arXiv:2305.05730v1 [math.CA] 9 May 2023

带 H-质量的部分Plateau问题

Enrique Alvarado*[1] 和Qinglan Xia†[2]

[1,2]Depar 数学系，加利福尼亚大学戴维斯分校，美国加利福尼亚州戴维斯市，邮编 9561 6

2023年5月11日

摘要

经典的 Plateau 问题要求寻找一张具有给定边界 B 的最小面积曲面。在本文中，我们研究 Plateau 问题的一种变体，其中只要求可容许曲面的边界部分跨越 B。我们的边界数据由一个平坦的 $(m-1)$-链 B 和一个光滑紧支撑微分 $(m-1)$-形式 Φ 给出。我们希望在所有满足 ∂T 是给定边界 B 的子流的 m 维可求长流 T（位于 $\mathbb{R}^n$ 中）上，将 $\mathbf{M}(T) - \int_{\partial T}\Phi$ 最小化。利用 Federer 和 Fleming 紧致性定理，我们证明了可求长极小者的存在性。我们通过将质量 $\mathbf{M}$ 替换为可求长流的 H-质量，对该问题进行推广。通过在更大的对象类（称为带边界扫描）上进行最小化，并将它们的 H-质量定义为可求长流的 H-质量的一种下半连续包络，我们利用 Hardt-De Pauw BV 紧性定理证明了该问题的一个存在性结果。

1 引言

Plateau 问题简史。粗略地说，Plateau 问题要求寻找一个曲面使其面积最小，并具有给定的边界。对这个问题的各种回答取决于对曲面、其面积和边界的精确定义。尽管经典上研究的是 $\mathbb{R}^3$ 中利用曲面映射 [14], 来处理的曲面问题，如今几何测度论已为这些斜体术语提供了精确的表述和定义 [7, 17, 13, 2, 16]。受 De Rham 的流概念启发，Federer 和 Fleming 在开创性工作 [8],中，利用一类称为积分流的广义定向子流形，解决了 Plateau 问题的一个版本；这类子流形具有自然的边界和曲面面积概念。关于 Plateau 问题和几何测度论的历史概述，请参阅 [11]。

关于 H-质量与扫描。流质量 $\mathbf{M}(T)$ 用于测量流 T 的面积；对于可求长流 $T = \mathcal{H}^m \llcorner M \wedge \theta\xi$，其质量为 $\int_M \theta\, d\mathcal{H}^m$ 其中 $\theta\colon M \to \mathbb{N}$ 是其重数函数（参见 §2）。对于 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，质量极小流T 是某些肥皂膜的良好模型，但并非所有肥皂膜都是如此。例如，在 [10], 中，Fleming 证明， $\mathbb{R}^3$ 中的二维质量极小流在边界之外是光滑嵌入曲面，而一般的肥皂膜则具有内部奇异性。为了更好地建立肥皂膜模型，Almgren [1] 引入了可求长流的 大小 概念，并研究了大小极小流。然而，一般而言，大小极小流的存在性难以证明。部分原因是大小极小化序列的质量可能无界，F. Morgan 在 [12]中给出的例子便说明了这一点。缺乏质量有界性

*ealvarado@math.ucdavis.edu
†qlxia@math.ucdavis.edu

使人无法将 Federer 和 Fleming 的 紧致性定理 [8] 应用于大小极小化序列。

曲面面积的另一种重要度量是 α-质量,

$$\mathbf{M}_\alpha(T) = \int_M \theta^\alpha \, d\mathcal{H}^m \tag{1}$$

一个实可求 rectifiable 链流 $T = \mathcal{H}^m \llcorner M \wedge \theta\xi$ 的，其中参数为 $\alpha \in [0,1]$。 α-质量在实可求 rectifiable 链流的质量与大小之间起桥梁作用。当 $\alpha = 0$ 时，我们得到 T 的大小；当 $\alpha = 1$ 时，我们得到它的质量。在分枝（分岔）最优输运 [18, 3, 19] 的研究中，给定两个概率测度 μ_+ 和 μ_-，任何满足 $\partial T = \mu_+ - \mu_-$ 的实一维可求 rectifiable 流 T 都称为从 μ_+ 到 μ_- 的输运路径。 T 的 α-质量称为输运路径 T 的 α-成本。 α-质量的一个更一般版本是 H-质量。对于凹被积函数（定义 4.1） $H : [0,\infty) \to [0,\infty)$，实可求 rectifiable 链流 $T = \mathcal{H}^m \quad M \wedge \theta\xi$ 的 H-质量定义为 $\int_M H \circ \theta \, d\mathcal{H}^m$。

在文章 [5]，中，Hardt 和 De Pauw 研究了一个 Plateau 型问题：在所有具有固定边界的可求长流中，最小化 H-质量。虽然可求长流的 $\mathbf{M}_H$ 极小化序列未必具有有界质量，但他们证明，对于任意固定的 $\epsilon > 0$，近似问题 $\mathbf{M}_H + \epsilon\mathbf{M}$ 的极小化序列确实具有有界质量。随后，他们考虑了一个可求长流序列，其中每个流都是对应序列 $\epsilon_i \to 0$ 的近似问题的极小解。利用针对该序列的一般 BV 紧致性定理，他们得到了一个 $\mathbf{M}_H$ 极小化子序列；将其视为扫描时，该子序列收敛到一个可求 rectifiable 扫描。在 $\mathbb{R}^n$ 中， m 维扫描是一种可测函数 $\mathcal{T}$，它将 $(n-m)$ 平面空间映射到 $\mathbb{R}^n$ 中 0 维流的空间，该空间赋有 H- 平坦距离（定义 4.3 ）。例如，可以通过用 $n-m$ 平面对 $\mathbb{R}^n$ 中的 m 维可求长流进行切片，将其视为扫描（见 §4.1）。

部分Plateau问题。 在上述 Plateau 型问题中，曲面的边界是预先指定的。本文提出一种新的 Plateau 型问题，其中边界不必完全符合指定的边界，只需满足其中一部分即可。我们称之为部分*Plateau*问题。为说明这一问题的动机，我们来考虑以下情形。假设有一根定向金属丝，形状如图1(A)中的向日葵。对于这条边界，标准定向 Plateau 问题的解是所有花瓣的并集，如图1(B)所示。现在，假设有一片花瓣意外脱落

移除花之后，边界线变成图 1(C) 所示的形状。在这种情况下，相应的 Plateau 问题不再有解，因为生成的边界线不再是一条闭曲线。尽管如此，剩余的边界线仍会生成一片形如

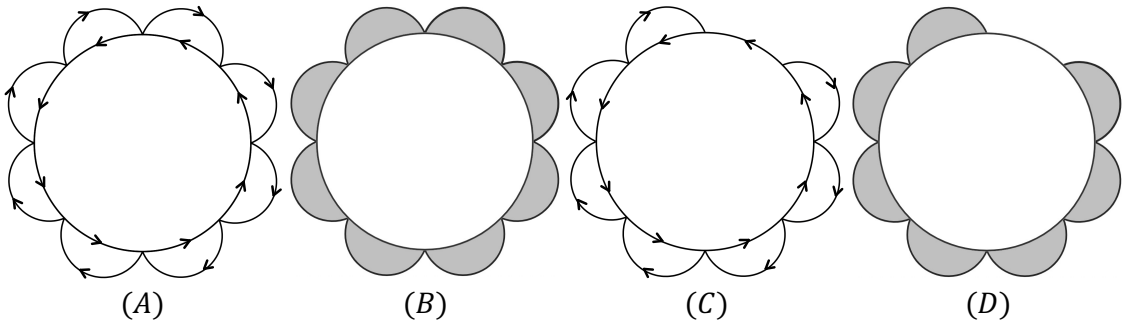


图1：图 (A) 所示闭曲线的标准Plateau问题的解，是图 (B)所示的曲面。当如图 (C)所示移除一段外部弧段后，图 (D) 所示的肥皂膜仍可能形成。虽然它不再是标准Plateau问题的解，却是第3节示例中所研究的部分Plateau问题的解。

其余踏板如图 1(D) 所示。这种情形（肥皂膜仅跨越给定金属丝的一部分）促使我们放宽边界条件。在例 3.6中，我们将详细研究这个例子，并说明图1(D) 所示的解由我们的部分Plateau问题的一个解给出。

这一问题的另一个动机来自对分枝最优输运的研究，见 [20]。更确切地说，设 μ 和 ν 是欧氏空间中某个凸紧子集上的两个 Radon 测度X $\mathbb{R}^n$，设$\mathbf{M}_\alpha$ 为 α-质量，如（1）中所定义，其中 $\alpha \in [0,1)$，并设h 是有符号测度 $\nu - \mu$的支撑集上的连续函数。那么， [20] 考虑以下资源分配问题：最小化

$$\mathbf{E}^h_\alpha(T) := \mathbf{M}_\alpha(T) - \int_X h\, d(\partial T) \tag{2}$$

在所有满足 $\partial T \preceq \nu - \mu$ 的一维实可求长流 T 中，其 Jordan 分解 $\partial T = \tilde{\nu} - \tilde{\mu}$ 满足 $\tilde{\mu} \leq \mu$ 和 $\tilde{\nu} \leq \nu$。在 [20], ，这一问题的动机来自以下例子：考虑一家在不同地区生产和销售产品的企业。测度 μ 和 ν 分别表示生产能力分布和市场大小分布。函数 h 在 ν 的支撑集上表示销售价格，在 μ 的支撑集上表示生产成本。企业旨在最大化利润（即$\mathbf{E}^h_\alpha(T)$ 的负值），其定义为销售收入 $\int_X h\, d\tilde{\nu}$ 减去运输$\mathbf{M}_\alpha(T)$ 和生产 $\int_X h\, d\tilde{\mu}$ 所涉及的成本。注意，边界 ∂T 无需等于 $\nu - \mu$，而只需是其一部分。Caffarelli 和 McCann [4]，以及 Figalli [9]，曾研究过类似的最优部分质量运输问题，研究情形为 Monge-Kantorovich 问题，并特别关注二次成本。

带有部分 Plateau 问题的 H质量。 上述 Plateau 型问题要么旨在最小化涉及

- 质量的泛函，要么更一般地，在具有固定 边界条件的 m 维可求 ***rectifiable*** 流上最小化 H质量，或者

- 在具有部分 边界条件的***1*** 维实可求 ***rectifiable*** 流上最小化 α质量 。在本文中，我们研究一个 Plateau 型问题：在具有部分边界条件的 m维可求 ***rectifiable*** 流上最小化涉及 H质量的泛函。准确地说，设 H 为一个凹被积函数， B 为一个具有有限 H质量的（$m-1$）维可求 rectifiable 流， Φ 为 $\mathbb{R}^n$中的一个光滑、紧支撑（$m-1$）微分形式。我们关注于最小化

$$\mathbf{E}_{H,\Phi}(T) := \mathbf{M}_H(T) - \int_{\partial T} \Phi$$

在所有满足 $\partial T \preceq B$的 m维可求 rectifiable 流 T 中进行最小化，其中 $\mathbb{R}^n$ 。根据定义， $\partial T \preceq B$ 意味着 ∂T是 B的一个子流 [15]，即$\mathbf{M}（B）= \mathbf{M}（B - \partial T）+ \mathbf{M}（\partial T）$。为便于直观理解，值得一提的是，只要 B 是一个具有有限质量的实可求 rectifiable 流， $\partial T \preceq B$ 就意味着 ∂T 支撑于 B的支撑内，与 B具有相同的定向，但其密度仅为 [15,的一部分，见引理 3.7]。

到目前为止，我们将普拉托型问题表述为在可求长流上进行的极小化问题。然而，为了得到主要的存在性结果（定理 4.18、定理 5.1以及推论 5.5），我们在一个更大的对象类上进行极小化，称为 m维带边界扫描 （见定义 4.7 和 4.10）。粗略来说，这些是 扫描（在 [5]中引入的），具有良定义的边界，并且可由可求长流（将其视为扫描时）的逐点极限得到。我们之所以在带边界扫描上进行极小化，是因为将其视为扫描时， m维可求长流类在几乎处处逐点收敛下并非闭合。

文章结构。在第2节中，我们回顾几何测度论文献中如今已成为标准的相关定义和记号。接着在第3节中，我们考察部分

带质量的*Plateau*问题：给定一个具有有限质量的 $m-1$ 维平坦链 B，其中 B 属于 $\mathbb{R}^n$；以及一个光滑、紧支撑的 $(m-1)$ 微分形式 Φ，其中 Φ 属于 $\mathbb{R}^n$，考虑

$$\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi, \preceq B, \mathbb{R}^n)} \begin{cases} \text{minimize } \mathbf{E}_\Phi(T) := \mathbf{M}(T) - \partial T(\Phi) \\ \text{among } T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial T \preceq B. \end{cases} \tag{3}$$

在定理3.5中，我们利用可求长流的标准紧性论证证明了该问题的存在性。这里，对于任意$\mathbf{E}_\Phi$极小化序列 $\{T_i\}$，我们对 $\{\mathbf{M}(T_i)+\mathbf{M}(\partial T_i)\}$都有一致的界。尽管当$H$-质量（在§5中研究）时，这是部分Plateau问题的一个特例，但我们不必像以下涉及一般 $H(\theta)=\theta$-质量的问题那样，在 m维扫描上取极小值。 $\mathbb{R}^n$ 其中涉及一般 H-质量。

在§4中，我们重新考察了带 H-质量的*Plateau* 问题，该问题最早由 De Pauw 和 Hardt 在其开创性著作 [5]中研究。将问题表述在可求 rectifiable 流上，可写为：给定一个可求 rectifiable 流 $T_0 \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{cases} \text{minimize } \mathbf{M}_H(T) \\ \text{among } T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial T = \partial T_0. \end{cases} \tag{4}$$

为了得到问题（4）的存在性结果 [5, 定理 3.5.2。]，De Pauw 和 Hardt 创新性地将可求 rectifiable 流的概念放宽为可求 rectifiable 扫描。在定理的证明中，他们构造了一个$\mathbf{M}_H$ 极小化可求 rectifiable 流序列，该序列逐点收敛（作为扫描）到一个可求 rectifiable 扫描 $\mathcal{T}^*$。根据Fateau引理，显然$\mathbf{M}_H(\mathcal{T}^*)$ 小于或等于问题（4）的下确界值。然而，由于 $\mathcal{T}^*$ 不一定是可求 rectifiable 流，因此不能据此得出$\mathbf{M}_H(\mathcal{T}^*)$ 如4中所述，能够达到问题（ [5, 定理 3.5.2。]的下确界值。

为克服这一问题，在 §4.2中，我们通过用修正后的 [5, 定理 3.5.2。] -质量重新表述问题（4），并用 H-质量的一个修正版（记作 $\mathbf{M}_H$）进行极小化，从而修正子其存在性结果$\mathbf{M}_H$ 在 $\mathcal{S}can_m(\mathbb{R}^n)$ 上取极小值；其中该类包含 m带边界的 维扫描（定义 4.7 和4.10）。特别地，我们给出如下带-质量的 *Plateau* 问题 H的重新表述：给定一个带边界的扫描 $\mathcal{T}_0 \in Scan_m(\mathbb{R}^n)$，

$$\mathcal{P}_{(\underline{\mathbf{M}}_H, \partial\mathcal{T}_0, \mathbb{R}^n)} \begin{cases} \text{minimize } \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}) \\ \text{among } \mathcal{T} \in Scan_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{T}_0. \end{cases} \tag{5}$$

值得一提的是，关于 $Scan_m(\mathbb{R}^n)$ 有以下两点。带边界的 m维扫描类比 m维可求 rectifiable 流类更大，而且 $Scan_m(\mathbb{R}^n)$ 中的任意元素都有良定义的边界，而一般情况下，m维扫描并不具备这一性质；我们在 [5]中研究的正是这类一般扫描。在这些修改下，我们能够在定理4.18 中证明存在一个$\mathbf{M}_H$ 极小化的 m维扫描，其边界为固定边界。

给定 B、 Φ和 H 上述内容，并附加约束 B 是可求长流且具有有限H-质量，在第5 节中，我们研究具有 H-质量的可求长流上的部分Plateau问题：

$$\begin{cases} \text{minimize } \mathbf{E}_{\Phi,H}(T) := \mathbf{M}_H(T) - \partial T(\Phi) \\ \text{among } T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial T \preceq B. \end{cases} \tag{6}$$

遗憾的是，与具有4的Plateau 问题（ H-质量）一样，该问题并不总能在可求长流中找到解。为解决这一问题，我们使用在类$\mathbf{M}_H$ 上的 H-质量的修改版本 $Scan_m(\mathbb{R}^n)$重新表述该问题，并研究我们所关注的主要问题，称为具有 H-质量的部分*Plateau*问题：

$$\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_{\Phi,H}, \preceq B, \mathbb{R}^n)} \begin{cases} \text{minimize } \mathbf{E}_{\Phi,H}(\mathcal{T}) := \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}) - \partial\mathcal{T}(\Phi) \\ \text{among } \mathcal{T} \in Scan_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial\mathcal{T} \preceq \mathcal{S}(B). \end{cases} \tag{7}$$

我们的主要存在性结果——定理5.1——是在稍微一般化的设定下证明的，而问题（ $\mathcal{T}^*$ 7）的极小化子的存在性则由推论5.5给出。此外，

推论 5.5还表明

$$\mathbf{E}_{\Phi,H}(\mathcal{T}^*) = \inf\{\mathbf{E}_{\Phi,H}(T) : T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n), \partial T \preceq B\}.$$

换言之，尽管我们不能指望在可求长流中找到问题（$\mathbf{E}_{H,\Phi}$ 6）的极小化子，但其下确界值可由相应的$\mathbf{E}_{H,\Phi}$ 在问题（7）中的极小化子取得；该问题在相同的部分边界条件下，对带边界扫描进行最小化。

2 记号与预备定义

表 1：符号说明

$\mathbb{N}$	:=	{1, 2, 3, . .. }，所有自然数的集合	
H		凹被积函数	(定义 4.1)
$\mathbf{O}^*(n, k)$		$\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^k$上的所有正交投影构成的空间	
$\boldsymbol{\theta}^*_{n,k}$		n不变测度（作用于$\mathbf{O}^*(n,k)$）	
$\mathcal{L}^k$		$\mathbb{R}^k$上的勒贝格测度	
$\mathcal{H}^k$		k 维豪斯多夫测度	
		流	
$\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$		m 维流在 $\mathbb{R}^n$ 中	
$\mathscr{E}_m(\mathbb{R}^n)$		m 维流于 $\mathbb{R}^n$ 中具有紧支集	
$\mathbf{M}(T)$		$T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 的质量	(8)
$\mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$		m 维可求长流在 $\mathbb{R}^n$ 中	
$\mathbf{F}_K(T)$		$T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$的平坦范数	(11)
$\mathbf{I}_m(\mathbb{R}^n)$		m 维积分流在 $\mathbb{R}^n$ 中	(12)
$\mathscr{F}_m(\mathbb{R}^n)$		$\mathbb{R}^n$ 中的 m 维积分平坦链	(12)
$\mathbf{N}_m(\mathbb{R}^n)$		$\mathbb{R}^n$ 中的 m 维正规流	(13)
$\mathbf{F}_m(\mathbb{R}^n)$		$\mathbb{R}^n$ 中的 m 维平坦链	(13)
$\mathbf{M}_H(T)$		H-质量： $T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$	(定义 4.2)
$\mathscr{F}^H_K(T)$		H-平坦距离： $T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$	(Def. 4.3)
$A \preceq B$		A 是 B 的子流，对任意 A， $B \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$	(15)
		扫描	
$\mathcal{S}(T)$		与平坦链 T 相关联的可测映射 $(p, y) \mapsto \langle T, p, y\rangle$	(22)
$\mathbf{M}_H(f)$		H-质量：可测映射 f: $\mathbf{O}^*(n, m) \times \mathbb{R}^m \to \mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$	(24)
$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$		由 $\mathbb{R}^n$ 中的可求长流得到的扫描	(27)
$\mathit{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$		$\mathbb{R}^n$ 中带边界的 m 维 Scan	(定义 4.7和 4.10)
$\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T})$		$\mathbf{M}_H$ 在几乎处处逐点收敛下的下半连续包络—收敛性 $\{\mathcal{S}(R)$： $R \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ $\partial\mathcal{T} = \partial R\}$	(定义 4.13)

本文中的大多数符号和定义均与 Federer 的几何测度论著作 [7]以及 De Pauw 和 Hardt 的文章 [5]保持一致。为方便读者，下面简要回顾本文中将会用到的几何测度论标准概念和结果。

设 $0 \le m \le n$。我们用 $\mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$ 表示具有紧支撑的光滑微分 m-形式所构成的实向量空间。类 $\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$ 上所有连续实值线性函数构成的向量空间。$\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为 $\mathbb{R}^n$ 中的 m维流，而子空间 $\mathscr{E}_m(\mathbb{R}^n)$ 包含 $\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 中所有具有紧支撑的 m 维流。流 $T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 的质量定义为

$$\mathbf{M}(T) := \sup\{T(\phi) : \phi \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n), \text{ with } \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_m, \phi(x)\rangle \le 1, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ and } e_i \in \mathbb{S}^{n-1}\}. \quad (8)$$

对于 $m \ge 1$，流 $T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 的边界 是由 $\partial T(\phi) := T(d\phi)$ 对任意 $\phi \in \mathscr{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 定义的流 $\partial T \in \mathscr{D}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$；当$T \in \mathscr{D}_0(\mathbb{R}^n)$时，$\partial T$定义为零流。对于 m维流的序列 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 和一个流$T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$，若 $T_i(\phi) \to T(\phi)$ 对所有$\phi \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$均成立，我们就称 T_i 收敛（弱收敛）到 T，记作 $T_i \rightharpoonup T$。

Federer 和 Fleming 的可求长流在本文中发挥着重要作用。令$\mathcal{H}^m$ 表示 $\mathbb{R}^n$上的 m维豪斯多夫测度，若 $\mathbb{R}^n$ 的子集 M 满足 $\mathcal{H}^m(M) < \infty$ 且 $\mathcal{H}^m(M \setminus \cup_{i=1}^{\infty} N_i) = 0$，其中 $\{N_i\}_{i\in I}$是 $\mathbb{R}^n$ 中的某个有限或可数的 m维 C^1子流形族，则称该子集为（$\mathcal{H}^m$，m）-可求 ***rectifiable*** 。以下是 m维可求长流类 $\mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$的一个重要刻画。

设 $0 \le m \le n$。一个 m维可求 ***rectifiable*** 流 $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 由以下三部分组成：

1. 一个 $\mathcal{H}^m$-可测且有界的 $(\mathcal{H}^m, m)$-可求 rectifiable 子集 $M \subset \mathbb{R}^n$，2. 一个 $\mathcal{H}^m$-可测的 m 向量场 ξ：$M \to \wedge_m \mathbb{R}^n$，使得对于 $\mathcal{H}^m$-几乎处处的 $x \in M$，$\xi(x) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$ 对于近似切空间 $\mathrm{Tan}(M, x)$ 的某个标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^m$，3. 以及一个 $(\mathcal{H}^m \llcorner M)$-可求和函数 $\theta : M \to \mathbb{N}$，称为重数函数。

我们将此类可求 rectifiable 流 $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 记作 $\mathcal{H}^m \llcorner M \wedge \theta\xi$,∟如 [7]所示。其他常见记法还有 $\tau(M, \theta, \xi)$，如 [17],所示；或记作 $[\![M, \xi, \theta]\!]$。它作用于 $\phi \in \mathscr{D}^m(U)$的形式为

$$(\mathcal{H}^m \llcorner M \wedge \theta\xi)(\phi) = \int_M \langle \phi, \xi\rangle \theta \, d\mathcal{H}^m,$$

其质量具有简单的形式

$$\mathbf{M}(\mathcal{H}^m \llcorner M \wedge \theta\xi) = \int_M \theta \, d\mathcal{H}^m. \quad (9)$$

注 2.1. 请注意，我们所考虑的 m 维可求长流都具有有限质量和紧支集。

现在我们简要概述一些特殊的流的类别。每当 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个紧 ***Lipschitz*** 邻域收缩 (CLNR) [7, 4.1.29.]，（例如，$\mathbb{R}^n$ 的紧凸子集）时，我们有恒等式

$$\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \cap \{T : \mathrm{spt}(T) \subseteq K\}. \quad (10)$$

当子集 K 只是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集时，$\mathscr{R}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n)$ 有一个更技术性的定义。不过，由于我们主要处理 $\mathbb{R}^n$ 的 CLNR，因此这里不再给出其定义，而是请读者参阅 [7, 4.1.24.]。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集。我们定义以下流的类别

- $\mathbf{I}_{0,\,K}(\mathbb{R}^n) := \mathscr{R}_{0,\,K}(\mathbb{R}^n)$，以及 $\mathbf{I}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n) := \{T : T \in \mathscr{R}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n)\ \partial T \in \mathscr{R}_{m-1,\,K}(\mathbb{R}^n)\}$ 对于$m > 0$;
- $\mathscr{F}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n) := \{R + \partial S : R \in \mathscr{R}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n)\ S \in \mathscr{R}_{m+1,\,K}(\mathbb{R}^n)\}$;
- $\mathbf{N}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n) := \{T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n) : \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T) < \infty$满足 $\mathrm{spt}(T) \subseteq K\}$;
- $\mathbf{F}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n) := \mathbf{F}_K$ 范数下，$\mathbf{N}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 中的闭包，其中 $\mathbf{F}_K : \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ 表示平坦范数，定义为

$$\mathbf{F}_K(T) := \inf\{\mathbf{M}(T - \partial S) + \mathbf{M}(S) : S \in \mathscr{D}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \text{ with } \mathrm{spt}(S) \subseteq K\}, \forall T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n). \quad (11)$$

注 2.2. 任意0 维积分流 $T \in \mathbf{I}_{0,\ K}(\mathbb{R}^n)$ 均有如下表示

$$T = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{\delta}_{x_i}$$

其中 $a_1, \ldots, a_k$ 为正整数，而 $x_1, \ldots, x_k \in K$。

阿贝尔群的元素

$$\mathbf{I}_m(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compact}} \mathbf{I}_{m,K}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathscr{F}_m(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compact}} \mathscr{F}_{m,K}(\mathbb{R}^n), \tag{12}$$

$$\mathbf{N}_m(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compact}} \mathbf{N}_{m,K}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathbf{F}_m(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compact}} \mathbf{F}_{m,K}(\mathbb{R}^n) \tag{13}$$

分别称为 m 维积分流、积分平坦链、正规流和平坦链，其定义于 $\mathbb{R}^n$ 中。可以证明，迄今所定义的流的类别之间存在以下集合论关系：

$$\mathbf{I}_m(\mathbb{R}^n) \quad \subseteq \quad \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \quad \subseteq \quad \mathscr{F}_m(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathbf{N}_m(\mathbb{R}^n) \quad \subseteq \quad \{T \in \mathbf{F}_m(\mathbb{R}^n) : \mathbf{M}(T) < \infty\} \quad \subseteq \quad \mathbf{F}_m(\mathbb{R}^n) \quad \subseteq \quad \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n).$$

注 2.3. 平坦范数在 $\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 上赋予一个度量，其定义为$(T, T') \mapsto \mathbf{F}_K(T - T')$。根据 *[7, 4.2.18.]*, ，可以在积分平坦链 $\mathscr{F}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 上定义度量

$$\mathscr{F}_K(T) := \min\{\mathbf{M}(R) + \mathbf{M}(S) : R \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \textit{and}\ \ S \in \mathscr{R}_{m+1,K}(\mathbb{R}^n)\ \textit{with}\ T = R + \partial S\}. \tag{14}$$

注 *2.4.* 对于任意流序列 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$ 和流 $T \in \mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$，若对某个 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K，有 $\lim_{i\to\infty} F_K(T_i - T) = 0$，则 $T_i \rightharpoonup T$。反之，若$\{T_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq I_m(\mathbb{R}^n)$ 是积分流序列，且 $\sup_i M(T_i) + M(\partial T_i) < \infty$，则$T_i \rightharpoonup T$意味着对所有 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 K，$\lim_{i\to\infty} F_K(T_i - T) = 0$。关于这一事实的证明，请参阅 *Leon Simon* 的《几何测度论》 *[17, 定理 31.2]* 。

3 部分Plateau问题的质量

与 [15], 中一样，对于任意两个 k 维有限质量流 A 和 B，若满足以下条件，我们称 A 是 B 的子流，记作 $A \preceq B$:

$$\mathbf{M}(B) = \mathbf{M}(B - A) + \mathbf{M}(A). \tag{15}$$

注意，零流 $\mathbf{0}$ 始终是 B 的子流，并且只要$A \preceq B$，就有 $\mathbf{M}(A) \leq \mathbf{M}(B)$。特别地， $A \preceq \mathbf{0}$ 当且仅当 $A = \mathbf{0}$。

注 3.1. 设 $B = \mathscr{H}^m \llcorner M \wedge \theta\xi$ 是一个实可求长流。*Paolini* 和 *Stepanov* *[15, 在引理 3.7]* 中证明，若 A 是 B 的任意一个 m 维子流，则存在一个博雷尔函数 $\lambda : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$，使得 $A = \mathscr{H}^m \llcorner M \wedge \lambda\theta\xi$。特别地， A 是一个实可求长流，且 $\operatorname{spt}(A) \subseteq \operatorname{spt}(B)$。

引理 3.2. 设 B 是一个 k 维流，且 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个由 k 维流构成的序列，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都有 $A_i \preceq B$。若 A 是一个 k 维流，且 $A_i \rightharpoonup A$，则 $A \preceq B$。

证明。 由于$\mathbf{M}$ 满足三角不等式，只需证明$\mathbf{M}(B - A) + \mathbf{M}(A) \leq \mathbf{M}(B)$。根据$\mathbf{M}$ 关于弱收敛的下半连续性,

$$\mathbf{M}(B - A) \leq \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}(B - A_i) \quad \text{and} \quad \mathbf{M}(A) \leq \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}(A_i).$$

因此，由于 $A_i \preceq B$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(B-A)+\mathbf{M}(A) &\leq \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}(B-A_i)+\liminf_{i\to\infty}\mathbf{M}(A_i)\\ &\leq \liminf_{i\to\infty}\left(\mathbf{M}(B-A_i)+\mathbf{M}(A_i)\right)\leq \mathbf{M}(B).\end{aligned}$$

□

注 3.3. 我们指出，引理 3.2若将 $A_i \rightharpoonup A$ 替换为 $\mathbf{F}_K(A_i - A) \to 0$，其中 K 是 $\mathbb{R}^n$的某个紧子集，仍然成立。这是因为根据注 2.4，$\mathbf{F}_K(A_i - A) \to 0$ 蕴含$A_i \rightharpoonup A$。

我们关注所谓的部分*Plateau*问题：给定质量为$\mathbf{M}(B) < \infty$的平坦链 $B \in \mathbf{F}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$、一个光滑且紧支撑的形式 $\Phi \in \mathscr{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$，以及一个可求长流 $T_0 \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$，考虑

$$\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi, \preceq B, T_0, \mathbb{R}^n)} \begin{cases}\text{minimize } \mathbf{E}_\Phi(T)\\ \text{among } T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial(T - T_0) \preceq B,\end{cases}$$

其中

$$\mathbf{E}_\Phi(T) := \mathbf{M}(T) - \partial T(\Phi). \tag{16}$$

注 3.4. 请注意以下几点：

- 当 $B = \mathbf{0}$, $\partial(T - T_0) \preceq \mathbf{0}$ 蕴含 $\partial T = \partial T_0$。因此，除一个常数因子外，这个问题对应于可求长流的标准*Plateau*问题：在所有满足 $\partial T = \partial T_0$ 的 $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 中，最小化 $\mathbf{E}_\Phi(T) :=\mathbf{M}(T) - \partial T_0(\Phi)$ 。
- 引入 T_0使得这个问题比 $\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi, \preceq B, \mathbb{R}^n)}$ 中给出的 *(3)* 稍微更一般。当 $T_0 = \mathbf{0}$时， T 的边界是 B 的子流。
- 我们要求 $\mathbf{M}(B) < \infty$，但不要求 $\mathbf{M}(\partial T_0) < \infty$。因此，对于任意可容许的 T，其边界的质量 $\mathbf{M}(\partial T)$ 可能无界。

现在陈述部分Plateau问题的存在性结果。

定理3.5。 设 $\Phi \in \mathscr{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 且 $B \in \mathbf{F}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathbf{M}(B) < \infty$。给定 $T_0 \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$，存在一个可求 *rectifiable* 流 $T^* \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\partial(T^* - T_0) \preceq B$，使得

$$\mathbf{E}_\Phi(T^*) = \min\{\mathbf{E}_\Phi(T) : T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n), \partial(T - T_0) \preceq B\}.$$

证明。 注意，由于零流 $\mathbf{0} \preceq B$，该类包含 T_0。根据定义， T_0和 B 都具有紧支撑。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧凸子集，包含 $\operatorname{spt}(T_0) \cup \operatorname{spt}(B)$，并令 $\pi_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 表示到 K [7, 4.1.15]上的最近点投影。

对于任意满足 $\partial(T - T_0) \preceq B$ 的 $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$，均有 $\mathbf{E}_\Phi((\pi_K)_\# T) \leq \mathbf{E}_\Phi(T)$。事实上，注意到 $\operatorname{spt}(\partial T) \subseteq K$，因为 $\partial T = \partial(T - T_0) + \partial T_0$; $\operatorname{spt}(\partial(T - T_0)) \subseteq \operatorname{spt}(B)$（见注 3.1）；且 $\operatorname{spt}(T_0) \cup \operatorname{spt}(B) \subseteq K$。因此， $\partial((\pi_K)_\# T) = (\pi_K)_\# \partial T = \partial T$。又由于 $\mathbf{M}((\pi_K)_\# T) \leq \mathbf{M}(T)$，可得

$$\mathbf{E}_\Phi((\pi_K)_\# T) = \mathbf{M}((\pi_K)_\# T) - \partial((\pi_K)_\# T)(\Phi) \leq \mathbf{M}(T) - \partial T(\Phi) = \mathbf{E}_\Phi(T). \tag{17}$$

令 $\{T_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 为一个 $\mathbf{E}_\Phi$-极小化序列，且 $\partial(T_i - T_0) \preceq B$。因此，对于每个 i,

$$\mathbf{M}(\partial(T_i - T_0)) \leq \mathbf{M}(B) < \infty.$$

根据（17），不失一般性，我们可以假设 $\operatorname{spt}(T_i) \subseteq K$ 且 $\mathbf{E}_\Phi(T_i) \leq \mathbf{E}_\Phi(T_0)$。于是，

$$\mathbf{M}(T_i) = \mathbf{E}_\Phi(T_i) + \partial T_i(\Phi) \leq \mathbf{E}_\Phi(T_0) + \partial T_i(\Phi) = \mathbf{M}(T_0) + \partial(T_i - T_0)(\Phi) \leq \mathbf{M}(T_0) + \mathbf{M}(B)||\Phi||,$$

其中 $||\Phi||$ 是 Φ 的余质量范数，并且

$$\mathbf{M}(T_i - T_0) \leq \mathbf{M}(T_i) + \mathbf{M}(T_0) \leq 2\mathbf{M}(T_0) + \mathbf{M}(B)||\Phi|| < \infty.$$

因此，对于某个足够大的 $c>0$，$\{T_i - T_0\} \subseteq \mathbf{I}_{m,K}(\mathbb{R}^n) \cap \{T: \mathbf{N}(T) < c\}$。根据 Federer 和 Fleming 的积分流紧致性定理 [7, 4.2.17(b)], , $\{T_i - T_0\}$ 的一个子序列（仍记为 $\{T_i - T_0\}$）$\mathscr{F}_K$ 收敛到某个 $R \in \mathbf{I}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$。因此，$T_i - T_0 \rightharpoonup R$ 和 $T_i \rightharpoonup T^* := R + T_0 \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$。由于 $\partial(T_i - T_0) \preceq B$，且 $\partial(T_i - T_0) \rightharpoonup \partial R = \partial(T^* - T_0)$，由引理 3.2，$\partial(T^* - T_0) \preceq B$ 也成立。此外，由 M 的下半连续性，

$$\mathbf{E}_\Phi(T^*) = \mathbf{M}(T^*) - \partial T^*(\Phi) \le \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}(T_i) - \partial T_i(\Phi) = \liminf_{i\to\infty} \mathbf{E}_\Phi(T_i).$$

由于 $\{T_i\}$ 是一个 $\mathbf{E}_\Phi$-极小化序列，因此 T^* 是所需的 $\mathbf{E}_\Phi$-极小化者。 □

例3.6. 现在我们更详细地考察图*1* 所示的向日葵例子。令 B 为图*2(A)* 所示的一维可求长流，其内圆上的密度为 *2*，外圆弧上的密度为 *1*。令 $[\![P_i]\!]$ *(*对于 $i = 1, \ldots, 8$*)* 和 $[\![D]\!]$ 分别表示具有顺时针定向的二维可求长流，它们分别代表向日葵的花瓣和中心圆盘，如图*2(B)* 所示。那么，任意满足 $T \in \mathscr{R}_2(\mathbb{R}^2)$ 且 $\partial T \preceq B$ 的流均具有如下形式

$$T = a[\![D]\!] + \sum_{i=1}^{8} c_i [\![P_i]\!] \tag{18}$$

其中 a 和 c_i 是满足以下条件的整数

$$0 \le c_i \le 1 \quad \textit{and} \quad 0 \le c_i - a \le 2 \quad \textit{for each } i = 1, 2, \ldots, 8. \tag{19}$$

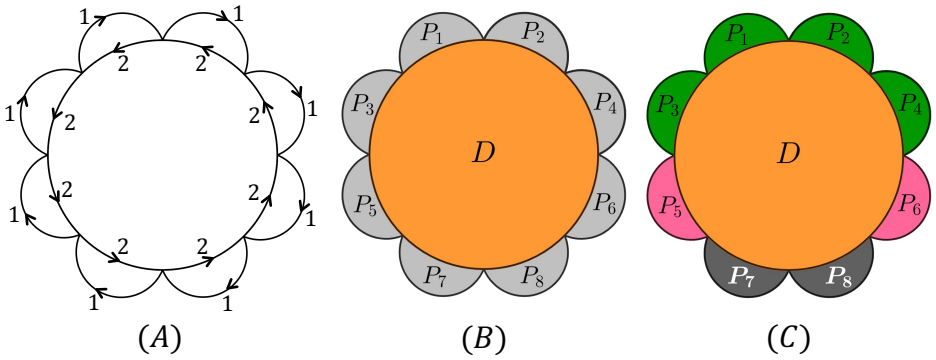


图2：边界 B 及其定向和密度如（A）所示。（B）中所示的花瓣 $\{P_i\}_{i=1}^8$ 和中心圆盘 D 均采用顺时针定向。给定 Φ 时，花瓣分为（C）中所示的三类：负花瓣（绿色）、中性花瓣（粉色）和正花瓣（灰色）。

若 $\Phi = 0$，则显然可知，0-流 $\mathbf{0}$ 是唯一的极小化者。对于任意光滑且紧支撑的 1-形式 $\Phi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^2)$，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\Phi(T) &= \mathbf{M}(T) - \partial T(\Phi) \\
&= |a|\mathbf{M}([\![D]\!]) + \sum_{i=1}^{8} |c_i|\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \left(a\partial[\![D]\!](\Phi) + \sum_{i=1}^{8} c_i \partial[\![P_i]\!](\Phi) \right) \\
&= |a|\mathbf{M}([\![D]\!]) - a\partial[\![D]\!](\Phi) + \sum_{i=1}^{8} c_i (\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi)).
\end{aligned}$$

我们现在研究 $\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi, \preceq B, \mathbf{0}, \mathbb{R}^2)}$ 的可能解。首先，将该集合 $\{[\![P_i]\!]\}$划分为若干部分。

花瓣分成以下集合

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_- &= \{[\![P_i]\!] : \mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi) < 0\} \ \textit{of negative petals,}\\ \mathcal{P}_0 &= \{[\![P_i]\!] : \mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi) = 0\} \ \textit{of neutral petals, and}\\ \mathcal{P}_+ &= \{[\![P_i]\!] : \mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi) > 0\} \ \textit{of positive petals.}\end{aligned}$$

在图 2*(C)* 中，负花瓣集合 $\{[\![P_1]\!], [\![P_2]\!], [\![P_3]\!], [\![P_4]\!]\}$ 以绿色着色，中性花瓣 $\{[\![P_5]\!], [\![P_6]\!]\}$ 以粉色着色，正花瓣 $\{[\![P_7]\!], [\![P_8]\!]\}$ 以灰色着色。

任何可能的解 T 对于 $\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi, \preceq B, \mathbf{0}, \mathbb{R}^2)}$ 必须具有（18）中所描述的形式。由不等式（19），我们得到 $a \in \{-2, -1, 0, 1\}$。我们描述可能的解：

- 当 $a = -2$ 时，所有 c_i 都必须是 0。在这种情况下，唯一可能的解是

$$T_{-2} = -2[\![D]\!]$$

如图3*(A)* 所示。

- 当 $a = -1$ 所有 c_i 都可以是0 或1 时，任何可行候选解均如此。然而，对于满足 $a = -1$的解 T_{-1}，系数 c_i 在负花瓣上必须为1，在正花瓣上必须为0 。在中性花瓣上，c_i 可以取 0 或1。这是因为，从候选极小解中移除任意正花瓣或加入任意负花瓣，只会使$\mathbf{E}_\Phi$减小；而移除或加入中性花瓣不会改变$\mathbf{E}_\Phi$的值。也就是说，任何可能的解都必须具有以下形式

$$T_{-1} = -[\![D]\!] + \sum_{P_i \in \mathcal{P}_-} [\![P_i]\!] + \sum_{P_i \in \mathcal{P}_0^*} [\![P_i]\!] \quad \textit{for any } \mathcal{P}_0^* \subseteq \mathcal{P}_0,$$

如图 3（*B*）所示。

- 当 $a = 0$ 时，基于与 $a = -1$ 情形相同的理由，任何可能的解都必须具有以下形式

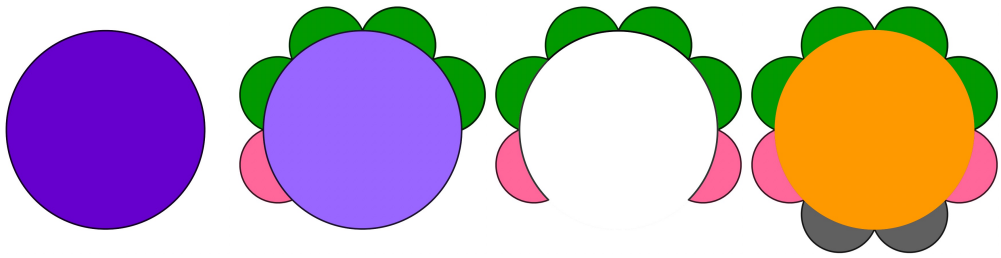
$$T_0 = \sum_{P_i \in \mathcal{P}_-} [\![P_i]\!] + \sum_{P_i \in \tilde{\mathcal{P}}_0} [\![P_i]\!] \quad \textit{for any } \tilde{\mathcal{P}}_0 \subseteq \mathcal{P}_0,$$

如图所示 3（*C*）。

- 当 $a = 1$ 时，对于所有 $i = 1$，$c_i = 1$，……，8。因此，唯一可能的解是

$$T_1 = [\![D]\!] + \sum_{i=1}^{8} [\![P_i]\!],$$

如图图3（*D*）所示。



(*A*) (*B*) (*C*) (*D*)

图3：从左至右，我们展示了 T_{-2}、T_{-1}、T_0、T_1 对应的四种可能解，其中 $\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi, \preceq B, \mathbf{0}, \mathbb{R}^2)}$的边界为 B，1-形式为 Φ，如图2所示。

到目前为止，我们只根据解的边界上的子流限制，以及负、中性和正

花瓣如何改变$\mathbf{E}_\Phi$的值，描述了) 的可能解。现在，我们将根据 $\partial[\![D]\!]$ 如何作用于 Φ来刻画 $\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi,\preceq B,\mathbf{0},\mathbb{R}^2)}$ 的解。首先，注意$\mathbf{E}_\Phi(T_i)$ 在 $i=-2$、-1、0、1处的以下取值:

$$\mathbf{E}_\Phi(T_{-2}) = 2\mathbf{M}([\![D]\!]) + 2\partial[\![D]\!](\Phi)$$

$$\mathbf{E}_\Phi(T_{-1}) = \mathbf{M}([\![D]\!]) + \partial[\![D]\!](\Phi) + \sum_{P_i\in\mathcal{P}_-}(\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi))$$

$$\mathbf{E}_\Phi(T_0) = \sum_{P_i\in\mathcal{P}_-}(\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi))$$

$$\mathbf{E}_\Phi(T_1) = \mathbf{M}([\![D]\!]) - \partial[\![D]\!](\Phi) + \sum_{P_i\in\mathcal{P}_-}(\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi)) + \sum_{P_i\in\mathcal{P}_+}(\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi)).$$

因此，

- $\mathbf{E}_\Phi(T_{-2}) \le \mathbf{E}_\Phi(T_{-1})$ 每当

$$\partial[\![D]\!](\Phi) \le -\mathbf{M}([\![D]\!]) + \sum_{P_i\in\mathcal{P}_-}(\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi)) =: \lambda_{-2},$$

- $\mathbf{E}_\Phi(T_{-1}) \le \mathbf{E}_\Phi(T_0)$ 每当

$$\partial[\![D]\!](\Phi) \le -\mathbf{M}([\![D]\!]) =: \lambda_{-1},\ and$$

- $\mathbf{E}_\Phi(T_0) \le \mathbf{E}_\Phi(T_1)$ 每当

$$\partial[\![D]\!](\Phi) \le \mathbf{M}([\![D]\!]) + \sum_{P_i\in\mathcal{P}_+}(\mathbf{M}([\![P_i]\!]) - \partial[\![P_i]\!](\Phi)) =: \lambda_0$$

还请注意，我们有以下不等式

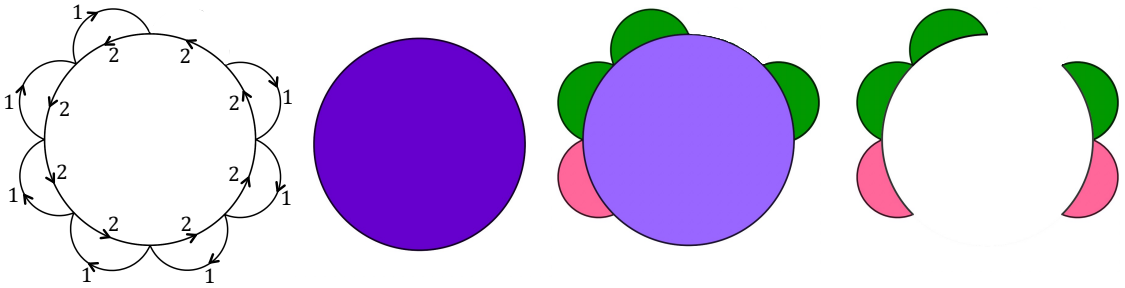
$$\lambda_{-2} \le \lambda_{-1} \le \lambda_0.$$

因此，

- T_{-2} 是一个解，当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \le \lambda_{-2}$,
- T_{-1} 是一个解，当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \in [\lambda_{-2},\lambda_{-1}]$,
- T_0 是一个解，当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \in [\lambda_{-1},\lambda_0]$, 且
- T_1 是一个解，当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \ge \lambda_0$。

此外，只要 $\partial[\![D]\!](\Phi) \notin \{\lambda_{-2},\lambda_{-1},\lambda_0,\lambda_1\}$，该解就是唯一的。

˜例*3.7*。设 B 为图*4(A)*所示的一维可求 *rectifiable* 流。与例*3.6*中一样，当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \le \lambda_{-2}$ 时，T_{-2} 是一个解；当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \in [\lambda_{-2},\lambda_{-1}]$时，$T_{-1}$ 是一个解；而当 $\partial[\![D]\!](\Phi) \ge \lambda_{-1}$时，$T_0$ 是一个解。然而，对于任意˜，T_1 都不可能是一个解，因为其边界 ∂T_1 不再是 B的子流。



(*A*) (*B*) (*C*) (*D*)

˜图4：给定如 (*A*) 所示的边界 B，三种可能的解 T_{-2},T_{-1},T_0 对于$\mathcal{P}_{(\mathbf{E}_\Phi,\preceq\tilde{B},\mathbf{0},\mathbb{R}^2)}$ 分别如 (*B*)、(*C*) 和 (*D*) 所示。

4 带边界扫描的 H-质量 Plateau 问题

基于 De Pauw 和 Hardt 的工作 [5], ，本节将进一步研究带有 H-质量的 Plateau 问题。我们定义一个可测映射子族，它从所有 $n-m$ 平面构成的空间映射到 $\mathbb{R}^n$ 零维积分流空间，称为带边界扫描，并修改 H-质量的定义，以证明定理 H中带边界扫描的4.18存在带有 H-质量的 Plateau 问题解。本节的定义和技巧也将用于研究部分Plateau 问题，见 §5。

4.1 H-质量与 H-平坦距离

现在我们列出 [5] 中的一些概念和结果，它们对本文的分析尤为有用。首先，我们定义 H-有限大小实可求长流的质量，并定义整平坦链上的 H-平坦距离。

定义 4.1 ([5, 定义 3.2.1。])。 若函数 $H:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足以下条件，则称其为凹被积函数:

1. $H(0)=0$*; 2.* $H(1)=1$*; 3.* $H(\theta_1)<H(\theta_2)$ 当 $0\le\theta_1<\theta_2$ 时; *4.* $H(\theta_1+\theta_2)\le H(\theta_1)+H(\theta_2)$ 当 $\theta_1,\theta_2\ge 0$ 时; *5.* $\lim_{\theta\to\infty}H(\theta)=\infty$。

定义 4.2 ([5, 定义 3.2.2.])。 对于凹被积函数 H 和实可求 *rectifiable* 链流$T\in\mathscr{D}_m(\mathbb{R}^n)$，若满足 $\mathbf{S}(T)<\infty$，则 T 的 H-质量定义为

$$\mathbf{M}_H(T):=\int_{\mathbb{R}^n} H(\Theta^m(\|T\|,x))\,d\mathcal{H}^m(x). \tag{20}$$

定义 4.3 ([5, 定义 3.2.8.])。 对于 $\mathbb{R}^n$的紧子集 K 、凹被积函数 H以及整平坦链 $T\in\mathscr{F}_{m,\ K}(\mathbb{R}^n)$，定义

$$\mathscr{F}_K^H(T):=\inf\{\mathbf{M}_H(T-\partial S)+\mathbf{M}_H(S):S\in\mathscr{R}_{m+1,K}(\mathbb{R}^n),\ T-\partial S\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{21}$$

如 [7, 1.7.4, 2.7.16], 中所述，令 $\mathbf{O}(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的正交群，$\mathbf{O}^*(n,k)$ 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的所有正交投影构成的空间，并赋予其 $\mathbf{O}(n)$ 不变测度 $\theta^*_{n,k}$。在 [5, 命题 3.1.3. 和 3.1.5.], 中证明了，任意平坦链 $T\in\mathbf{F}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 和 $k\in\{1,\dots,m\}$ 都可由可测映射 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,k}\times\mathcal{L}^k$ 表示

$$\mathcal{S}(T):\mathbf{O}^*(n,k)\times\mathbb{R}^k\to\mathbf{F}_{m-k,K}(\mathbb{R}^n),\quad \mathcal{S}(T)(p,y):=\langle T,p,y\rangle, \tag{22}$$

对每个 $p\in\mathbf{O}^*(n,k)$ 以及对 $\mathcal{L}^k$ 几乎每个 $y\in\mathbb{R}^k$，该 维平坦链$\langle T,p,y\rangle$ 由以下切片得到: T使用 $p^{-1}(y)$ 在正交投影映射 p 下，其中 $y\in\mathbb{R}^m$。在本文余下部分，映射 $\mathcal{S}(T)$ 对于 22，定义如（ $k=m$ ）所示。

设 $T\in\mathscr{R}_{m,\ K}(\mathbb{R}^n)$。对于 $\mathcal{L}^k$ 几乎每个 $y\in\mathbb{R}^m$， $\langle T,p,y\rangle\in\mathbf{I}_{0,\ K}(\mathbb{R}^n)$ [7, 4。 3.6.], 因此$\mathcal{S}(T)$: $\mathbf{O}^*(n,\ m)\times\mathbb{R}^m\to\mathbf{I}_{0,\ K}(\mathbb{R}^n)$。此外，与 [5, (17)], 一样，积分几何恒等式表明，其质量可以通过对其零维切片的质量积分来计算:

$$\mathbf{M}(T)=\frac{1}{\boldsymbol{\beta}_1(m,n)}\int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m}\mathbf{M}(\mathcal{S}(T)(p,y))\,d(\theta^*_{n,m}\times\mathcal{L}^m)(p,y),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_1(m,n)$ 是 [7, 2.7.16] 中给定的常数。根据 [5, (21)], ，我们还可以得到可求 rectifiable 流 $T\in\mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 的 H质量的类似等式:

$$\mathbf{M}_H(T)=\frac{1}{\boldsymbol{\beta}_1(m,n)}\int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m}\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T)(p,y))\,d(\theta^*_{n,m}\times\mathcal{L}^m)(p,y). \tag{23}$$

受 (23) 启发，De Pauw 和 Hardt [5] 定义了可求 rectifiable 扫描的 H 质量。他们还提出了扫描循环的概念；这是基于如下观察：边界为零的平坦链 $F_m(\mathbb{R}^n)$，等价于其零维切片 [5, 命题 3.1.6] 满足相应条件。在下面的定义中，我们将他们的定义推广到从 $\mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$ 到 $\mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$ 的可测映射。

定义 4.4. 对于任意 $\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 可测映射 $f: \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$, 我们定义其 H-质量为

$$\mathbf{M}_H(f) := \frac{1}{\beta_1(m,n)} \int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m} \mathbf{M}_H(f(p,y))\, d(\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m)(p,y) \tag{24}$$

并将 f 的变差定义为

$$\mathbf{D}(f) := \sup\{ \int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m} |D(\phi \circ f)| : \ \phi : \mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \ \textit{with}\ \mathrm{Lip}(\phi) \le 1\}. \tag{25}$$

此外，我们称 f 为一个圈，并记作 $\partial f = 0$，若对于 $\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 几乎处处的 $(p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$,

$$f(p,y)(\mathbf{1}) = 0,$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$上的常值函数 $\mathbf{1}(x) = 1$ 。

由方程 (23) 和 (24) 可知，对于任意可求长流 $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n$),

$$\mathbf{M}_H(T) = \mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T)). \tag{26}$$

对于任意紧 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，我们将由 $\mathcal{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 中的可求长流得到的可测映射类记作 $\mathcal{S}_{m,K}(\mathbb{R}^n) := \{\mathcal{S}(T) : T \in \mathcal{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\}$ 并令

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K\subseteq\mathbb{R}^n \text{ compact}} \mathcal{S}_{m,K}(\mathbb{R}^n). \tag{27}$$

现在回顾 [5], 中的一个最重要的定理，然后陈述一个直接推论，我们将在定理4.18 和5.1的证明中使用它。

定理 4.5 ([5, 定理 3.4。1])。 设 X 是一个 k 维黎曼流形， Y是一个弱可分度量空间， M： $Y \to \mathbb{R}^+$ 是下半连续的，并且 $M^{-1}([0,R])$ 在 Y上对所有 $R > 0$都是序列紧的。如果 f_j： $X \to Y$是可测的，并且

$$\int_X M(f_j(x))\, d\mathcal{H}^k x + \int_X |D(\phi \circ f_j)| \le \Lambda < \infty,$$

对所有 $j = 1$、2、.....，以及映射 ϕ： $Y \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathrm{Lip}(\phi) \le 1$，则存在某个子序列 f_{j^*} 逐点收敛于函数 f： $X \to Y$，且几乎处处满足$\mathcal{H}^k$

$$\int_X M(f(x))\, d\mathcal{H}^k x + \int_X |D(\phi \circ f)| \le \Lambda$$

对所有这样的 ϕ。

推论 4.6。 设 f_j： $\mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathbf{I}_{0,\ K}(\mathbb{R}^n)$ 是一个$\boldsymbol{\theta}^*_{n,\ m} \times \mathcal{L}^m$ 可测映射序列，满足

$$\mathbf{M}_H(f_j) + \mathbf{D}(f_j) \le \Lambda < \infty,$$

对所有 $j = 1$、2、.....，都成立。于是，存在 (f_{j_k}) 这一 (f_j) 的子序列，以及一个 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 可测映射 $f: \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$， 使得

$$\mathbf{M}_H(f) + \mathbf{D}(f) \le \Lambda,$$

并且(f_{j_k}) </style}几乎处处逐点收敛到， 其含义是对于， $_m \times \mathcal{L}^m$ 几乎所有$(p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$,

$$\mathscr{F}^H_K[f_{j_k}(p,y) - f(p,y)] \to 0 \ \textit{as}\ k \to \infty.$$

证明。 这是 [5, 定理 3.41] 的一个特例，其中

$$\begin{aligned} X &= \text{the Riemannian manifold } \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \\ Y &= \mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n) \text{ with } \mathrm{dist}_Y(T,\tilde{T}) = \mathscr{F}_K^H(T-\tilde{T}) \\ M &= \mathbf{M}_H. \end{aligned}$$

□

4.2 H-质量最小化扫描的存在性

在本小节中，我们修正 De Pauw 和 Hardt 的开创性工作 [5, 定理 3.5.2。] 他们考虑以下 Plateau 型问题：给定 $T_0 \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{cases} \text{minimize } \mathbf{M}_H(T) \\ \text{among } T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \text{ such that } \partial T = \partial T_0, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{M}_H(T)$ 表示 H-质量， $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$ 如式（20）所定义。令 $\Gamma(\mathbf{M}_H, T_0, \mathbb{R}^n)$ 为该问题的下确界：

$$\Gamma(\mathbf{M}_H, T_0, \mathbb{R}^n) := \inf\{\mathbf{M}_H(T) : T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n) \text{ and } \partial T = \partial T_0\}. \tag{28}$$

为方便读者, 我们现在陈述 [5, 定理 3.5.2。] 该定理由 De Pauw 和 Hardt 提出。

定理（[5, 定理 3.5.2。]）。设 $T_0 \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$，其中 $\mathcal{I}_1^m(spt(\partial T_0)) = 0$，并设 H 为凹被积函数。那么存在一个 m维可求 *rectifiable* 扫描 $\mathcal{T}$，属于 $\mathbb{R}^n$，使得$\partial(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T_0)) = 0$且 $M_H(\mathcal{T}) = \Gamma(M_H, T_0, \mathbb{R}^n)$。此外，若 $spt(\partial T_0)$ 是一个 $m-1$ 维紧的、*properly embedded* 的 C^1, *1* 子流形，则存在 $T \in I_m(\mathbb{R}^n)$，其中 $\partial T = \partial T_0$ 且 $M_H(T) = \Gamma(M_H, T_0, \mathbb{R}^n)$。

在讨论其证明之前，使用（27）中的记号，并根据方程（26），注意到（28）有如下等价表述：

$$\Gamma(\mathbf{M}_H, T_0, \mathbb{R}^n) = \inf\{\mathbf{M}_H(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \text{ and } \partial(\mathcal{R} - \mathcal{S}(T_0)) = 0\}.$$

换言之， $\mathcal{S}_m$（$\mathbb{R}^n$）是 [5] 使 $\mathbf{M}_H$ 达到最小值的对象类。

现在，在证明中，De Pauw 和 Hardt 构造了一个由$\mathbf{M}_H$ 最小化的可求长流组成的序列，并利用他们的 BV 紧性定理 [5, 定理 3.4.1。] 得到一个子序列$\{T_j\}$，使得 $\mathcal{S}$（T_j）几乎处处逐点收敛 到一个可求 *rectifiable* 扫描 $\mathcal{T}$。由$\mathbf{M}_H$ 对零维积分流的下半连续性（关于 H-平坦距离），以及 Fatou 引理，可得

$$\mathbf{M}_H(\mathcal{T}) \le \Gamma(\mathbf{M}_H, T_0, \mathbb{R}^n).$$

然而, 由于可求 rectifiable 扫描 $\mathcal{T}$不一定是可求长流，我们不能得出结论 e that $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$，反过来也不能得出结论：

$$\mathbf{M}_H(\mathcal{T}) = \Gamma(\mathbf{M}_H, T_0, \mathbb{R}^n).$$

为克服这一问题（ $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ 在几乎处处逐点收敛下不闭），我们引入一类修改后的对象，并将在其上进行最小化，记为$Scan_m(\mathbb{R}^n)$，同时也引入 H-质量的修改版本。

定义 *4.7.* 每当 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集时，我们称 $\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 可测映射 $\mathcal{T}: O^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathscr{F}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$ 是 K 中的 m 维 *Scan*，若它属于 $\mathcal{S}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 的闭包。也就是说，若存在一个可求长流序列 $T_1, T_2, \cdots \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\mathcal{S}(T_i) \to \mathcal{T}$ 几乎处处逐点成立，其意义是

$$\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K^H[\langle T_i, p, y\rangle - \mathcal{T}\ (p,y)\ ] = 0 \text{ 对于 } \theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m \text{ 几乎处处} (p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m. \tag{29}$$

我们定义

$$Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$$

为所有 m维扫描在 K 中，使得存在一个可求 ***rectifiable*** 流$T \in \mathscr{R}_{m,\ K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\boldsymbol{\partial}(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T)) = 0$。[1] $\boldsymbol{Scan}_{m,\ K}(\mathbb{R}^n)$ 的成员称为 m 中带边界的 K 维扫描。

令\(u\) 现在我们来探究关于类 $Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 及其成员的几个事实。 .

命题 4.8。 设 K_1、K_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个紧子集。如果 $K_1 \subseteq K_2$，那么 $\boldsymbol{Scan}_{m,K_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \boldsymbol{Scan}_{m,K_2}(\mathbb{R}^n)$。

证明。对于任意 $\mathcal{T} \in \mathrm{Scan}_{m,K_1}(\mathbb{R}^n)$，根据定义， $\mathcal{T}$: $\mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathscr{F}_{0,K_1}(\mathbb{R}^n)$ 是 m 维扫描，位于 K_1 中，且 $\boldsymbol{\partial}(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T)) = 0$，其中某个 $T \in \mathscr{R}_{m,K_1}(\mathbb{R}^n)$。由于 $K_1 \subseteq K_2$, $\mathcal{T}$ 也是位于 K_2 中的 m 维扫描，且 $T \in \mathscr{R}_{m,K_2}(\mathbb{R}^n)$。因此 $\mathcal{T} \in \mathrm{Scan}_{m,K_2}(\mathbb{R}^n)$ 也成立。 □

引理 4.9。 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集。对于任意整平坦链 $T \in \mathscr{F}_{m,\ K}(\mathbb{R}^n)$，$\boldsymbol{\theta}^*_{n,\ m} \times \mathcal{L}^m$ 可测映射

$$\mathcal{S}(T) : \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathscr{F}_{0,K}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}(T)(p,y) := \langle T, p, y \rangle,$$

i是一个带边界的 m 维 ***Scan***，定义在 K 中 $ry.$

证明。我们首先证明， $\mathcal{S}(T)$ 是 K 中的一个 m 维 Scan。事实上，由于 $T \in \mathscr{F}_{m,K}$ 是一个整平坦链，存在一个可求长流序列 $T_1, T_2, \cdots \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}_K(T - T_i) = 0$。根据 [5, 注 3.2.9。], $\mathcal{F}^H_K(T - T_i) \le H(2)\mathcal{F}_K(T - T_i)$，因此 $\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}^H_K(T - T_i) = 0$。根据 [5, 注 3.2.11。], $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}^H_K(\langle T - T_i, p, y\rangle)\, d\mathcal{L}^m y \le \mathcal{F}^H_K(T - T_i)$，对于任意 $p \in \mathbf{O}^*(n,m)$。因此，

$$\int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m} \mathcal{F}^H_K(\langle T - T_i, p, y\rangle)\, d(\boldsymbol{\theta}^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m)(p,y) \le \boldsymbol{\beta}_1(n,m)\mathcal{F}^H_K(T - T_i) \to 0 \quad \text{as } i \to \infty.$$

根据 [6,定理 1.21], , 存在 (T_i) 的一个子序列 (T_{i_j})，使得

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}^H_K(\langle T - T_{ij}, p, y\rangle) = 0$$

对于 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 几乎处处的 $(p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$。因此， $\mathcal{S}(T)$ 是 K 中的一个 m 维 Scan。

现在我们证明 $\mathcal{S}(T)$ 也属于 $Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$。由于 $T \in \mathscr{F}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，存在 $R \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 和 $Q \in \mathscr{R}_{m+1,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $T = R + \partial Q$。因此，根据 [5, 命题 3.1.6.],

$$\boldsymbol{\partial}(\mathcal{S}(T) - \mathcal{S}(R)) = \boldsymbol{\partial}(\mathcal{S}(T - R)) = \boldsymbol{\partial}(\mathcal{S}(\partial Q)) = 0. \tag{30}$$

因此， $\mathcal{S}(T) \in \boldsymbol{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$。 □

定义 4.10. 我们定义类

$$Scan_m(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K\subseteq\mathbb{R}^n\ compact} Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),$$

其成员称为 $\mathbb{R}^n$ 中带边界的 m 维扫描。对于每个 $\mathcal{T} \in \boldsymbol{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$， $\mathcal{T}$ 的边界定义为

$$\partial\mathcal{T} := \mathcal{S}(\partial T) \tag{31}$$

对任意满足 $\boldsymbol{\partial}(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T)) = 0$ 的 $T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$。

根据这个定义，现在我们可以利用（30）， $\partial(\mathcal{S}(T)) = \mathcal{S}(\partial T)$ 对任意 $T \in \mathscr{F}_m(\mathbb{R}^n)$。

[1]根据定义 4.4， $\boldsymbol{\partial}(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T)) = 0$ 表示 $(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T))(p,y)(\mathbf{1}) = 0$ 对于 $\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 几乎处处的 $(p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$。

命题 4.11. 方程（31）定义了边界算子 $\partial : \mathit{Scan}_m(\mathbb{R}^n) \to \mathit{Scan}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\partial^2 = 0$，且 $\partial : \mathit{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n) \to \mathit{Scan}_{m-1,K}(\mathbb{R}^n)$ 对于紧的 K。

证明。对于任意 $\mathcal{T} \in \mathrm{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$，我们首先证明 $\partial\mathcal{T} := \mathcal{S}(\partial T)$ 是良定义的，即 $\mathcal{S}(\partial T)$ 不依赖于满足 $\partial(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T)) = 0$ 的 $T \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 的选取，也不依赖于紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 的选取。事实上，假设有两个紧集K_1, K_2 以及相应的可求 rectifiable 流 $T_j \in \mathscr{R}_{m,K_j}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{R}_{m,K_1\cup K_2}(\mathbb{R}^n)$，满足 $\partial(\mathcal{T} - \mathcal{S}(T_j)) = 0$，其中 $j = 1$ 为 2。这里，$\mathcal{T} - \mathcal{S}(T_j) : \mathrm{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to \mathscr{F}_{0,K_j}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{F}_{0,K_1\cup K_2}(\mathbb{R}^n)$。因此，$\partial(\mathcal{S}(T_1 - T_2)) = \partial(\mathcal{S}(T_1) - \mathcal{S}(T_2)) = 0$。由命题 3.1.6.]，$\partial(T_1 - T_2) = 0$，其中 $T_1 - T_2 \in \mathscr{R}_{m,K_1\cup K_2}(\mathbb{R}^n)$。因此，$\partial T_1 = \partial T_2$，从而 $\mathcal{S}(\partial T_1) = \mathcal{S}(\partial T_2)$。这说明定义 $\partial\mathcal{T} := \mathcal{S}(\partial T)$ 是良定义的。根据定义，$\partial T \in \mathscr{F}_{m-1,K}(\mathbb{R}^n)$。于是由引理 4.9，$\partial\mathcal{T} = \mathcal{S}(\partial T) \in \mathrm{Scan}_{m-1,K}(\mathbb{R}^n)$，并且 $\partial^2\mathcal{T} = \partial(\mathcal{S}(\partial T)) = \mathcal{S}(\partial^2 T) = \mathcal{S}(0) = 0$。 □

注 4.12。 回想一下，符号 ∂ 仅以 $\partial\mathcal{T} = 0$的形式使用，表示 $\mathcal{T}$是一个圈；我们不能将此符号用于其他映射，而 ∂ 是 $\mathit{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$上的一个良定义边界算子。在 $\mathit{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$ 中，边界算子 ∂ 等价于 ∂，也就是说，对于任意 $\mathcal{T} \in \mathit{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$，$\partial\mathcal{T} = 0$ 当且仅当 $\partial\mathcal{T} = 0$。

对于每个紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，以下泛函，记作 $\mathbf{M}_{H,K}$是对 H-质量的修正。引理 4.15 表明，它在可求 rectifiable 流的扫描类上与 $\mathbf{M}_H$ 一致。

定义 4.13. 对于任意紧 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，我们定义泛函 $\mathbf{M}_{H,K} : \mathit{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\underline{\mathbf{M}}_{H,K}(\mathcal{T}) := \inf\{\liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i) : T_i \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(T_i) \to \mathcal{T}, \text{ and } \partial(\mathcal{S}(T_i)) = \partial\mathcal{T}\}. \tag{32}$$

如果上下文清楚，我们将直接写作 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T})$，而不写作 $\mathbf{M}_{H,K}(\mathcal{T})$。即使 K 是显而易见的。

注 *4.14.* 一般来说，$M_{H,K}(\mathcal{T})$ 的值取决于紧集 K。然而，如果 $K_1 \subseteq K_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集，且 $\mathcal{T} \in \mathit{Scan}_{m,K_1}(\mathbb{R}^n) \cap \mathit{Scan}_{m,K_2}(\mathbb{R}^n)$，由于$\mathscr{R}_{m,K_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{R}_{m,K_2}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathscr{F}^H_{K_2} \le \mathscr{F}^H_{K_1}$，可得 $M_{H,K_2}(\mathcal{T}) \le M_{H,K_1}(\mathcal{T})$。

引理 4.15. 对于任意 $T \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，$\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{S}(T)) = \mathbf{M}_H(T) = \mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T))$。

证明。将常值序列 $T_i = T$ 代入 (32)，可得 $\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T)) \le \mathbf{M}_H(T)$。现在我们将证明 $\mathbf{M}_H(T) \le \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{S}(T))$。设 $T_i \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathcal{S}(T_i) \to \mathcal{S}(T)$。根据定义，对于 $\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 几乎处处的 $(p,y) \in \mathrm{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$，$\mathscr{F}^H_K[\langle T_i, p, y\rangle - \langle T, p, y\rangle] \to 0$如 $i \to \infty$。由 $\mathbf{M}_H$ 的下半连续性以及 $\mathscr{F}^H_K$ 收敛性，得到引理 3.2.14。]，

$$\mathbf{M}_H(\langle T, p, y\rangle) \le \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(\langle T_i, p, y\rangle).$$

对两边积分并利用 Fatou 引理，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T)) &= \frac{1}{\boldsymbol{\beta}_1(m,n)} \int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m} \mathbf{M}_H(\langle T, p, y\rangle)\, d(\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m)(p,y) \\
&\le \frac{1}{\boldsymbol{\beta}_1(m,n)} \int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m} \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(\langle T_i, p, y\rangle)\, d(\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m)(p,y) \\
&\le \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{\boldsymbol{\beta}_1(m,n)} \int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m} \mathbf{M}_H(\langle T_i, p, y\rangle)\, d(\theta^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m)(p,y) \\
&= \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T_i)).
\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T)) \le \underline{\mathbf{M}}_H(T)$，由此可知，结论可由 $\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T)) = \mathbf{M}_H(T)$ 得出。 □

以下命题说明，$\mathbf{M}_H$ 在 $\mathit{Scan}_m(\mathbb{R}^n)$ 上是次可加的。

命题 4.16. 对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意非空紧子集 K，$\mathbf{M}_H(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \le \mathbf{M}_H(\mathcal{T}_1) + \mathbf{M}_H(\mathcal{T}_2)$ 对于任意 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathit{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$。

证明。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空紧子集，并且 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 都成立。对每个 $k=1,2$，取 $\{T_i^k\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个序列，使得 $\mathcal{S}(T_i^k) \to \mathcal{T}_k$，且对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\partial(\mathcal{S}(T_i^k)) = \partial\mathcal{T}_k$。必要时选取一个子序列后，我们可以假设对每个 $k=1,2$，$\{\mathbf{M}_H(T_i^k)\}_{i=1}^{\infty}$ 都收敛。现在考虑序列 $\{T_i^1+T_i^2\}_{j=1}^{\infty}$，并注意到 $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2 \in \mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{S}(T_i^1+T_i^2) \to (\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)$，且 $\partial(\mathcal{S}(T_i^1+T_i^2)) = \partial(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)$。事实上，对于 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$，几乎处处有 $(p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$，

$$\mathscr{F}_K^H[(\mathcal{S}(T_i^1+T_i^2)(p,y)-(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)(p,y)] \le \mathscr{F}_K^H[(\mathcal{S}(T_i^1)-\mathcal{T}_1)(p,y)]+\mathscr{F}_K^H[(\mathcal{S}(T_i^2)-\mathcal{T}_2)(p,y)] \to 0$$

作为 $i \to \infty$，并且

$$((\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)-\mathcal{S}(T_i^1+T_i^2))(p,y)(\mathbf{1}) = (\mathcal{T}_1-\mathcal{S}(T_i^1)(p,y)(\mathbf{1}) + (\mathcal{T}_2-\mathcal{S}(T_i^2)(p,y)(\mathbf{1}) = 0$$

for 所有 $i \in \mathbb{N}$。根据定义，这意味着对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$\partial((\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)-\mathcal{S}(T_i^1+T_i^2)) = 0$。因此 s,

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2) &\le \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i^1+T_i^2) \le \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i^1)+\mathbf{M}_H(T_i^2)\\ &= \lim_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i^1)+\lim_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i^2) = \liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i^1)+\liminf_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i^2).\end{aligned}$$

由于序列 $\{T_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{T_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ 是任意的，我们有 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2) \le \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_1)+\mathbf{M}_H(\mathcal{T}_2)$。

□

引理 4.17. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集，并设 $T_i \in \mathbf{I}_0(\mathbb{R}^n)$ 是一个 0 维积分流序列。如果 $\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K^H(T_i) = 0$，那么 $\lim_{i\to\infty} T_i(\mathbf{1}) = 0$。

证明。根据 $\mathscr{F}_K^H$的定义，存在 $\mathscr{R}_{1,K}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个序列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\lim_{i\to\infty} \mathbf{M}_H(T_i-\partial S_i) = 0$。只需证明 $\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K(T_i-\partial S_i) = 0$，因为这意味着

$$\lim_{i\to\infty} T_i(\mathbf{1}) = \lim_{i\to\infty} T_i(\mathbf{1}) - S_i(d(\mathbf{1})) = \lim_{i\to\infty} (T_i-\partial S_i)(\mathbf{1}) = 0.$$

为了证明 $\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K(T_i-\partial S_i) = 0$，我们将应用 [5, 引理 3.2.13.] 该引理指出，任何满足 $\sup_i\{\mathbf{M}(Q_i)+\mathbf{M}(\partial Q_i)\} < \infty$ 且 $\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K^H(Q_i) = 0$ 的整平坦链序列 $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$，也满足 $\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K(Q_i) = 0$。要将此引理应用于我们的零维积分流序列 $\{T_i-\partial S_i\}_{i=1}^{\infty}$，我们只需证明 $\sup_i\{\mathbf{M}(T_i-\partial S_i)\} < \infty$ 且 $\lim_{i\to\infty} \mathscr{F}_K^H(T_i-\partial S_i) = 0$。我们的最后一个断言由 $\mathscr{F}_K^H(T_i-\partial S_i) \le \mathbf{M}_H(T_i-\partial S_i) \to 0$. 得证。我们还可以假设 $\sup_i\{\mathbf{M}_H(T_i-\partial S_i)\} < \infty$。注释 3.2.7. 在 [5] 中指出，$H(\mathbf{M}(T)) \le \mathbf{M}_H(T)$ 对所有 $T \in \mathbf{I}_0(\mathbb{R}^n)$ 都成立，因此 $\sup_i\{H(\mathbf{M}(T_i-\partial S_i))\} < \infty$。由于 H 严格递增，最后可得 $\sup_i\{\mathbf{M}(T_i-\partial S_i)\} < \infty$。

□

利用 H-质量 $\mathbf{M}_H$ 在 $Scan_{m\text{ 类 }K}(\mathbb{R}^n)$ 上的这一修正版，我们现在证明，对于 m 中带边界的 K 维扫描，*Plateau* 问题的 H-质量 (5) 对每个 K 都有解。

定理 4.18。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空紧子集。对于任意 $\mathcal{T}_0 \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，存在一个扫描 $\mathcal{T}^* \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，满足 $\partial\mathcal{T}^* = \partial\mathcal{T}_0$，使得

$$\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^*) = \min\{\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}) : \mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{T}_0\}. \tag{33}$$

此外，$\mathcal{T}^*(p,y) \in \mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$ 对于 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m} \times \mathcal{L}^m$ 几乎处处成立，$(p,y) \in \mathbf{O}^*(n,m) \times \mathbb{R}^m$。

证明。根据假设，$\{\mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)\colon\ \partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{T}_0\}$ 包含 $\mathcal{T}_0$，因此非空。我们可以假设 $\inf\{\mathbf{M}_H(\mathcal{T})\colon\ \mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)\ \ \partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{T}_0\} < \infty$；否则 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T}_0) = \infty$，我们只需选取 $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_0$。设 $\{\mathcal{T}^i\}_{i=1}^{\infty}$ 是这一集合中的一个 $\mathbf{M}_H$ 极小化序列。也就是说，$\mathcal{T}^i \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，$\partial\mathcal{T}^i = \partial\mathcal{T}_0$，并且

$$\lim_{i\to\infty} \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^i) = \inf\{\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}) : \mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial\mathcal{T} = \partial\mathcal{T}_0\}. \tag{34}$$

由于 $\{\mathcal{T}^i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个 $\mathbf{M}_H$ 极小化序列，不失一般性，我们可以假设 t hat

$$\sup_i \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^i) \le C < \infty \tag{35}$$

对于某个 $C>0$。根据 $\mathbf{M}_H$ 在（32）中的定义，对于每个 $i\in\mathbb{N}$，存在一个序列 $\{T_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ 属于 $\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\lim_{j\to\infty}\mathbf{M}_H(T_j^i)=\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^i),\quad\text{and}\quad\partial(\mathcal{S}(T_j^i))=\partial\mathcal{T}^i=\partial\mathcal{T}_0\ \text{for all } j\in\mathbb{N}. \tag{36}$$

由于 $\mathcal{T}_0\in\mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，存在一个 $T_0\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\partial\mathcal{T}_0=\partial(\mathcal{S}(T_0))$。根据命题 4.11 的证明，条件 $\partial(\mathcal{S}(T_j^i))=\partial\mathcal{T}_0$ 意味着，对所有 $i,j\in\mathbb{N}$，都有 $\partial T_j^i=\partial T_0$。由 (36)，对于每个 $i\in\mathbb{N}$，存在一个 $N_i\in\mathbb{N}$，使得

$$|\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i)-\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^i)|\le\frac{1}{i}. \tag{37}$$

因此，根据（35），上确界$_i\,\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i)\le C+1<\infty$。于是，

$$\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T_{N_i}^i-T_0))=\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i-T_0)\le C+1+\mathbf{M}_H(T_0)\quad\text{for all } i\in\mathbb{N}.$$

On 另一方面，根据 [5, 注 3.3。3], [5, 引理 3.1。2], 以及 $\partial T_{N_i}^i=\partial T_0$ ，

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathcal{S}(T_{N_i}^i-T_0))&\le\mathbf{c}_1[\mathbf{M}_H((T_{N_i}^i-T_0)\times[\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!])+\mathbf{M}_H(\partial((T_{N_i}^i-T_0)\times[\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!]))]\\&=\mathbf{c}_1\mathbf{M}_H((T_{N_i}^i-T_0)\times[\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!])\\&\le\mathbf{c}_2\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i-T_0)\\&\le\mathbf{c}_2[C+1+\mathbf{M}_H(T_0)],\end{aligned}$$

其中常数 $\mathbf{c}_1$ 和 $\mathbf{c}_2$ 仅依赖于 n 和 K。根据 BV 紧性定理的推论4.6， [5, De Pauw 和 Hardt 的定理 3.4, 必要时将 $\{T_{N_i}^i\}$ 替换为一个子序列，存在一个 $\boldsymbol{\theta}_{n,m}^*\times\mathcal{L}^m$ 可测映射 $\mathcal{R}:\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m\to\mathbf{I}_{0,K}(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}\mathscr{F}_K^H[\mathcal{S}(T_{N_i}^i-T_0)(p,y)-\mathcal{R}(p,y)]=0 \tag{38}$$

对于 $\boldsymbol{\theta}_{n,m}^*\times\mathcal{L}^m$ 几乎所有的 $(p,y)\in\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m$。

现在，令 $\mathcal{T}^*=\mathcal{R}+\mathcal{S}(T_0)$。根据定义，（38）意味着 $\mathcal{S}(T_{N_i}^i)\to\mathcal{R}+\mathcal{S}(T_0)=\mathcal{T}^*$。由引理4.17，这意味着

$$(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_0))(p,y)(\mathbf{1})=\lim_{i\to\infty}\langle T_{N_i}^i-T_0,p,y\rangle(\mathbf{1})=0$$

$\boldsymbol{\theta}_{n,m}^*\times\mathcal{L}^m$ 几乎所有的 (p,y)，其中第二个等式由 [5, 命题 3.1.6.]给出，因为对于所有的 $i\in\mathbb{N}$ 都有 $\partial T_{N_i}^i=\partial T_0$。这给出了我们的边界条件，即 $\partial(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_0))=0$，也就是$\partial\mathcal{T}^*=\partial(\mathcal{S}(T_0))=\partial\mathcal{T}_0$。因此，$\mathcal{T}^*\in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\partial\mathcal{T}=\partial\mathcal{T}_0$。于是

$$\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^*)\ge\inf\{\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}):\mathcal{T}\in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial\mathcal{T}=\partial\mathcal{T}_0\}.$$

此外，由（32）、（37）和（34），

$$\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^*)\le\text{下极限}_{i\to\infty}\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i)=\text{下极限}_{i\to\infty}\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^i)=\text{下确界}\{\mathbf{M}_H(\mathcal{T}):\ \mathcal{T}\in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)\ \ \partial\mathcal{T}=\partial\mathcal{T}_0\}.$$

因此，$\mathcal{T}^*$ 满足（33）的要求。 □

推论 4.19。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空紧凸子集，且 H 是一个凹被积函数。对于任意 $T_0\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 以及

$$\mathcal{T}^*\in\operatorname{argmin}\{\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}):\mathcal{T}\in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial\mathcal{T}=\partial\mathcal{T}_0\} \tag{39}$$

满足 $\mathcal{T}_0:=\mathcal{S}(T_0)$，我们有 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T}^*)=\Gamma(\mathbf{M}_H,T_0,\mathbb{R}^n)$。

证明。首先，回顾 $\Gamma(\mathbf{M}_H,T_0,\mathbb{R}^n)=\text{下确界}\{\mathbf{M}_H(T):T\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\ \ \partial T=\partial T_0\}$，因为对于最近点投影映射 π_K 下的任意 $T\in\mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n)$，都有$\mathbf{M}_H(\pi_K\#(T))\le\mathbf{M}_H(T)$。

由于 $\mathcal{S}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，根据引理 4.15，有 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T}^*)\le\inf\{\mathbf{M}_H(T):T\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\ \ \partial T=\partial T_0\}=\Gamma(\mathbf{M}_H,T_0,\mathbb{R}^n)$。另一方面，由于每个 $\mathbf{M}_H(T_j^i)\ge\inf\{\mathbf{M}_H(T):T\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\ \ \partial T=\partial T_0\}$，根据 (36)，我们同样有 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T}^*)\ge\Gamma(\mathbf{M}_H,T_0,\mathbb{R}^n)$。因此，所需的是 $\mathbf{M}_H(\mathcal{T}^*)=\Gamma(\mathbf{M}_H,T_0,\mathbb{R}^n)$。

— □

5 带有 H-质量的部分Plateau问题

在本节中，我们假设 $\Phi \in \mathscr{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$， H 是一个凹被积函数，并且 $B \in \mathscr{R}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\mathbf{M}_H(B) < \infty$。

我们感兴趣的是我们所说的带有 H-质量的部分*Plateau*问题：

$$\inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(T) : T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n), \partial T \preceq B\} \quad \text{where} \quad \mathbf{E}_{H,\Phi}(T) := \mathbf{M}_H(T) - \partial T(\Phi). \tag{40}$$

为研究这个问题，与上一节一样，我们将考虑把$\mathbf{E}_{H,\Phi}$扩展到$Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$中的元素，其中固定紧集为 $K \subseteq \mathbb{R}^n$。

对于任意 $\mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，根据定义，存在一个 $T \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\partial \mathcal{T} = \mathcal{S}(\partial T)$。每当 $\partial T \preceq B$ 时，我们就简写为 $\partial \mathcal{T} \preceq \mathcal{S}(B)$。此外，我们定义 $\partial \mathcal{T}(\Phi) := \partial T(\Phi)$，并且

$$\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}) := \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}) - \partial \mathcal{T}(\Phi).$$

这扩展了（**40**）中的$\mathbf{E}_{H,\Phi}$ 的定义，因为由引理 **4.15**，对于任意 $T \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，都有 $\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{S}(T)) = \mathbf{E}_{H,\Phi}(T)$。

定理 *5.1.* 设 K 是 $\mathbb{R}^n$, $\Phi \in \mathscr{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 的一个非空、紧且凸的子集， H 是一个凹被积函数，并设 $B \in \mathscr{R}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathbf{M}_H(B) < \infty$。对于任意 $\mathcal{T}_0 \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，存在一个 scan $\mathcal{T}^* : O^*(n,m) \times \mathbb{R}^m \to I0,_K(\mathbb{R}^n)$，使得 $\mathcal{T}^* \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$， $\partial(\mathcal{T}^* - \mathcal{T}_0) \preceq \mathcal{S}(B)$，并且

$$\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}^*) = \min\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}) : \mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial(\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) \preceq \mathcal{S}(B)\}. \tag{41}$$

此外，若 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{S}(T_0)$ 对某个 $T_0 \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$成立，则

$$\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}^*) = \inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(T) : T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n), \partial(T - T_0) \preceq B\}. \tag{42}$$

该定理的证明将用到以下两个引理。

引理 **5.2.** 设 $B \in \mathscr{R}_k(\mathbb{R}^n)$ 对 $k \geq 0$成立。若 $A \preceq B$，则 A 是一个 k 维实 l 可求长 流，且 $\mathbf{M}_H(A) \leq \mathbf{M}_H(B)$。

证明。由于 $B \in \mathscr{R}_k(\mathbb{R}^n)$,

$$B = \mathcal{H}^k \llcorner M \wedge \theta \xi$$

使得 M 是$(\mathcal{H}^k,\ k)$-可求长子集 $\mathbb{R}^n$， $\theta :\ M \to \mathbb{Z}$ 可求和，且 $\xi :\ M \to \wedge_k(\mathbb{R}^n)$是 k-向量场，定义在 M 上，且与 M的近似切空间一致。由 [15,引理 3.7]， $A \preceq B$ 可推出

$$A = \mathcal{H}^m \llcorner M \wedge \sigma\theta\xi \text{ for some Borel function } \sigma : \mathbb{R}^n \to [0,1].$$

因此,

$$\mathbf{M}_H(A) = \int_M H(\sigma(x)\theta(x))\, d\mathcal{H}^m(x) \leq \int_M H(\theta(x))\, d\mathcal{H}^m(x) = \mathbf{M}_H(B) \tag{43}$$

因为 $0 \leq \sigma \leq 1$ 和 H 单调非递减。 □

引理 *5.3.* 设 $m \in \mathbb{N}$, K 是 $\mathbb{R}^n$, $Z \in \mathscr{R}_{m-1,K}(\mathbb{R}^n)$ 的非空、凸、紧子集，且 $\partial Z = 0$；再设 $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{R}_{m-1,K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\partial Z_j = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$成立。若 $\lim_{j\to\infty} \mathscr{F}_K(Z_j - Z) = 0$，则存在 $C, C_1, C_2, \ldots$ 属于 $\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\partial C = Z$, $\partial C_j = Z_j$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$成立，且 $\lim_{j\to\infty} \mathscr{F}_K(C_j - C) = 0$。

证明。 对于每个 $j \in \mathbb{N}$，令 $C_j = \boldsymbol{\delta}_v \times Z_j$ 和 $C = \boldsymbol{\delta}_v \times Z$ 分别为以固定顶点 $v \in K$ [8, 4 为顶点、底面为 Z_j 和 Z 的锥。1. 11]。注意，由于 K 是凸集，锥 C_j 和 C 位于 $\mathscr{R}_{m,\ K}(\mathbb{R}^n)$ 中。根据同伦公式,

$$\partial C_j = \partial(\boldsymbol{\delta}_v \times Z_j) = Z_j - \boldsymbol{\delta}_v \times \partial Z_j = Z_j \text{ and } \partial C = \partial(\boldsymbol{\delta}_v \times Z) = Z - \boldsymbol{\delta}_v \times \partial Z = Z.$$

对于任意 $\epsilon > 0$，由于 $\lim_{j\to\infty} \mathscr{F}_K(Z_j - Z) = 0$，存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $j \geq N$ 时，均有 $\mathscr{F}_K(Z_j - Z) < \epsilon$。因此，根据平坦范数 $\mathscr{F}_K$ 的定义，存在 R_j 和 S_j ，使得

$$Z_j - Z = R_j + \partial S_j, \text{ and } \mathbf{M}(R_j) + \mathbf{M}(S_j) < \epsilon.$$

Now,

$$C_j - C = \boldsymbol{\delta}_v \ast Z_j - \boldsymbol{\delta}_v \ast Z = \boldsymbol{\delta}_v \ast (Z_j - Z) = \boldsymbol{\delta}_v \ast (R_j + \partial S_j)$$
$$= \boldsymbol{\delta}_v \ast R_j + \boldsymbol{\delta}_v \ast \partial S_j = \boldsymbol{\delta}_v \ast R_j + S_j - \partial(\boldsymbol{\delta}_v \ast S_j),$$

其中最后一个等式用到了同伦公式。假设紧集 K 包含在某个 $\rho > 0$ 的球 $B(\mathbf{0}, \rho)$ 中。那么，

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\delta}_v \ast R_j) \leq \rho \mathbf{M}(R_j) \text{ and } \mathbf{M}(\boldsymbol{\delta}_v \ast S_j) \leq \rho \mathbf{M}(S_j),$$

因此

$$\mathscr{F}_K(C_j - C) \leq \mathbf{M}(\boldsymbol{\delta}_v \ast R_j + S_j) + \mathbf{M}(\boldsymbol{\delta}_v \ast S_j) \leq \rho \mathbf{M}(R_j) + \mathbf{M}(S_j) + \rho \mathbf{M}(S_j) \leq (1 + \rho)\epsilon.$$

这表明，按预期有 $\lim_{j \to \infty} \mathscr{F}_K(C_j - C) = 0$。 □

注 5.4. 定理 *5.1* 的以下证明与定理 *4.18*的证明类似。然而，由于极小化序列的边界并非固定，此处不能直接应用定理*4.18* 。

定理 5.1 的证明。由于 $\mathcal{T}_0 \in \mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，根据定义，存在一个 $T_0 \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\partial \mathcal{T}_0 = \partial(\mathcal{S}(T_0))$。由于零流 $\mathbf{0} \preceq B$， $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{S}(T_0)$ 都包含在集合 $\{\mathcal{T} \in \mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n) : \partial(\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) \preceq \mathcal{S}(B)\}$ 中。令 $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为该集合中的一个 $\mathbf{E}_{H,\Phi}$ 极小化序列。也就是说，对每个 $i = 1 = 2, \ldots,$ 都有 $\mathcal{T}_i \in \mathrm{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，且 $\partial(\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_0) \preceq \mathcal{S}(B)$，并且

$$\lim_{i \to \infty} \mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}_i) = \inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}) : \mathcal{T} \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial(\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_0) \preceq \mathcal{S}(B)\}. \tag{44}$$

不失一般性，我们可以假设对所有$i \in \mathbb{N}$，$\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}_i) \leq \mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{S}(T_0)) = \mathbf{E}_{H,\Phi}(T_0)$。注意，根据定义，我们的边界条件 $\partial(\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_0) \preceq \mathcal{S}(B)$意味着，对每个$i \in \mathbb{N}$，都存在一个$T_i \in \mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\partial \mathcal{T}_i = \partial(\mathcal{S}(T_i))$，且 $\partial(T_i - T_0) \preceq B$。还要注意，根据边界可求 rectifiability 定理， [17], $\partial(T_i - T_0) \in \mathscr{R}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$，因此 $T_i - T_0$ 是积分流。现在，

$$\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_i) = \mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}_i) + \partial T_i(\Phi) \leq \mathbf{E}_{H,\Phi}(T_0) + \partial T_i(\Phi) = \mathbf{M}_H(T_0) + \partial(T_i - T_0)(\Phi) \tag{45}$$
$$\leq \mathbf{M}_H(T_0) + \mathbf{M}(\partial(T_i - T_0))||\Phi|| \leq \mathbf{M}_H(T_0) + \mathbf{M}(B)||\Phi|| < \infty, \tag{46}$$

因为$\mathbf{M}_H(T_0) \leq H(2)\mathbf{M}(T_0) < \infty$ 利用 $H(\theta) \leq H(2)\theta$ 对所有 $\theta \geq 1$ 在方程（20）中。根据（32）中$\mathbf{M}_H$的定义，对每个$i \in \mathbb{N}$，都存在一个序列 $\{T_j^i\}_{j=1}^{\infty}$属于$\mathscr{R}_{m,\,K}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\lim_{j \to \infty} \mathbf{M}_H(T_j^i) = \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_i), \quad \text{and} \quad \partial(\mathcal{S}(T_j^i)) = \partial \mathcal{T}_i \text{ for all } j \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

注意，由于 $\partial(\mathcal{S}(T_j^i)) = \partial \mathcal{T}_i = \partial(\mathcal{S}(T_i))$可知 $\partial T_j^i = \partial T_i$对所有 $i, j \in \mathbb{N}$。由（47），对每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在一个 $N_i \in \mathbb{N}$ 使得

$$|\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i) - \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_i)| \leq \frac{1}{i}. \tag{48}$$

因此，由（46）和（48），对所有 $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T_{N_i}^i - T_0)) = \mathbf{M}_H(T_{N_i}^i - T_0) \leq \mathbf{M}_H(T_{N_i}^i) + \mathbf{M}_H(T_0)$$
$$\leq \underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_i) + 1 + \mathbf{M}_H(T_0) \leq 2\mathbf{M}_H(T_0) + \mathbf{M}(B)||\Phi|| + 1.$$

此外，根据 [5, 注 3.3。3], [5, 引理 3.1。2], 引理 5.2 以及 $\partial T_{N_i}^i = \partial T_i$，可得

$$\mathbf{D}(\mathcal{S}(T_{N_i}^i - T_0)) \leq \mathbf{c}_1[\mathbf{M}_H((T_{N_i}^i - T_0) \times [\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!]) + \mathbf{M}_H(\partial((T_{N_i}^i - T_0) \times [\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!]))]$$
$$= \mathbf{c}_1[\mathbf{M}_H((T_{N_i}^i - T_0) \times [\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!]) + \mathbf{M}_H(\partial((T_i - T_0) \times [\![\mathbf{O}^*(n,m)]\!]))]$$
$$\leq \mathbf{c}_2[\mathbf{M}_H(T_{N_i}^i - T_0) + \mathbf{M}_H(\partial(T_i - T_0))]$$
$$\leq \mathbf{c}_2[2\mathbf{M}_H(T_0) + \mathbf{M}(B)||\Phi|| + 1 + \mathbf{M}_H(B)],$$

其中常数 $\mathbf{c}_1$ 和 $\mathbf{c}_2$ 仅依赖于 n 和 K。因此，对于每个 i,

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_H(\mathcal{S}(T^i_{N_i}-T_0))+\mathbf{D}(\mathcal{S}(T^i_{N_i}-T_0))\\&\le(1+\mathbf{c}_2)(2\mathbf{M}_H(T_0)+\mathbf{M}(B)||\Phi||+1)+\mathbf{c}_2\mathbf{M}_H(B)<\infty.\end{aligned}$$

现在，根据推论 4.6 并在必要时将 $\{T^i_{N_i}\}$ 替换为一个子序列，我们可以假设

$$\lim_{i\to\infty}\mathscr{F}^H_K[\mathcal{S}(T^i_{N_i}-T_0)(p,y)-\mathcal{R}(p,y)]=0 \tag{49}$$

对于 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m}\times\mathcal{L}^m$ 几乎处处的 (p,y)，$\in \mathsf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m$，其中 $\mathcal{R}:\mathsf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m\to \mathsf{I}0,_K(\mathbb{R}^n)$ 是一个可测映射。令 $\mathcal{T}^*=\mathcal{R}+\mathcal{S}(T_0)$。根据定义，(49) 蕴含 $\mathcal{S}(T^i_{N_i})\to\mathcal{T}^*$。由引理 4.17 可知，对于几乎处处的 (p,y),

$$\lim_{i\to\infty}(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_i))(p,y)(\mathbf{1})=\lim_{i\to\infty}(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T^i_{N_i}))(p,y)(\mathbf{1})+\lim_{i\to\infty}\langle T^i_{N_i}-T_i,p,y\rangle(\mathbf{1})=0, \tag{50}$$

wh此处第二个等式由 [5, 命题 3.1.6 给出。] 因为 $\partial T^i_{N_i}=\partial T_i$ 对于所有 $i\in\mathbb{N}$.

我们的下一个目标是证明 $\mathcal{T}^*\in \mathsf{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 并满足边界条件 $\partial(\mathcal{T}^*-\mathcal{T}_0)\preceq\mathcal{S}(B)$。由于 $\partial(\mathcal{T}^*-\mathcal{T}_0)=\partial(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_0))=\partial\mathcal{R}$，只需证明对于某个 $C\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$（其中 $\partial C\preceq B$），有 $\partial\mathcal{R}=\partial(\mathcal{S}(C))$。由于 $\partial(T_i-T_0)\preceq B$，对于每个 i，我们有 $\mathsf{M}(\partial(T_i-T_0))\le\mathsf{M}(B)<\infty$。根据可求长流的紧致性定理，并在必要时将 (T_i-T_0) 替换为一个子序列，我们可以假设 $\lim_{i\to\infty}\mathscr{F}_K(\partial(T_i-T_0)-S)=0$，其中某个$S\in\mathscr{R}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$。由于 $\partial(T_i-T_0)\preceq B$，由引理 3.2 可得 $S\preceq B$。

设 $C_i=\boldsymbol{\delta}_v\ast\partial(T_i-T_0)$ 和 $C=\boldsymbol{\delta}_v\ast S$ 是顶点固定为 $v\in K$的锥。注意到 C_i和 C都属于$\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，因为 K是凸集。于是，$\partial C_i=\partial(T_i-T_0)$，并由引理5.3，$\lim_{i\to\infty}\mathscr{F}_K(C_i-C)=0$。由积分几何等式，

$$\int_{\mathbf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m}\mathscr{F}_K(\langle C_i-C,p,y\rangle)\,d\left(\boldsymbol{\theta}^*_{n,m}\times\mathcal{L}^m\right)(p,y)\le\boldsymbol{\beta}_1(n,m)\mathscr{F}_K(C_i-C)\to 0.$$

因此，对 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m}\times\mathcal{L}^m$-几乎处处的 $(p,y)\in\mathsf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m$，$\lim_{i\to\infty}\mathscr{F}_K(\langle C_i-C,p,y\rangle)=0$。因此，对 $\boldsymbol{\theta}^*_{n,m}\times\mathcal{L}^m$-几乎处处的 $(p,y)\in\mathsf{O}^*(n,m)\times\mathbb{R}^m$，由 (50) 得，

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}-\mathcal{S}(C))(p,y)(\mathbf{1})&=(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_0)-\mathcal{S}(C))(p,y)(\mathbf{1})\\&=\lim_{i\to\infty}(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_i))(p,y)(\mathbf{1})+\lim_{i\to\infty}\langle T_i-T_0-C_i,p,y\rangle(\mathbf{1})=0,\end{aligned}$$

因为 $\partial C_i=\partial(T_i-T_0)$。这表明 $\partial(\mathcal{R}-\mathcal{S}(C))=0$。由于 $\partial C=S\preceq B$，我们有 $\partial\mathcal{R}=\mathcal{S}(\partial C)\preceq\mathcal{S}(B)$。这给出了我们的边界条件，$\partial(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_0+C))=\partial(\mathcal{R}-\mathcal{S}(C))=0$。由于 $\mathcal{S}(T^i_{N_i})\to\mathcal{T}^*$，可知 $\mathcal{T}^*\in\mathsf{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\partial(\mathcal{T}^*-\mathcal{S}(T_0))=\partial\mathcal{R}\preceq B$。因此，$\mathcal{T}^*$ 属于集合 $\{\mathcal{T}\in\mathsf{Scan}_{m,K}(\mathbb{R}^n):\partial(\mathcal{T}-\mathcal{S}(T_0))\preceq\mathcal{S}(B)\}$。此外，由 (32)、(48) 和 (44),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}^*)&=\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}^*)-\partial(T_0+C)(\Phi)\\&\le\liminf_{i\to\infty}\mathbf{M}_H(T^i_{N_i})-\lim_{i\to\infty}\partial(T_0+C_i)(\Phi)\\&=\liminf_{i\to\infty}\underline{\mathbf{M}}_H(\mathcal{T}_i)-\lim_{i\to\infty}\partial T_i(\Phi)\\&=\liminf_{i\to\infty}\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}_i)\\&=\inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}):\mathcal{T}\in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n),\ \partial(\mathcal{T}-\mathcal{S}(T_0))\preceq\mathcal{S}(B)\}.\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{T}^*$ 是所需的$\mathbf{E}_{H,\Phi}$ 满足（41）的极小化子。

现在，假设 $\mathcal{T}_0=\mathcal{S}(T_0)$ 对某个$T_0\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)$ 成立。我们证明（42），如下所示。由于$\{\mathcal{S}(T):T\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n)\}\subseteq Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$，由引理4.15可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{H,\Phi}(\mathcal{T}^*)&\le\inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(T):T\in\mathscr{R}_{m,K}(\mathbb{R}^n),\partial(T-T_0)\preceq B\}\\&=\inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(T):T\in\mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n),\partial(T-T_0)\preceq B\}\le\mathbf{E}_{H,\Phi}(T^i_{N_i})\end{aligned}$$

对于每个 i。取 $i\to\infty$，由（47），我们得到所需的等式（42）。 □

特别地，当 $T_0 = 0$ 时，我们有如下推论。

推论 *5.5.* 设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个非空、紧且凸的子集， $\Phi \in \mathscr{D}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$是一个凹被积函数，并且 $B \in \mathscr{R}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $M_H(B) < \infty$。那么存在 $T^* : O^*(n, m) \times \mathbb{R}^m \to I0,_K(\mathbb{R}^n)$，使得 $T^* \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n)$， $\partial T^* \preceq S(B)$，并且

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{H,\Phi}(T^*) &= \min\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(T) : T \in Scan_{m,K}(\mathbb{R}^n), \partial T \preceq \mathcal{S}(B)\} \\ &= \inf\{\mathbf{E}_{H,\Phi}(T) : T \in \mathscr{R}_m(\mathbb{R}^n), \partial T \preceq B\}.\end{aligned}$$

参考文献

[1] F Almgren. 变形与多值函数。几何测度论与变分法（加利福尼亚州阿卡塔，*1984*），44:29–130，1986。[2] L. Ambrosio 和 B. Kirchheim. 度量空间中的流。《数学学报》，185(1):1–80，2000。[3] Marc Bernot、Vicent Caselles 和 Jean-Michel Morel.《最优输运网络：模型与理论》。施普林格，2008。[4] Luis A Caffarelli 和 Robert J McCann. 最优输运中的自由边界与 Monge-Ampère 障碍问题。《数学年刊》，第 673–730 页，2010。[5] Thierry De Pauw 和 Robert Hardt. 尺寸极小化与逼近问题。《变分法与偏微分方程》，17(4):405–442，2003。[6] Lawrence C Evans 和 Ronald F Gariepy.《测度论与函数的精细性质》，第 5 卷。CRC 出版社，修订版，2015。[7] Herbert Federer.《几何测度论》。数学经典丛书。施普林格出版社，1969。[8] Herbert Federer 和 Wendell H. Fleming. 正则流与积分流。《数学年刊》，第 458–520 页，1960。[9] Alessio Figalli. 最优部分输运问题。《理性力学与分析档案》，195(2):533–560，2010。[10] Wendell H Fleming. 关于定向 Plateau 问题。《巴勒莫数学会汇刊》，11(1):69–90，1962。[11] Wendell H Fleming. 20 世纪 60 年代布朗大学的几何测度论，2015。[12] Frank Morgan. 尺寸极小化可求长流。《数学创刊》，96(2):333–348，1989。[13] Frank Morgan.《几何测度论：初学者指南》。学术出版社，第 3 版，2000。[14] Johannes C Nitsche.《极小曲面讲义：第 *1* 卷》。剑桥大学出版社，1989。[15] Emanuele Paolini 和 Eugene Stepanov. 作为平坦链的最优输运网络。《界面与自由边界》，8(4):393–436，2006。[16] E. R. Reifenberg. 对 m维曲面 Plateau 问题的解及其变化的拓扑类型。《数学学报》，104:1–92，1960。[17] Leon Simon. 几何测度论讲义——澳大利亚国立大学数学分析中心论文集。1984。[18] Qinglan Xia. 与输运问题相关的最优路径。《当代数学通讯》，5(02):251–279，2003。[19] Qinglan Xia. 分枝最优输运的动机、思想与应用。《*ESAIM*：数学建模与数值分析》，49(6):1791–1832，2015。[20] Qinglan Xia 和 Shaofeng Xu. 边界上带有收益的分枝最优输运。《*SIAM* 数学分析杂志》，55(1):186–209，2023。