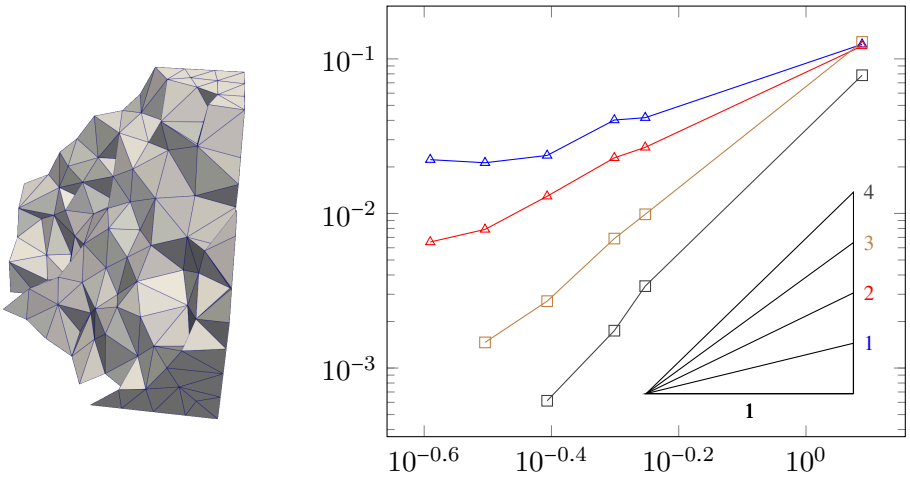
[1] S. Adams 和B. Cockburn。《三维弹性问题的混合有限元方法》。载于：《科学计算杂志》25.3（2005），第515–521页。doi：10.1007/s10915-004-4807-3。[2] P. F. Antonietti、A. Cangiani、J. Collis、Z. Dong、E. H. Georgoulis、S. Giani 和 P. Houston。《复杂区域上偏微分方程间断伽辽金有限元方法综述》。载于：搭建桥梁：现代偏微分方程数值方法中的联系与挑战。第114卷。《计算机科学与工程讲义》。施普林格，[Cham], 2016,第279–308页。[3] P. F. Antonietti、S. Giani 和 P. Houston。《复杂区域上椭圆问题的 h*p*-型复合间断伽辽金方法》。载于：《SIAM 科学计算杂志》35.3（2013），A1417–A1439。issn：1064-8275。doi：10.1137/120877246。[4] D. Arnold 和 R. Winther。《弹性问题的混合有限元》。载于：《数值数学》92.3（2002），第401–419页。doi：10.1007/s002110100348。[5] D. Arnold。《有限元外微积分》。工业与应用数学学会，2018。doi：10.1137/1.9781611975543。

[6] D. Arnold、G. Awanou 和 R. Winther。《三维对称张量有限元》。载于：Math. Comp. 77.263（2008），第1229–1251页。doi：10. 1090/ s0025- 5718- 08 - 02071-1。[7] D. N. Arnold 和 K. Hu。《由复形构造复形》。载于：Found. Comput. Math. 21.6（2021），第1739–1774页。issn：1615-3375。doi：10.1007/s10208-021-09498-9。网址：https://doi. org/10.1007/s10208-021-09498-9。[8] F. Bassi、L. Botti、A. Colombo、D. A. Di Pietro 和 P. Tesini。《基于聚合的物理空间间断伽辽金离散的灵活性》。载于：J. Comput. Phys. 231.1（2012），第45–65页。doi：10.1016/j.jcp.2011.08.018。[9] L. Beirão da Veiga、F. Brezzi、F. Dassi、L. D. Marini 和 A. Russo。《三维一般椭圆方程的塞伦迪皮蒂虚拟单元》。载于：Chin. Ann. Math. Ser. B 39.2（2018），第315–334页。doi：10.1007/s11401-018-1066-4。[10] L. Beirão da Veiga 和 L. Mascotto。《塞伦迪皮蒂节点虚拟单元的稳定性与插值性质》。载于：Appl. Math. Lett. 142（2023），论文编号108639，共9页。issn：0893-9659。doi：10.1016/j.aml.2023.108639。[11] D. Boffi、F. Brezzi 和 M. Fortin。《混合有限元方法及其应用》。第44卷。施普林格计算数学系列。海德堡：施普林格，2013，第xiv+685页。doi：10.1007/978-3-642-36519-5。[12] F. Bonaldi、D. A. Di Pietro、J. Droniou 和 K. Hu。《多面体方法的外微积分框架》。2023年3月。arXiv：2303.11093 [math.NA]。[13] M. Botti、D. A. Di Pietro 和 M. Salah。《多边形网格上的正合全离散 div-div 复形》。载于：Comptes Rendus Mécanique（2023）。已在线发表。doi：10.5802/crmeca.150。[14] A. Chen 和 N. Sukumar。《平面弹性问题的无稳定化塞伦迪皮蒂虚拟元方法》。载于：Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 404（2023），论文编号115784，共19页。issn：0045-7825。doi：10.1016/j.cma.2022.115784。[15] L. Chen 和 X. Huang。《任意维数下 div- 和 divdiv-协调对称张量的有限元》。载于：SIAM数值分析杂志60.4（2022），第1932–1961页。doi：10.1137/ 21m1433708。[16] L. Chen 和 X. Huang。《三维 divdiv-协调对称张量的有限元》。载于：Math. Comp.（2022）。已在线发表。doi：10.1090/mcom/3700。[17] L. Chen 和 X. Huang。《三维离散赫斯复形》。2020年。arXiv：2012.10914 [math.NA]。[18] D. A. Di Pietro 和 J. Droniou。《多项式空间上椭圆投影算子的$W^{s,p}$-逼近性质及其在 Leray–Lions 问题混合高阶离散误差分析中的应用》。载于：Math. Models Methods Appl. Sci. 27.5（2017），第879–908页。doi：10.1142/S0218202517500191。[19] D. A. Di Pietro 和 J. Droniou。《多边形网格上的全离散板复形及其在 Kirchhoff–Love 问题中的应用》。载于：Math. Comp. 92.339（2023），第51–77页。doi：10.1090/mcom/3765。[20] D. A. Di Pietro 和 J. Droniou。《全离散格式的第三 Strang 引理》。载于：Calcolo 55.40（2018）。doi：10.1007/s10092-018-0282-3。[21] D. A. Di Pietro 和 J. Droniou。《多面体网格上的任意阶离散德·拉姆复形：正合性、庞加莱不等式与一致性》。载于：Found. Comput. Math. 23（2023），第85–164页。doi：10.1007/s10208-021-09542-8。

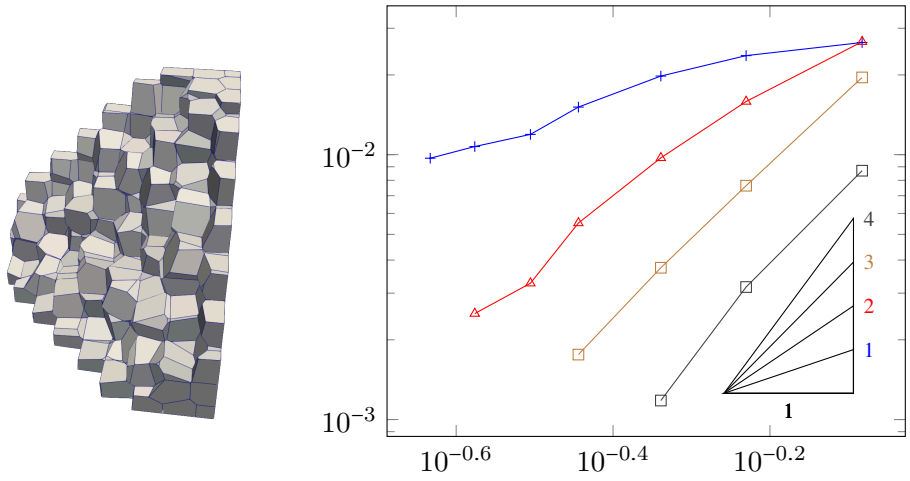
[22] D. A. Di Pietro 和 J. Droniou：《适用于多胞形复形的同调与解析保持的超稀疏框架及其在 DDR 方法中的应用》。发表于：ESAIM：数学建模与数值分析 57.1（2023），第 191–225 页。doi：10.1051/m2an/2022067。[23] D. A. Di Pietro 和 J. Droniou。《多胞形网格的混合高阶方法：设计、分析与应用》。建模、仿真与应用丛书第 19 卷。施普林格国际出版公司，2020。doi：10.1007/978-3-030-37203-3。[24] D. A. Di Pietro、J. Droniou 和 S. Pitassi：《一般拓扑域上离散德·拉姆复形的上同调》。发表于：Calcolo（2023）。在线发表。doi：007/s10092-023- 00523-7。[25] D. A. Di Pietro、J. Droniou 和 F. Rapetti：《多边形与多面体上任意次数的全离散多项式德·拉姆序列》。发表于：数学模型与应用科学方法 30.9（2020），第 1809–1855 页。doi：10.1142/S0218202520500372。[26] J. Hu、Y. Liang 和 R. Ma：《协调有限元 divdiv 复形及其在线性化爱因斯坦 – 比安基系统中的应用》。发表于：SIAM数值分析杂志 60.3（2022），第 1307–1330 页。doi：10.1137/21M1404235。[27] D. Pauly 和 W. Zulehner：《divDiv复形及其在双调和方程中的应用》。发表于：应用分析 99.9（2020），第 1579–1630 页。doi：10.1080/00036811.2018.1542685。



(a) 立方网格族



(b) Tetgen 四面体网格族



(c) Voronoi 网格族

图 1：示例网格（左）和误差 $\|(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{I}^k_{\text{散度}}\boldsymbol{\sigma}, u_h - \pi^k_{\mathcal{P}, h}u)\|_{\mathcal{Z}, h\mathrm{V}}$。网格尺寸 h（右）。