arXiv:2305.05755v2 [math.DS] 1 Nov 2023

具有有理旋转方向的曲面保面积同胚

´PIERRE-ANTOINE GUIHENEUF、PATRICE LE CALVEZ 和
ALEJANDRO PASSEGGI

Abstract. 设 S 为亏格为 $g \geq 2$ 的闭曲面，并赋予其一个具有全支撑的博雷尔概率测度 λ 。我们证明，如果 f 是一个保持 λ 的、同伦于恒等映射的同胚，且其旋转向量 $\mathrm{rot}_f(\lambda) \in H_1(S,\mathbb{R})$ 是 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 中某个元素的倍数，那么 f 具有无穷多个周期轨道。

此外，可以设想这些周期轨道的旋转向量与任意给定遍历博雷尔概率测度的旋转向量任意接近。

关键词：旋转向量、极大同伦、横截叶状结构

2020年数学主题分类：37C25 37E30, 37E45

Contents

1. 引言 2 1.1. 旋转向量 2 1.2. 主定理 3 1.3. 证明思路 7 1.4. 致谢 8 2. 定义、记号与预备知识 8 2.1. 回路与路径 8 2.2. Poincar´e-Birkhoff 定理 8 2.3. 双曲曲面的同胚 9 2.4. 素端的 Caratheodory 理论 10 2.5. 旋转拓扑马蹄 10 3. 曲面上的叶层 11 3.1. $\mathcal{F}$-横截交点 11 3.2. 回归、等价与积聚 12 3.3. 条带 13 3.4. 关于积聚性质的更多内容 14 4. 强迫理论 20 4.1. 极大同伦与横截叶状结构 20 4.2. 环带覆盖空间中的强迫理论 25 5. 主定理的证明 31 参考文献 37

1. Introduction

1.1. 旋转向量。若 S 是亏格为 g 的光滑紧致无边定向曲面，我们将 Homeo(S) 记为 S 上配备 C^0 拓扑的同胚空间。由于 S 紧致，该拓扑与一致拓扑一致。恒等映射 Id 所在的道路连通分支通常称为同痕于恒等映射的同胚空间，记作 Homeo$_*$(S)。连接恒等映射与映射 $f \in$Homeo$_*$(S) 的连续路径 $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ 称为 f 的恒等同伦。我们称由 I 定义的点 $z \in S$ 的轨道为路径 $I(z) : t \mapsto f_t(z)$，它连接 z 与 $f(z)$。

由 S的紧致性，根据克雷洛夫–博戈柳博夫定理可知， f-不变博雷尔概率测度的集合 $\mathcal{M}(f)$非空。更准确地说，它是由弱* 拓扑赋予的博雷尔概率测度空间 $\mathcal{M}$ 中的一个非空紧致凸子集。请注意， μ的支集记作 supp(μ)，是使 μ测度为 1 的最小闭集。

我们来回顾测度 $\mu \in \mathcal{M}(f)$的旋转向量的定义（参见 [Mats1], [Pol] 或 [Sc]）。设 $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ 是 f的一个恒等同伦。固定 $z \in S$。相对于端点，路径 $I(z)$的同伦类中包含一条连接 z 与 $f(z)$的光滑路径 γ。若 α 是一个闭 1-形式，则量 $\int_\gamma \alpha$不依赖于 γ 的选取，我们将其记作$\int_{I(z)}\alpha$。当 α 是恰当 1-形式且 h 是 α的原函数时，它等于$h(f(z)) - h(z)$。由此得到一个定义在闭 1-形式空间上的实值态射 $\alpha \mapsto \int_S \left(\int_{I(z)} \alpha\right) d\mu(z)$；由于 μ 在 f下不变，它在恰当1-形式空间上为零。因此，它在第一上同调群 $H^1(S,\mathbb{R})$上诱导出一个自然的线性形式。于是存在一个唯一确定的同调类 $\mathrm{rot}_I(\mu) \in H_1(S,\mathbb{R})$，满足方程

$$\langle [\alpha], \mathrm{rot}_I(\mu)\rangle = \int_S \left(\int_{I(z)} \alpha\right) d\mu(z),$$

其中 α 是任意闭1-形式， $[\alpha] \in H^1(S,\mathbb{R})$ 是其上同调类，并且

$$\langle\ ,\ \rangle : H^1(S,\mathbb{R}) \times H_1(S,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

自然双线性形式。根据定义，$\mathrm{rot}_I(\mu) \in H_1(S,\mathbb{R})$ 是 μ （对于同伦 I）的旋转向量。众所周知，如果 S 的亏格大于 1，则 f 的两个恒等映射同伦同于端（参见[H]）。在这种情况下，$\int_{I(z)}\alpha$ 不依赖于 I，因此可以写作

$$\mathrm{rot}_f(\mu) = \mathrm{rot}_I(\mu).$$

如果 O是 f的周期轨道，则可以将 O的旋转向量 $\mathrm{rot}_I(O)$（或者当 S 的亏格大于 1 时，记为 $\mathrm{rot}_f(O)$）定义为 μ_O的旋转向量，其中 μ_O 是均匀分布在 O上的概率测度。特别地，如果 O 是可缩周期轨道，即环路 $I^q(z)$同伦于零，则有 $\mathrm{rot}_I(O) = 0$，如果 $z \in O$。

给出一个等价的定义。为 S 配备一个黎曼度量，并对 S中的每一点 z、 z'，选择一条路径$\gamma_{z,\ z'}$ 以连接 z 和 z'，使得这些路径$\gamma_{z,\ z'}$ 的长度一致有界。对于每一个

$z \in S$以及每一个 $n \geq 1$，考虑路径

$$I^n(z) = I(z)I(f(z)) \cdots I(f^{n-1}(z))$$

通过拼接定义，而环路

$$\Gamma_n(z) = I^n(z)\gamma_{f^n(z),z}.$$

可以证明，存在一个 μ-可积函数 rot$_f$：$S \to H_1(S,\mathbb{R})$，使得对于 μ-几乎处处的点 $z \in S$，序列 $[\Gamma_n(z)]/n$ 收敛到 rot$_f(z)$。这使我们能够定义

$$\mathrm{rot}_I(\mu) = \int \mathrm{rot}_f(z)\, d\mu(z).$$

下面给出本文中将用到的最后一个定义。在全文中，我们用 $[\Gamma] \in H_1(S,\mathbb{Z})$ 表示定向环路 $\Gamma \subset S$ 的同调类。设 $U \subset S$ 是一个拓扑开圆盘（即单连通区域），且满足 $\mu(U) \neq 0$。记 $\varphi_U : U \to U$ 为 f 的首次回归映射，记 $\tau_U : U \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 为首次回归时间。这些映射在 U上 μ-几乎处处有定义。卡茨引理 [K] 表明，φ_U保持测度 $\mu|_U$，且 τ_U 是 $\mu|_U$-可积的；此外

$$\int_U \tau_U \, d\mu = \mu\left(\bigcup_{k\geq 0} f^k(U)\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U)\right).$$

我们还用 μ_U 表示归一化概率测度 $\mu|_U/\mu(U)$。可以如下构造映射 $\rho_U : U \to H_1(S,\mathbb{Z})$，它在 μ_U-几乎处处有定义：若 $\varphi_U(z)$ 有定义，则用一条包含于 U 中、连接 $\varphi_U(z)$ 与 z 的路径 γ 封闭轨道 $I^{\tau_U}(z)-1(z)$，并令 $\rho_U(z) = [I^{\tau_U}(z)-1(z)\gamma]$，注意到 $[I^{\tau_U}(z)-1(z)\gamma]$ 与 γ 的选择无关。若 S 的亏格大于 1（从现在起我们假设如此），则该映射不依赖于 I 的选择。容易证明，映射 ρ_U/τ_U 在 U 上一致有界，因此 ρ_U 是 μ_U-可积的。因此，根据伯克霍夫遍历定理，存在 μ_U-可积函数 $\rho_U{}^* : U \to H_1(S,\mathbb{R})$ 和 $\tau_U{}^* : U \to \mathbb{R}$，使得对 μ_U-几乎处处的点 z，有

$$(1)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \rho_U(\varphi_U^k(z)) = \rho_U{}^*(z), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau_U(\varphi^k(z)) = \tau_U{}^*(z).$$

这些量与旋转数的关系在于，对于几乎所有的μ_U点 z，我们都有 rot$_f(z) = \rho_U{}^*(z)/\tau_U{}^*(z)$。

1.2. 主定理。我们先在本节引入同伦旋转区间的概念。若 S 是一个定向闭曲面，记 $\mathcal{FHL}(S)$为 S的自由同伦闭路空间。对于每个 $\kappa \in \mathcal{FHL}(S)$和每个 $\Gamma \in \kappa$，同调类 $[\Gamma] \in H_1(S,\mathbb{Z})$不依赖于 Γ的选取，我们将其记为 $[\kappa]$。若 $\Gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S$ 是一个环路，且 k 是一个整数，我们可以定义环路 $\Gamma^k : t \mapsto \Gamma(kt)$。对于每个 $\kappa \in \mathcal{FHL}(S)$、每个$\Gamma \in \kappa$ 和每个 $k \in \mathbb{Z}$，Γ^k 的自由同伦类不依赖于 Γ的选取，我们将其记为 κ^k。$f \in \mathrm{Homeo}_*(S)$的同伦旋转区间是一个有序对$(\kappa, r)$，其中 $\kappa \in \mathcal{FHL}(S)$，且 r是一个正整数，并满足以下条件：存在一个整数 $s > 0$，使得对于每个 $p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，都可以找到一个周期至少为 q/s的点 $z \in S$，

使得由 $I^{rq}(z)$自然定义的环路属于 κ^p。特别地，我们有$\mathrm{rot}f(z) = p/(rq)[\kappa]$。

下面陈述本文的主要结果。

定理 A. 设 S 是亏格为 $g \geq 2$ 的定向闭曲面。若 $f \in \mathrm{Homeo}_*(S)$ 保持一个博雷尔概率测度 λ，满足 $\mathrm{supp}(\lambda) = S$ 且 $\mathrm{rot}f(\lambda) \in \mathbb{R}H_1(S,\mathbb{Z})$，则 f 有无穷多个周期点。

更确切地说，对于每个遍历测度 $\nu \in \mathcal{M}(f)$，只要它不是集中在可缩不动点上的狄拉克测度；以及 $\mathrm{rot}f(\nu)$ 在 $H_1(S,\mathbb{R})$ 中的每个邻域 $\mathcal{U}$，都存在一个同伦旋转区间 (κ, r)，使得$[\kappa]/r \in \mathcal{U}$。

注意，若 f 满足定理的假设且不等于恒等映射，那么由遍历分解可知，它存在一个遍历不变概率测度 ν，其支集不在某个不动点上。定理 A适用，因此存在一个同伦旋转区间；特别地，f 有无穷多个周期点，其周期可以任意大，且旋转向量可以任意接近 0。若 $\mathrm{rot}f(\lambda) \neq 0$，则测度 ν 可以选取为使 $\mathrm{rot}f(\nu) \neq 0$，从而 f 有周期任意大的周期轨道，且旋转向量非零。无论如何，任何遍历博雷尔概率测度，无论其是否支集于可缩不动点上，其旋转向量都可由无穷多个周期点的旋转向量逼近。值得注意的是，当 f 等于恒等映射时，这一性质也成立。

在第 1.3 段解释产生同伦旋转区间的两种不同来源之前，我们先评论一下定理 A。我们先给出一个直接应用。若 ω 是S上的光滑面积形式，记 $\mathrm{Diff}^r_\omega(S)$，$1 \leq r \leq \infty$为保持 ω的 S C^r 微分同胚空间，并赋予 C^r-拓扑；记 $\mathrm{Diff}^r_{\omega,*}(S)$为 $\mathrm{Diff}^r_\omega(S)$ 中包含恒等映射的连通分支。这是一个经典事实：$\mathrm{Diff}^r_{\omega,*}(S) = \mathrm{Diff}^r_\omega(S) \cap \mathrm{Homeo}_*(S)$。

推论 1.1. 假设 $g \geq 2$。那么，对于任意 $1 \leq r \leq \infty$，具有无穷多个周期点的映射 $f \in \mathrm{Diff}^r_{\omega,*}(S)$ 的集合在 $\mathrm{Diff}^r_{\omega,*}(S)$ 中稠密。

证明。假设由 ω 自然定义的测度 μ_ω 是一个概率测度，不失一般性。注意，映射 $f \mapsto \mathrm{rot}f(\mu_\omega)$ 是定义在 $\mathrm{Diff}^r_\omega(S)$ 上的一个态射。可以在 S 中找到一族简单闭曲线 $(\Gamma_i)_{1\leq i\leq 2g}$，使得这一族 $([\Gamma_i])_{1\leq i\leq 2g}$ 生成 $H_1(S,\mathbb{R})$。对于每个 $i \in \{1,\dots,2g\}$，考虑 Γ_i的一个闭管状邻域 W_i。容易构造一个支集包含于W_i 上的散度为零的光滑向量场 ζ_i，其诱导流 $(h_i^t)_{t\in\mathbb{R}}$ 满足 $\mathrm{rot}^{h_i^t}(\mu_\omega) = t[\Gamma_i]$。对于每个$t = (t_1,\dots,t_{2g}) \in \mathbb{R}^{2g}$，定义 $f^t = h_1^{t_1} \circ \cdots \circ h_2^{t_{2g}} \circ f$。我们有

$$\mathrm{rot}_{f^t}(\mu_\omega) = \mathrm{rot}_f(\mu_\omega) + \sum_{i=1}^{2g} \mathrm{rot}_{h_i^{t_i}}(\mu_\omega) = \mathrm{rot}_f(\mu_\omega) + \sum_{i=1}^{2g} t_i[\Gamma_i].$$

因此，我们可以找到 t “任意小”的，使得 $\mathrm{rot}f^t(\mu_\omega) \in H_1(S,\mathbb{Q})$。 □

注。该定理的一个非常接近的版本已由 Rohil Prasad 独立证明。Cristofer-Prasad-Zhang[CPrZ], 近期的一项非常强的结果——其证明使用了周期 Floer 同调理论——断言：如果ω 是 S上的光滑面积形式，那么对于每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，映射集合 $f \in \mathrm{Diff}^k_\omega(S)$在 $\mathrm{Diff}^k_\omega(S)$ 中是稠密的，其中这些映射具有一个稠密的周期点集合（这当然意味着推论 1.1 在光滑范畴中成立，另见 [EH] 和 [CPoPrZ]）。他们的证明使用了以下结果：在 $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega$的情形下，如果$_*(S)$且 $\mathrm{rot}f(\mu_\omega) \in H_1(S,\mathbb{Q}) \setminus \{0\}$，则映射 f 具有一个旋转向量非零的周期轨道。此外，他们还找到了与 $\mathrm{rot}(\mu_\omega)$ 及 S的亏格有关的周期的显式上界。正如 Prasad [Pr] 在近期一篇札记中所解释的，一个简单的逼近过程可以将这一结果推广到 $f \in$Homeo$_*(S)$保持 μ_ω 且满足 $\mathrm{rot}f(\mu_\omega) \in H_1(S,\mathbb{Q}) \setminus \{0\}$的情形。此外，爆破解允许将该结果推广到 $\mathrm{rot}f(\mu_\omega) \in \mathbb{R}H_1(S,\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$的情形。因此，$f$具有周期任意大的无穷多个周期轨道。这一点是先前研究的结果：其中刻画了仅有有限个周期点的保面积同胚（在环面的情形见[AdT]，在高亏格曲面的情形见 [Lec3]）。利用 Oxtoby-Ulam 定理 [OxU] 以及每个不变概率测度都是两个不变概率测度的重心这一事实，其中第一个是原子的，第二个无原子，可以将测度 μ_ω 替换为任意具有全支撑的概率测度。在本文中，我们将对周期点的结构给出一些更为精确的描述。

注。该定理在球面和环面上并不成立。事实上，设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。

黎曼球面 $\mathbb{S}^2$ 上的微分同胚 f_α 定义如下

$$f_\alpha(z) = \begin{cases} \infty & \text{if } z = \infty, \\ e^{2i\pi\alpha} z & \text{if } z \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

它保留与面积形式相关的概率测度 μ_ω，且除 0 和 ∞ 外没有周期点。若 I 是 f 的恒等同伦，则 $\mathrm{rot}_I(\mu_\omega) = 0$，因为 $H_1(\mathbb{S}^2,\mathbb{R}) = 0$。

该微分同胚

$$\begin{aligned} g_\alpha : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x + (\alpha + \mathbb{Z}), y) \end{aligned}$$

保留面积形式 $\omega = dx \wedge dy$，且没有周期轨道。若 $I =(R_{t\alpha})^{t\in[0,1]}$，则有 $\mathrm{rot}_I(\mu_\omega) = \alpha(1,0) \in \mathbb{R}H_1(\mathbb{T}^2,\mathbb{Z})$。

注。特别是，该定理断言，若 $\mathrm{rot}f(\lambda) = 0$，则存在无穷多个周期轨道。此外，若 f 不是恒等映射，则周期的集合是无限的，因为存在并非集中于不动点上的狄拉克测度的遍历不变测度。这一结果也有适用于 $g = 1$情形的版本，[Lec2] 中已给出了该结果（参见该文）。这是对微分情形中一项结果的推广（参见 [FH]），而该结果本身是所谓 Conley 猜想的二维版本；这一猜想后来在任意

维情形中得到证明（参见 [G]）。注意，在 [Lec2] 中证明了，若 f 只有有限个不动点，则存在无穷多个可缩周期轨道。

注。对于保守流的时间一映射，这一定理早已广为人知。事实上，设 X 是一个 C^1 类的（与时间无关）向量场，其流保持 ω。等式 $0 = L_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega$ 告诉我们，1-形式 $\beta = i_X\omega$ 是闭的。此外，它在 X 的流下不变，因为$L_X\beta = i_X d\beta + di_X(i_X\omega) = 0$。若 f 是 X 的流 $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ 的时间一映射，则记 $I = (f^t)_{t\in[0,1]}$，我们知道，对于每个闭1-形式 α，都有

$$\begin{aligned}\langle [\alpha], \mathrm{rot}_I(\mu_\omega)\rangle &= \int_S \left(\int_{I(z)} \alpha\right) d\mu_\omega(z)\\ &= \int_S \left(\int_0^1 \alpha(X(f_t(z))dt\right) d\mu_\omega(z)\\ &= \int_0^1 \left(\int_S \alpha(X(f_t(z))d\mu_\omega(z)\right) dt\\ &= \int_S \alpha(X(z))d\mu_\omega(z)\end{aligned}.$$

注意到 $0 = i_X(\alpha\wedge\omega) = i_X\alpha\wedge\omega - \alpha\wedge i_X\omega$，我们推导得出：

$$\langle [\alpha], \mathrm{rot}_I(\mu_\omega)\rangle = \int_S \alpha\wedge\beta.$$

事实是，$\mathrm{rot}_I(\mu_\omega) \in \mathbb{R}H_1(S,\mathbb{Z})$ 蕴含 $[\beta] \in \mathbb{R}H^1(S,\mathbb{Z})$。例如，假设 $[\beta] \in H^1(S,\mathbb{Z})$。那么存在一个 $S \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的 C^2 类函数 H，使得 $\beta = dH$。事实上，固定 $z_0 \in S$。对于每个点$z \in M$，$\int_\gamma \beta$ 的模 1 值记为 $H(z)$，它不依赖于连接 z_0 和 z的C^1 路径 γ。这样便得到一个 $S \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的 C^2 类函数 H，使得 $\beta = dH$。它在 X 的流下不变，因为

$$L_X H = i_X dH + di_X H = i_X\beta = i_X(i_X\omega) = 0.$$

记 $\mathrm{sing}(X)$ 为 X的奇点集合。提醒一下，点 $z \in S$ 的 α-极限集 $\alpha(z)$ 和 ω-极限集 $\omega(z)$，分别是序列 $(f^{-n}(z))_{n\geq 0}$和 $(f^n(z))_{n\geq 0}$的子序列极限所组成的集合。如果 z不是奇点，则 z 的轨道要么是周期轨道，要么其极限集 $\alpha(z)$ 和 $\omega(z)$ 包含于 $\mathrm{sing}(X)$ 中。特别地，那些不支撑于奇点上的遍历不变概率测度，或者支撑于 f 的一个周期轨道上，该周期轨道属于具有有理周期的流的周期轨道；或者支撑于具有无理周期的流的一个完整周期轨道上。流的周期轨道之并集 W 非空（由 Sard定理可知）且为开集。此外，W 的每个连通分支 V 都是环带状的（即同胚于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$）。由于亏格至少为二，存在奇点。此外，$S$ 不是球面。这意味着存在 V 的至少一个端，使得对于收敛到该端的 V 中的每个序列 $(z_n)_{n\geq 0}$，z 的周期（对于该流）都收敛于 $+\infty$。因此，周期在 V上并非常数。这意味着 f 具有周期任意大的周期点。更准确地说，定理中出现的回路 Γ，是包含于这样的连通分支 V 中的简单闭曲线，它们在 V 中不同伦于零，并且取向适当。注意，如果 $\mathrm{rot}_I(\mu_\omega) \neq 0$，则存在

至少一个 W 的连通分支 V，使得 $i_*(H_1(V,\mathbb{Z})) \neq \{0\}$，其中 i_*：$H_1(V,\mathbb{Z}) \to H_1(S,\mathbb{Z})$ 是由包含映射 $i : V \to S$自然定义的态射，这意味着 V 中的周期点具有非零旋转向量。

注。假设 $\mathrm{rot}_f(\lambda) \in \mathbb{R}H_1(S,\mathbb{Z})$ 对定理成立是必要的。事实上，可以找到具有有限多个奇点的光滑向量场，其流保持面积形式 ω，且每条轨道（若不退化为一个奇点）都是稠密的。这个流的时间一映射f 除了奇点外没有周期点。当然，$\mathrm{rot}_f(\lambda) \notin \mathbb{R}H_1(S,\mathbb{Z})$ 成立。经典例子包括沿极小方向的平移流。

注。推论 1.1 早已为人所知。事实上，我们有一个强得多的结果：具有横截同宿交的双曲周期点的映射集合 $f \in \mathrm{Diff}^r_\omega(S)$，是 $\mathrm{Diff}^r_\omega(S)$ 的一个开稠子集（见 [LecSa]）。在 $g \leq 1$ 的情形下，这一结果早已为人所知（见 [Ad], [AdT], [D], [Ol1], [Ol2], [Pi], [R]）。证明 $g \geq 2$ 情形的一个困难步骤，是证明在 $\mathrm{Diff}^r_{\omega,*}(S)$ 中，至少具有 $2g-1$ 个周期点的映射集合 $f \in \mathrm{Diff}^r_{\omega,*}(S)$ 是稠密的。

1.3. 证明思路。 证明的主要工具是 [LecT1、LecT2、Lel], 中发展起来的强制理论，我们将在第 3.1 和4.1节介绍该理论。利用这一工具，我们分析在定理 A的假设下可能出现的各种构型。在大多数情况下，我们会找到一个旋转马蹄（定义见第 2.5节），从而得到定理的结论。只有一种情况下我们无法找到这样的马蹄；事实上，存在一些满足定理 A 假设但没有拓扑马蹄的同胚，例如保面积流的时间一映射。对于这种情况，我们将在适当的环带中使用改进版的 Poincar´e-Birkhoff 定理 2.1 来获得结论。在最后一种情况下，我们将使用 Carathéodory素端理论（见第 2.4节）。

更准确地说，可以找到一个适当的恒等同伦 I，它属于 f，以及定义在 S 上的一个奇异定向叶状结构 $\mathcal{F}$，其正则集与同伦下具有非平凡轨道的点所构成的集合 $\mathrm{dom}(I)$ 相一致，并且满足以下基本性质：每条非平凡轨道 $I(z)$ 在 $\mathrm{dom}(I)$ 中都与一条横截于 $\mathcal{F}$ 的路径同伦。给定一个 f-不变遍历概率测度 ν，满足 $\nu(\mathrm{dom}(I)) = 1$，证明首先为 ν 构造一个典型轨道的近似（引理 5.1）：它是一个横截于 $\mathcal{F}$ 的定向环路 Γ_*，满足 $[\Gamma_*]$ 接近于 $\mathrm{rot}_f(\nu)$，并且对于 ν-几乎处处的点 z，由 z 的整个轨道自然定义的横截路径都会描画出这个环路。我们将考虑 $\mathrm{dom}(I)$ 的一个环带覆盖空间 $\widehat{}$，其中 Γ_* 被提升为一个非可缩的简单环路 $\hat{\Gamma}_*$。同伦 $I|_{\mathrm{dom}(I)}$ 和叶状结构 $\mathcal{F}$ 都可以提升到 $\mathrm{dom}(I)$。$\hat{}$ $\tilde{}$ 与 Γ_* 相交的叶的并集是一个开环带 B。根据测度 ν 下典型点的轨道相对于该环带 B 的性质 $\tilde{}$，我们可以得出不同的结论：如果这些轨道穿越或访问该环带（定义见第 3.3 节），那么我们便能够借助强制理论的相关结果，找到一个拓扑旋转马蹄。

在第4.2段中证明；如果它们永远停留在这个环带中，那么我们证明庞加莱´-比尔霍夫定理2.1 适用，并推出存在无穷多个周期轨道。

我们大量运用了 Gabriel Lellouch 在其博士论文 [Lel] 中证明的结果，也对这些结果作了进一步发展。特别是，我们将用到 [Lel], 的主要结果，其中 $\wedge$ 表示 $H_1(S,\mathbb{R})$ 上的自然交叉形式（见第4.1段）：若 μ 和 μ' 是两个不变概率测度，且 $\mathrm{rot}_f(\mu)\wedge\mathrm{rot}_f(\mu')\neq 0$，则 f 存在一个旋转马蹄。假设 $\mathrm{rot}_f(\lambda)\in\mathbb{R}H_1(S,\mathbb{Z})$ 将用到一次：借助 Atkinson 定理 [At], ，我们可以据此假设 $[\Gamma_*]\wedge\mathrm{rot}_f(\lambda)=0$。

1.4. 致谢。我们感谢 Sobhan Seyfaddini 向我们提出这个问题。本文即将完成之际，我们收到了 Rohil Prasad 最近发表的短文。感谢他提出的宝贵意见。

A.P. 获得了 Mathamsud 项目 TOMCAT 22-MATH-10 的资助 .

2. 定义、记号与预备知识

下文中，字母 S 表示闭曲面，字母 Σ 表示任意曲面（不一定紧致，也不一定连通）。若 f 是曲面同胚， μ 表示任意 f-不变测度，λ 表示具有全支撑的 f-不变测度，而 ν 表示 f-不变遍历测度。

2.1. 环路与路径。设 Σ 是定向曲面（不一定是闭曲面、不一定无边界，也不一定连通）。 Σ 中的环路是连续映射 $\Gamma:\mathbb{T}\to\Sigma$，其中 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。若一个环路不同伦于常值闭路，则称其为本质的。 Σ 中的路径是连续映射 $\gamma:I\to\Sigma$，其中 $I\subset\mathbb{R}$ 是区间。若环路或路径是单射，则称其为简单的。环路 $\Gamma:\mathbb{T}\to\Sigma$ 的自然提升是路径 $\gamma:\mathbb{R}\to\Sigma$，满足 $\gamma(t)=\Gamma(t+\mathbb{Z})$。线段是简单路径 $\sigma:[a,b]\to\Sigma$，其中$a<b$。点 $\sigma(a)$ 和 $\sigma(b)$ 是 σ 的端点。我们称 σ 将 $\sigma(a)$ 与 $\sigma(b)$ 相连。更一般地，若 A 和 B 不相交，则称σ 将 A 与 B 相连，若 $\sigma(a)\in A$ 且 $\sigma(b)\in B$。直线是真简单路径λ: $\mathbb{R}\to\Sigma$。按照惯例，我们将用相同的名称和记号表示环路或路径 γ 的像。

注意，简单闭曲线或简单路径都具有自然定向。设 Γ 是 Σ中的一条简单闭曲线，并将其所属的 Σ 的连通分支记为 Σ'。若 $\Sigma'\setminus\Gamma$ 有两个连通分支，则称 Γ 分隔了 Σ；此时，位于 Γ 右侧的连通分支记为 $R(\Gamma)$，另一个记为 $L(\Gamma)$。对于分隔其所属连通分支的直线 λ，我们也将使用相同的记号 $R(\lambda)$,$L(\lambda)$。

设 f 是 Σ上的保定向同胚。 f 的一条布劳威尔直线是指一条分隔 Σ 的直线 λ，满足 $f(\lambda)\subset L(\lambda)$ 且 $f^{-1}(\lambda)\subset R(\lambda)$。等价地，这意味着 $f(L(\lambda))\subset L(\lambda)$，或者 $f^{-1}(R(\lambda))\subset R(\lambda)$。

2.2. Poincar´e-Birkhoff 定理。考虑环带 $\mathbb{A}=\mathbb{T}\times I$,˜其中 $(0,1)\subset I\subset[0,1]$，以及其万有覆盖空间 $\mathbb{A}=\mathbb{R}\times I$。我们定义覆盖投影 $\tilde{\pi}:(x,y)\mapsto(x+\mathbb{Z},y)$ 以及生成

˜覆盖自同构 $T\colon (x,y)\mapsto(x+1,y)$。我们记 $\tilde{p}_1\colon \mathbb{A}\to\mathbb{R}$ 为在第一因子上的投影。

设 f 是 $\mathbb{A}$ 上同伦于恒等映射的同胚（意即保向并固定边界圆或端），且 f 是 f˜ ˜到 $\mathbb{A}$ 的一个提升。映射 $p_1\circ f-p_1$ 提升为连续函数 $\psi_{\tilde{f}}\colon \mathbb{A}\to\mathbb{R}$，因为

˜ ˜f 与 T 可交换。特别地，对于每个 $z\in\mathbb{A}$、z 的每个提升 $\tilde{z}\in\mathbb{A}$ 以及每个 $n\geq 1$，都有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\psi_{\tilde{f}}(f^i(z))=p_1(\tilde{f}^n(\tilde{z}))-p_1(\tilde{z}).$$

设 z 是一个正向回归点。如果对任意收敛到 z 的子列 $(f^{n_k}(z))_{k\geq 0}$（它是 $(f^n(z))_{n\geq 0}$ 的子列），都有.....那么称 f 的旋转数为 $\operatorname{rot}\tilde{f}(z)\in\mathbb{R}$。

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\psi_{\tilde{f}}(f^i(z))=\operatorname{rot}_{\tilde{f}}(z).$$

若 O 是 f 的一个周期点，周期为 q，则存在 $p\in\mathbb{Z}$ 使得对于每个 $\tilde{z}\in\tilde{\pi}^{-1}(O)$，都有 $\tilde{f}^q(\tilde{z})=T^p(\tilde{z})$。在这种情况下，$p/q$是˜在提升 O 下的旋转数 f。我们将使用经典庞加莱´-伯克霍夫定理的以下推广（例如参见[Lec1]）：

定理 2.1. 设 f 是 $\mathbb{A}$ 上同伦于恒等映射的同胚，且 ˜ ˜f 是 f 到 $\mathbb{A}$ 的一个提升。假设存在两个正向复返点 z_1 和 z_2，使得 $\operatorname{rot}\tilde{f}(z_1)<\operatorname{rot}\tilde{f}(z_2)$。那么：

- 要么，对于区间 $(\operatorname{rot}\tilde{f}(z_1),\operatorname{rot}\tilde{f}(z_2))$ 内任意以既约方式书写的有理数 $p/q\in$，都存在 f 的一个周期轨道 O，其周期为 ˙q，且相对于 f 的旋转数为 p/q；
- 要么存在一条本质简单闭路 $\Gamma\subset\mathbb{T}\times(0,1)$，使得 $f(\Gamma)\cap\Gamma=\emptyset$。

当然，对于抽象环带（即与 $\mathbb{A}$ 同胚的拓扑空间），也有类似的结果。

2.3. 双曲曲面上的同胚。设 Σ 是一个无边界的连通定向双曲曲面，即它不同于球面、平面、开环带或环面。可以在 Σ 上赋予一个常负曲率 -1 的完备黎曼度量。Σ 的万有覆盖空间是圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$，其覆盖变换群记为 $\mathcal{G}$，由 $\mathbb{D}$ 的莫比乌斯自同构 ″构成。可以假设该度量属于第一类，即每个 $\mathcal{G}$-轨道在 $\mathbb{C}$ 中的闭包都包含 $\mathbb{S}_1=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$（例如参见 Mats2] [）。每个双曲元素 $T\in\mathcal{G}$ 都可以扩展为 $\overline{\mathbb{D}}$ 的一个同胚，在边界上有两个不动点：一个排斥不动点 $\alpha(T)$ 和一个吸引不动点 $\omega(T)$。对于每个 $z\in\overline{\mathbb{D}}\setminus\{\alpha(T)\ \omega(T)\}$，有

$$\lim_{k\to-\infty}T^kz=\alpha(T),\qquad\lim_{k\to+\infty}T^kz=\omega(T).$$

由于度量属于第一类，在所有双曲自同构中，点集 $\alpha(T)$ 和点集 $\omega(T)$，T 在 $\mathbb{S}_1$ 中稠密。每个抛物型

元素 $T \in \mathcal{G}$ 都可以延拓为 $\overline{\mathbb{D}}$ 的一个同胚，并在边界上有一个不动点 $\alpha\omega(T)$。对于每个 $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{\alpha\omega(T)\}$，都有

$$\lim_{k\to\pm\infty} T^k z = \alpha\omega(T).$$

一个 f 同胚 Σ 同伦于恒等映射时，存在唯一的提升 f到 $\mathbb{D}$，且该提升与覆盖自同构交换。我们称之为 f的典范提升。众所周知， f 可延拓为 $\mathbb{D}$ 的一个同胚 ，并且固定 $\mathbb{S}_1$的每一个点。若 $T \in \mathcal{G}$ 是双曲型的，则 f 提升为 $\Sigma = \Sigma/T$的一个同胚 。此外， f 可延拓为紧环带 Σ的一个同胚；该紧环带由添加两个圆 $J = \tilde{J}/T$和 $J' = J'/T$得到，其中 J和 J'是 $\mathbb{S}_1 \setminus \{\alpha(T)\ \omega(T)\}$的两个连通分支。注意， $J \cup J'$ 的每个点都是不动点，对于提升 $f|_{\overline{\mathbb{D}}\setminus\{\alpha(T)\ \omega(T)\}}$，旋转数为 零。同样，若 $T \in \mathcal{G}$是抛物型的，则 f提升为 $\Sigma = \Sigma/T$ 的一个同胚 ，该同胚可延拓为 Σ的一个同胚；通过在 Σ的一端添加圆 $(\mathbb{S}_1 \setminus \{\alpha\omega(T)\})/T$ 即可得到 Σ。这个圆上的每个点都是不动点，对于提升 $f|_{\overline{\mathbb{D}}\setminus\{\alpha\omega(T)\}}$，旋转数为零。

2.4. Caratheodory 素端理论。本小节将陈述一个本文中仅使用一次的结果，它是所谓素端理论的推论（例如参见 [Math] ）。设 S 是一个亏格为 ≥ 1 的闭曲面， U 是一个具有 S 的开环带。若 U 的一个端 e 满足：存在一点 $z \in S$ 以及 U 中 e 的一个邻域，该邻域是 S 中 z 的穿孔邻域，则称端 e 是奇异的。否则称 e 是正规的。至少存在一个正规端，因为 S 不是 2-球面。假设 U 在一个保定向同胚 f 下不变。那么，同胚 $f|_U$ 可延拓为更大环带 $\overline{U}$pe 上的同胚 $\overline{f}_U$；该环带通过将 U 的每个正规端膨胀，并以相应的素端圆替代之而得到。此外，若 U 是闭子集 X 的补集的一个连通分支，其中该闭子集包含于 fix(f)，则延拓后的映射固定素端圆上的每一个点。更确切地说，设 $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ 是 f 的一个恒等同伦，满足对每个 $t \in [0,1]$ 都有 $f_t(U) = U$ 且 $X \subset \mathrm{fix}(f_t)$。那么，对于 $\overline{f}_U$ 到 $\overline{U}_{\mathrm{pe}}$ 的万有覆盖空间的提升（该提升延拓了由 $I|_U$ 自然定义的 $f|_U$ 到 U 的万有覆盖空间的提升），新增圆上的点（它们是不动的）的旋转数等于 0。

2.5. 旋转拓扑马蹄。设 Σ 是一个连通定向曲面。若 $Y \subset S$ 是 $f \in \mathrm{Homeo}_*(S)$ 的拓扑马蹄，则称之为拓扑马蹄；其中 Y 是闭的，且在 f 的某个幂 f^r 下不变，并且 $f^r|_Y$ 在豪斯多夫紧空间 Z 上存在有限扩张 $g : Z \to Z$，满足：

- g 是伯努利移位 $\sigma : \{1,\dots,m\}^{\mathbb{Z}} \to \{1,\dots,m\}^{\mathbb{Z}}$ 的一个扩张，其中 $m \geq 2$;
- 因子映射下，每个 $\{1,\dots,m\}^{\mathbb{Z}}$ 的 s-周期序列的原像都至少包含 g 的一个 s-周期点。

这意味着 g 是 Z 的一个同胚，且与 $f^r|_Y$半共轭，并且因子映射的纤维均为有限集，其基数存在统一上界

M。注意，若 $h(f)$表示f的拓扑熵，则有

$$rh(f) = h(f^r) \geq h(f^r|_Y) = h(g) \geq h(\sigma) = \log q,$$

且对于每个 $n \geq 1$， f^r 至少有 q^n/M 个不动点。

现在假设 S 是一个连通闭定向曲面。如果存在一个正整数 s，使得对于每个 $p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，都存在一个周期至少为 q/s 的点 $z \in Y$，并且由 $I^{rq}(z)$ 自然定义的环路属于 κ^p，则称 $\mathrm{Homeo}_*(S)$ 中的拓扑马蹄 Y 具有类型为 (κ, r) 的旋转拓扑马蹄性质，其中 $\kappa \in \mathcal{FHL}(S)$，且 r 为正整数。特别地，该马蹄定义了一个同伦旋转区间。本文中出现的旋转拓扑马蹄将在一个不变开集的环带覆盖中构造，并满足 [PaPotSa] 中给出的几何定义。

3. Foliations on surfaces

本节将考虑一个定向无边界曲面 Σ，它不一定是闭曲面，也不一定连通，并且其上有一个无奇点的定向拓扑叶层 $\mathcal{F}$。我们将考虑：

- 万有覆盖空间 Σ 的 $\tilde{\Sigma}$；
- 覆盖投影 $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$;
- 覆盖自同构群 $\mathcal{G}$；
- 提升叶层 $\tilde{\mathcal{F}}$ 在 $\tilde{\Sigma}$上。

对于每个点 $z \in \Sigma$，我们将包含 z 的 $\mathcal{F}$ 的叶记为 ϕ_z。如果 $\mathbb{R} \to \Sigma$ 是 ϕ_z 的一个参数化，它诱导的定向满足 $\phi_z(0) = z$，则我们定义 $\phi_z^+ = \phi_z|_{[0,+\infty)}$ 和 $\phi_z^- = \phi_z|_{(-\infty,0]}$。类似地，对于每个点 $\tilde{z} \in \tilde{\Sigma}$，我们将包含 $\tilde{z}$ 的 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的叶记为 $\phi_{\tilde{z}}$，并以相同方式定义 $\tilde{\phi}_{\tilde{z}}^+$ 和 $\tilde{\phi}_{\tilde{z}}^-$。

3.1. $\mathcal{F}$-横截交点。路径 $\gamma : J \to \Sigma$ 与 $\mathcal{F}$ 正向横截[1]，若其 $\mathcal{F}$ 局部上从右侧向左侧穿越 $\mathcal{F}$ 的每一条叶。注意，每个提升 $\tilde{\gamma} : J \to \tilde{\Sigma}$ 的 γ 都与 $\tilde{\mathcal{F}}$ 正向横截，并且对于每个 $a < b$ 属于 J：

- $\tilde{\gamma}|_{[a,b]}$ 与每一条叶相交一次 $\tilde{\phi}$ 使得 $R(\phi_{\tilde{\gamma}(a)}) \subset R(\phi) \subset R(\phi_{\tilde{\gamma}(b)})$；
- $\tilde{\gamma}|_{[a,b]}$ 不与任何其他叶相交。

如果两条横截路径 $\tilde{\gamma}_1 : J_1 \to \tilde{\Sigma}$ 和 $\tilde{\gamma}_2 : J_2 \to \tilde{\Sigma}$ 与 $\tilde{\mathcal{F}}$的相同叶相交，则称它们等价。若存在 γ 的一个提升 $\tilde{\gamma}_1 : J_1 \to \tilde{\Sigma}$ 以及 γ_2 的一个提升 $\tilde{\gamma}_2 : J_2 \to \tilde{\Sigma}$，且它们等价，则称两条横截路径 $\gamma_1 : J_1 \to \Sigma$ 和 $\gamma_2 : J_2 \to \Sigma$ 等价。

令 $\tilde{\gamma}_1$、$\tilde{\gamma}_2$ 是两条横截路径，使得存在 $t_1 \in J_1$ 和 $t_2 \in J_2$ 满足 $\tilde{\gamma}_1(t_1) = \tilde{\gamma}_2(t_2)$。如果存在$a_1$、$b_1 \in J_1$ 满足 $a_1 < t_1 < b_1$，以及 a_2、$b_2 \in J_2$ 满足 $a_2 < t_2 < b_2$，使得：我们将称 $\tilde{\gamma}_1$ 与 $\tilde{\gamma}_2$ 在 $\tilde{\gamma}_1(t_1) = \tilde{\gamma}_2(t_2)$处具有 $\mathcal{F}$-横截交点

- $\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_1(a_1)} \subset L(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(a_2)})$，$\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(a_2)} \subset L(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_1(a_1)})$;
- $\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_1(b_1)} \subset R(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(b_2)})$，$\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(b_2)} \subset R(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_1(b_1)})$;

[1]在全文中，“横截”均指“正向横截”。

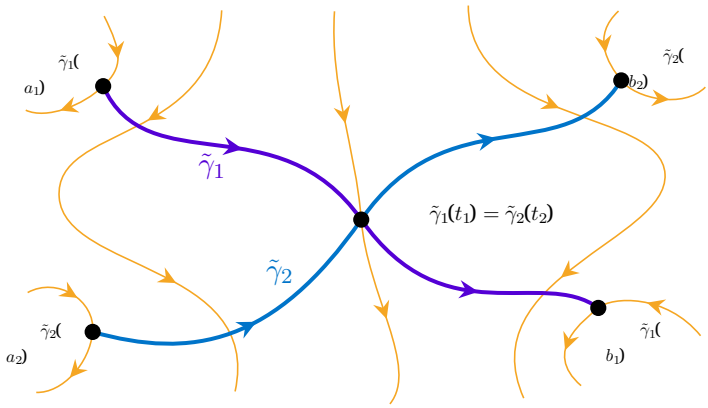


FIGURE 1. $\mathcal{F}$横向相交示例。

- 连接$\phi_{\tilde{\gamma}_1}(a_1)$与$\phi_{\tilde{\gamma}_1}(b_1)$的每条路径，以及连接$\phi_{\tilde{\gamma}_2}(a_2)$与$\phi_{\tilde{\gamma}_2}(b_2)$的每条路径，都必须相交。

这意味着由 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$ 在 $\tilde{\gamma}_2$ 的叶空间中自然定义的两条路径之间存在一次“穿越”；该叶空间是一维拓扑流形，通常不是豪斯多夫空间（见图 1）。

现在，设 $\gamma_1 : J_1 \to \Sigma$ 和 $\gamma_2 : J_2 \to \Sigma$ 为两条横截路径，且存在 $t_1 \in J_1$ 和 $t_2 \in J_2$ 满足 $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$。若 γ_1 和 γ_2 在 $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$处有一个 $\mathcal{F}$-横截交点，就称之为如此；如果 $\tilde{\gamma}_1 : J_1 \to \Sigma$ 和$\tilde{\gamma}_2 : J_2 \to \Sigma$ 是 γ_1 和 γ_2 的提升，且满足 $\tilde{\gamma}_1(t_1) = \tilde{\gamma}_2(t_2)$，那么 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$ 在 $\tilde{\gamma}_1(t_1) = \tilde{\gamma}_2(t_2)$处有一个 $\mathcal{F}$-横截交点。若 $\gamma_1 = \gamma_2$，则称为一个 $\mathcal{F}$-横截自交。这意味着，若 $\tilde{\gamma}_1$ 是γ_1的一个提升，则存在 $T \in \mathcal{G}$，使得 $\tilde{\gamma}_1$和 $T\tilde{\gamma}_1$ 在 $\tilde{\gamma}_1(t_1) = T\tilde{\gamma}_1(t_2)$处有一个 $\mathcal{F}$-横截交点。

3.2. 回归、等价与积聚。若对每个 $a < b$，都存在满足 $b < c$ 的 $c < d$，使得 $\gamma|_{[a,b]}$ 和 $\gamma|_{[c,d]}$ 等价，则横截路径 $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ 是正向回归的。类似地，若对每个 $a < b$，都存在满足 $d < a$ 的 $c < d$，使得 $\gamma|_{[a,b]}$和 $\gamma|_{[c,d]}$ 等价，则 γ 是负递归的。最后，若 γ 同时是正向回归的和负递归的，则称其为回归的。

若存在 a_1 和 a_2，它们属于 $\mathbb{R}$，且 $\gamma_1|_{[a_1,+\infty)}$ 和 $\gamma_2|_{[a_2,+\infty)}$ 等价，则两条横截路径 $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \Sigma$ 和 $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \Sigma$ 在 $+\infty$ 处等价。类似地，若存在 b_1 和 b_2，它们属于 $\mathbb{R}$，且 $\gamma_1|_{(-\infty,b_1]}$ 和 $\gamma_2|_{(-\infty,b_2]}$ 等价，则 γ_1 和 γ_2 在 $-\infty$ 处等价。

横截路径 $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \Sigma$ 在横截路径 $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \Sigma$ 上正向聚积，如果存在实数 a_1 和 $a_2 < b_2$，使得$\gamma_1|_{[a_1,+\infty)}$ 和$\gamma_2|_{[a_2,b_2)}$ 等价。类似地，如果存在实数 b_1 和 $a_2 < b_2$，使得 $\gamma_1|_{(-\infty,b_1]}$ 和$\gamma_2|_{(a_2,b_2]}$ 等价，则称 γ_1 在 γ_2 上负向聚积。最后，如果 γ_1 在 γ_2 上正向或负向聚积，则称 γ_1 在 γ_2上聚积。

3.3. 条带。我们固定 $T \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$ 并考虑

- 环带 $\hat{\Sigma} = \Sigma/T$；$\tilde{\Sigma} \to \hat{\Sigma}$
- 覆盖投影 $\pi : \Sigma \to \Sigma$ 和 $\hat{\pi} : \Sigma \to \hat{\Sigma}$；$\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$
- 由 $\mathcal{F}$ 诱导的、定义在 Σ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$。

$\tilde{\Sigma} \to \hat{\Sigma} \to \Sigma$ 假设 Γ_* 是与 $\mathcal{F}$ 横截的简单闭曲线。那么，Γ_* 是本质的，并且 $\tilde{\gamma}_* = \pi^{-1}(\hat{\Gamma}_*)$ 是 $\tilde{\Sigma}$ 中的一条定向直线，在 T 下不变且与 $\tilde{\mathcal{F}}$ 横截。集合

$$\hat{B} = \{\hat{z} \in \hat{\Sigma} \mid \hat{\phi}_{\hat{z}} \cap \hat{\Gamma}_* \neq \emptyset\}$$

$\hat{B}$ 是一个 $\mathcal{F}$-饱和的开环带，也就是说，它是若干叶的并。同理

$$\tilde{B} = \pi^{-1}(\hat{B}) = \{\tilde{z} \in \tilde{\Sigma} \mid \tilde{\phi}_{\tilde{z}} \cap \tilde{\gamma}_* \neq \emptyset\}$$

$\tilde{B}$ 是一个由 T 保持不变的 $\mathcal{F}$-饱和平面。若不需要更精确地描述，我们称这样的集合为条带；$\tilde{B}$ 若要更精确地描述，则称为 T-条带。B 的边界记作 ∂B，它是若干叶（可能为空）的并，可写作 $\partial \tilde{B} = \partial \tilde{B}^R \sqcup \partial \tilde{B}^L$，其中

$$\partial \tilde{B}^R = \partial \tilde{B} \cap R(\tilde{\gamma}_*), \qquad \partial \tilde{B}^L = \partial \tilde{B} \cap L(\tilde{\gamma}_*).$$

我们来陈述一些容易证明的事实（见 [LecT2] 或 [Lel]）。首先注意：

- 如果存在一条叶 $\tilde{\phi} \subset \partial \tilde{B}$ 在 T 作用下不变，那么包含 $\tilde{\phi}$ 的集合 $\partial \tilde{B}^R$ 或 $\partial \tilde{B}^L$ 就是这条叶本身；$\tilde{B}$
- 如果 $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \Sigma$ 与 $\mathcal{F}$ 横截，那么满足 $\gamma(t) \in B$ 的实数 t 构成一个区间（可能为空）。

$\tilde{\gamma}$ 现在假设 $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \Sigma$ 与 $\mathcal{F}$ 横截，并且

$$\left\{t \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) \in \tilde{B}\right\} = (a, b),$$

其中 $-\infty \leq a < b \leq \infty$。称

- $\tilde{\gamma}$ *draws* $\tilde{B}$ if there exist $t < t'$ in (a, b) such that $\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(t')} = T\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(t))}$.

此外，若假设 $-\infty < a < b < +\infty$，则称：

- $\tilde{\gamma}$ 从右侧向左侧穿过 $\tilde{B}$，若 $\tilde{\gamma}(a) \in \partial \tilde{B}^R$ 且 $\tilde{\gamma}(b) \in \partial \tilde{B}^L$；
- $\tilde{\gamma}$ 从左侧向右侧穿过 $\tilde{B}$，若 $\tilde{\gamma}(a) \in \partial \tilde{B}^L$ 且 $\tilde{\gamma}(b) \in \partial \tilde{B}^R$；

若 $\tilde{\gamma}(a) \in \partial \tilde{B}^R$ 且 $\tilde{\gamma}(b) \in \partial \tilde{B}^R$，则称 • $\tilde{\gamma}$ 在右侧访问 $\tilde{B}$；

若 $\tilde{\gamma}(a) \in \partial \tilde{B}^L$ 且 $\tilde{\gamma}(b) \in \partial \tilde{B}^L$，则称 • $\tilde{\gamma}$ 在左侧访问 $\tilde{B}$。

我们称 $\tilde{\gamma}$ 穿越 B，如果它从右向左或从左向右穿过它。类似地，如果 $\tilde{\gamma}$ 在右侧或左侧访问 B，我们就称 $\tilde{\gamma}$ 访问 B。注意，T（$\tilde{\gamma}$）满足与 $\tilde{\gamma}$相同的性质。还要注意，如果 $\tilde{\gamma}$ 在右侧访问 $\tilde{B}$，那么 $\partial \tilde{B}^R$ 并非仅由一条 T-不变叶构成。若 $\tilde{\gamma}$ 在左侧访问 B，则也有类似性质。最后，注意以下情况至少有一种会发生（最后两种情况并不互斥）：

- $\tilde{\gamma}$ 穿越 B；$\tilde{B}$
- $\tilde{\gamma}$ 访问 B；
- $\tilde{\gamma}$ 在 $+\infty$处或在 $-\infty$处等价于 $\tilde{\gamma}_*$；
- $\tilde{\gamma}$ 正向或负向聚积于 $\tilde{\gamma}_*$。

我们用以下性质结束这份性质列表（参见 [Lel，第 2.1.2.c 节]）：

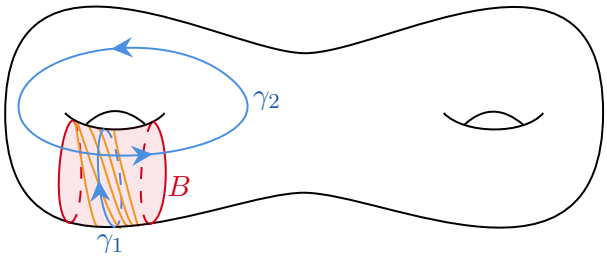


FIGURE 2. 一个命题成立的例子：3.2

命题 3.1. 我们得到以下结果：

- 如果 $\tilde{\gamma}$ 访问并描画 B，那么 $\tilde{\gamma}$ 和 $T(\tilde{\gamma})$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截交点，因此 $\gamma = \tilde{\pi} \circ \tilde{\gamma}$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截自交点。
- 如果 $\tilde{\gamma}_1$ 从右侧向左侧穿过 B，如果 $\tilde{\gamma}_2$ 从右侧向左侧穿过 B，并且路径 $\tilde{\gamma}_1$ 或 $\tilde{\gamma}_2$ 中至少有一条描画 B，那么存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $T^k(\tilde{\gamma}_2)$ 有一个 $\tilde{\mathcal{F}}$-横截交点，因此 $\gamma_1 = \tilde{\pi} \circ \tilde{\gamma}_1$ 和 $\gamma_2 = \tilde{\pi} \circ \tilde{\gamma}_2$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截交点。

3.4. 关于聚积性质的更多内容。 在最后这一段中，我们还假设 Σ 是连通的，并且 $\Sigma \neq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$。我们的目标是证明以下结果。该结果本身也很有意义，并将在后文用于证明定理 A。此结论比 [Lel 的第 2.1 节中的一些结果更强。1]。

命题 3.2. 设 $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \Sigma$ 是一条正向回归的横截路径，它在正向上聚积于一条横截路径 $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \Sigma$。那么，存在一条横截简单环 $\Gamma_* \subset \Sigma$，具有以下性质。

(1) 由 Γ_* 遇到的叶所构成的集合 B 是 Σ 的一个开环带。(2) 路径 γ_1 留在 B 中，且等价于 Γ_* 的自然提升。(3) 若 $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ 是 γ_1, γ_2 到万有覆盖空间 Σ 的提升，且满足 $\tilde{\gamma}_1|_{[a_1,+\infty)}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_2|_{[a_2,b_2)}$，并且若 B 是包含 $\tilde{\gamma}_1$ 的 B 的提升，那么以下包含关系之一成立：$\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(b_2)} \subset \partial \tilde{B}^R$，或 $\phi_{\tilde{\gamma}_2(b_2)} \subset \partial \tilde{B}^L$。在第一种情况下，对每个 $\tilde{\phi} \subset \partial \tilde{B}^R$，都有 $\tilde{B} \subset L(\tilde{\phi})$；在第二种情况下，对每个 $\tilde{\phi} \subset \partial \tilde{B}^L$，都有 $\tilde{B} \subset R(\tilde{\phi})$。

命题3.2 成立的一种情形如图2所示。

在命题4.17 中，当路径被假定为某些遍历的 f-不变测度的典型轨道时，我们将得到额外的性质。

证明。我们先从一个引理开始。

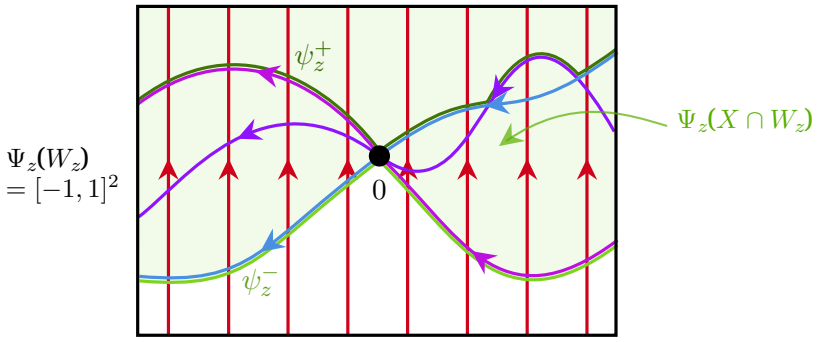


FIGURE 3. 路径 Γ 与叶状结构 $\mathcal{F}$（红色）在点 $0 = \Psi_z(z)$ 附近的局部构型。

引理 3.3。设 $\Gamma: \mathbb{T} \to \Sigma$ 是一条横截闭曲线，$\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \to$ 是I的定义域的一个提升~，Γ 的 B 以及包含 $\tilde{\gamma}$的条带。设 $T \in \mathcal{G}$ 为与 B相关联的覆盖变换~。假设存在一个覆盖变换 $R \in \mathcal{G}$ 和$a \in \mathbb{R}$，使得 $\tilde{\gamma}|_{[a,a+1]}$ 等价于 $R\tilde{\gamma}$的一个子路径。那么 $\tilde{\gamma}|_{[a,a+1)} \cap R\tilde{\gamma} \neq \emptyset$。

注意，如果此外 Γ 是一条简单路径，那么引理的结论意味着 $R \in \langle T \rangle$。

该引理很容易归结为以下事实。

子引理 3.4. 设 $\mathcal{F}$ 是 Σ 上的一个奇异叶状结构，$\Gamma: \mathbb{T} \to \Sigma$ 是 Σ 的一条与 $\mathcal{F}$ 横截的环路。那么，存在 $z \in \Gamma$，使得 ϕ_z^+ 除了在端点处外不与 Γ 相交。

引理 *3.3* 的证明。根据子引理 3.4，存在 z，z'，它们属于 Γ（可能相等），使得 ϕ_z^+和 $\phi_{z'}^-$ 除端点外不与 Γ 相交。记$\tilde{z}$，$\tilde{z}'$ 为分别属于 z，z' 且属于 $\tilde{\gamma}|_{[a,a+1)}$的提升。我们知道$\tilde{\phi}_{\tilde{z}}^+ \cap R\tilde{\gamma} = \emptyset$，并且 $\tilde{\phi}_{\tilde{z}'}^- \cap R\tilde{\gamma} \neq \emptyset$。由此可得 $R\tilde{\gamma} \cap \tilde{\gamma}|_{[a,a+1)} \neq \emptyset$。□

子引理 *3.4* 的证明。固定 $z \in \Gamma$。环路 Γ 与 $\mathcal{F}$ 横截，因此存在有限个参数 $t \in \mathbb{T}$，使得 $z = \Gamma(t)$。因此，存在一个紧邻域 W_z，它属于 z；还存在一个同胚 $\Phi_z: W_z \to [-1,1]^2$ 以及一个有限集合 I_z，使得：

- Φ_z 将 z 映到 $(0,0)$；
- Φ_z 将$\mathcal{F}|_{W_z}$ 映到向上定向的竖直叶状结构；
- 有 $\Phi_z(\Gamma \cap W_z) = \bigcup_{i \in I_z} \mathrm{gr}(\psi_{i,z})$，其中 $\psi_{i,z}: [-1,1] \to [-1,1]$是一个连续函数，满足 $\psi_{i,z}(0) = 0$。

这里，记号 $\mathrm{gr}(\psi)$ 表示 $\psi: [-1,1] \to [-1,1]$ 从右向左定向。此类构型的示例见图 3。

考虑这两个连续函数

$$\psi_z^- = \min_{i \in I_z} \psi_{i,z}, \quad \psi_z^+ = \max_{i \in I_z} \psi_{i,z}$$

并定义

$$\gamma_z^- = \Phi_z^{-1}(\mathrm{gr}(\psi_z^-)), \quad \gamma_z^+ = \Phi_z^{-1}(\mathrm{gr}(\psi_z^+)).$$

我们用反证法，假设对任意 $z \in \Gamma$，路径ϕ_z^+ 都与 Γ 相交于一个非端点处。在这种情况下，对每个$z \in \Gamma$，都存在 ϕ_z^+的一条子路径 $\delta_z : [0,1] \to \Sigma$，使得

$$\delta_z(0) = z, \quad \delta_z(1) \in \Gamma, \quad \delta_z((0,1)) \cap \Gamma = \emptyset.$$

特别地，我们可以定义首次回归映射 $\theta : \Gamma \to \Gamma$，令 $\theta(z) =\delta_z(1)$。我们将证明 $X = \bigcup_{z\in\Gamma} \delta_z([0,1])$ 是一个带边界的紧子曲面。注意，对每个 $z \in \Gamma$，函数 θ 都诱导出一个同胚，将 γ_z^+ 中 z 的一个紧邻域 α_z 映到 $\gamma_\theta^-(z)$ 中 $\theta(z)$ 的一个紧邻域 ω_z；因此，每个点 $\delta_z(t)$、$t \in (0,1)$ 都属于 X 的内部。还要注意，对每个 $z \in \Gamma$，集合$\Phi_z^-(\{(x,y) \mid y \geq \psi_z^-(x)\})$ 都包含于 X。由紧致性可知，可以用有限多个 α_z、$z \in \Gamma$ 覆盖 Γ。由此可得，θ 的像记作 $\mathrm{im}(\theta)$，是有限多个紧子集（相应的 ω_z）的并，因此是紧的。我们还可得 X 是紧的，因为对每个$z \in \Gamma$，集合 $\bigcup_{z'\in\alpha_z} \delta_{z'}([0,1])$ 都是紧的。现在注意，对每个 $z \in \Gamma$ 和每个 $z' \in \gamma_z^-$，集合 $\gamma_{z'}^-$ 与 γ_z^- 在 z' 的某个邻域内重合。这意味着 $\mathrm{im}(\theta)\cap\gamma_z^-$ 是 γ_z^- 的开子集。由 γ_z^- 的连通性可知，要么 γ_z^- 包含于 $\mathrm{im}(\theta)$，要么与 $\mathrm{im}(\theta)$ 不相交。在第一种情况下，W_z 包含于 X；在第二种情况下，$W_z \cap X = \Phi_z^{-1}(\{(x,y) \mid y \geq \psi_z^-(x)\})$：我们证明了 X 是 Σ 的一个紧子曲面（可能带边界）。注意，对每个 $z \in \partial X$，都有 $\phi_z^+ \setminus \{z\} \subset \mathrm{int}(X)$（换言之，叶状结构在边界上指向内侧）。

根据假设，Σ 是连通的，并且不同于 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$。因此，它不承载无奇异叶状结构。我们推 deduce 出 X 是一个带边界的曲面。更准确地说，由于它承载无奇异叶状结构，因此它同胚于闭环带。令 $\Psi : X \to \mathbb{S}^2$ 为一个与通常定向相容的拓扑嵌入。环路 $\Psi(\Gamma)$在 $\mathbb{S}^2$ 中同调于 0，因此可以定义一个对偶函数 $\delta : \mathbb{S}^2 \setminus \Psi(\Gamma) \to \mathbb{Z}$。该函数由以下性质定义：对于每个 z、$z' \in \mathbb{S}^2 \setminus \Psi(\Gamma)$，以及连接 z与 z'的任意路径 β，代数交数 $\Psi(\Gamma)\wedge\beta$等于$\delta(z')-\delta(z)$。令 U 为 $\mathbb{S}^2\setminus\Psi(\Gamma)$的一个连通分支，其中 δ 达到其最大值。由于集合 $\Psi(\Gamma)$是连通的，U 的闭包是一个拓扑圆盘。此外，δ 在 U 中达到最大值这一事实意味着，对于每个 $z \in \partial U$，都有 $\phi_z^+\setminus\{z\} \subset U$。因此，$U$ 不是 $\mathbb{S}^2 \setminus \Psi(X)$的连通分支，并且有 $\overline{U} \subset \psi(X)$。总而言之，我们找到了一个承载无奇异叶状结构的闭拓扑圆盘，且该叶状结构在边界上指向内部。由此得到矛盾。□

下面说明如何构造命题 Γ_* 3.2 中出现的简单闭曲线。由于 γ_1 是正向回归的，存在两个数 $c_1 < c_1'$，满足$c_1 > a_1$，使得$\phi_{\gamma_1(c_1)} = \phi_{\gamma_1(c_1')}$（这些不同的点见图4）。这意味着 $\gamma_1|_{[c_1,c_1']}$ 等价于一条横截路径 $\gamma_* : [c_1,c_1'] \to \Sigma$ 满足 $\gamma_*(c_1) = \gamma_*(c_1')$。集合

$$X = \left\{(t,t') \in [c_1,c_1']^2 \mid t < t' \text{ and } \gamma_*(t) = \gamma_*(t')\right\}$$

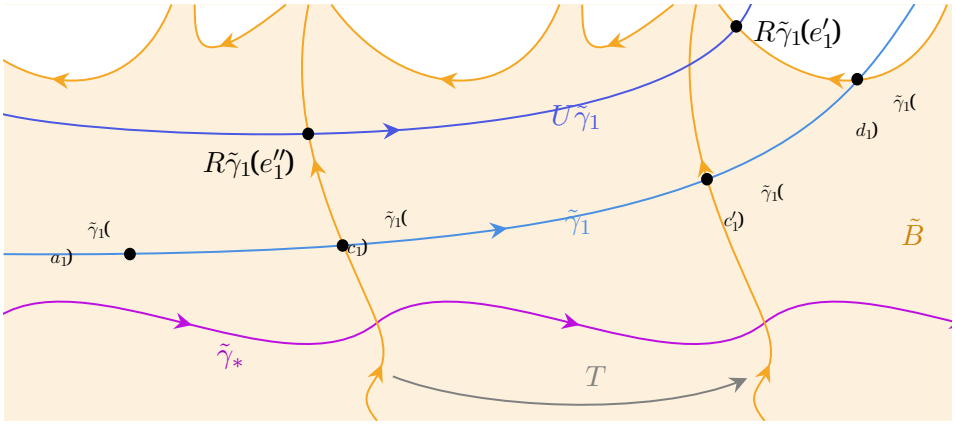


FIGURE 4. 命题证明中出现的不同对象3.2、引理3.5 和断言3.6。叶以橙色显示。

非空（因为它包含 (c_1, c_1')），且是紧的。事实上，它在 $\{(t,t') \in [c_1,c_1']^2 \mid t < t'\}$ 中是闭的，而它在紧集 $\{(t,t') \in [c_1,c_1']^2 \mid t \le t'\}$ 中的闭包不包含任何一对 (t,t)。函数 $(t,t') \mapsto t'-t$ 连续且在 X 上为正，因此在一对 (c_1'', c_1''') 处达到其最小值。因此，如有必要，可用 (c_1'', c_1''') 替换 (c_1, c_1')，这样总可以假设由 γ_* 自然定义的环路 Γ_* 是简单的。我们将 Γ_* 遇到的叶的并集记为 B。

根据假设，存在两个提升 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$，分别将 γ_1 和 γ_2 提升至 $\tilde{\Sigma}$，使得 $\tilde{\gamma}_1|_{[a_1,+\infty)}$ 与 $\tilde{\gamma}_2|_{[a_2,b_2)}$ 等价。我们将提升 B 且包含 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,c_1']}$ 的条带记为 $\tilde{B}$。我们将位于 $\tilde{B}$ 内部的 Γ_* 的一个提升记为 $\tilde{\gamma}_*$，并将与 B 相关联的本原覆盖变换记为 $T \in \mathcal{G}$（根据 $\tilde{\gamma}_*$ 的定向进行相应选择）。

引理 3.5. 路径 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,+\infty)}$ 包含于 $\tilde{B}$ 中。

证明。我们将通过反证法进行论证，并假设情况并非如此。那么存在 $d_1 > c_1'$，且其定义唯一，使得 $\tilde{\gamma}_1(d_1) \notin \tilde{B}$ 且 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,d_1)} \subset \tilde{B}$。

断言 3.6. 存在一个覆盖变换 $R \in \mathcal{G}$ 和实数 $e_1 < e_1'$，满足 $e_1 \ge a_1$，使得 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e_1']}$ 描画并穿过 B，或者它描画并访问 $\tilde{B}$。

证明。注意，要证明这一断言，必须找到 $R \in \mathcal{G}$ 和 $e_1 < e_1'$，使得 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e_1']}$ 描画 B，并且 $R\tilde{\gamma}_1(e_1)$ 和 $R\tilde{\gamma}_1(e_1')$ 都不属于 $\tilde{B}$。

由于 γ_1 是正向回归的，存在实数 $e_1'' < e_1'$，满足 $e_1'' > d_1$，以及一个覆盖变换 $R \in \mathcal{G}$，使得 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1'',e_1']}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,d_1]}$；特别地：

- $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,c_1']}$ 等价于 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1'',e_1']}$ 的一个子路径；
- $R\tilde{\gamma}_1([e_1'',e_1']) \subset \tilde{B}$ 和 $R\tilde{\gamma}_1(e_1') \notin \tilde{B}$。

要证明该结论，只需证明 $R\tilde{\gamma}_1([a_1,e_1')) \not\subset \tilde{B}$，因为在这种情况下，存在 $e_1 \in [a_1,e_1'']$ 使得 $R\tilde{\gamma}_1((e_1,e_1')) \subset \tilde{B}$ 且 $R\tilde{\gamma}_1(e_1) \notin \tilde{B}$。

˜我们通过反证法进行论证。假设 $R\tilde{\gamma}_1([a_1, e'_1])$ 包含于 B 中。那么 $\tilde{\gamma}_1([a_1, e'_1])$ 包含于 $R^{-1}(\tilde{B})$ 中。回顾一下，存在 t，使得$\tilde{\gamma}_*|_{[t,t+1]}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,c'_1]}$，而后者是 $\tilde{\gamma}_1|_{[a_1,e'_1]}$ 的一个子路径。这意味着 $\tilde{\gamma}_*|_{[t,t+1]}$ 等价于 $R^{-1}\tilde{\gamma}_*$ 的一个子路径，因为 $\tilde{\gamma}_1([a_1, e'_1])$ 包含于 $R^{-1}(\tilde{B})$ 中。引理 3.3 适用，并保证 $R^{-1} \in \langle T\rangle$。由于 ˜ ˜ ˜$B$在 T 作用下是不变的，因此条件 $R\tilde{\gamma}_1([a_1, e'_1]) \subset B$推出 $\tilde{\gamma}_1([a_1, e'_1]) \subset B$。˜这与条件 $\tilde{\gamma}_1(d_1) \notin B$矛盾，因为 $a_1 < d_1 < e'_1$。□

由于 γ_1 是正向回归的，存在序列 $(e_{1,n})_{n\geq 0}$ 和 $(e'_{1,n})_{n\geq 0}$，其中 $a_1 < e_{1,n} < e'_{1,n} < e_{1,n+1}$成立；还存在一个甲板变换序列 $(R_n)_{n\geq 0}$，使得 $R_n\tilde{\gamma}_1|_{[e_{1,n},e'_{1,n}]}$ 与 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$等价。由于 $\tilde{\gamma}_1$ 聚积于 $\tilde{\gamma}_2$，对于 $\tilde{\gamma}_2$也有类似结论：存在序列 $(e_{2,n})_{n\geq 0}$ 和 $(e'_{2,n})_{n\geq 0}$，其中 $a_2 < e_{2,n} < e'_{2,n} < e_{2,n+1} < b_2$ 成立，使得 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[e_{2,n},e'_{2,n}]}$与 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$等价。注意，$R_n$ 彼此均不相同，因为 $\mathcal{F}$ 的每个˜叶至多与 $\tilde{\gamma}_2([a_2, b_2])$ 相交一次。

根据断言 3.6，我们有两种可能：要么 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$ 描画并且 ˜ ˜穿过 B，要么它描画并访问 B。

˜假设 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$ 描画并穿过 B。在这种情况下，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，路径 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[e_{2,n},e'_{2,n}]}$ 与 $\tilde{\gamma}_*$相交。必要时，将 R_n 替换为 $T^{k_N} \circ R_n$，其中 $k_N \in \mathbb{Z}$ 是某个适当的值；于是可以假设 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[e_{2,n},e'_{2,n}]}$ 与$\tilde{\gamma}_*|_{[t,t+1]}$ 相交，因此 $R_n^{-1}(\tilde{\gamma}_*|_{[t,t+1]})$ 与 $\tilde{\gamma}_2([a_2, b_2])$ 相交。这与 $\mathcal{G}$ 在紧子集上的作用是适当的这一事实矛盾。

˜现在假设 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$ 描画并访问 B。那么 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$ 和˜$TR\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$存在一个 $\mathcal{F}$-横截交点。由此可推得，对任意 $n \in\mathbb{N}$，都有 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[e_{2,n},e'_{2,n}]}$ 和 $TR\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$存在一个 $\mathcal{F}$-横截交点，因为 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[e_{2,n},e'_{2,n}]}$ 和 $R\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]}$ 等价。因此，有 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[e_{2,n},e'_{2,n}]} \cap TR\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]} \neq \emptyset$，从而 $R_n\tilde{\gamma}_2|_{[a_2,b_2]} \cap TR\tilde{\gamma}_1|_{[e_1,e'_1]} \neq\emptyset$。这再次与 $\mathcal{G}$ 在紧子集上的作用是适当的这一事实矛盾。引理 3.5 的证明至此结束。□

˜由引理 3.5，我们知道 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,+\infty)}$ 保持在 B 中。我们首先证明，$\tilde{\gamma}_1$ 不会在 $\tilde{\gamma}_*$ 中聚积。

事实上，否则，由于 γ_1 是正向回归的，存在甲板变换 $(R_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{G}$ 以及参数 $d_n < d'_n$，二者都趋于 $+\infty$，使得$\tilde{\gamma}_1|_{[d_n,d'_n]}$ 等价于 $R_n\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,c'_1]}$，而后者又等价于 $R_n\tilde{\gamma}_*|_{[t,t+1]}$。由于 $\tilde{\gamma}_1$ 在 $\tilde{\gamma}_*$ 中聚积，这意味着 $R_n \notin \langle T\rangle$ 最终成立。回想一下，对任意 n，路径 $\tilde{\gamma}_1|_{[d_n,d'_n]}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$的一个子路径；因此可以对简单路径 3.3 应用引理 Γ_*，由此可得 $R_n \in \langle T\rangle$，矛盾。

因此，存在 $t_1 \in \mathbb{R}$，使得 $\tilde{\gamma}_1|_{[c_1,+\infty)}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*|_{[t_1,+\infty)}$。此外，它也等价于 $\tilde{\gamma}_2|_{[c_2,b_2)}$，其中 $c_2 \in [a_2, b_2]$。这意味着$\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2}(b_2) \subset \partial\tilde{B}$。不妨假设 $\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2}(b_2) \subset \partial\tilde{B}^L$。我们选择 $a'_2 \in [c_2, b_2)$，使得 $\tilde{\gamma}_2([a'_2, b_2]) \in L(\tilde{\gamma}_*)$。

引理 3.7。对于每一片叶 $\tilde{\phi} \subset \partial\tilde{B}^L$，都有 $\tilde{B} \subset R(\tilde{\phi})$。

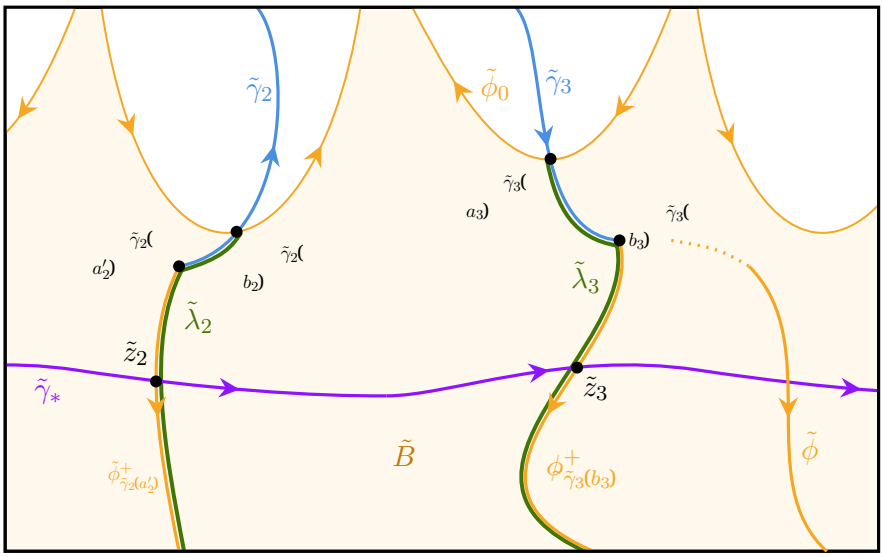


FIGURE 5. 引理证明的构型 3.7。

证明。证明中的构型示例见图5。假设存在一片叶 $\tilde{\phi}_0 \subset \partial \tilde{B}^L$，使得 $\tilde{B} \subset L(\tilde{\phi})$。可以找到一条横截路径 $\tilde{\gamma}_3 \colon [a_3, b_3] \to \Sigma$，使得 $\tilde{\gamma}_3(a_3) \in \phi_0$ 且 $\tilde{\gamma}_3((a_3, b_3]) \subset B$。这样的一条路径从左侧进入 B。如有必要，取更小的 b_3，此外还可以假设 $\tilde{\gamma}_3([a_3, b_3]) \subset L(\tilde{\gamma}_*)$。我们将证明，它阻止 $\tilde{\gamma}_1$ 在 $\tilde{\gamma}_2$中正向累积。若 λ是 B中的一条定向直线，记 $R_{\tilde{B}}(\lambda)$ 为位于 $B \setminus \lambda$ 的 λ右侧的连通分支，并将 $L_{\tilde{B}}(\lambda)$ 记为位于 $B \setminus \lambda$ 的 λ左侧的连通分支。通过令，可以定义 λ_2、λ_3 这两条 B 中的定向直线

$$\tilde{\lambda}_2 = (\tilde{\gamma}_2|_{[a_2', b_2)})^{-1} \tilde{\phi}^+_{\tilde{\gamma}_2(a_2')}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{\gamma}_3|_{(a_3, b_3]} \tilde{\phi}^+_{\tilde{\gamma}_3(b_3)}.$$

直线 $\tilde{\gamma}_*$ 与 $\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(a_2')}$ 相交于唯一一点 $\tilde{z}_2$，且有 $\tilde{z}_2 \in \tilde{\phi}^+_{\tilde{\gamma}_2(a_2')}$。类似地，$\tilde{\gamma}_*$ 与 $\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_3(b_3)}$ 相交于唯一一点 $\tilde{z}_3$，且有 $\tilde{z}_3 \in \tilde{\phi}^+_{\tilde{\gamma}_3(b_3)}$。

记 $\tilde{\sigma}_2 \subset \phi_{\tilde{\gamma}_2(a_2)}$ 为连接 $\tilde{\gamma}_2(a_2')$ 与 $\tilde{z}_2$ 的线段，记 $\tilde{\sigma}_3 \subset \phi_{\tilde{\gamma}(b_3)}$ 为连接 $\tilde{\gamma}_3(b_3)$ 与 $\tilde{z}_3$ 的线段。由于所有线段都具有紧致性，若 n 足够大，则有

$$T^n\left(\tilde{\gamma}_3([a_3, b_3]) \cup \tilde{\sigma}_3\right) \cap \left(\tilde{\gamma}_2([a_2', b_2]) \cup \sigma_2\right) = \emptyset.$$

此外，可以假设 that

$$T^n \tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_3(b_3)} \subset L(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}_2(a_2')}).$$

$\tilde{\gamma}_2([a_2', b_2])$ 和 $\tilde{\gamma}_3([a_3, b_3])$ 包含在 $L(\tilde{\gamma}_*)$ 中，而 $\tilde{\phi}^+_{\tilde{\gamma}_2(b_2)}$ 和 $\tilde{\phi}^+_{\tilde{\gamma}_3(b_3)}$ 包含在 $R(\tilde{\gamma}_*)$ 中，这告诉我们

$$T^n \tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(b_3)} \cap \left(\tilde{\gamma}_2([a_2', b_2]) \cup \tilde{\sigma}_2\right) = \emptyset.$$

我们推得直线 λ_2 和 $T^n \lambda_3$ 互不相交。

˜ ˜连接 $\tilde{z}_2$ 与 $T^n\tilde{z}_3$ 的 $\tilde{\gamma}_*$ 子路径与 λ_2 和 $T^n\lambda_3$ 互不相交，但 ˜ ˜在端点处除外：它在 $\tilde{z}_2$ 处进入 $L_{\tilde{B}}(\lambda_2)$，并在 $T^n\tilde{z}_3$ 处离开 $R_{\tilde{B}}(T^n\lambda_3)$。˜ ˜因此，以下~~包含关系 $L_{\tilde{B}}(T^n\lambda_3)$~~ $\subset L_{\tilde{B}}(\lambda_2)$ 成立。每个叶˜ ˜ ˜ ˜$\phi \subset L_{\tilde{B}}(\phi_{T^n\tilde{z}_3})$ 都与 $T^n\lambda_3$ 互不相交。它包含于 $L(T^n\lambda_3)$ 中，因为˜ ˜ ˜连接 $\phi_{T^n}(\tilde{z}_3)$ 与 ϕ 的 $\tilde{\gamma}_*$ 子路径与 $T^n\lambda_3$ 互不相交，但在 $T^n\tilde{z}_3$˜处除外，并在 $T^n\tilde{z}_3$ 处进入 $L_{\tilde{B}}(T^n\lambda_3)$。矛盾源于这样一个事实：˜ ˜ ˜$\phi$ 必定与 $\tilde{\gamma}_2|_{[a_2',b_2}$ 相交），因为 $\phi \subset L_{\tilde{B}}(\phi_{z_2})$. □

引理 3.8。集合 B 是 Σ 的一个开环带。

证明。假设情况并非如此。那么存在 Σ 的一个覆盖变换 $R \notin \langle T \rangle$ ˜ ˜ ˜ ˜，使得 $RB \cap B \neq \emptyset$。由于 B 是与 $\tilde{\gamma}_*$ 相交的叶的集合，这意味着˜存在 $t \in \mathbb{R}$，使得 $R\tilde{\gamma}_*(t) \in B$。直线 $\tilde{\gamma}_*$ 提升了简单闭曲线 Γ_*，因此我们有 $R\tilde{\gamma}_* \cap \tilde{\gamma}_* = \emptyset$。此外，$\mathcal{F}$ 至少有一条叶˜同时与 $\tilde{\gamma}_*$ 和 $R\tilde{\gamma}_*$ 相交。因此，~~以下包~~含关系之~~一成立：~~ $L(R\tilde{\gamma}_*) \subset L(\tilde{\gamma}_*)$，$L(\tilde{\gamma}_*) \subset L(R\tilde{\gamma}_*)$。如有必要，用 R^{-1} 替换 R，便可假设第一个包含关系成立，这意味着 $R\tilde{\gamma}_* \subset L(\tilde{\gamma}_*)$。

注意到 $R\tilde{\gamma}_*$ 不能累积于 $\tilde{\gamma}_*$（无论正向还是负向），因为自然提升 γ_* 的 Γ_* 是回归的，因此根据引理3.3，它不能累积于自身。此外，它也不可能等价于 $\tilde{\gamma}_*$，无论是在 $+\infty$˜还是在 $-\infty$（利用引理3.3）。它不可能穿越 B，因为 $R\tilde{\gamma}_* \cap \tilde{\gamma}_* = \emptyset$。˜接下来需要证明它不能访问 B。

˜利用 $R\tilde{\gamma}_* \subset L(\tilde{\gamma}_*$这一事实，直线 $R\tilde{\gamma}_*$ 必须从左侧访问 B，如果˜它访问了 B。这与引理3.7相矛盾：没有横截轨迹会从左侧进入˜B。□

为了证明命题3.2，还需证明 γ_1 完全包含˜于 B（这将意味着 $\tilde{\gamma}_1$ 完全包含于 B）。但这可由以下事实推出：$\gamma_1|_{[a_1,+\infty)}$ 包含于 B，且 γ_1 是回归的。至此，命题3.2的证明完成。□

以下结果（以及其他与聚积性质相关的结果）已由 Lellouch 在 [Lel，第 2.1 节中陈述。1]利用此处给出的精确描述，我们可以将它们作为一个显然的推论得到。

推论 3.9。设 $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \Sigma$ 是一条正递归横截路径，它在正向聚积于一条横截路径 $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \Sigma$。那么，不存在一条正递归或负递归的横截路径 $\gamma_0 : \mathbb{R} \to \Sigma$，使其正向或负向聚积于 γ_1。特别地，一条正递归横截路径不会聚积于自身。此外，聚积叶 $\phi_{\gamma_2(b_2)}$ 不与 γ_1 相交。

证明。为证明第一点，只需注意，根据命题 3.2，函数 $t \mapsto \phi_{\gamma_1(t)}$ 是局部单射。最后一点源于这样一个事实：γ_1 包含于 B，而 $\phi_{\gamma_2(b_2)}$ 包含于 B 的边界中。□

4. Forcing theory

4.1. 极大同伦与横截叶状结构。设 Σ 是一个定向无边界曲面，不一定是闭曲面，也不一定连通，并且

f 是一个同伦于恒等映射的同胚。回顾一下，若 $I=(f_t)_{t\in[0,1]}$ 是 f 上的恒等同伦，则点 $z\in\Sigma$ 的轨道 $I(z)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的路径 $t\mapsto f_t(z)$。我们可以将 z 的整个轨道定义为路径

$$I^{\mathbb{Z}}(z)=\prod_{k\in\mathbb{Z}} I(f^k(z))$$

通过拼接构造。更确切地说，在每个区间 $[k,k+1]$、$k\in\mathbb{Z}$ 上，它由以下公式定义：

$$I^{\mathbb{Z}}(z):t\mapsto f_{t-k}(f^k(z)).$$

我们将 I 的不动点集和定义域定义如下：

$$\mathrm{fix}(I)=\bigcap_{t\in[0,1]}\mathrm{fix}(f_t),\ \ \mathrm{dom}(I)=\Sigma\setminus\mathrm{fix}(I).$$

记 $\mathcal{I}$ 为 f 的恒等同伦集合。我们在 $\mathcal{I}$ 上定义如下预序：若满足以下条件，则称 $I\preceq I'$：

- 固定 I，$\subset$ 固定 I'；
- I' 与 I 在 $\mathrm{fix}(I)$ 上相对同伦。

下面陈述两个重要结果。第一个归功于 B´eguin-Crovisier-Le Roux [BeCLer] (另见 [J]，其中给出了一个较弱的版本)。第二个可见于 [Lec1]。

定理4.1. 对于每个 $I\in\mathcal{I}$，存在 $I'\in\mathcal{I}$ 使得 $I\preceq I'$，并且 I' 对于该预序是极大的。

注. 同伦 I是极大的，当且仅当对于每个 $z\in\mathrm{fix}(f)\setminus\mathrm{fix}(I)$，环路 $I(z)$ 在 $\mathrm{dom}(I)$ 中不可缩。等价地，若我们将同伦 $\widetilde{\sim}$ $\sim I|_{\mathrm{dom}(I)}$ 提升为万有覆盖空间 $\widetilde{\mathrm{dom}(I)}$ of $\mathrm{dom}(I)$上的恒等同伦 $\widetilde{I}=(\widetilde{f_t})_{t\in[0,1]}$，则 I 的极大性意味着 $\widetilde{f_1}$ 没有不动点。注意，$\mathrm{dom}(I)$的每个连通分支都必须是一个拓扑平面。

定理4.2. 若 $I\in\mathcal{I}$ 是极大的，则存在 M 上的拓扑定向奇异叶状结构 $\mathcal{F}$，使得

- 奇异集$\mathrm{sing}(\mathcal{F})$与$\mathrm{fix}(I)$一致；
- 对于每个 $z\in\mathrm{dom}(I)$，轨道 $I(z)$在$\mathrm{dom}(I)$中相对于两端同伦于一条连接 z 和 $f(z)$的横截路径 γ。

我们称 $\mathcal{F}$ 与 I 横截。它可以提升为定义域 $\mathrm{dom}(I)$ 上的一个无奇点 $\widetilde{\ }$ 叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}$，且该叶状结构与 $\widetilde{I}$ 横截。后一性质等价于：$\mathcal{F}$ 的每个叶 ϕ 都是由 I 诱导的提升 $\widetilde{f}$ 的布劳威尔直线，定义见第 2.1 节。路径 γ 在等价意义下唯一确定：若 γ_1 和 γ_2 是两条这样的路径，且 $z\in\mathrm{dom}(I)$ 提升 $\tilde{z}\in\mathrm{dom}(I)$，那么从 $\tilde{z}$ 出发的 γ_1、γ_2 的相应提升 $\tilde{\gamma}_1$、$\tilde{\gamma}_2$ 都将该点连接到 $\widetilde{f(z)}$，因而与 $\mathcal{F}$ 的相同叶相交。我们将记作 $\gamma=I_{\mathcal{F}}(z)$，并称这条路径为 z 的横截轨迹。它在 $[0,1]$ 上定义，且在等价意义下唯一。对每个 $n\geq 1$，我们将通过路径的拼接来定义

$$I^n_{\mathcal{F}}(z)=I_{\mathcal{F}}(z)I_{\mathcal{F}}(f(z))\cdots I_{\mathcal{F}}(f^{n-1}(z)).$$

我们也可以将 z 的完整横截轨迹定义为路径

$$I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} I_{\mathcal{F}}(f^k(z))$$

在 $[k, k+1]$、 $k \in \mathbb{Z}$ 上重合，平移 $-k$ 后与 $I_{\mathcal{F}}(f^k(z))$ 重合。类似地，我们定义

$$\tilde{I}^n_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}) = \tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{f}(\tilde{z}))\cdots\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{f}^{n-1}(\tilde{z}))$$

and

$$\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{f}^k(\tilde{z})).$$

回忆一下，流盒 $\mathcal{F}$ 是一个开圆盘 U，它包含于I) 的定义域中，且叶状结构 $\tilde{\mathcal{F}}|_{\tilde{U}}$ 同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的竖直叶状结构。以下结果易于证明（参见[LecT1]），将在本文中用到。

命题 4.3. 对每个 $\tilde{z} \in$ 定义域(I) 以及每对整数 $k_1 < k_2$，都存在 $\tilde{z}$ 的一个邻域 $\tilde{U}$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[k_1,k_2]}$ 是 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}')|_{[k_1-1,k_2+1]}$ 的一个子路径（相差一个等价变换）。

命题 4.4. 对每个 $\tilde{z} \in$dom(I) 以及每个 V of $\tilde{z}$ 的邻域，都存在一个包含 $\tilde{z}$ 的流盒 $U \subset V$，使得对每个 $\tilde{z}' \in U$，路径 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}')$ 都与每一条经过 $\tilde{U}$ 的叶相交。

请记住，如果 f 是 Σ的一个同胚，点 z 是正向回归的，如果 $z \in \omega(z)$；而负递归，如果 $z \in \alpha(z)$。若 $z \in \alpha(z) \cap \omega(z)$，则称 z 为回归的。例如，若 μ 是定义在 S上的不变有限博雷尔测度，则 μ-几乎处处的点都是回归的。下面的结果是命题4.3的直接推论。

命题 4.5. 若 $z \in$ dom(I) 是正向回归的，则 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 是正向回归的。若 z 是负递归的，则 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 是负递归的。

现在陈述 [LecT1] 的关键引理（命题 20）。它是强制理论的基本构件，后文将会用到。

引理 4.6. 假设存在 $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in$ dom(I)，以及正整数 n_1, n_2，使得 $I^{n_1}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_1)$ 和 $I^{n_2}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_2)$ 在 $I^{n_1}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_1)(t_1) = I^{n_2}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_2)(t_2)$ 处有一个 $\mathcal{F}$-横截交点。那么存在 $\tilde{z}_3 \in$ dom(I)，使得 $\tilde{I}^{n_1+n_2}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_3)$ 等价于 $\tilde{I}^{n_1}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_1)|_{[0,t_1]}\tilde{I}^{n_2}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_2)|_{[t_2,n_2]}$。

现在给出[LecT2]的主要结果。这里，$\mathcal{G}$ 是上覆盖自同构群，其中定义域为 dom(I)；而 $[T]_{\mathcal{FHL}} \in \mathcal{FHL}(S)$ 是环路 S在 $\Gamma \subset$ dom(I) 中自然定义的自由同伦类 T (参见第 2.5 段)。

定理4.7. 假设存在 $\tilde{z} \in$ 定义域(I)、 $T \in \mathcal{G} \setminus \{$恒等映射$\}$ 和 $r \geq 1$，使得 $I^r_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 和 $TI^r_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 在 $I^r_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})(a) = T(I^r_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}))(a')$ 处具有一个 $\mathcal{F}$-横截交点，其中 $a' < a$。那么 f存在一个类型为 $([T]_{\mathcal{FHL}}, r)$ 的旋转马蹄。

证明。在 [LecT2] 中证明了以下结论，其中 $\mathrm{dom}(I) = \mathrm{dom}(I)/T$ 且 f 是由 I 所诱导的 $\mathrm{dom}(I)$ 的同胚。

存在一个 f^r-不变紧集 Y，使得

- f^r 是伯努利移位 $\sigma\colon \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \to \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 的一个扩张；
- 因子映射下，每个 q-周期序列 $\{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ 的原像都至少包含 f^r 的一个 q-周期点；
- 对于每个以既约方式写出的 $p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，都存在 $z_{p/q} \in Y$，使得如果 $\tilde{z}_{p/q} \in \mathrm{dom}(I)$ 提升 $z_{p/q}$，则 $f^{rq}(\tilde{z}_{p/q}) = T^p(\tilde{z}_{p/q})$。

通过覆盖投影 $\pi : \mathrm{dom}(I) \to \mathrm{dom}(I)$，$Y$ 的像 Y 在 f^r 下不变。它是一个拓扑马蹄，因为 $\pi|_Y$ 是从 $f^r|_Y$ 到 $f^r|_Y$ 的半共轭，并且 Y 中每个 $z \in Y$ 都只有有限多个提升（且有统一上界 s），因为 Y 是紧的。由 $I^{rq}(z_{p/q})$ 自然定义的 S 的环路，其中 $z_{p/q} = \tilde{\pi}(\tilde{z}_{p/q})$，属于 $[T]^p_{\mathcal{FHL}}$。此外，$z_{p/q}$ 的 f^r-轨道有 q 个点，因为 p 和 q 互素。它投影到 $z_{p/q}$ 的 f^r-轨道上，该轨道至少有 q/s 个点。因此，$z_{p/q}$ 的周期（对于 f）至少为 q/s。□

注。特别地，该定理断言存在一个拓扑马蹄，因此在存在 $z \in \mathrm{dom}(I)$ 使得 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截自交的情况下，拓扑熵为正。[LecT1] 中证明了，在存在两个正向（或负向）回归点 z_1, z_2 属于 $\mathrm{dom}(I)$，且 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z_1)$ 和 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z_2)$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截交点的情况下，就会出现这种情形。例如，如果 f 保持一个具有全支撑的博雷尔概率测度，并且存在两个点 z_1, z_2 属于 $\mathrm{dom}(I)$，使得 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z_1)$ 和 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z_2)$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截交点，那么就会出现这种情形。事实上，根据命题 4.3，如果 z_1', z_2' 分别足够接近 z_1, z_2，那么 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z_1')$ 和 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z_2')$ 也有一个 $\mathcal{F}$-横截交点。但是，如果 f 保持一个具有全支撑的博雷尔概率测度 λ，那么 λ-几乎处处的点都是回归的，因此回归点的集合是稠密的。

以下内容比上一条注中所述的结果更强，对 [Lel] 至关重要，在我们的研究中也将发挥基础作用。

推论 4.8. 设 Σ 是一个闭曲面，且 ν_1、ν_2 是遍历不变概率测度。若存在 $\tilde{z}_1 \in$ 定义域$(I) \cap$支集(ν_1)，以及$\tilde{z}_2 \in$定义域$(I)\cap$支集(ν_2)，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_1)$ 与 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}_2)$ 以 $\mathcal{F}$-横截方式相交，那么对于 $H_1(S,\mathbb{R})$ 中 $\mathrm{rot}_f(\nu_1)$ 的任意邻域 $\mathcal{U}$，都存在 $T \in \mathcal{G} \setminus \{\text{恒等映射}\}$ 和 $r \geq 1$，使得 $[T]/r \in \mathcal{U}$ 且满足 f 存在一个类型为 $([T]_{\mathcal{FHL}}, r)$ 的旋转马蹄。

注意，在 $\nu_1 = \nu_2$ 且某个 $\tilde{z} \in$定义域$(I) \cap$支集(ν_1) 使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 存在一个 $\mathcal{F}$-横截自交的情况下，也可以应用此推论。

证明。设 $j \in \{1,2\}$。众所周知，ν_j-几乎处处的点 z_j' 满足以下性质：

- z_j' 是回归的；
- 其轨道在 $\mathrm{supp}(\nu_j)$ 中稠密；

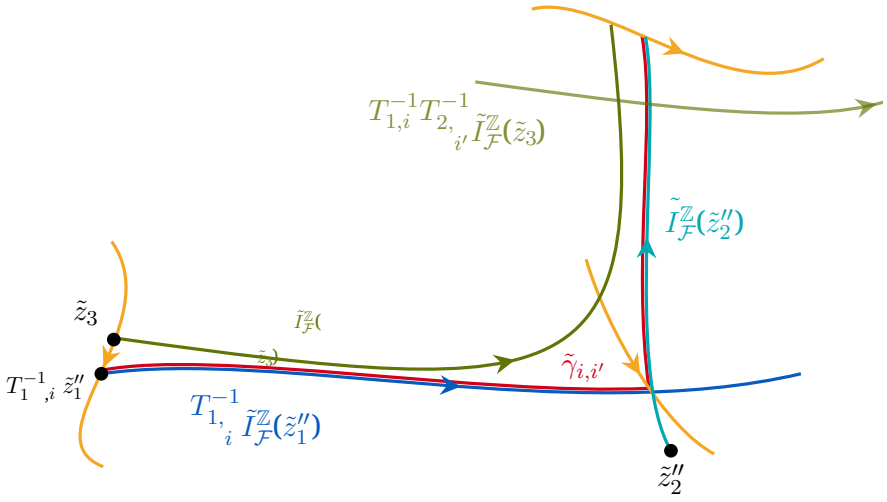


FIGURE 6. 推论 4.8 的证明构型。橙色直线是叶。

- 若 $\tilde{z}_j' \in \widetilde{\mathrm{dom}}(I)$ 是 z_j' 的一个提升，则存在一个序列 $(T_{j,i})_{i\geq 0}$，属于 $\mathcal{G}$，以及一个序列 $(n_{j,i})_{i\geq 0}$，属于 $\mathbb{N}\setminus\{0\}$，使得

$$\lim_{i\to+\infty} n_{j,i} = +\infty, \quad \lim_{i\to+\infty} \frac{[T_{j,i}]}{n_{j,i}} = \mathrm{rot}_f(\nu_j), \quad \lim_{i\to+\infty} T_{j,i}^{-1} f^{n_{j,i}}(\tilde{z}_j') = \tilde{z}_j'.$$

根据命题 4.3 和该推论的假设，我们知道$I_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}(z_1')$与 $I_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}(z_2')$以 $\mathcal{F}$-横截方式相交。因此，存在 $r'\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$、$s_1$、$s_2\in\mathbb{Z}$ 以及 z_1'和 z_2'的两个提升 $\tilde{z}_1'$和 $\tilde{z}_2'$，使得 $\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{f}^{s_1}(\tilde{z}_1'))$与$\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{f}^{s_2}(\tilde{z}_2'))$以 $\mathcal{F}$-横截方式相交。记 $\tilde{z}_j'' = \tilde{f}^{s_j}(\tilde{z}_j')$。证明构型见图6。

根据命题 4.3，如果 $r'+2$足够大，那么在等价意义下，$\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{z}_j'')$ 是 $T_{j,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+2}(\tilde{f}^{n_{j,i}-1}(\tilde{z}_j''))$ 的一个子路径。因此，$T_{1,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+2}(\tilde{f}^{n_{1,i}-1}(\tilde{z}_1''))$ 与 $\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{z}_2'')$ 在 $T_{1,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+2}(\tilde{f}^{n_{1,i}-1}(\tilde{z}_1''))(a) = \tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{z}_2'')(b)$ 处有一个 $\tilde{\mathcal{F}}$-横截交点；此外，$T_{2,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+2}(\tilde{f}^{n_{2,i}-1}(\tilde{z}_2''))$ 与 $\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{z}_1'')$ 在 $T_{2,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+2}(\tilde{f}^{n_{2,i}-1}(\tilde{z}_2''))(c) = \tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'}(\tilde{z}_1'')(d)$ 处有一个 $\tilde{\mathcal{F}}$-横截交点（为简洁起见，此处省略了对 i,i' 的依赖）。

引理 4.6 则意味着，对于任意 i，i'，存在 $\tilde{z}_{3,i'}\in\widetilde{\mathrm{dom}}(I)$，使得 $\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+2+n_{1,i}+n_{2,i'}}(\tilde{z}_{3,i'})$ 等价于路径

$$\tilde{\gamma}_{i,i'} = T_{1,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+1+n_{1,i}}(\tilde{z}_1'')|_{[0,n_{1,i}-1+a]} \cdot \tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{r'+1+n_{2,i'}}(\tilde{z}_2'')|_{[b,r'+1+n_{2,i'}]}.$$

考虑参数 $e\in[0,2r'+3+n_{1,i}+n_{2,i'}]$，使得

$$\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}(\tilde{z}_3)(e) = T_{1,i}^{-1}\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}(\tilde{z}_1'')(n_{1,i}-1+a) = \tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}(\tilde{z}_2'')(b).$$

注意，如果 i、i' 足够大，那么 $n_{1,i}-1+a\geq d$，且 $b\leq n_{2,i'}-1+c$。这意味着 $T_{1,i}\tilde{\gamma}_{i,i'}$ 与 $T_{2,i'}^{-1}\tilde{\gamma}_{i,i'}$ 在点处具有一个 $\tilde{\mathcal{F}}$-横截交点。

$T_{1,i}\tilde{\gamma}_{i,i'}(e') = T_2^{-1},_{i'}\tilde{\gamma}_{i,i'}(e'')$，其中 $e' < e < e''$。因此，$\tilde{\gamma}_{i,i'}$与 $T_{2,i'}T_{1,i}\tilde{\gamma}_{i,i'}$在点 $\tilde{\gamma}_{i,i'}(e'') = T_{2,i'}T_{1,i}\tilde{\gamma}_{i,i'}(e')$ 处有一个 $\tilde{\mathcal{F}}$-横截相交，其中$e' < e''$。根据定理 4.7，存在 $s \geq 1$，使得 f 具有类型为 $([T_{2,i'}T_{1,i}]_{\mathcal{FHL}}, 2r' + 2 + n_{1,i} + n_{2,i'})$ 的旋转马蹄。如果 i 足够大（i' 固定但足够大，以确保上述性质成立），那么我们有 $[T_{2,i'}T_{1,i}]_{\mathcal{FHL}}/(2r' + 2 + n_{1,i} + n_{2,i'}) \in \mathcal{U}$。□

我们通过 Lellouch 学位论文中的以下定理，来结束对一些强制理论工具的简要介绍 [Lel，Th´eor`eme C]:

定理 4.9. 假设 $g \geq 2$。若 $f \in \mathrm{Homeo}_*(S)$ 保持两个博雷尔概率测度 μ_1和 μ_2，且 $\mathrm{rot}_f(\mu_1) \wedge \mathrm{rot}_f(\mu_2) \neq 0$，则 f具有一个拓扑马蹄。特别地，f 有无穷多个周期点。

此外，若 μ_1 是遍历的，则可以假设这些周期点的旋转向量任意接近 $\mathrm{rot}_f(\mu_1)$，且周期任意大：对于 $H_1(S, \mathbb{R})$ 中 $\mathrm{rot}_f(\mu_1)$ 的任意邻域 $\mathcal{U}$，都存在一个类型为 (κ, r) 的旋转马蹄，满足 $[\kappa]/r \in \mathcal{U}$。

这里，$\wedge$ 是交形式。它是定义在 $H_1(S, \mathbb{R})$上的辛形式，其定义性质是：若 Γ_1和 Γ_2是 S中的两个环路，则 $[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2]$是 Γ_1 与 Γ_2之间的代数交数。等价地，除一个乘法常数外，它是由$\wedge$ 通过庞加莱˙对偶诱导的形式：$H^1(S, \mathbb{R}) \times H^1(S, \mathbb{R}) \to H^2(S, \mathbb{R})$。

4.2. 环带覆盖空间中的强制理论。现在假设 Σ 是一个定向闭曲面，并将其记作 S。我们沿用其他˜ ⌢ 记号。考虑 $T \in \mathcal{G} \setminus$ 恒等映射和一个 T-条带 $B \subset$ 定义域(I)（假设 T 在I的定义域中不包含 B的连通分支˜ ˜
上与恒等映射重合）。固定一条 T-不变直线 $\tilde{\gamma}_* \subset B$。我们定义

- 曲面定义域$(I) =$ 定义域$(I)/T$;⌣ ⌢ ⌢
- 投影 π： 定义域$(I) \to$ 定义域(I)和ˆπ： 定义域$(I) \to$ 定义域(I); ˆ⌢ ˜
- 由 I 提升的定义域(I)上的恒等同伦 I ; ˆ⌢ ˜
- f的提升$f|_{\text{定义域}(I)}$到由 f提升的定义域(I);
- 由 $\mathcal{F}$ 提升的 ⌢ dom(I) 上的叶状结构 ˆ$\mathcal{F}$; ˆ
- 环路 $\Gamma_* = \pi(\tilde{\gamma}_*)$。

ˆ Γ_* 在其连通分支中的补集由两个环带状连通分支 $L(\Gamma_*)$ 和 $R(\Gamma_*)$ 组成。我们将⌢ dom(I) 与 L(ˆΓ_*) 的公共端记为 ˆ∞_L ，将 ⌢dom(I) 与 R(ˆΓ_*) 的公共端记为 ˆ∞_R 。

我们考虑

- 集合 $\tilde{W}^{R\to L}$ 中的点 $\tilde{z} \in$ ⌣ ，其定义域为 I，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 从右侧穿过 $\tilde{B}$ 到左侧;
- 使 $\tilde{W}^{L\to R}$ 中的点 $\tilde{z} \in$ ⌣dom(I) 满足 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 从左侧穿越 $\tilde{B}$ 到右侧;
- 使得 $\tilde{z}(\tilde{z})$ 访问右侧 $\tilde{B}$ 的点集合 $\tilde{z} \in$ ⌣定义域(I);
- 满足以下条件的点集 $\tilde{W}^{L\to L}$ $\tilde{z} \in$ ⌣定义域(I): $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 从左侧访问 $\tilde{B}$;
- 点 $\tilde{z} \in$ ⌣dom(I) 的集合 $\tilde{W}^D$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 描画 $\tilde{B}$。

˜注意，所有这些集合在 f 和 T作用下均为不变集合。还要注意，根据命题 4.3，这些集合是开集。

我们定义相应的投影，其定义域为 $\widehat{\mathrm{dom}(I)}$

$$\hat{W}^{R\to L},\ \hat{W}^{L\to R},\ \hat{W}^{R\to R},\ \hat{W}^{L\to L},\ \hat{W}^{D},$$

ˆ，它们是开集且在 f 作用下不变；并定义定义域为 $\mathrm{dom}(I)$ 的相应投影

$$W^{R\to L},\ W^{L\to R},\ W^{R\to R},\ W^{L\to L},\ W^{D},$$

它们是开集且在 f 作用下不变。

最后，我们定义

- the set $\hat{\infty}_R \to \hat{\infty}_L$ of points $\hat{z} \in \widehat{\mathrm{dom}(I)}$ such that
$$\lim_{k\to-\infty} \hat{f}^k(\hat{z}) = \hat{\infty}_R\,,\quad \lim_{k\to+\infty} \hat{f}^k(\hat{z}) = \hat{\infty}_L;$$
- 满足 $\mathrm{dom}(I)$ 的点$\hat{\infty}_L \to \hat{\infty}_R$ 的$\widehat{\text{集合}}$
$$\lim_{k\to-\infty} \hat{f}^k(\hat{z}) = \hat{\infty}_L\,,\quad \lim_{k\to+\infty} \hat{f}^k(\hat{z}) = \hat{\infty}_R.$$

我们将陈述一些已在[Lel] 中证明的结果，并补充一些其中未明确出现的结果。以下结果已在[Lel] （命题 2.2.12）中得到证明。

引理 4.10。 假设 $\nu \in \mathcal{M}$（f） 是遍历的，并且 ν-几乎处处的点 z 都有一个提升 $\tilde{z} \in \widetilde{\text{定义域}}(I)$ 使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{f}}$（$\tilde{z}$） 在 $+\infty$ 或 $-\infty$ 中等价于$\tilde{\gamma}_{*0}$。则存在 $a \geq 0$[2] 使得 $\mathrm{rot}(\nu)\ = a[T]$。

下一个结果也已在 [Lel] （引理 2.2.3 和命题 2.2.4）中得到证明。

引理 4.11。假设 $\nu \in \mathcal{M}(f)$ 是遍历的。我们有如下结果：

(1) 如果 $[T] \wedge \mathrm{rot}f(\nu) > 0$，那么 $\nu(\hat{\pi}(\hat{\infty}_R \to \hat{\infty}_L)) = 1$；

(2) 如果 $[T] \wedge \mathrm{rot}f(\nu) < 0$，那么 $\nu(\hat{\pi}(\hat{\infty}_L \to \hat{\infty}_R)) = 1$。

现在来证明：

引理 4.12. 若存在具有全支撑的 $\mu \in \mathcal{M}(f)$，使得 $[T] \wedge \widehat{\mathrm{rot}f(\mu)} = 0$，则定义域$(I)$ 中的每条本质简单闭曲线都与其在 $\hat{f}$ 下的像相交。

ˆ ˆ ˆ 证明。假设存在一个本质简单闭路 Γ，使得 $f(\Gamma) \cap \hat{\Gamma} = \emptyset$。以如下方式确定 $\hat{\Gamma}$ 的方向：使 $\hat{\infty}_L$ 成为 $\widehat{\mathrm{dom}(I)}$ 和 $\hat{\widehat{L}}(\Gamma)$ 的公共端，并使 $\hat{\infty}_R$ 成为 $\mathrm{dom}(I)$ 和 $R(\Gamma)$ 的公共端。假设 $f(\Gamma)$ 包含于 $L(\Gamma)$ 中，不失一般性。考虑提升 Γ 的 S 上的直线 $\tilde{\gamma}\hat{\tilde{}}$ ˜。我们有 $f(L(\tilde{\gamma})) \subset L(\tilde{\gamma})$，更一般地，对于每个 $T' \in \mathcal{G}$，由于 f 与 T' 可交换，因此有 $f(L(T'(\tilde{\gamma}))) \subset L(T'(\tilde{\gamma}))$。

如果 $\tilde{\gamma}'$ 是一条定向直线 $\widetilde{\text{属于}}\ \mathrm{dom}(I)$，回忆一下，$\widetilde{\mathrm{dom}(I)}_{\tilde{\gamma}'}$ 是包含 $\tilde{\gamma}'$ 的 $\mathrm{dom}(I)$ 的连通$\widetilde{\text{分支}}$。记 $\eta_{\tilde{\gamma}'}$ 为定义在 $\widetilde{\mathrm{dom}(I)}_{\tilde{\gamma}'}$ 上的函数，该函数在 $R(\tilde{\gamma}')$上等于 0，在 $L(\tilde{\gamma}')$上等于 1，并在 $\tilde{\gamma}'$上等于 $1/2$。注意到，当 $T''^{-1}T' \in \langle T\rangle$ 时，$T''(\tilde{\gamma}) = T'(\tilde{\gamma})$，由此可知，记号 $\tau\tilde{\gamma}$ 具有

[2]Lel [Lel] 指出，$a \geq 0$ 但我们将在引理 4.18 中稍作改进，以得到 $a > 0$。

对每个左陪集 $\tau \in \mathcal{G}/\langle T\rangle$都有意义。此外，如果 $\nu \in \mathcal{M}(f)$ 是遍历的，那么对于 ν-几乎处处的点 z，对 z的每个提升 $\tilde{z}$，以下结论成立：

$$[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\tau\in\mathcal{G}/\langle T\rangle} \Big(\eta_{\tau\tilde{\gamma}}(\tilde{f}^n(\tilde{z})) - \eta_{\tau\tilde{\gamma}}(\tilde{z})\Big).$$

$\hat{}$ ~事实上，若考虑 S 的环路 $\Gamma = \hat{}\pi(\Gamma)$，则 $\sum_{\tau\in\mathcal{G}/\langle T\rangle} \eta_{\tau\tilde{\gamma}}(f^n(\tilde{z})) - \eta_{\tau(\tilde{\gamma})}(\tilde{z})$（注意，该和是有限的）等于 Γ 的所有提升与轨道 $I^n(\tilde{z})$ 之间的代数交数之和（至少当 z 和 $f^n(z)$ 不在 Γ 上时），也就是说，等于 Γ 与 $I^n(z)$ 之间的代数交数。

注意，对每个 $\tau \in \mathcal{G}/\langle T\rangle$，函数 $\eta_{\tau\tilde{\gamma}}$ 在 $\tilde{\gamma}$ 与 $f(\tilde{\gamma})$ 之间的条带内为正。由此可得，对每个遍历的不变概率测度 ν，都有 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) \geq 0$。此外，若测度 $\tilde{\nu}$（其提升了 ν）所赋予的 $\tilde{\gamma}$~ 与 $f(\tilde{\gamma})$ 之间条带的测度非零，则上述不等式为严格不等式。利用 μ 的遍历分解，我们可得 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\mu) > 0$，这与假设矛盾。□

引理 4.13. 假设 $\nu \in \mathcal{M}(f)$ 和 $\nu' \in \mathcal{M}(f)$ 是遍历的，并且满足

$$\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1\,, \ [T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu') < 0.$$

那么，以下断言之一成立：

- 对于几乎处处的 ν 点 z 和几乎处处的 ν' 点 z'，路径$I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 和 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z')$ 具有一个 $\mathcal{F}$-横截交点；

对 ν-几乎处处的点 z 和对 ν'-几乎处处的点 z'，路径$I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z')$聚积于 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$。

证明。定义三个 f-不变集合 W_1、W_2、W_3 如下：

- $z' \in W_1$ 如果它具有提升 $\tilde{z}'$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}')$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$，且该等价关系成立于 $+\infty$ 或 $-\infty$；
- $z' \in W_2$ 如果存在一个 lift $\tilde{z}'$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}')$ 正向或负向聚积于 $\tilde{\gamma}_*$；
- $z' \in W_3$ 如果它存在一个提升 $\tilde{z}'$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}')$ 从左侧穿过 $\tilde{B}$ 到右侧。

$\widehat{\ }$根据引理 4.11，我们知道，ν'-几乎处处的点 z' 都有一个属于 $\hat{}\infty_L \to \hat{}\infty_R$ 的提升 $\hat{}z' \in$ 定义域(I)。因此 $\nu'(W_1 \cup W_2 \cup W_3) = 1$，由 ν' 的遍历性可知，集合 W_1、W_2、W_3 中有一个的 ν'-测度为 1。根据引理 4.10，$\nu'(W_1) \neq 1$，因为 $\mathrm{rot}_f(\nu') \notin \mathbb{R}[T]$（根据假设$[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu') < 0$）。如果 $\nu'(W_2) = 1$，那么引理的第二项成立~ ~，因为对于每个叶 $\phi \subset B$，ν-几乎处处的点 z 都属于 W_D，因此都有一个提升 $\tilde{z} \in \widetilde{\ }$定义域$(I)$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 与 $\tilde{\phi}$ 相交。根据命题 3.1，如果$\nu'(W_3) = 1$，那么引理的第一项成立。□

推论 4.14. 假设 $\nu \in \mathcal{M}(f)$ 是遍历的，且满足

$$\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1\,, \quad [T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) < 0.$$

那么，对于 ν-几乎处处的点 z，路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 都有一个 $\mathcal{F}$-横截自交点。

证明。 应用引理 4.13，并 $\nu' = \nu$ 利用回归横截路径不会在自身上累积这一事实（推论 3.9）。□

如果 $\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1$ 且 $[T] \wedge$旋转$_f(\nu) = 0$，这一结果仍然成立。更确切地说，我们有（参见 [Lel], 命题 3.3.1）。

引理 4.15. 假设 $\nu \in \mathcal{M}(f)$ 是遍历的，并且满足

$$\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1\,, \quad [T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) = 0.$$

然后 $\nu(W^{L\to R}) = 1$，并且对于 ν-几乎每个点 z，路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 都有一个$\mathcal{F}$-横截自交点。

注。 结论 $\nu(W^{L\to R}) = 1$ 并未在[Lel],命题 3.3.1 中明确陈述。然而，正如作者在证明开头所解释的那样，这是得出第二个结论的关键所在。第一个条件表明存在一些“向上运动”的点，而根据第二个条件，这意味着也存在一些“向下运动”的点。我们所处的情形与推论 4.14 的假设下出现的情形非常相似，但需要运用更微妙的遍历理论论证。

引理 4.16. 假设存在 $\lambda \in \mathcal{M}(f)$，使得 $\mathrm{supp}(\lambda) = S$。若 $\nu \in \mathcal{M}(f)$ 是遍历的且满足

$$\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1\,, \quad [T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) > 0,$$

则存在遍历的 $\nu' \in \mathcal{M}(f)$，使得以下断言之一成立：

- 对于 ν-几乎处处的点 z 以及 ν'-几乎处处的点 z'，路径$I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 与 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z')$ 有一个 $\mathcal{F}$-横截交点；
- 对于 ν-几乎处处的点 z 以及 ν'-几乎处处的点 z'，路径$I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z')$ 聚积于 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$。

证明. 根据假设， $W^{R\to L} \cap W^D$ 是一个非空的不变开集，因此我们有

$$\lambda(W^{R\to L} \cap W^D) > 0.$$

首先假设 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda_{W^{R\to L}\cap W^D}) \le 0$。利用 $\lambda_{W^{R\to L}\cap W^D}$ 的遍历分解，我们推得存在遍历的 $\nu' \in \mathcal{M}(f)$，使得 $\nu'(W^{R\to L} \cap W^D) = 1$，且 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu') \le 0$。若 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu') < 0$，则可应用引理 4.13，因此引理 4.16 的结论成立。若$[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu') = 0$，由引理 4.15 可知 $\nu'(W^{L\to R}) = 1$，因此根据命题 3.1，结论的第一项成立。

现在假设 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda_{W^{R\to L}\cap W^D}) > 0$。由等式

$$[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0$$

and

$$\mathrm{rot}_f(\lambda_{\mathrm{fix}(I)}) = 0 \ \text{ if } \ \lambda(\mathrm{fix}(I)) \neq 0,$$

我们推得

$$\lambda\left(\mathrm{dom}(I) \setminus (W^{R\to L} \cap W^D)\right) > 0$$

and

$$[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda_{\mathrm{dom}(I)\setminus(W^{R\to L}\cap W^D)}) < 0.$$

利用$\lambda_{\mathrm{dom}(I)\setminus(W^{R\to L}\cap W^{D})}$的遍历分解，我们推得存在 $\nu'\in\mathcal{M}(f)$，使得 $[T]\wedge$ 旋转$f(\nu')<0$。这里我们再次引用引理4.13 以确保引理4.16 的结论成立。□

让我们以一项对我们的目的有用的新结果结束本节。

命题 4.17. 假设 $\nu\in\mathcal{M}(f)$ 和 $\nu'\in\mathcal{M}(f)$ 是遍历的，并且对于 ν-几乎处处的点 $z\in\in$ 定义域 (I) 以及 ν'- 几乎处处的点 $z'\in\in$ 定义域 (I)，路径 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z')$ 聚积于 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$，那么 $\mathrm{rot}_f(\nu)\wedge\mathrm{rot}_f(\nu')\neq 0$。

证明。 不妨设 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z'$)在正方向上聚积于 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z$。由命题 3.2，存在一条横截简单环 $\Gamma_*\subset\Sigma$ 使得

- $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z')$ 等价于 Γ_* 的自然提升；
- 由 Γ_* 所交的叶的并集 B 是 S的一个开环带；
- 如果 $\tilde{\gamma}_*$ 是 Γ_* 到定义域(I)的一个提升，那么对于几乎所有 ν-点 $z\in$定义域(I)，都存在一个定义域(I)中的提升 $\tilde{z}\in\widetilde{\ }$，使得 $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(\tilde{z})$与 $\partial\tilde{B}^{L}$相交；对每个 $\tilde{\phi}\subset\partial\tilde{B}^{L}$，都有 $\tilde{B}\subset R(\tilde{\phi})$。

点 z 可以选为回归点，因此， $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$所遇到的 $\mathcal{F}$ 的每一片叶，在过去和未来都被无限多次遇到。特别地， $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$无限多次进出 B，但它从不从左侧进入 B，因为对每个 $\tilde{\phi}\subset\partial\tilde{B}^{L}$，都有 $\tilde{B}\subset R(\tilde{\phi})$。由此我们推得， z 的每个提升 $\tilde{z}\in\tilde{B}$ 都从右侧向左侧穿过 B。因此，沿用本节的记号，我们有 $\nu(W^{R\to L})=1$。

引理 4.18. 设 ν' 是一个 f-不变遍历概率测度，满足 $\nu'(\mathrm{dom}(I))=1$。假设存在某个覆盖变换 $T\in\mathcal{G}\setminus\{\mathrm{Id}\}$，以及一个投影到 S 的开环带 B 上的 T- 条带 B，使得 ν'- 几乎处处的点 $z'\in\mathrm{dom}(I)$ 都满足 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z')\subset B$。那么存在 $a>0$，使得 $\mathrm{rot}_f(\nu')=a[T]$。

证明。由引理 4.10，存在 $a\geq 0$，使得 $\mathrm{rot}_f(\nu')=a[T]$。我们需要证明 $a\neq 0$。设 $U'\subset B$ 为一个拓扑开圆盘，使得 $\nu'(U')\neq 0$。不妨设 U' 是一个满足命题 4.4 结论的流盒。记 $\varphi'_U\colon U'\to U'$ 为 f的首次回归映射，记 $\tau'_U\colon U'\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$为首次回归时间映射，它们在 U'上几乎处处依 ν' 定义。注意， $\nu'|_{U'}$ 是 φ'_U的一个遍历不变$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$测度。固定 U'的一个提升 $U'\subset B$。对每个满足$\tau'_U(z)$存在的点 $z\in U'$，记 z为属于 U'的 z的提升，并记 $\delta_{U'}(z)$为满足 $\tilde{f}^{\tau_{U'}}(z)(\tilde{z})\in T^{\delta}(z)\,\tilde{U}'$的整数。由此得到一个映射 $\delta_{U'}\colon U'\to\mathbb{Z}$，它在 U'上几乎处处依 ν'定义。提醒一下，引言中已定义映射 $\rho_{U'}\colon U'\to H_1(S,\mathbb{Z})$，且 $\rho_{U'}(z)=\delta(z)[T]$。另请注意， $\delta(z)>0$。由于测度 ν' 是遍历的，由卡茨定理可知，

$$\int_{U'}\tau_{U'}\,d\nu'=\nu'\left(\bigcup_{k\geq 0}f^{k}(U')\right)=\nu'\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}f^{k}(U')\right)=1,$$

因此 $\tau^*_{U'}(z) = 1/\nu'(U')$ 对于 ν'几乎处处成立的点 $z \in U'$，其中 $\tau^*_{U'}$ 且 $\rho^*_{U'}$ 已在式（1）（第 3页）中定义。此外，对于 ν'几乎处处成立的点 $z \in U'$，有

$$\mathrm{rot}_f(\nu') = \mathrm{rot}_f(z) = {\rho_{U'}}^*(z)/\tau^*_{U'}(z) = \nu'(U')\rho^*_{U'}(z) = \left(\int_{U'} \delta(z)\, d\nu'(z)\right)[T].$$

现在注意到 $\int_{U'} \delta(z)\, d\nu'(z) > 0$。这就证明了引理。 □

为证明命题 4.17，还需要证明 $\mathrm{rot}_f(\nu') \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) > 0$，结合定理 4.9 即可得到所需结果。设 $U \subset B$ 是一个拓扑开圆盘，满足 $\nu(U) \neq 0$，且它是一个满足命题 4.4 结论的流盒。必要时，通过扰动 Γ_* 并缩小 U，可以假设 $U \cap \Gamma_* = \emptyset$。记 $\varphi_U \colon U \to U$ 为 f 的首次回归映射，记 $\tau_U \colon U \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 为首次回归时间映射，它们在 U 上几乎处处相对于 ν 定义。我们将以不同的方式定义一个函数 $\delta_U \colon U \to \mathbb{Z}$。对于每个满足 $\tau_U(z)$ 存在的点 $z \in U$，令 $m = \tau_U(z)$，并考虑集合

$$X_z = \left\{t \in [0, m] \,|\, I^t_{\mathcal{F}}(z) \subset U\right\}.$$

首先假设 $X_z \neq [0, \tau_U(z)]$。于是记 $(J_\xi)_{\xi\in\Xi}$ 为 X_z 的连通分支族。一个分支 J_{ξ^-} 可写作 $J_{\xi^-} = [0, b_{\xi^-})$，一个分支 J_{ξ^+} 可写作 $J_{\xi^-} = (a_{\xi^+}, m]$，其余分支可写作 $J_\xi = (a_\xi, b_\xi)$。考虑这样一个分支 J_ξ。˜路径 $I^m_{\mathcal{F}}(z)$ 可提升为路径 $I^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$（该提升取决于 ξ），使得 $\tilde{I}^n_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})((a_\xi, b_\xi)) \subset \tilde{B}$。根据假设可知 $\tilde{I}^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})(a_\xi) \in \partial\tilde{B}^R$，并且我们令

$$\delta_\xi = \begin{cases} 0 & \text{if } \tilde{I}^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})(b_\xi) \in \partial\tilde{B}^R, \\ 1 & \text{if } \tilde{I}^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})(b_\xi) \in \partial\tilde{B}^L. \end{cases}$$

˜在第一种情形下，$I^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[a_\xi, b_\xi]}$ 在右侧访问 B；在第二种情形下，˜从右向左穿过 B。注意，满足 $\delta_\xi = 1$ 的这类 $\xi \in \Xi$ 只有有限多个，因为满足 $I^m_{\mathcal{F}}(z)([a_\xi, b_\xi]) \cap \Gamma_* \neq \emptyset$ 的 $\xi \in \Xi$ 只有有限多个。事实上，$\tilde{\gamma}_*$ 包含于 B 中，而每个这样的 $I^m_{\mathcal{F}}(z)([a_\xi, b_\xi])$ 都与 ∂B 相交；由紧致性论证即可得出结论。

˜路径 $I^m_{\mathcal{F}}(z)$ 可以提升为路径 $I^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$，使得 $I^n_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})([0, b_{\xi_-}]) \subset B$。令

$$\delta_{\xi_-} = \begin{cases} 1/2 & \text{if } \tilde{I}^m_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})(b_{\xi_-}) \in \partial B^L, \\ -1/2 & \text{if } \tilde{I}^n_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})(b_{\xi_-}) \in \partial B^R. \end{cases}$$

最后，令 $\delta_{\xi_+} = 1/2$。现在观察到，我们有

$$[\Gamma_*] \wedge \rho_U(z) = \delta_U(z),$$

其中 ρ_U 定义于第3页，并且

$$\delta_U(z) = \begin{cases} \sum_{\xi\in\Xi} \delta_i & \text{if } X_z \neq [0, \tau_U(z)], \\ 0 & \text{if } X_z = [0, \tau_U(z)]. \end{cases}$$

函数 δ_U 是非负的，但它并非在几乎处处（相对于 ν_U）为零，因为对于几乎所有（相对于 ν）的点， $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$ 并不始终保持在 B 中。因此，我们有

$$[\Gamma] \wedge \mathrm{rot}_f(\nu) = \nu(U)[\Gamma] \wedge \rho_U^*(z) = \int_U \delta_U(z)\, d\nu(z) > 0.$$

□

注。 利用 Lellouch 的技巧 [Lel，第 3 节。4], 可以更一般地证明，若 z 和 z' 都是回归点（不一定是遍历测度下典型点的轨道），且若 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z')$ 聚积于 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z$，那么 f 具有拓扑马蹄 [3]。不过，后文中我们不会用到这一性质。

5. Proof of the main theorem

我们在本节中假设定理 A 的假设均成立。我们考虑一个亏格为 $g \geq 2$ 的定向闭曲面 S，以及一个与恒等映射同伦的 S 上的同胚映射 f，它保持一个具有全支撑的博雷尔概率测度 λ，使得 $\mathrm{rot}_f(\lambda) = s\rho$，其中 $\rho \in H_1(S, \mathbb{Z})\backslash\{0\}$ 且 $s \in \mathbb{R}$。我们沿用本文中的记号。我们考虑一个由 f 保持不变且遍历的博雷尔概率测度 ν。我们考虑 $H_1(S, \mathbb{R})$ 中 $\mathrm{rot}_f(\nu)$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$，并希望证明存在一个同伦旋转区间 (κ, r)，使得 $[\kappa]/r \in \mathcal{U}$。

不失一般性，假设 f 不是恒等映射；在这种情况下，可以根据定理 4.1 考虑 I 的一个 f 极大同伦，其定义域非空。根据定理 4.2，可以在 $\mathrm{dom}(I)$ 上找到一个与 I横截的非奇异叶状结构。提醒如下：

- $\widetilde{\mathrm{dom}(I)}$ 是 Idom 的万有覆盖空间；
- $\mathrm{dom}(I)_X$ 是 $\mathrm{dom}(I)$ 中包含给定连通集合 $\widetilde{\ }\mathrm{dom}(I)$ 的连通分支；
- $\tilde{\pi}$： I 的定义域 $\to I$ 的定义域是覆盖投影；
- $\mathcal{G}$ 是 $\tilde{\pi}$的覆盖自同构群；
- $[T] \in H_1(S, \mathbb{Z})$ 是与 $T \in \mathcal{G}$ 相关联的环路 $\Gamma \subset \mathrm{dom}(I)$ 的同调类；
- $\tilde{I}$ 是从恒等映射开始的、将 $I|_{\text{的定义域}(I)}$ 提升到 I的定义域的提升；
- f 是将 $f|_{\text{的定义域}(I)}$ 提升到 I的定义域的提升，其终点为 I；
- $\mathcal{F}$ 是将 $\mathcal{F}$ 提升到 I的定义域的提升；
- $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$是点 $z \in$ 在 I的定义域中的完整 $\mathcal{F}$-横截轨迹；
- $\tilde{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}(\tilde{z})$是点 $\tilde{z} \in \widetilde{\ }$在 I的定义域中的完整 $\tilde{\mathcal{F}}$-横截轨迹。

首先，假设 $\mathrm{rot}_f(\nu) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) \neq 0$。利用 λ 的遍历分解，我们推得存在遍历的 $\nu' \in \mathcal{M}(f)$，使得 $\mathrm{rot}_f(\nu) \wedge \mathrm{rot}_f(\nu') \neq 0$。根据定理 4.9，我们知道 $f|_{\mathrm{dom}(I)}$ 具有一个类型为 (κ, r) 的旋转拓扑马蹄，且 $[\kappa]/r \in \mathcal{U}$。如果 $\Gamma \subset \mathrm{dom}(I)$ 是与 T 相关联的环路，那么对于每个以既约方式书写的 $p/q \in [0, 1]$，都存在一个周期点 $z \in \mathrm{dom}(I)$，其周期为 rq，使得 $I^{rq}(z)$ 与 $[\Gamma]^p$ 在 $\mathrm{dom}(I)$ 中自由同伦：它与 $[\Gamma]^p$ 在 S 中自由同伦。因此， f

[3]请注意，在这种情况下，我们无法断定 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z')$和 $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$相交时与 $\mathcal{F}$横截。

具有一个类型为 (κ, r) 的同伦旋转区间，使得 $[\kappa]/r \in \mathcal{U}$，并且定理 A 的结论成立。

剩下需要研究的是 $\mathrm{rot}_f(\nu) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0$的情形。

引理 5.1. 假设 $\mathrm{rot}_f(\nu) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0$。存在 $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{Id}\}^{\sim}$满足 $[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0$，以及一个 T- 条带 B，使得 ν- 几乎处处的点 $z \in \mathrm{dom}(I)$ 都有一个提升 $\tilde{z}$，使得 $\tilde{I}_{\tilde{f}}^{\mathbb{Z}}(\tilde{z})$ 描画 $\tilde{B}$。此外，若 $\mathcal{U}$ 是 $\mathrm{rot}_f(\nu)$ 的一个邻域，则可以假设存在 $r \geq 1$ 使得$[T]/r \in \mathcal{U}$。

证明。固定 $z_0 \in \mathrm{supp}(\nu) \cap \mathrm{dom}(I)$，并取 z_0 的一个提升 $\tilde{z}_0 \in \mathrm{dom}(I)$。可以找到一个包含 z_0 的拓扑开圆盘 $U \subset \mathrm{dom}(I)$，使得包含 $\tilde{z}_0$ 的 $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ 的连通分支 $\tilde{U}$ 是一个流盒，并满足命题 4.4 的结论。记 $\varphi_U : U \to U$ 为 f 的首次回归映射，记 $\tau_U \colon U \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 为首次回归时间映射；它们在 U 上几乎处处有定义。注意，$\nu|_U$ 是 φ_U 的一个遍历不变测度。回顾一下，引言中定义了映射 $\rho_U : U \to H_1(S, \mathbb{Z})$。对于每个使 $\tau_U(z)$ 存在的点 $z \in U$，记 $\tilde{z}$ 为 z 在 $\tilde{\pi}$ 下属于 $\tilde{U}$ 的原像，并记 $\delta_U(z)$ 为满足 $\tilde{f}^{\tau_U(z)}(\tilde{z}) \in \delta_U(z)(\tilde{U})$ 的自同构。由此得到映射 $\delta_U : U \to \mathcal{G}$，它在 U 上几乎处处有定义，并且$\rho_U(z) = [\delta_U(z)]$。由于测度 ν 是遍历的，我们知道

$$\int_U \tau_U \, d\nu = \nu\left(\bigcup_{k\geq 0} f^k(U)\right) = \nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(U)\right) = 1,$$

因此${\tau_U}^*(z)$ 对 $= 1/\nu(U)$ 几乎处处成立，其中 ν-几乎每个点 $z \in U$，这里${\tau_U}^*$ 和${\rho_U}^*$ 已在（1）（第3页）中定义。此外，对 ν-几乎每个点 $z \in U$，都有

$$\int_U \rho_U(z) \, d\nu(z) = \nu(U){\rho_U}^*(z) = \mathrm{rot}_f(z) = \mathrm{rot}_f(\nu),$$

这意味着

$$\int_U \rho_U(z) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) \, d\mu(z) = \nu(U){\rho_U}^*(z) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = \mathrm{rot}_f(\nu) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0.$$

根据 Atkinson 定理，[At], 我们知道，若固定 $\varepsilon > 0$，则对 $\nu|_U$几乎每个点 z，都存在 $n \geq 1$ 使得

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \rho_U({\varphi_U}^k(z)) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) \right| < \varepsilon.$$

正如 Lellouch [Lel], 所指出的，我们可以对这一结果稍作改进：对 $\nu|_U$几乎每个点 z，都有

$$\liminf_{n\to+\infty} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \rho_U({\varphi_U}^k(z)) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) \right| = 0.$$

因此，如果我们在 $H_1(S, \mathbb{R})$ 上固定一个范数 $\| \ \|$，并且取 $\eta > 0$，就可以找到 $z_1 \in \mathrm{supp}(\mu) \cap U$ 和 $n \geq 1$，使得（回忆一下，$\mathrm{rot}_f(\lambda) = s\rho$，其中 $\rho \in H_1(S, \mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ 且

$s \in \mathbb{R}$)

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \rho_U({\varphi_U}^k(z_1)) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) \right| < s,$$

并且使得

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_U({\varphi_U}^k(z_1)) - \mathrm{rot}_f(\nu) \right\| < \eta.$$

属于 $s\mathbb{Z}$ 的每个数 $\rho_U({\varphi_U}^k(z_1)) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda)$，我们推得

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho_U({\varphi_U}^k(z_1)) \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0.$$

Set

$$r = \sum_{0 \le k < n} \tau_U({\varphi_U}^k(z_1))$$

˜并记 $\tilde{z}_1$ 为属于 U 的 z_1 的提升。自同构 T such˜ ˜that $f^r(\tilde{z}_1) \in T(U)$ 可写为

$$T = T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1,$$

其中 T_k 是一个与 $\delta_U({\varphi_U}^k(z_1))$ 共轭的自同构，因此我们有

$$[T] = \sum_{0 \le k < n} \left[\delta_U({\varphi_U}^k(z_1))\right].$$

因此，有

$$[T] \wedge \mathrm{rot}_f(\lambda) = 0\,, \qquad \left\| [T]/r - \mathrm{rot}_f(\nu) \right\| < \eta.$$

˜ ˜注意，如果 $\tilde{z}_1$ 是属于 U 的 z_1 的提升，那么我们有 $f^r(\tilde{z}_1) \in T(U)$。命题 4.4 中所述的 $\tilde{U}$ 的性质告诉我们，$\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{f}}(\tilde{z}_1)$ 与每一条经过 U 的叶以及每一条经过 $T(U)$ 的叶都相交。因此，存在 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{f}}(\tilde{z}_1)$ 的一条子路径 $\tilde{\gamma}_1$，连接 $\phi_{\tilde{z}_1}$ 与 $T(\phi_{\tilde{z}_1})$。当然，我们有 $T \neq$ 恒等映射。此外，$\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{f}}(\tilde{z}_1)$ 描画了由直线 $\tilde{\gamma}_*$ 所定义的 T-条带 $\tilde{B}$；直线 $\tilde{\gamma}_*$ 是通过连接路径 $T^k(\tilde{\gamma}_1)$、$k \in \mathbb{Z}$ 而得到的。如前所述，命题 4.3 告诉我们，点 $z \in U$ 的集合 W^D 是开集，其中每一点都存在一个提升 $\tilde{z}$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{f}}(\tilde{z})$ 描画 $\tilde{B}$。它是 T-不变的，并包含 $z_1 \in \mathrm{supp}(\nu)$。由于测度 ν 是遍历的，因此 $\nu(W^D) = 1$。□

定理 A 的证明。 我们来总结一下，在什么情况下，已经证明的结果可以使我们得到定理 A。回忆一下，集合 W^* 定义于第 4.2 段。

- 如果 $\nu(W^{R\to R} \cap W^D) = 1$ 或 $\nu(W^{L\to L} \cap W^D) = 1$，那么根据命题 3.1，对于 ν-几乎处处的点 z，路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 都有一个 $\mathcal{F}$-横截自交点；这使我们可以应用推论 4.8 ，从而得到一个合适的旋转马蹄。
- 如果 $\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1$，则有三种情况：

[4]严格来说，必须修改由 $\tilde{\gamma}_1$ 提升的路径 γ_1，才能将 $T^k(\tilde{\gamma}_1)$ 与 $T^{k+1}(\tilde{\gamma}_1)$ 拼接起来：只需沿着叶移动该路径，使 $\tilde{\gamma}_1$ 的末端与 $T(\tilde{\gamma}_1)$ 的起点重合即可。

– 若 $[T] \wedge$ 旋转$f(\nu) < 0$，则可以应用推论 4.14，该推论表明，对于 ν-几乎处处的点 z，路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 具有一个$\mathcal{F}$-横截自交点；由此可以应用推论 4.8并得到一个合适的旋转马蹄。

– 如果 $[T] \wedge$旋转数$f(\nu) = 0$，那么可以应用引理 4.15，该引理表明，对于 ν-几乎处处的点 z，路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 具有一个$\mathcal{F}$-横截自交点；如前所述，这使我们能够应用推论 4.8 ，从而得到一个合适的旋转马蹄。

– 如果 $[T] \wedge$旋转数$f(\nu) > 0$，那么可以应用引理 4.16。该引理告诉我们，存在一个遍历的不变概率测度ν' ，使得对于 ν-几乎处处的点 z 和 ν'-几乎处处的点 z'，路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$ 和 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z')$ 要么具有一个 $\mathcal{F}$-横截交点，要么路径 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z')$ 聚积于 $I^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F}}(z)$。在第一种情况下，可以应用推论 4.8 来得到一个合适的旋转马蹄。在第二种情况下，命题 4.17 告诉我们，旋转数$f(\nu) \wedge$ 旋转数$f(\nu') \neq 0$。Lellouch 的定理 4.9 随后给出一个合适的旋转马蹄。

- 情形 $\nu(W^{L\to R} \cap W^D) = 1$ 与情形 $\nu(W^{R\to L} \cap W^D) = 1$相同。

在所有这些情形中，合适的同伦旋转区间之所以存在，是因为存在旋转拓扑马蹄。要得到定理 A，还需研究最后一种情形；在这种情形下，合适的同伦旋转区间将因其他原因而存在。可以写作$T = T'^m$, $m \geq 1$，其中 $T' \in \mathcal{G}$ 是既约的。以下命题将使我们能够完成定理 A 的证明。事实上，设 $\mathcal{U}$ 是 $H_1(S, \mathbb{R})$中 rot$f(\nu)$ 的一个邻域。可以找到以既约方式写成的 $p_0/q_0 \in (0, a)$，使得 $p_0[T']/q_0 \in \mathcal{U}$。根据命题 5.2，对于每个以既约方式写成的 $p/q \in [0, 1]$ ，都存在 $\tilde{z}_{p/q}$ ，使得$\tilde{}f^{qq_0}(\tilde{z}) = T'^{pp_0}(\tilde{z})$。像 $z_{p/q} = \tilde{\pi}(\tilde{z}_{p/q}) \in S$在$f^{qq_0}$作用下保持不变，而由 $I^{qq_0}(z_{p/q})$定义的 S 的环路属于 $[T']_{\mathcal{FHL}}{}^{pp_0}$。记$z_{p/q}$的周期为 $q' = qq_0/s$。存在 $R \in \mathcal{G}$ ，使得 $\tilde{f}^{q'}(\tilde{z}_{p/q}) = R(\tilde{z}_{p/q})$。我们~由此推出 $T'^{pp_0}(\tilde{z}_{p/q}) = f^{qq_0}(\tilde{z}_{p/q}) = R^s(\tilde{z}_{p/q})$。这意味着 $T'^{pp_0} = R^s$。由于群 $\langle T', R\rangle$ 是自由群，它必为无限循环群。我们由此推出 R是 T'的幂，因为 T'是既约的，因此 s整除pp_0 和 qq_0。整数 p_0 和 q_0 互素，因此$s\, gcd(s, p_0)^{-1}\, gcd(s, q_0)^{-1}$ 是一个整数。此外，它与p_0 以及 q_0互素。因此它整除 p 和 q。由于这些整数互素，我们有 $s = gcd(s, p_0)\, gcd(s, q_0)$ $\leq p_0 q_0$，从而$z_{p/Q}$的周期 $q' = qq_0/r = s$满足 $q' \geq q/p_0$。我们由此推出$([T']_{\mathcal{FHL}}{}^{p_0}, q_0, p_0)$是一个同伦旋转区间。□

命题 5.2. 若集合

$$W^{R\to L} \cap W^D, \quad W^{L\to R} \cap W^D, \quad W^{R\to R} \cap W^D, \quad W^{L\to L} \cap W^D$$

是 ν-零测集，则存在 $a > 0$ 使得：

- 有 rot$f(\nu) = a[T']$;

对于每个 $p/q \in [0, a) \cap \mathbb{Q}$，以既约方式书写，存在$\tilde{}z$，使得 $f^q(\tilde{z}) = T'^p(\tilde{z})$。

证明。回顾一下，$T = T'^m$，其中 $m \geq 1$。我们先证明 B 在 T' 下是不变的。只需证明，对于每个 $n > 0$，我们都有 $L(T'^n\phi) \subset L(\phi)$。如果 $L(\phi) \subset L(T'^n\phi)$，那么对于每个 $k \geq 1$，我们都有 $L(T'^{nk}\tilde{\phi}) \subset L(T'^n{}_{(k+1)}\,\tilde{\phi})$，由此可得 $L(\tilde{\phi}) \subset L(T'^{nm}\tilde{\phi})$，这与包含关系 $L(T'^{nm}\phi) \subset L(\phi)$ 矛盾。如果 $L(\phi) \cap L(T'^n\phi) = \emptyset$，那么 $L(\phi)$ 与其在 T'^n 下的像不相交。映射 T'^n 没有不动点，布劳威尔平移定理 [Br] 告诉我们，$L(\phi)$ 与其在 T'^{nm} 下的像不相交，这与包含关系 $L(T'^{nm}\phi) \subset L(\phi)$ 矛盾。同理，如果 $R(\phi) \cap R(T'^n\phi) = \emptyset$，那么 $R(\phi)$ 与其在 T'^{nm} 下的像不相交，这与包含关系 $R(\phi) \subset R(T'^{nm}\phi)$ 矛盾。唯一剩下的情况是满足 $L(T'^n\phi) \subset L(\phi)$ 的情形。

接下来，我们不再将 B 看作一条 T-条带，而是将其看作一条 T'-条带：可以选取 $\tilde{\gamma}_*$ 使其在 T' 作用下不变，并假设对每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\tilde{\gamma}_*(t) = T'\gamma_*(t)$。

根据 $\tilde{B}$ 的构造，我们知道 $\nu(W^D) = 1$。因此，ν-几乎处处的点 $z \in \mathsf{dom}(I)$ 都是回归的，并且有一个提升 $\tilde{z} \in \widetilde{\mathsf{dom}(I)}$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 等价于在 $+\infty$ 或 $-\infty$ 处的 $\tilde{\gamma}_*$。事实上，若 $z \in W^D$ 是回归的，且 $\tilde{z}$ 是 z 的一个提升，满足 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 聚积于 $\tilde{\gamma}_*$，那么就存在$k \in \mathbb{Z}$使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 聚积于 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(T'^k(\tilde{z}))$。这是不可能的，因为$z$ 是回归的，因此根据推论 3.9，它不会自我积聚。因此，$\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 不会聚积于 $\tilde{\gamma}_*$；根据命题的假设，在描画 B之前和之后都不能离开 B。这意味着它必定等价于在 $+\infty$ 或 $-\infty$处的 $\tilde{\gamma}_*$。

事实上，我们可以给出更精确的描述：如果存在 $a < a'$ 和 $b \in \mathbb{R}$，使得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[a,a']}$ 与 $\tilde{\gamma}_*|_{[b,b+1]}$ 等价，那么以下两种情况必有其一：$\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[a,+\infty)}$ 与 $\tilde{\gamma}_*$ 的某个子路径等价（并且在 $+\infty$ 处与 $\tilde{\gamma}_*$ 等价，但我们不会用到这一性质），或者 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{(-\infty,a']}$ 与 $\tilde{\gamma}_*$的某个子路径等价。由此，我们将推导出下面的引理。

引理 5.3. 横截路径 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$。此外，存在邻域 U，使得如果 $\tilde{z}$ 的轨道在某个 $R \in \mathcal{G}$ 处与 RU 相交，那么 R 是 T' 的幂。

证明。我们来讨论 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[a,+\infty)}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$的一个子路径的情况，另一种情况的处理完全相同。

假设 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 与 $\tilde{\gamma}_*$ 不等价。那么，正如我们已经看到的，它不可能在 $\tilde{\gamma}_*$ 中聚集，这意味着存在 $b < a, b \in \mathbb{Z}$，使得 $\tilde{I}^{b}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}) \notin \tilde{B}$。

由于点 z 的回归，存在整数序列 $n_k \to -\infty$，和覆盖变换序列 $(R_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{G}$，使得 $R_k f^{n_k}(\tilde{z})$ 趋于 z；特别地，对于任意足够大的 k：

- $\tilde{\gamma}_*|_{[b,b+1]}$ 等价于 $R_k\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[n_k+a-1,+\infty)}$（并且特别地，这条路径描画 B）；
- $R_k\tilde{I}^{n_k+b}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}) \notin \tilde{B}$。

根据引理之前的同样推理，我们推得，要么轨道 $R_k\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[n_k+a+1,+\infty)}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$ 的一个子路径，要么 $R_k\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{(-\infty,n_k+a'-1]}$

与 $\tilde{\gamma}_*$ 的某个子路径等价。根据上面的第二点，第二种情况是不可能的。因此，$R_k\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[n_k+a+1,+\infty)}$ 与 $\tilde{\gamma}_*$ 的某个子路径等价。

特别是，这意味着 $R_k\tilde{\gamma}_*$ 在 $+\infty$ 处等价于 $\tilde{\gamma}_*$。由引理 3.3，这意味着 $R_k\tilde{\gamma}_* \cap \tilde{\gamma}_* \neq \emptyset$；更准确地说，这意味着对于任意足够大的 n，$R_k\tilde{\gamma}_* \cap \tilde{\gamma}_*|_{[b+n,b+n+1)} \neq \emptyset$，因此 $R_k\tilde{\gamma}_* \cap \tilde{\gamma}_*$ 是无限的。这意味着 $R_k\tilde{\gamma}_* = \tilde{\gamma}_*$，换言之 $R_k = T'^{i_k}$ 对于某个 $i_k \in \mathbb{Z}$。

我们推导出 $T'^{i_k}\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[n_k+a+1,+\infty)}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$ 的一个子路径；等价地（由于 $\tilde{\gamma}_*$ 是 T'- 不变的），对于任意 $k \in \mathbb{N}$，路径 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})|_{[n_k+a+1,+\infty)}$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$ 的一个子路径。

这证明了 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$ 的一个子路径。由于它不能在 $\tilde{\gamma}_*$ 中累积，这就证明了 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$。

为证明引理的第二部分，考虑 $\tilde{z}$ 的一个邻域 U，使得对于每个 $\tilde{z}' \in \tilde{U}$，路径 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z}')$ 都描画 $\tilde{\gamma}_*$。如果 $\tilde{f}^k(\tilde{z}) \in R\tilde{U}$，$R \in \mathcal{G}$，那么 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 就会描画 $R(\tilde{\gamma}_*)$。由此我们推得 $\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 等价于 $R\tilde{\gamma}_*$。上面的论证表明 $R \in \langle T' \rangle$。□

现在，让我们考虑

- 包含 $\tilde{\gamma}_*$ 的 $\mathrm{dom}(I)$ 的连通分支 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$
- 商空间 $\mathrm{dom}(I) = \mathrm{dom}(I)/T$，
- 由 $\mathcal{F}$ 提升的 $\mathrm{dom}(I)$ 的叶状结构 $\mathcal{F}$
- 覆盖投影 $\hat{\pi} : \mathrm{dom}(I) \to \mathrm{dom}(I)$，
- 环带 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*} = \mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}/T'$，
- 万有覆盖投影 π : 定义域$(I)_{\tilde{\gamma}_*} \to$ 定义域$(I)_{\tilde{\gamma}_*}$。

引理 5.4. 几乎所有的 ν点 z 在定义域$(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 中都有一个提升，该提升是正向回归的，且具有旋转数 $a > 0$ （在环带中）。此外，我们有 $\mathrm{rot}_f(\nu) = a[T']$。

证明。我们知道，几乎所有的 ν点 z 都是正向回归的，并且在定义域$(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 中有一个提升 $\tilde{z}$，它描画 $\tilde{B}$。我们在引理 5.3 中已经看到，$\tilde{I}^{\mathbb{Z}}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\tilde{z})$ 等价于 $\tilde{\gamma}_*$，并且存在 $\tilde{z}$ 的一个邻域 U，使得如果 $\tilde{z}$ 的轨道对某个 $R \in \mathcal{G}$ 与 RU 相交，那么 R 就是 T' 的幂。利用 z 是回归的这一事实，我们推得 $\hat{z} = \pi(\tilde{z})$ 是正向回归的。根据引理 4.18 证明中的论证，我们推得 z 具有旋转数 $a > 0$。此外，我们有 $\mathrm{rot}_f(\nu) = a[T]$。□

现在需要考虑两种情况。第一种情况是，$\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 的稳定子由 T' 生成；第二种情况是它更大。在第一种情况下，$\hat{\pi}$ 将 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 同胚地映射到 $\mathrm{dom}(I)$的一个连通分支。此外，这个环带的边界由 f的不动点组成。在第二种情况下，$\hat{\pi}$ 将 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 映射到一个双曲曲面，其万有覆盖空间为 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$，而覆盖自同构群是 $\mathcal{G}$中 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 的稳定子。在这两种情况下，都存在一个 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$，它是通过对 $\mathrm{dom}(I)_{\tilde{\gamma}_*}$ 进行爆破得到的扩张。

ˆ ˆ ˆ 至少一个端 e 带有一个圆 Γ_e 且 f 延拓为一个同胚f 的$\widehat{\overline{\ }}$定义域 $(I)_{\tilde{\gamma}*}$ (参见第 2.4段)。此外，由提升诱导的旋转数 ˆ ˜在所添加的圆上 f 延拓了 f 等于 0。

根据引理 5.4，存在旋转数为 $a > 0$ 的正向复返点 f，使得 rot$_\nu$($= a[T']$)。因此，根据引理 4.12 可应用定理 2.1：对于每个写成既约形式的有理数 $p/q \in \tilde{(0, a)}$，都存在一个点 $\tilde{z}$，使得 $f^q(\tilde{z}) = T^p(\tilde{z})$。由于 f 根据 Lefschetz 指数定理也有一个不动点，这意味着 f 具有类型为 (κ, r) 的同伦旋转区间，使得 $[\kappa]/r \in \mathcal{U}$。□

References

[Ad] S. Addas Zanata: 关于扭转映射垂直旋转区间性质的研究。II. *Qual. Theory Dyn. Syst.* **4** (2003), no. 2, 125–137. [AdT] S. Addas-Zanata, F.A. Tal: 关于保面积环面同胚的周期点。 *Far East J. Dyn. Syst.* **9** (2007), no. 3, 371–378. [At] G. Atkinson: 余循环与随机游走的回归。 *J. London Math. Soc. (2)* **13** 1976 486 488 ( ), – . [BeCLer] F. Béguin, S. Crovisier, F. Le Roux: 曲面上同伦的不动点集。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **22** (2020), no. 6, 197–2046. [Bi] G.-D. Birkhoff: Poincar ´ *Acta Math.* **47** 1926 4 297 311 é最后几何定理的推广。( ), no. – . [Br] L. E. J. Brouwer : 平面平移定理的证明, *Math. Ann.*, 72 (1912), 37-54. [CPoPrZ] D. Cristofaro-Gardiner, D. Pomerleano, R. Prasad, B. Zhang 单极 Floer 同调中 U-循环元素的一则注记， *arXiv* 2110. 13844v2 (2022). [CPrZ] D. Cristofaro-Gardiner, R. Prasad, B. Zhang 保面积曲面微分同胚的周期 Floer 同调与光滑闭合引理， *arXiv* 2110 02925 2022 . ( ). [D] E. Doeff: 与 Dehn 扭转同伦的环面同胚的旋转测度。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), no. 3, 575–591. [EH] O. Edtmair, M. Hutchings PFH 谱不变量与 C^∞-闭合引理， *arXiv* 2110.02463v4 (2022). [F] J. Franks: Poincar´é-Birkhoff 定理的推广。 *Ann. of Math.*(2) 128 (1988), no. 1, 139–151. [FH] J. Franks, M. Handel: 哈密顿曲面微分同胚的周期点。 *Geometry and Topology* **7** (2003), 713–756. [G] V. Ginzburg: Conley 猜想。 *Annals of Math. (2)* **172** 2010 2, ( ), no. – . 1127 1180 [H] M.-E. Hamstrom. 2-流形上同胚空间的同伦群， *Illinois J. Math.*, 10 (1966), 563-573. [J] O. Jaulent: 存在一个与曲面同胚正向横截的叶层。 ( ), no. – .[K] M. Kac: 关于离散随机过程中的回归概念 *Bull. Amer. Math. Soc* **53** 1947 10, 1002 1010 ( ), no. – . [Lec1] P. Le Calvez: Brouwer 平移定理的一个等变叶层版本。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **102**, (2005) 1-98. [Lec2] P. Le Calvez: 曲面哈密顿同胚的周期轨道。*Duke Math. J.* **133**, (2006) no. 1, 125–184. [Lec 3] P. Le Calvez: 仅有有限个周期点的保守曲面同胚。 *J. Fixed Point Theory Appl.* **24**, (2022) no. 2, 36 pp. [LecSa] P. Le Calvez, M. Sambarino: 曲面保面积微分同胚的同宿轨道。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* **42**, (2022), no. 3, 1122–1165.

[LecT1] P. Le Calvez, F. Tal: 曲面同胚横截轨道的强制理论。 *Invent. Math.* **212**, (2018), no. 2, 619–729. [LecT2] P. Le Calvez, F. Tal: 曲面同胚的拓扑马蹄。 *Duke Math. J.* **171** (2022), no. 12, 2519–2626. [Lel] G. Lellouch: 关于亏格为 ≥ 2的曲面同胚旋转集。 *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S)*, 即将出版。[Math] J. Mather: Carathéodory素端理论若干纯拓扑推论的拓扑证明。载于《精选研究》, TH. M. Rassias, G. M. Rassias 编, *North Holland*, 168 (1982), 225-255. [Mats 1] S. Matsumoto: *Bol. Soc. Brasil.* 曲面 *Mat. (N.S.)* **28** 1997 1, 225 255 同胚的旋转集。, ( ), no. – . [Mats2] S. Matsumoto: 曲面同胚的 Arnold猜想。《法国-日本"超空间拓扑及其应用"会议论文集》（La Bussi`ère, 1997）。 *Topology Appl.*, 104 (2000), no. 1-3, 191–214. [Ol1] F. Oliveira: 同宿点一般存在性的研究。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** 1987 4, 567 595 ( ), no. – . [Ol2] F. Oliveira: 关于同宿轨道 C^∞ 一般性的研究。 *Nonlinearity* **13** (2000), no. 3, 653–662. [OxU] J. C. Oxtoby, S. M. Ulam保测同胚与度量遍历性。 *Ann. of Math.* (2) 42 (1941), 874–920. [PaPotSa] A. Passeggi, R. Potrie, M. Sambarino: 吸引环状连续统上的旋转区间与熵。 *Geom. Topol.* **22** (2018), no. 4, 2145–2186. [Pi] D. Pixton: 平面同宿点。 *J. Differential Equations* **44** (1982), no. 3, 365–382.[Pol] M. Pollicott: 同胚与同调的旋转集。 *Trans. Amer.* , ( ), no. - *Math. Soc.* **331** 1992 2, 881 894 . [Pr] R. Prasad: 有理保面积同胚的周期点。手稿, (2023)。[R] C. Robinson: 闭合二球面上的稳定流形与不稳定流形。 *Proc.* ( ), – . [*Amer. Math. Soc.* **41** 1973 299 303 Sc] S. Schwartzman: 渐近环。 *Ann. of Math.* **66** (1957), no. 2, 270–284. [W] H. Weiss: 关于 Pixton 和 Oliveira 论文的一则注记：具有正拓扑熵的 S^2 辛微分同胚的一般性。 *J. Stat. Phys.* **80**(1995), no. 1-2, 481–485.

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, Sorbonne Université, Université Paris-Diderot, CNRS, F-75005, Paris, France*Email address*: pierre-antoine.guiheneuf@imj-prg.fr

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, Sorbonne Université,Université Paris-Diderot, CNRS, F-75005, Paris, France & Institut Universitaire de France

Email address: patrice.le-calvez@imj-prg.fr

CMAT Facultad de Ciencias Universidad de la República Uruguay. , , ,: *Current address* 4225 Igua esq. Mataojo。蒙得维的亚，乌拉圭。*Email address*: alepasseggi@cmat.edu.uy