arXiv:2305.05753v1 [math.CO] 9 May 2023

k不可整除分拆中的部分总是表现出剩余类之间的偏差

FAYE JACKSON 和 MISHEEL OTGONBAYAR

Abstract. 设 k,t 为互素整数，且令 $1 \le r \le t$。我们用 $D_k^{\times}(r,t;\,n)$ 表示 n 的所有 k-可整除分拆（即没有任何部分能被 k 整除的分拆）中，模 t 与 r 同余的部分总数。作者此前的工作 [3]，给出了 $D_k^{\times}(r,t;\,n)$ 的渐近估计，表明不同同余类之间存在难以预测的偏向。在本文中，我们证实了先前的猜想 [3]：对于不同的同余类，这个渐近展开中不会出现“并列”（即相等）。为得到这一结果，我们将这个问题重新表述为关于 L-函数的问题，随后运用 Baker、Birch 和 Wirsing[1] 的一个非零性结果，得出结论：当 n 趋于无穷大时，在 n 的所有 k-可整除分拆的部分中，模 t 总是存在一个同余类比其他同余类更受偏向。

1. Introduction

整数 $n>0$ 的一个 k-不可整除分拆是一个非递增正整数序列 $\lambda=(\lambda_1、\ldots\ldots、\lambda_m)$，满足对所有 j 和 $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=n$，$k\nmid\lambda_j$。我们用 $\mathcal{D}_k^{\times}(n)$ 表示 n 的所有此类 k-不可整除分拆的集合。在先前的研究中（见 [3]），作者考察了 n 的所有 k-不可整除分拆中，与固定模数 t 下的 r 同余的部分数。形式上，这个数量可定义为

$$D_k^{\times}(r,t;n)\coloneqq\sum_{\lambda\in\mathcal{D}_k^{\times}(n)}\#\{\lambda_j\mid\lambda_j\equiv r\pmod t\}.$$

利用 Wright 圆法，作者证明了当 k、$t\ge 2$ 互素且 $1\le r\le t$ 时（见 [3, 定理 1.1]），$D_k^{\times}(r、t;n)$ 在 $n\to\infty$ 时满足以下渐近估计：

$$D_k^{\times}(r,t;n)=A_{k,t}(n)\left(\frac{K}{2}\log n+\left(-\psi\left(\frac{r}{t}\right)+k^{-1}\psi\left(\frac{\rho_{k,t}(r)}{t}\right)\right)+C_{k,t}+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\log n\right)\right),\quad(1.1)$$

其中，$\psi(x)\coloneqq\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ 是双伽马函数，$1\le\rho_{k,\,t}(r)\le t$ 是 $k^{-1}r$ 模 t 的一个代表元，并且

$$K\coloneqq 1-\frac{1}{k}\qquad C_{k,t}\coloneqq\frac{K}{2}\log\left(\pi\sqrt{\frac{K}{6}}\right)-K\log t+\frac{\log k}{k}\qquad A_{k,t}(n)\coloneqq\frac{3^{\frac{1}{4}}e^{\pi\sqrt{\frac{2Kn}{3}}}}{2^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{4}}\pi t\sqrt{k}}.$$

这个渐近展开意味着模t的同余类之间存在弱渐近等分布，即对于每个 $1\le r,s\le t$ 我们有 $\frac{D_k^{\times}(r,t;n)}{D_k^{\times}(s,t;n)}\to 1$ 当 $n\to\infty$ 时。然而，它也意味着存在偏向

Date: 2023年5月11日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 05A17,11P82,11P81。*Key words and phrases.* 分拆中的部分，k-不可整除分拆，L-函数，双伽马函数。[1]在 [3], 中，这个代表元$\rho_{k,\,t}(r)$记作 r，省略了对 k，t的依赖。由于这种依赖会在后续证明中出现，本文保留了它。

某些同余类。如果我们定义

$$\psi_{k,t}(r) \coloneqq -\psi\left(\frac{r}{t}\right) + \frac{1}{k}\psi\left(\frac{\rho_{k,t}(r)}{t}\right),$$

那么，如果 $\psi_{k,t}(r) < \psi_{k,t}(s)$，则对于足够大的 n，有 $D_k^{\times}(r,t;\ n) < D_k^{\times}(s,t;\ n)$。这促使人们在整数 $\{1,\dots,t\}$（等价地，在 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$）上定义一种序 $\prec_{k,t}$，其中，只要 $D_k^{\times}(r,t;\ n) < D_k^{\times}(s,t;\ n)$ 对充分大的 n 成立，就有 $r \prec_{k,t} s$。这种序同时取决于 k 的大小以及 k 模 t 的同余类，而且极其复杂。关于 $\prec_{k,t}$ 已知性质的详细介绍，请参阅作者此前的论文 [3]。从方程（1.1）中无法明确看出，$\prec_{k,t}$ 必然构成全序，因此作者此前的论文中提出了以下猜想。

猜想（无并列猜想 [3, 猜想 1.3]）。当k、 $t \geq 2$ 互素时，序$\prec_{k,t}$ 是 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 上的全序。

以下定理解决了这一猜想，并构成本论文的主要结果。

定理 1.1。 设 k、 $t \geq 2$ 互素，则对于任意 $1 \leq r \neq s \leq t$，有 $\psi_{k,\,t}(r) \neq \psi_{k,\,t}(s)$。由此可得，无并列猜想成立。

注。 一般而言，集合 $\{\psi_{k,t}(r) \mid 1 \leq r \leq t\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上并非线性无关，即使 k,t互素也是如此。这可通过以下来自 [2]的例子看出：

$$\psi(1/4) - 3\psi(1/2) + \psi(3/4) + \psi(1) = 0.$$

对任意与 4 互素的 k，按 $\frac{1}{1-1/k}$ 进行缩放可得

$$\psi_{k,4}(1) - 3\psi_{k,4}(2) + \psi_{k,4}(3) + \psi_{k,4}(4) = 0,$$

对于任意 $1 \leq r \leq 4$，因为 $k^{-1}r \equiv r$ 模 4】【。

从定性的角度来看，定理 1.1 指出，在渐近展开的二阶项中，不同同余类之间不存在“并列”（即相等）。我们用于证明定理1.1 的技巧，受到 Gun、Murty 和 Rath 关于集合 $\{\psi(a/t) \mid \gcd(a,t) = 1\}$ 在不同数域 [2]上之线性无关性的研究启发。特别地，我们利用了 Murty 和 Saradha 在 L中所发展的 - 函数与有理点处双伽马函数值的线性组合之间的联系。此外，我们还运用相同的技巧，证明了一个关于有理点处双伽马函数值之间线性关系结构的更一般定理。 [4]

定理 1.2。 设 K 是 $\mathbb{Q}$ 的某个有限扩张，且在该扩张上 t次分圆多项式不可约。对于函数 $f\colon \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \to K$，令 $A_f\colon = \{\gcd(n,t) \mid f(n) \neq 0\}$。现在设 $f\colon\ \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \to K$是某个非零函数，满足

$$\sum_{n=1}^{t} f(n)\psi(n/t) = 0 \qquad\qquad \sum_{n=1}^{t} f(n) = 0. \tag{1.2}$$

那么，对于任意整除 t 的 a，都有 $A_f \not\subseteq \{a,t\}$ 。

此外，若 A_f 是在满足方程 (1.2)的函数中按包含关系极小的函数，则 $f(n) = f(hn)$ 对所有 n 以及任意满足 $h \in (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^\times$ 的 $h \equiv 1$(模 t/a) 均成立，其中任意 $a \in A_f$。

通过将这些问题转化为某些 L-函数不为零的情形，我们得以运用 Baker、Birsch 和 Wirsing 在 [1] 中的论证，将定理1.1和1.2 归结为关于（$\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$）$^\times$（即 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 中可逆元群）在 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 上的作用的简单事实。

注。定理1.1 可通过一个简短的论证由定理1.2推出。不过，为了便于阐述，我们将定理 1.1独立证明，因为在这里，使用等价关系的语言可以使论证表述得更加简洁清晰。

为方便起见，我们将等式 $\psi_{k,t}(r) = \psi_{k,t}(s)$ 称为 k-不可分拆中 r, s 模t 的一个“并列”。我们的目标是证明，任何这样的并列都意味着 $r = s$。本文安排如下。第2节详细阐述 L-函数与并列之间的关系，并借此证明并列若存在就必须满足的一些关键性质。第3节利用这些性质证明定理 1.1。第4节采用相同的方法证明定理 1.2。第5节还将 Baker、Birch 和 Wirsing 基本引理改用现代伽罗瓦表示理论的语言重新表述。最后，我们在第6节提出关于 $\psi_{k,t}(r)$ 行为的后续问题。

Acknowledgements

作者是2022年UVA数论本科生研究体验项目的参与者。他们谨向UVA数论本科生研究体验项目主任 Ken Ono、研究生导师 William Craig 以及 Steven J. Miller 致谢，感谢他们给予的支持和宝贵意见。他们也感谢UVA数论本科生研究体验项目的同伴给予鼓励和支持。他们感谢美国国家科学基金会（DMS-2002265、DMS-2055118、DMS-2147273）、美国国家安全局（H98230-22-1-0020）以及坦普尔顿世界慈善基金会提供的资助。

Data Availability

作者使用 Mathematica 编写了一个程序，用于生成第6节中的图表。该程序可从 GitHub 获取，地址为

https://github.com/FayeAlephNil/KRegularBiases

或者，也可在提出合理请求后向作者索取。

2. Propagation of Ties

我们希望证明，我们的渐近展开的二阶项中不存在并列。在开始之前，我们将把问题重新表述为关于有理数域上的等价关系的问题，因为这种记号对我们很有用。

定义 2　.1. 设 k、t 互素。对于任意 $1 \le r$、$s \le t$，若 $r \sim_{k,t} s$，则称.....

$$\psi_{k,t}(r) = \psi_{k,t}(s).$$

我们可以将 r、s 视为 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 的元素，从而将该等价关系视为 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 上的关系。我们使用记号 $[r]_{k,\,t}$ 表示 r 的等价类。

我们的目标是证明 $\sim_{k,\,t}$ 是平凡的，也就是说，$r \sim_{k,\,t} s$ 推出 $r = s$。为了证明定理 1.1，我们必须先探究 $\sim_{k,\,t}$ 的性质。根据我们此前在 [3]，中的工作，我们已经知道$[1]_{k,\,t} = \{1\}$。我们的主要方法是归结到这一事实；具体而言，我们能够从 $\sim_{k,\,t}$ 的以下三个性质推出该定理。

引理 2.2。设 k、t 互素且 $1 \leq r$、$s \leq t$，则有如下结论。
(1) 若 r、s、t 有公因子 x，则 $\frac{r}{x} \sim_{k,\,t/x} \frac{s}{x}$。*(2)* 若 $1 \sim_{k,\,t} r$，则 $r = 1$。*(3)* 若 $r \sim_{k,\,t} s$，且 h 与 t 互素，则 $rh \sim_{k,\,t} sh$。

第一个性质源于这样一个事实：当 x 整除 r, t 时，$\psi_{k,t}(r) = \psi_{k,t/x}(r/x)$。这可直接通过计算 $\rho_{k,t}(r) = \rho_{k,t/x}(r/x)$ 得出，而这一点可用初等模运算证明（回想一下，$1 \leq \rho_{k,t}(r) \leq r$ 是 $k^{-1}r$ 模 t 的一个代表元）。第二个性质已如前文所述，在 [3]，中得到证明。为了证明第三个性质，我们将利用 Murty 和 Saradha 在 [4] 中建立的与 L-函数的联系。

2.1. **并列与 L-函数的消失**。为理解并列的存在性，我们首先运用 Murty 和 Saradha 的一项结果（见 [4]），将其与某个特定的类 Dirichlet L-函数的非零性联系起来。接着，我们将应用 Baker、Birch 和 Wirsing 关于此类 L-函数的非零定理的证明中出现的一个关键引理（见 [1]）。以下关于这种联系的阐述遵循 Murty、Gun 和 Rath 在 [2] 中的论述。

首先，设 f 是一个周期为 t 的周期算术函数。在全文中，f 取代数值；事实上，在我们的应用中，f 的取值将是有理数。对于这个函数，我们可以关联一个 L 级数

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

其在 Re $s > 1$ 时收敛。众所周知，$L(s, f)$ 可以解析延拓到整个复平面，除了 $s = 1$ 之外，在此处 $L(s, f)$ 可能有一个简单极点。该极点处的留数由 $\sum_{r=1}^{t} f(r)$ 给出。此外，如果该留数为零，那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$$

收敛到 $L(1,\ f)$。正如 Murty 和 Saradha [4] 所示，这可以与双伽马函数在有理数自变量处的求和联系起来，因为在这种情况下

$$L(1, f) = -\frac{1}{t} \sum_{r=1}^{t} f(r)\psi(r/t). \tag{2.1}$$

这给出了我们对函数 f 的候选选择。令 $\mathbb{1}_r \colon \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ 为模 t 同余类 r 的示性函数。定义

$$f_{r,s}(n) := -\mathbb{1}_r(n) + \mathbb{1}_s(n) + \frac{\mathbb{1}_{k^{-1}r}(n)}{k} - \frac{\mathbb{1}_{k^{-1}s}(n)}{k}. \tag{2.2}$$

由方程（2.1）可知， $L(1, f_{r,s}) = 0$ 当且仅当 $r \sim_{k,t} s$，因为

$$L(1, f) = -\frac{1}{t}\left(\psi_{k,t}(r) - \psi_{k,t}(s)\right).$$

由于 Baker、Birch 和 Wirsing 的结果涉及形如 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{(n)}\, n$ 的级数，因此我们已将问题转化为这种形式。采用他们的记号，令 F_t 为这类函数 f的集合，这些函数以 t 为周期并取代数值，且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

为方便起见，我们还用 $\mathbb{Q}$ 表示代数数，并令 $\xi = e^{2\pi i/t}$。现在我们可以陈述关键引理了。

引理 2.3 (Baker、Birch、Wirsing [1, 引理 4]). 设 f 以 t 为周期，且假设$L(1, f) = 0$。此外，设 σ 为 $\mathbb{Q}$的任意自同构，并令 h 为模 t定义的整数，满足 $\sigma^{-1}\xi = \xi^h$。那么 $f^\sigma(n) := \sigma f(hn)$ 也满足 $L(1, f^\sigma) = 0$。

有了这个引理，我们便可以证明引理 3中的第 2.2 项。

引理 *2.2*中第 *3* 项的证明。 设 r， $s \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 并设 f 由方程（2.2）定义。此外，固定某个 h ，使其与 t互素。由互素性可知，存在一个自同构 σ ，它属于 $\mathbb{Q}$ ，且满足$\sigma^{-1}\xi = \xi^h$。此外，由于 f 取有理数值，我们可知

$$f^\sigma(n) = \sigma f(hn) = f(hn).$$

现在我们可以计算得到，作为定义在 $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$上的函数，

$$\begin{aligned} f^\sigma(n) &= -\mathbb{1}_r(hn) + \mathbb{1}_s(hn) + \frac{\mathbb{1}_{k^{-1}r}(hn)}{k} - \frac{\mathbb{1}_{k^{-1}s}(hn)}{k} \\ &= -\mathbb{1}_{h^{-1}r}(n) + \mathbb{1}_{h^{-1}s}(n) + \frac{\mathbb{1}_{k^{-1}h^{-1}r}(n)}{k} - \frac{\mathbb{1}_{k^{-1}h^{-1}s}(n)}{k}. \end{aligned}$$

由于我们知道 $r \sim_{k,t} s$当且仅当 $L(1, f) = 0$，因此由引理 2.3可得 $L(1, f^\sigma) = 0$。进而可推出 $h^{-1}r \sim_{k,t} h^{-1}s$。由于 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^\times$ 是一个群，这就足够了。 □

3. Proof of Theorem 1.1

借助上述传播结果，我们可以开始证明$\sim_{k,t}$ 是平凡的。我们将仅使用$\sim_{k,t}$ 在引理2.2中列出的性质，现回顾如下。

(1) 如果 $x \mid r, s, t$ 且 $r \sim_{k,t} s$ ，那么 $\frac{r}{x} \sim_{k,t/x} \frac{s}{x}$。

(2) $1 \sim_{k,t} s$ 意味着 $s = 1$。 (3) 如果 h 与 t 互素，且 $r \sim_{k,t} s$ ，那么 $rh \sim_{k,t} sh$。

我们从最简单的情况开始，即 r， s 中有一个与 t 互素。

引理 3.1。 如果 $r \sim_{k,t} s$ 且 r、 s 中有一个与 t 互素，则 $r = s$。此外，如果 $r \sim_{k,t} s$ 且最大公约数(r, t) =最大公约数(s, t) 则 $r = s$。

证明。 不失一般性，设 r 与 t互素。于是根据第 3 条， $1 \sim_{k,t} r^{-1}s$，因此 $s = r$ 因为$[1]_{k,t} = \{1\}$。后一陈述根据第 1 条，对 $\gcd(r, t) = \gcd(s, t)$ 进行约化即可得出。 □

现在我们处理一般情形。为导出矛盾，取满足$r \sim_{k,t} s$的 $r \neq s$ within $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$。此外，取 t 为此情况出现时最小的 t。为方便起见，令 $a = \gcd(r,t) > 1, b = \gcd(s,t) > 1$ 且 $r = ar', s = bs'$（$a = 1$ 或 $b = 1$ 是上文的互素情形)。若$x \mid a, b$ 且 $x > 1$，那么我们可以通过条目 1 将 r, s, t 按 x 缩减，从而得到一个 t更小的平局。由于我们取的是最小的 t，这就产生了矛盾。因此必有 $\gcd(a,b) = 1$。$a, b > 1$ 中至少有一个是奇数，因此不失一般性，令 $p \mid a$，且 $p > 2$。

我们的目标是在这里构造一些 h 与 t 互素的数，使得 $rh \equiv r$ （模 t），且 $sh \not\equiv s$ （模 t）。这样我们就有$sh \sim_{k,\ t} s$，但 $\gcd(sh, t) = \gcd(s, t)$，因为 h 与 t互素。这与引理3.1矛盾。由于这一事实完全属于初等数论的范畴，我们将其单独列为一个引理。

引理 3.2。设 $r, s \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 满足 最大公约数(r,t),最大公约数$(s,t) > 1$ 互素。此外，设 $p > 2$ 是某个素数，使得 $p \mid$ 最大公约数(r,t)。那么存在某个与 t 互素的 h，使得 $rh \equiv r$ (模 t)，但 $sh \not\equiv s$ (模 t)。

证明。我们设

$$h \coloneqq \frac{ty}{p} + 1,$$

其中 y 是一个模 p非零的整数。我们声称可以选择模 p 的 y，使得 h满足所需性质。首先我们看到

$$rh = \frac{rty}{p} + r \equiv r \pmod{t}$$
$$sh = \frac{sty}{p} + s \not\equiv s \pmod{t}.$$

第一个结论成立，因为 $p \mid r$，所以 $t \mid rty/p$。第二个结论成立，因为若 $t \mid sty/p$，则有 $p \mid sy$；但若 $p \mid sy$，则 $p \mid$ 最大公约数 $(s,\ t)$ 或 $p \mid y$。在第一种情况下，最大公约数 $(r,\ t)$ 和最大公约数 $(s,\ t)$ 不互素；在第二种情况下，$y \equiv 0$ (模 p)。

现在我们必须证明，可以选择 y，使得 h 与 t互素。令 $p' \neq p$ 为整除 t的某个素数。则 $h \equiv 1$ (模 p')。模 p，我们得到 $h \equiv \frac{ty}{p} + 1$，因此只需选取某个$y \not\equiv 0$ (模 p)，使得 $ty/p \not\equiv -1$ (模 p)。至多有一个模 p 的 y 满足 $ty/p \equiv -1$(模 p)，而 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$有 $p - 1 > 1$ 个非零元素。因此，选取一个 $y \not\equiv 0$ (模 p)，使得$ty/p \not\equiv -1$ (模 p)。这样的 y 使得 h 不被任何整除 t的素数整除，因此 $h,\ t$ 如所需互素。□

由此，我们得到定理 1.1，证明如上所述。 □

4. Proof of Theorem 1.2

固定一个有限扩张 K，它是 $\mathbb{Q}$ 的扩张，且 t 次分圆多项式在其上不可约。此外，固定一个函数 $f : \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \to K$，使其满足

$$\sum_{n=1}^{t} f(n)\psi(n/t) = 0 \qquad \sum_{n=1}^{t} f(n) = 0. \tag{4.1}$$

通过与 L-函数的联系，这等价于以下条件：

$$L(1,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}=0.$$

与之前一样，设 $\xi_t:=e^{2\pi i/t}$ 是一个本原的 t 次单位根。根据 [1, 定理 1]，，我们不可能有 $A_f\subseteq\{1,t\}$。类似地，我们有以下更一般的结果。

引理 4.1. $A_f\not\subseteq\{a,t\}$ 对任意 $a\in\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$。

证明。假设 ose $A_f\subseteq\{a,t\}$。我们看到，上述线性组合可以改写为 as

$$\sum_{\substack{n=1\\ \gcd(n,t)=a,t}}^{t} f(n)\psi\left(\frac{n/a}{t/a}\right)=0.$$

令 $g(m)=f(ma)$，则 $g\colon\ \mathbb{Z}/(t/a)\mathbb{Z}\to K$，并且 $L(1,\ g)=0$，因为

$$\sum_{m=1}^{t/a} g(n)\psi(m/t)=0 \qquad\qquad \sum_{m=1}^{t/a} g(n)=0.$$

因此，由 [1, 定理 1], 可知，这会导致矛盾，因为 $A_g\subseteq\{1,t/a\}$；显然，第 t/a 个分圆多项式在 K 上不可约。□

这也表明 $|A_f|\geq 2$。现在假设 A_f 是满足方程（4.1）的非零函数中关于子集包含关系极小的函数。

固定一个 r，使得 $f(r)\neq 0$，并令 $a\colon=\gcd(r,\ t)$。我们必须证明等式 $f(n)=f(hn)$ 对任意 n 以及任意满足 $h\in(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^{\times}$ 的 $h\equiv 1$ (模 t/a) 均成立。首先，由引理 2.3 可知

$$\sum_{n=1}^{t} f(hn)\psi(n/t)=0,$$

因为存在某个 $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$，使得 $\sigma^{-1}\xi_t=\xi_t^h$，而第 t 个分圆多项式在 K 上不可约。这意味着 $L(1,\ f^{\sigma})=0$，进而推出所要证明的等式。现在令 $g(n)=f(n)-f(hn)$。我们看到

$$\sum_{n=1}^{t} g(n)\psi(n/t)=0 \qquad\qquad \sum_{n=1}^{t} g(n)=0.$$

We 现在将证明 $A_g\subsetneq A_f$，从而对于所有 n，$g(n)=0$，由此证明该定理 .

首先注意到 $A_g\subseteq A_f$，因为 $\gcd(hn,t)=\gcd(n,t)$。因此，只需证明 $a\notin A_g$。为此，令 $s\in\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$，且 $\gcd(s,t)=a$。我们先计算 hs 模 t。为此注意，由于$a\mid s$ 且 $t/a\mid h-1$，我们有 $t\mid(h-1)s$，因此 $hs=s$ (模 t)。至此证明完成，因为对于所有这样的 s，$g(s)=0$，这表明 $A_g\subsetneq A_f$。□

5. Connection to Galois Representations

Baker、Birch 和 Wirsing 的关键引理可以用伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ 的一个 K-线性表示来表述。这揭示了双伽马函数在有理数值处的取值之间的线性关系与表示论之间一种出乎意料的联系。在本节中

，我们将考虑以下 $\mathbb{Q}$-向量空间 V：

$$\mathcal{F} \coloneqq \left\{ f : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}} \mid f \text{ is periodic} \right\}.$$

请注意， $\mathcal{F}$ 是一个可数维的 $\mathbb{Q}$ 向量空间。该向量空间配备了从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathbb{C}$的线性映射 $L(s, -)$，由 L-函数给出。

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

对于 $\mathrm{Re}(s) > 1$。我们特别感兴趣的是这些子空间

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0 &\coloneqq \left\{ f \in \mathcal{F} \mid \sum_{n=1}^{t} f(n) = 0, \text{ where } t \text{ is the period of } f \right\} \\ \mathcal{F}_K &\coloneqq \{ f \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) \in K \} \\ \mathcal{F}_{K,t} &\coloneqq \{ f \in \mathcal{F}_K \mid f \text{ has period } t \}, \end{aligned}$$

以及 $\mathcal{F}_K^0, \mathcal{F}_{K,t}^0$（以与 $\mathcal{F}^0$ 相同的方式定义）。在 $\mathcal{F}^0$ 上，上述 L-函数可以扩展到 $s = 1$，因此

$$L(1, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$$

在 $\mathcal{F}^0$ 上定义一个线性算子。在上一节中，我们重点探讨了某些线性组合是否属于 $L(1, -)$ 的核。Baker、Birch 和 Wirsing 的关键引理表明，这个核在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ 的某种作用下保持不变。

命题 1. 设 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$。对于任意 $f \in \mathcal{F}$，定义 f^σ 如下：

$$f^\sigma(n) = \sigma f(hn)$$

其中，若 f 的周期为 t，则 h 定义在模 t 下为 $\sigma^{-1}\xi_t = \xi_t^h$。事实上，$(\sigma, f) \mapsto f^\sigma$ 定义了一个 K-线性表示：$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$。

此外，若 $L \subseteq \mathbb{Q}$ 是 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ 不变的，则 $\mathcal{F}^0$、$\mathcal{F}_L$、$\mathcal{F}_{L,\,t}$ 是该表示的不变子空间。更值得注意的是，$\ker L(1, -)$ 是 $\mathcal{F}^0$ 的一个不变子空间。

证明。容易验证 $\mathcal{F}^0$、$\mathcal{F}_L$ 和 $\mathcal{F}_{L,\,t}$ 的不变性，最后一个结论则由 Baker、Birch、Wirsing 在 [1, 引理 4]中的工作得出。因此，只需证明这个映射确实定义了一个 K-线性作用。首先，若 f 的周期为 t，则对任意自然数 $x \geq 1$，它的周期也是 tx，因此我们必须证明该作用不依赖于所选的最小周期。为此，注意到由于 $\xi_t = \xi_{tx}^x$

$$\sigma^{-1}\xi_t = (\sigma^{-1}\xi_{tx})^x = (\xi_{tx}^h)^x = \xi_t^h,$$

其中 $\sigma^{-1}\xi_{tx} = \xi_{tx}^h$。

为证明这确实定义了一个作用，分别固定周期为 $f, g \in \mathcal{F}$ 和 t_1, t_2 的对象，以及 $\sigma, \tau \in$、Gal$(\mathbb{Q}/K)$ 和 $c \in K$。首先注意到 $f + g$ 的周期为 $t = t_1 t_2$，由上文可知我们可以

令 h, h'，使得 $\sigma^{-1}\xi_t = \xi_t^h, \tau^{-1}\xi_t = \xi_t^{h'}$。于是我们有

$$(cf)^\sigma(n) = \sigma(cf(hn)) = \sigma(c)\sigma f(hn) = c\sigma f(hn) = cf^\sigma(n)$$
$$(f+g)^\sigma(n) = \sigma((f+g)(hn)) = \sigma f(hn) + \sigma g(hn) = f^\sigma(n) + g^\sigma(n),$$

以及。

$$(\tau\sigma)^{-1}\xi_t = \sigma^{-1}\tau^{-1}\xi_t = \sigma^{-1}\xi_t^{h'} = \xi_t^{h'h}$$
$$(f^\sigma)^\tau(n) = \tau f^\sigma(h'n) = \tau\sigma f(hh'n) = f^{\tau\sigma}(n).$$

因此，这实际上是一个 Gal$(\mathbb{Q}/K)$ 的 K-线性表示。 □

注。令 $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 的最大阿贝尔扩张。Gal$(\mathbb{Q}/K)$ 在 $\mathcal{F}_L$ 上的作用，其中 $L \subseteq \overline{K} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 完全由其在单位根上的作用定义。因此，该表示通过 Gal$(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/K)$ 分解。这极大地简化了问题的分析，因为 Gal$(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/K)$ 可以被显式计算。

在我们这个特定情形中，考虑的是固定 t 和 $K \subseteq \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ 时的子空间 $\mathcal{F}^0_{K,\,t}$。这里，该表示完全由 Gal$(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/K)$ 在 t 次单位根上的作用决定，因此实际上可经由 Gal$(\mathbb{Q}(\xi_t)/K)$ $\subseteq$Gal$(\mathbb{Q}(\xi_t)/\mathbb{Q})$ $\cong(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^\times$ 分解。此外，空间 $\mathcal{F}_{K,\,t}$ 在 K 上是有限维的，因此表示论完全是经典的。

6. Future Work

定理 1.1 表明，对于任意互素的 k, t 以及互不相同的 $1 \le r$, $s \le t$，都有 $\psi_{k,\,t}(r) - \psi_{k,\,t}(s)$ $\neq 0$。这留下了一个尚未解决的问题：这个差值可以有多大或多小；同时，两个这样的差值是否可能相等也尚无定论。更定性地说，计数 $D_k^\times(r,\ t; n)$ 与 $D_k^\times(s,\ t; n)$ 之间的差距增长得有多快？对于每一对 r, s，这种差距的增长速率是否不同？

本文所采用的方法无法直接处理第一个问题，因为伽罗瓦扭曲 $f \mapsto f^\sigma$ 只会保留 ker $L(1, -)$；而当 $L(1, f) \neq 0$ 时，尚不清楚 $L(1, f)$ 的大小与 $L(1, f^\sigma)$ 的大小相比如何。为方便起见，定义以下量

$$\Psi_{k,t} \coloneqq \{|\psi_{k,t}(r) - \psi_{k,t}(s)| \mid 1 \le r < s \le t\}$$
$$\mathcal{M}_{k,t} \coloneqq \max \Psi_{k,t} \qquad \mathcal{M}_t \coloneqq \max_{\gcd(k,t)=1} \mathcal{M}_{k,t}$$
$$m_{k,t} \coloneqq \min \Psi_{k,t} \qquad m_t \coloneqq \min_{\gcd(k,t)=1} m_{k,t}.$$

如图1所示，$\mathcal{M}_t$ 随 t 线性增长。事实上，还有更好的结果。使 $|\psi_{k,t}(r) - \psi_{k,t}(s)|$ 取得最大值的四元组 (k, t, r, s) 极易预测。它们由 $(k, t, r, s) = (t-1, t, 1, t-1)$ 给出。

相比之下，m_t 表现得毫无规律。对 m_t 作出的朴素图示见图 2。绘制 $-\log m_t$，则能得到更清晰的图像，如图3所示。受这些图示启发，我们提出以下猜想。

猜想 6.1. $\mathcal{M}_t/t \to 1$ 如 $t \to \infty$ 且函数 $\left|\log m_t/\sqrt{t}\right|$ 有界。此外，最大值 $\mathcal{M}_t$ 由四元组 (k, t, r, s) $= (t-1, t, 1, t-1)$取得。

注. 生成这些图的计算开销非常大。若采用直接的方法，就必须对每个 $|\psi_{k,\ t}(r) - \psi_{k,\ t}(s)|$，以及每个 $1 \leq r,\ s \leq t$ 和每个与 k 互素且小于 t 的 $\frac{6}{\pi^2}(t^2 - 1)$ 计算。改进用于生成这些数值的算法，将有助于为猜想 6.1提供更多证据

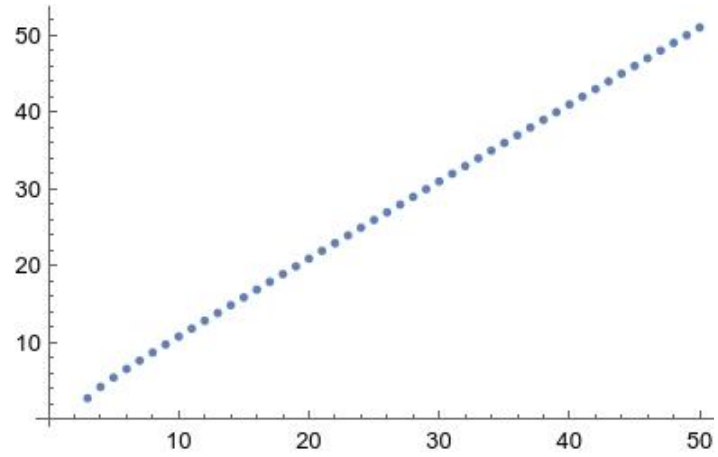

FIGURE 1. $3 \leq t \leq 50$ 的 $\mathcal{M}_t$ 图

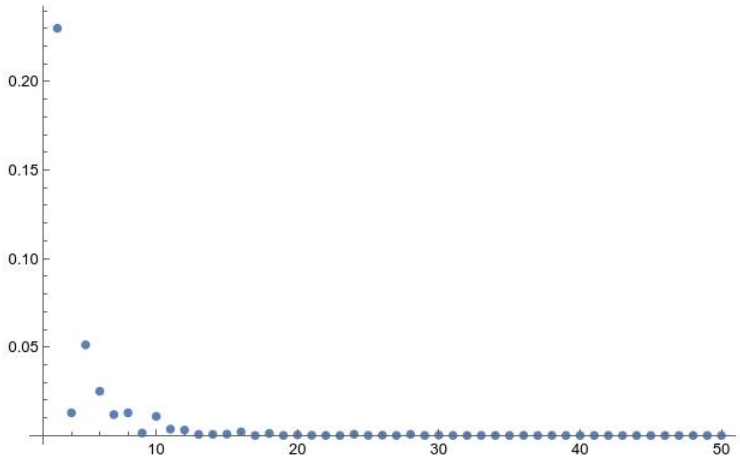

FIGURE 2. $3 \leq t \leq 50$ 的 m_t 图

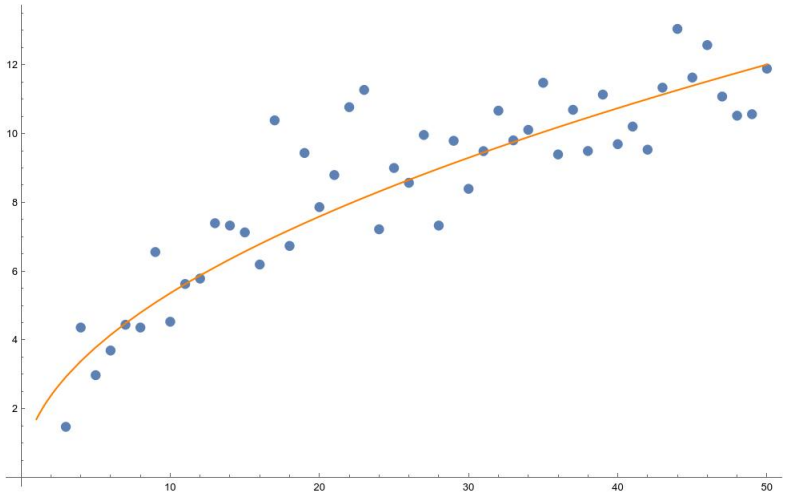

FIGURE 3. $3 \leq t \leq 50$中 –log m_t（蓝色）与 $1.\bar{7}\sqrt{t}$（橙色）的图

REFERENCES

[1] A Baker、B.J Birch 和 E.A Wirsing。《关于 Chowla 问题》。数论杂志 5.3（1973），第 224–236 页。 ISSN：0022-314X。 DOI：10.1016/0022-314X(73)90048-6。[2] S. Gun、M. R. Murty 和 P. Rath。《双伽马函数的线性无关性及 Rohrlich 猜想的一个变体》。数论杂志 129.8（2009），第 1858–1873 页。 ISSN：0022-314X。 DOI：https://doi.org/10.1016/j.jnt.2009.02.007。[3] F. Jackson 和 M. Otgonbayar。《k-不可整除分拆中同余类之间出人意料的偏差》。数论杂志 248（2023），第 310–342 页。 ISSN：0022-314X。 DOI：10.1016/j.jnt.2023.01.006。[4] M. Ram Murty 和 N. Saradha。《双伽马函数的超越值》。数论杂志 125.2（2007），第 298–318 页。 ISSN：0022-314X。 DOI：10.1016/j.jnt.2006.09.017。

UNIVERSITY OF CHICAGO, ECKHART HALL, 5734 S UNIVERSITY AVE, CHICAGO, IL 60637
Email address: alephnil@uchicago.edu

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 77 MASSACHUSETTS AVENUE CAMBRIDGE, MA 02139-4307
Email address: misheel@mit.edu