arXiv:2305.05772v2 [cs.NE] 8 Feb 2024

Alexiewicz 拓扑中的脉冲神经网络：关于分析与误差界的新视角

预印本

BernhardA. Moser*信号处理研究所 林茨约翰·开普勒大学
bernhard.moser@{scch.at,jku.at}

Michael Lunglmayr信号处理研究所
林茨约翰 · 开普勒大学，奥地利
michael.lunglmayr@jku.at

2024年2月9日

摘要

为了便于分析神经形态计算中的误差传播，并更好地理解脉冲神经网络（SNN），我们研究将脉冲序列映射为脉冲序列的自同态形式的脉冲神经网络的数学分析问题。一个核心问题是，脉冲序列空间应采用何种恰当的结构，以及这对脉冲神经网络误差度量设计的影响，包括时间延迟、阈值偏差，以及漏积分发放（LIF）神经元模型的重新初始化模式设计。首先，我们通过分析 LIF 模型所有亚阈值信号的闭包，确定其底层拓扑。对于零漏泄，这种方法得出 Alexiewicz 拓扑，我们将其推广到具有任意正漏泄的 LIF神经元。因此，可以将 LIF 理解为相应范数下的脉冲序列量化。由此，我们得到各种误差界和不等式，例如输入与输出脉冲序列之间的准等距关系。另一项结果是误差传播的 Lipschitz型全局上界，以及与之相关的共振型现象。

关键词 漏积分发放（LIF）神经元 · 脉冲神经网络（SNN） · 重新初始化 · 量化 ·误差传播 ·Alexiewicz 范数

1 引言

脉冲神经网络（SNN）是由相互连接的神经元组成的人工神经网络，它们根据来自空间分布式感觉输入神经元的脉冲是否出现，以异步方式处理和传输时空信息。SNN 中最常用的神经元模型是漏积分发放（LIF）模型 Gerstner 等人 [2014]。尽管该模型对生物脉冲生成方式作了大幅简化，但在模拟生物神经系统中的时序脉冲特征时，LIF 模型已被证明颇为实用。综述可参见 Tavanaei 等人 [2019], 、Nunes 等人 [2022]。在接口处，也就是从现实世界到 SNN，以及从 SNN 输出到现实世界，通常需要将感知到的模拟强度转换为脉冲序列，并在处理之后将生成的脉冲序列解码为有意义的决策。有些方法倾向于采用基于频率的编码，而另一些方法则强调时序，例如最先到达的脉冲的时序 Guo 等人 [2021]。在对时变信号进行采样时，也会采用 LIF 的其他变体，将真实的模拟信号采样为脉冲，例如增量编码，或称增量发送、电平交叉或基于阈值的采样 Miskowicz [2006],、Liu 等人 [2014], 、Yousefzadeh 和 Sifalakis [2022]。

由于脉冲神经网络具有异步且稀疏的信息处理特性，其研究主要出于两个原因：首先，作为计算神经科学领域中的一种简化数学模型，旨在更好地理解生物神经回路；其次，作为迈向更强大且节能的嵌入式边缘人工智能解决方案的进一步步骤，用于处理时变信号，并广泛应用于视觉处理 Amir 等人 [2017], Yousefzadeh 和 Sifalakis [2022], 音频识别 Wu 等人 [2018], 语音

*双重隶属单位：软件 C 哈根贝格软件能力中心（SCCH），4232 哈根贝格 山脉，奥地利

识别 Wu 等人 [2020], 生物医学信号处理 Hassan 等人 [2018] 以及机器人控制 Kabilan 和 Muthukumaran [2021], Yamazaki 等人 [2022]。在边缘人工智能和联邦学习这一新兴背景下，新的应用场景正在不断出现：资源受限的边缘设备通过物理分布式网络进行协作训练全局模型，同时保护隐私 Yang 等人 [2022]。尤其值得关注的是脑机接口这一新兴领域中的应用，它为治疗帕金森病等神经系统疾病开辟了新的前景 Dethier 等人 [2013], Gege 等人 [2021]。关于脉冲神经网络与传统的基于向量的人工神经网络之间的性能比较综述，参见 Deng 等人 [2020]。然而，脉冲神经网络的全部潜力，尤其是其能效和动态特性，只有在专用神经形态硬件上实现时才会充分显现，因此相关研究仍在持续推进 Bouvier 等人 [2019], DeBole 等人[2019], Ostrau 等人 [2022], Michaelis 等人 [2022]。

然而，尽管脉冲神经网络潜力巨大，相关研究也在持续开展，但迄今为止其实践应用仍寥寥无几。因此，脉冲神经网络的研究仍处于早期发展阶段，尤其缺乏数学基础；鉴于脉冲神经网络具有特殊的连续—离散混合特性，且其底层范式正转向基于事件的信号处理，建立这一数学基础已成为必要。

仔细考察不同的采样方式，便会发现这一范式转变，如图 1 所示。在基于等间距的均匀采样中，信息编码与处理的数学基础是规则的狄拉克梳及其在希尔伯特空间中的嵌入，并借助卷积、正交投影等强大的数学工具，以及由此发展出的谱分析、信号滤波与重建。作为时间上均匀分布的狄拉克脉冲序列，规则的狄拉克梳以及将信号分解为规则波形的相关概念，可以看作一种技巧，使时间能够像空间变量一样接受数学处理。然而，这种数学抽象忽略了由事件隐式编码的时间信息（Miskowicz [2006]）。因此，均匀采样与信号处理所形成的数学体系基本上是基于向量的。相比之下，在生物信息处理系统和受生物启发的神经形态计算中（参见 Tavanaei 等人 [2019]，、 Nunes 等人 [2022]，），信息编码范式在某种程度上颠倒了时间规律性与振幅规律性之间的角色。在均匀采样及相关信号处理中，时间被视为一种规则结构，而采样值的振幅则保持灵活；在受生物启发的采样与信号处理中，则通过阈值化使振幅呈现规则结构，同时保持时间处理的灵活性。

这种信息编码范式的转变将影响处理时间不规则性的数学基础，也就是如何处理超越规则梳状结构的狄拉克脉冲序列，见图1。

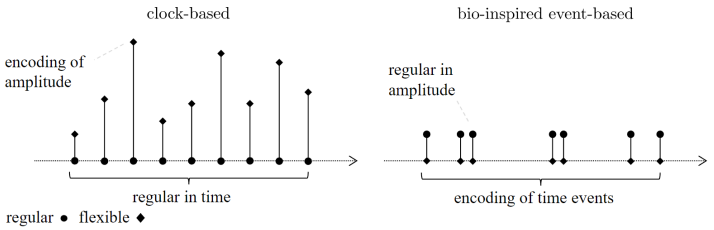

图1：信息编码范式的转变：均匀采样（左）与基于阈值的采样（右）。

规则时间自然对应希尔伯特空间，并由此自然引出欧几里得范数。针对这一情境，我们不再采用欧几里得几何观，而转向基于其他度量的方法；当我们对脉冲序列空间的拓扑与度量结构提出某些分析性质公设，并将其与神经形态计算中使用的神经元模型和脉冲神经网络结合起来时，这种方法便成为必要。本文通过阐述关于脉冲序列向量空间拓扑的公设，为脉冲神经网络的数学基础作出贡献，其中脉冲序列由加权狄拉克冲激构成。我们的方法承接 Moser 和 Natschläger [2014], Moser [2015, 2016, 2017], Moser 与 Lunglmayr [2019] 的工作。该工作将差异度量视为一种特殊的基于范围的脉冲序列度量，并针对这种度量建立了如下拟等距关系：以模拟信号为输入、以脉冲序列为输出的漏积分发放神经元，其基于阈值的采样具有拟等距关系。本文进一步超越采样，说明基于范围的度量对于基于脉冲序列进行误差（或偏差）分析的数学构想也具有特殊作用，因而有助于理解、分析并界定脉冲神经网络（SNN）的误差传播。

本文结构如下。第 2 节中，我们确定符号，并介绍基于漏积分发放神经元模型的脉冲神经网络预备知识，以及由脉冲输入引起的事件瞬时实现这一数学理想化假设。在此背景下，我们讨论发放事件后重新初始化的几种方案，并在脉冲幅度超过阈值整数倍的一般情形下，修订称为*减法复位* 的重新初始化模式。通过对输入通道施加权重，脉冲神经网络中可能出现此类高脉冲幅度。由此，我们引入*取模重置* 这一重新初始化方式；实际上，它是将事件瞬时发生这一假设连续应用于*减法复位*所得的结果。由此得到的运算可视为模除。*取模重置* 使我们能够更广泛地审视漏积分发放的数学原理：它是作用于加权狄拉克冲激脉冲序列向量空间上的自同态，

我们据此研究由此得到的漏积分发放算子，在第 3 节中明确上述公设，并在第 3.1 节的小节中基于拓扑论证推导出一种解，从而得到积分发放（IF）的 Alexiewicz 范数。我们将这一范数推广到漏积分发放（LIF），并作为主要结果，在第3.2节中证明，漏积分发放算子表现为由相应范数所确定网格上的脉冲量化。相关不等式有助于分析输入通道中的扰动或新增脉冲所造成的误差传播和信号传播。第 4 节重点讨论输入通道中新增脉冲的影响，并由此为漏积分发放模型及一般的前馈脉冲神经网络推导出 Lipschitz 型上界。这项分析还表明，从零漏泄的积分发放过渡到参数任意小的漏积分发放时，输入输出特性可能发生根本性变化。第 5 节报告了用于说明我们理论方法的仿真结果。

2 预备知识

首先，我们回顾 LIF 神经元模型及其计算变体，并约定相关符号。该模型历史悠久，可追溯至 Lapicque [1907]。关于其动机及其在神经科学和神经形态计算中的意义，概述可参见 Gerstner 等人 [2014], Dayan 和 Abbott [2001] 以及 Eshraghian 等人 [2021]。LIF 模型介于生物学合理性与技术可行性之间，抽象掉了输出脉冲的形状和轮廓。因此，脉冲在数学上表示为狄拉克δ冲激。
因此，我们从作为输入信号的脉冲序列入手，并假设它们在数学上表示为加权狄拉克脉冲序列，即:

$$\eta(t) := ([a_i; t_i]_i)(t) := \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i\,\delta_{t_i}(t), \tag{1}$$

其中， $a_i \in \mathbb{R}$ 和 δ_{t_i} 表示平移了 t_i的狄拉克脉冲。 $\mathbb{N}_0$ 表示脉冲数量没有上限，不过为方便起见，我们假设每个脉冲序列中的脉冲数均为有限个。为方便起见，且不失一般性，为简化下文的符号，我们假设 $t_0 = 0$和 $a_0 = 0$。空脉冲序列记为 $\emptyset$。

$(\mathbb{S},\ +,\ \cdot)$ 表示基于通常的加法和数乘构成的所有脉冲序列 (1) 的向量空间，随后将为其赋予一个度量 $d(.,.)$，或范数 $\|.\|$，从而分别得到度量空间 $(\mathbb{S},\ d)$ 和赋范空间 $(\mathbb{S},\ d)$。
从数学角度来看，LIF 神经元模型实际上是一个自同态，$\text{LIF}_{\vartheta,\ \alpha}$： $\mathbb{S} \to \mathbb{S}$，它由两个参数决定，分别是阈值 $\vartheta > 0$ 和漏电时间常数 $\alpha > 0$ ，以及神经元在发放后进行重置的模式，即充电/放电事件。本文考虑三种重置模式：重置为零、减法复位 和取模重置。根据 Eshraghian 等人 [2021], 重置为零 意味着在发放后将电位重新初始化为零，而减法复位 则从触发发放事件的膜电位中减去 ϑ-电位 u_ϑ 。作为第三种变体，我们使用术语取模重置，它可以理解为根据膜电位超过阈值的倍数，瞬时级联应用减法复位 ，从而实现取模运算。这意味着，在取模重置的情况下，重新初始化时，首先从发放时刻的膜电位中减去阈值的整数倍，并以所得余数作为初始值。

设定 $t_0^{(1)} := 0$ (其中上标索引表示层，此处为漏积分发放的输出) 以及 $\eta_{in}(t) := ([a_i; t_i^{(0)}]_i)(t)$ 映射

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} b_i\,\delta_{t_i^{(1)}} = \eta_{out} = \text{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta_{in})$$

递归定义为

$$t_{i+1}^{(1)} = \inf\left\{t \geq t_i^{(1)} :\ \left|u_{\vartheta,\alpha}(t_i^{(1)}, t)\right| \geq \vartheta\right\}, \tag{2}$$

其中

$$u_\alpha(t_i, t) := \int_{t_i}^{t} e^{-\alpha(\tau - t_i)}\,(\eta_{in}(\tau) - \text{discharge}(t_i, \tau))\,d\tau \tag{3}$$

描述神经元膜电位在时间 t_i 发生输入脉冲事件后的动态变化（基于瞬时增加或减少的假设）。当膜电位的绝对值达到阈值水平 $\vartheta > 0$ 时，会产生一个输出脉冲，其幅度由 $b_{i+1} = +\vartheta$ 或 $= -\vartheta$ 给出，具体取决于式 (2) 中膜电位 u_α 是正还是负。

触发输出脉冲的过程实际上是一个充放电事件，随后通过瞬时作用的放电过程使膜电位重新初始化。

$$\text{discharge}(t_i^{(1)}, \tau) := \begin{cases} u_i\, \delta_{t_i^{(1)}}(\tau) & \dots \text{ for } \textit{reset-to-zero}, \\ \text{sgn}(u_i)\, \vartheta\, \delta_{t_i^{(1)}}(\tau) & \dots \text{ for } \textit{reset-by-subtraction}, \\ \text{sgn}(u_i)[u_i/\vartheta]\, \vartheta\, \delta_{t_i^{(1)}}(\tau) & \dots \text{ for } \textit{reset-to-mod}, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $u_i := u_\alpha(t_{i-1},\ t_i)$，$\text{sgn}(x) \in \{-1, 0, 1\}$ 是符号函数，而

$$[x] := \text{sgn}(x) \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le |x|\} \tag{5}$$

通过截断实现整数值量化。

(2) 中的积分将 RC 电路中的电压建模为对电流脉冲的响应。请注意，(2) 中无延迟的即时复位是对生物学或硬件实现的一种理想化处理。无论如何，由于在实际实现中，脉冲在时间上是稀疏的（或者说应该是稀疏的），这种理想化处理是一种合理的近似。若脉冲幅度较大，重置为零和减法复位可能会表现出截然不同的行为。

减法复位模式可以理解为一种补偿事件，使得脉冲事件的净电压平衡为零；也就是说，当输出脉冲的幅度为 ϑ 时，膜实际上会释放相同大小的电荷。因此，尽管文献中并不总是明确说明这一点（例如参见 Eshraghian 等人 [2021], ），这一假设有一个微妙的推论：膜电位 u 增加阈值 ϑ 的若干倍 $[u/\vartheta]$ 时，膜电位也会释放相同大小的电荷，即 $[u/\vartheta]\vartheta$。

这也可以从概念上视为依次执行 $[u/\vartheta]$ 次 ϑ 放电操作，这些操作在瞬时时间内依次进行，产生相同的结果，即一个振幅为 $[u/\vartheta]\vartheta$ 的输出脉冲。这里，我们将输出脉冲的振幅表示为阈值电位 ϑ 的整数倍。例如，考虑一个振幅较大的单个脉冲$\eta_{in}(t) := a_1\delta_{t_1}(t)$，其振幅为 $|a_1| > \vartheta$。请注意，由于电荷和放电事件的瞬时操作这一理想化假设，减法复位模式下的放电模型意味着 $\eta_{in} = a_1\delta_{t_1}$ 被映射到

$$b_1\delta_{t_1} = \text{LIF}_{\vartheta,\alpha}(a_1\delta_{t_1}),\ \ b_1 = [a_1/\vartheta]\,\vartheta. \tag{6}$$

图 2 展示了采用减法复位的漏积分发放（LIF）。

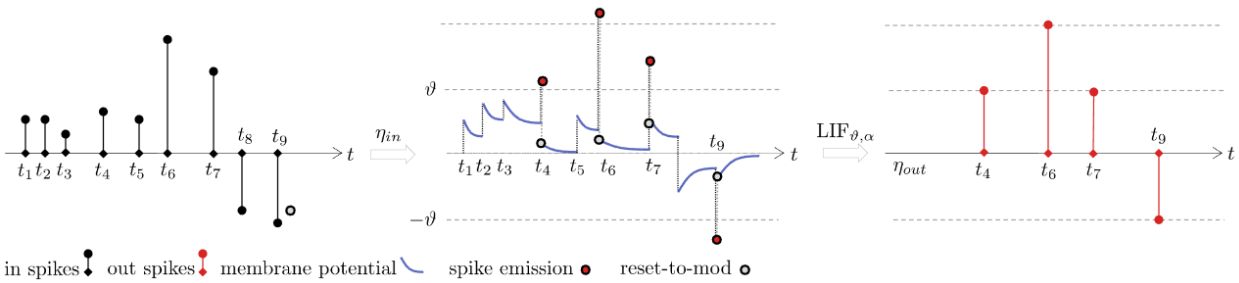

图 2：连续时间下的漏积分发放，分别采用减法复位和取模重置；在输入脉冲幅度为 t_6 $a_6 \in (2\vartheta,\ 3\vartheta)$ 时，导致连续两次减法复位，最终产生输出脉冲幅度$b_6 = 2\vartheta = [a_6/\vartheta]\,\vartheta$。

根据研究和应用背景，LIF 模型 (2) 的离散近似逐渐流行，尤其是为了简化计算，并使深度学习方法更容易应用于脉冲序列 Eshraghian 等人 [2021]。在以下假设下

(i) 将连续时间 $t \in [0, \infty$ 替换为离散时间 $n\Delta t \in \Delta t\,\mathbb{N}_0$，其中 $\Delta t \ll \alpha$；

(ii) 膜电位 (3) 瞬时增加或降低；

由此我们得到一个离散计算模型，其中连续时间输入信号 $\eta_{in} = \sum_i a_i\delta_{t_i}$ 被替换为序列

$$\hat{a}_k := \begin{cases} a_i & k = [t_i/\Delta t], \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{7}$$

当 Δt取值足够小时，该序列定义良好，从而在时间区间 $I_k = \lceil k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ 内至多有一个狄拉克脉冲到达。输出脉冲序列的幅值 b_n, $n = 0$，1，.....与连续时间情形中的定义相同。最终，我们由此得到离散漏积分-发放模型，$\widehat{\text{LIF}}_{\vartheta,\ \beta,\ \Delta t} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, $(\hat{b}_k)_k = \widehat{\text{LIF}}_{\vartheta,\ \beta,\ \Delta t}((\hat{a}_k)_k)$，如算法1所示。

算法1 简化离散漏积分-发放模型 $\widehat{\text{LIF}}_{\vartheta,\beta,\Delta t}$

步骤 0：初始化：$\hat{a} = (\hat{a}_k)_k$, $u_0 := 0$, $\hat{b}_0 = 0$, $\beta := (1 - \frac{\Delta t}{\alpha})$;**步骤 1**：更新膜电位：$u_{n+1} := \beta\, u_n + \hat{a}_n - b_n$**步骤 2**：检查阈值：更新时间 $n \mapsto n+1$ 并检查是否 $|u_n| \geq \vartheta$。如果为“否”，则设定 $b_n := 0$ 并重复**步骤 1**；如果为“是”，则在该时间步输出一个振幅为 u_n 的脉冲，然后进入**步骤 3**。**步骤 3**：放电事件：根据设定的重新初始化模式

$$\hat{b}_n := \begin{cases} u_n & \dots \text{ for } \textit{reset-to-zero}, \\ \operatorname{sgn}(u_n)\vartheta & \dots \text{ for } \textit{reset-by-subtraction}, \\ [u_n/\vartheta]\vartheta & \dots \text{ for } \textit{reset-to-mod}. \end{cases} \tag{8}$$

步骤 4：重复**步骤 1、2、3**，直到处理完所有输入脉冲。

通过对连续时间和离散时间下 LIF 模型的这一数学澄清，我们现在可以将积分发放作为脉冲量化进行研究，并在第3.2节给出量化误差的上界。

本文考虑前馈脉冲神经网络 SNN：$\mathbb{S}^{N_0} \to \mathbb{S}^{N_L}$ 它是由加权有向无环图给出的映射（V，E），图中连接着参数 ϑ 和 α 固定的漏积分-发放单元。SNN 接收 N_0 脉冲序列作为输入，并将其映射为 N_L 输出脉冲序列。底层图可按层级排列，从第 1 层开始直至第 L 层。我们用（k，i_k）枚举第 k 层中的漏积分-发放节点，其中 $i_k \in \{1, \dots, N_k\}$。

为方便起见，我们将输入脉冲序列视为第 0 层。边$[\,(k,\ i_k)\,,\ \ (k+1,\ i_{k+1})\,] \in E$的权重 $w^{(k+1)}_{i_{k+1},\ i_k}$，将第 i_k 层中的第 k 个神经元与第（$k+1$）层中的第 i_{k+1}个神经元相连，并相应地缩放从前一个神经元传递到后一个神经元的脉冲序列权重。图3对此作了示意。这样，映射 SNN 可表示为由权重矩阵 $W = [W^{(1)}, \dots, W^{(N_L)}]$,组成的元组，其中

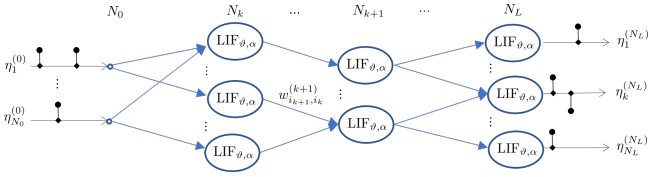

图3：作为加权有向无环图的 SNN。

$$\begin{aligned} \text{SNN} &= [W^{(1)}, \dots, W^{(N_L)}], \\ W^{(k+1)} &= (w^{(k+1)}_{i_{k+1},i_k}) \in \mathbb{R}^{N_{k+1} \times N_k}. \end{aligned} \tag{9}$$

3 哪种拓扑适用于脉冲序列空间?

Our 该方法从脉冲序列拓扑应满足的两个主要公设出发，见图4：

> 公理*1*：仅因脉冲发生小延迟或存在少量加性噪声而不同的两个脉冲序列，应被视为接近；其中，接近的概念不应取决于脉冲数量。公理*2*：系统配置参数的小扰动最终应产生相似的输入输出行为，例如，阈值仅发生某个小量的偏差。

请注意，广泛使用的基于平方差求和的欧几里得方法并不满足这些公设。例如，在反向传播中会用到形如 $d_E(\eta, \eta')^2 := \sum_i (t_i - t'_i)^2$ 的表达式，参见 Bohte 等人 [2000]。除了该定义只有在第一个和第二个脉冲序列中的脉冲一一对应时才有明确定义这一问题外，这种方法在某些特定情境下可能适用于某些算法，但由于缺乏明确定义性，并不适合作为构建普遍适用理论的公理化基础。例如，如果第一个脉冲序列为空而第二个不为空，那么这种方法在公理2所述情形下就没有明确定义

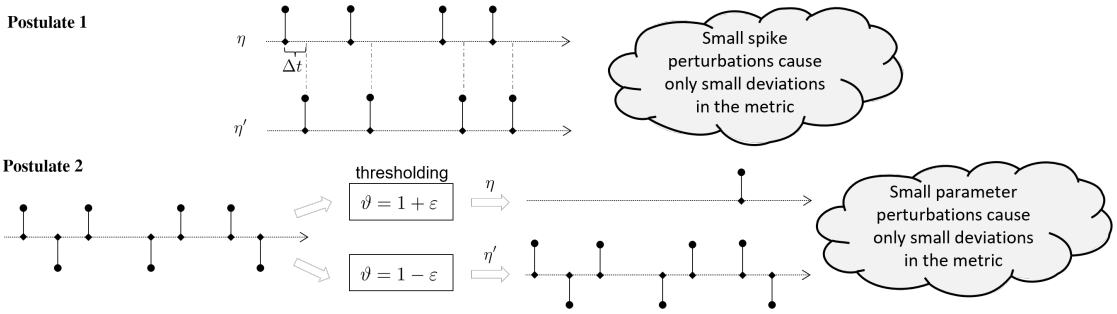

图 4：脉冲序列的适当度量 $d(.,.)$ 应满足的公设。

。此外，公理1也存在问题，因为误差取决于脉冲的数量。单个脉冲的大延迟或许多小延迟都可能导致较大误差。另请参阅 Moser 和 Natschläger [2014],Moser[2015]。此外，该方法没有考虑脉冲的符号。

3.1 Alexiewicz 拓扑

为了了解在该拓扑中哪些信号应视为彼此接近，我们来考虑漏积分发放神经元 $\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}: \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 的所有阈下输入脉冲序列构成的集合 C 。注意， C 是空脉冲序列在 LIF 下的原像，即 $C := \mathrm{LIF}_{\vartheta\ \alpha}^{(-1)}, (\{\emptyset)\}$。显然， C 不是闭集，例如，所有脉冲序列 $\eta_k := (\vartheta - 1/k)\delta_{t_1}$ 都低于阈值，但它们的逐点极限却不然。将所有极限也纳入考虑后，我们得到 C的闭包概念 C 。 C可按以下方式刻画，见 A。

引理 1 对于漏积分发放神经元 $LIF_{\vartheta,\alpha}: \mathbb{S} \to \mathbb{S}$，当 $0 \le \alpha < \infty$ 时，有：

$$\eta = \sum_i a_i \delta_{t_i} \in \overline{LIF_{\vartheta,\alpha}^{(-1)}(\{\emptyset)\}} \Longleftrightarrow \max_n \left| \sum_{i=1}^n a_i e^{-\alpha(t_n - t_i)} \right| \le \vartheta. \tag{10}$$

注意，

$$\|([a_i; t_i])_i\|_{A,\alpha} := \max_n \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{-\alpha(t_n - t_j)} \right| \tag{11}$$

在向量空间 $\mathbb{S}$上定义了一个范数，这使得 $\|.\|$ 记法是合理的。由定义（11）可立即得到

$$\|\eta\|_{A,\alpha} = \inf\{\vartheta > 0 : \mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta) = \emptyset\}, \tag{12}$$

and

$$\forall \alpha, \beta \in (0, \infty), \eta \in \mathbb{S} : \|\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta(\cdot))\|_{A,\alpha} = \|\mathrm{LIF}_{\vartheta,\beta}(\eta(\alpha/\beta\,\cdot))\|_{A,\beta}. \tag{13}$$

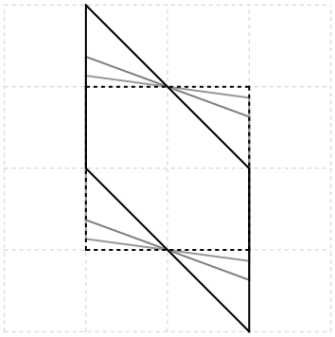

图 5：$\|.\|_{A,\ \alpha}$-脉冲序列的单位球 $\eta = a_1\delta_0 + a_2\delta_1$ 对于$\|.\|_{A,\ \alpha}$其中 $\alpha = 0$（实黑线）、 $\alpha = \infty$（虚线）和 $\alpha = 2$（灰色）

这样，漏积分发放$\overline{{}_{\vartheta\ \alpha}^{(-1)}}$，$(\{\emptyset)\}$ 恰好是球 $B_{A,\ \alpha}(\vartheta)$，其中心为 $\emptyset$ 、半径为ϑ，相对于范数$\|.\|_{A,\ \alpha}$而言。对于 $\alpha = 0$，事件之间的时间间隔长度不会产生任何影响，因此得到范数 $\|(a_i)_i\|_{A,\ 0}$ = 最大值。将 a_i 视为沿直线上下游走一步的宽度时，$\|.\|_{A,\ 0}$表示该游走的最大绝对路径振幅。

极差测度在随机游走领域中，是通过扩散过程所产生的渐近分布来研究的 Finch [2018], Jain 和 Orey [1968]。另一个类似的概念是用游走的直径 $\|(a_i)_i\|_D$ 来表示，即 $\|(a_i)_i\|_D := \max_{1\le m\le n\le N} |\sum_{i=m}^n a_i|$，这可以直接推广为 $\|(a_i)_i\|_{D,\ \alpha} := \max_{1\le m\le n\le N} |\sum_{j=m}^n a_j e^{-\alpha(t_n - t_j)}|$。请注意， $\|(a_i)_i\|_{A,\ \alpha} \le \|(a_i)_i\|_{D,\ \alpha} \le 2\|(a_i)_i\|_{A,\ \alpha}$ 这表明$\|.\|_{A,\ \alpha}$ 与 $\|.\|_{D,\ \alpha}$范数等价。

虽然相对于 $B_{A,\ 0}$w.r.t $\|.\|_{A,\ 0}$ 的单位球可以通过剪切超立方体 $[-1, 1]^N$ 来理解（见 B），但相关的$\|.\|_{D,\ 0}$ 单位球$B_{D,\ 0}$ 的几何刻画则更为棘手，见 Moser [2012]。

两个脉冲对应的单位球（二维情形）示意见图 5。

这些概念与更一般的差异度量概念相关，参见 Chazelle [2000], Moser [2011],；该概念可追溯至 Hermann Weyl Weyl [1916]，其定义基于论域中一族子集 $\mathcal{F}$ F，即 $\mu((a_i)_i) = \sup_{F\in\mathcal{F}} |\sum_{i\in F} a_i|$。对于 $\|.\|_A$，该族由所有索引区间 $\{0,\dots,m\}$组成；而对于 $\|.\|_D$，该族由所有部分区间 $\{m,\dots,n\}, m,n \in \{1,\dots,N\}$组成。因此，我们特别将 $\|.\|_A$（或 $\|.\|_D$）视为差异度量的一个例子。

类似的概念 $\|f\| := \sup_{[a,b]} |\int_{[a,b]} f d\mu|$ 可通过使用积分而非离散求和，为函数 f和温和分布（例如狄拉克δ冲激）定义。在文献中，这一概念称为 Alexiewicz 半范数 Alexiewicz [1948]。由于脉冲序列存在于连续时间中，我们最终寻求的拓扑是 Alexiewicz 拓扑，它满足上述公设。不过，本文语境下的大多数推理和证明都可以归结为离散序列，因此采用差异范数。

3.2 脉冲序列量化

有趣的是，正如 Moser 和 Lunglmayr 所指出的， [2023], 漏积分发放可以理解为一个满足以下条件的$\|.\|_{A,\ \alpha}$-量化算子。

$$\|\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta) - \eta\|_{A,\alpha} < \vartheta. \tag{14}$$

Moser 和 Lunglmayr [2023] 为以加权狄拉克冲激作为漏积分发放的输入信号的情形证明了（14），见 C。这里，首先注意到，（5）同样适用于算法1的离散版本。证明是类似的。其次，我们陈述了对分段连续函数的推广。通过这种方式，我们表明漏积分发放的作用类似于信号到脉冲序列的量化。将狄拉克脉冲推广到更一般的信号类，对于建立统一理论尤其重要，该理论结合了模拟脉冲采样和基于脉冲神经网络的脉冲信号处理。推广到局部可积函数的一般类也是可能的，但需要引入 Henstock-Kurzweil积分 Kurtz 和 Swartz [2004],，这将留待未来研究。

定理 1 *(14)* 对分段连续函数 η 也成立，即至多具有有限个不连续点的函数。

证明。其思路是构造一个 $\hat{}\eta = \sum_i a_i \delta_{t_i} \in \mathbb{S}$，使得对于所有 t_i，都有 $\int_{t_0}^{t_i} \hat{}\eta(t) e^{\alpha t} dt = \int_{t_0}^{t_i} \eta(t) e^{\alpha t} dt$。这可以通过利用积分中值定理来实现。首先，将时间域划分为若干区间$U_k = (u_{k-1}, u_k)$，在这些区间上 η 连续。在 U_k 上，积分中值定理保证存在 $s_k \in U_k$，使得 $\int_{U_k} \eta(t) e^{\alpha t} dt = |U_k| \eta(s_k) e^{\alpha s_k}$。然后，定义由所有 s_k 和 u_k 组成的序列 $(t_i)_i$。对于 $t_i = s_k$，定义$a_i := |U_k| \eta(s_k)$；对于 $t_i = u_k$，定义 $a_i := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{u_k-\varepsilon}^{u_k+\varepsilon} \eta dt$。进一步细化该划分，使得漏积分发放（LIF）$\vartheta$ 的输出脉冲时间点 t_i^*、$\alpha(\eta) = \sum_i b_i \delta_{t_i^*}$ 也作为 U_i 区间的边界点纳入考虑。通过这种方式，我们对所有 t_i 得到：

$$\int_{t_0}^{t_i} \eta(t) e^{-\alpha(t_i - t)} dt = \int_{t_0}^{t_i} \hat{\eta}(t) e^{-\alpha(t_i - t)} dt. \tag{15}$$

此外，由于所有时间点 t_i^* 都包含在 $(t_i)_i$中，我们还得到

$$\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta) = \mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\hat{\eta}). \tag{16}$$

结合 (15) 和 (16)，证明得以完成。 □

图 6 展示了不同 α 值下相对于$\|.\|_{A,\ \alpha}$ 的量化。注意，对于 $\alpha \to \infty$，我们得到标准的$\|.\|_\infty$-量化。

与基于阈值的采样类似，Moser [2017], Moser 和 Lunglmayr [2019]，我们在离散情形下也得到准等距，尽管具体情况和证明方法有所不同。在此背景下，它是定理 1 的一个副产品。

推论 1（漏积分发放准 等距） 范数$\|.\|_{A,\ \alpha}$, $\vartheta > 0$，确立了漏积分发放神经元模 *l, i.e.,*

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_{A,\alpha} - 2\vartheta \le \|\mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta_1) - \mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta_2)\|_{A,\alpha} \le \|\eta_1 - \eta_2\|_{A,\alpha} + 2\vartheta \tag{17}$$

和渐近等距，即，

$$\lim_{\vartheta\to 0} \|\mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta_1) - \mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta_2)\|_{A,\alpha} = \|\eta_1 - \eta_2\|_{A,\alpha} \tag{18}$$

对于所有 η_1、 $\eta_2 \in \mathbb{S}$。

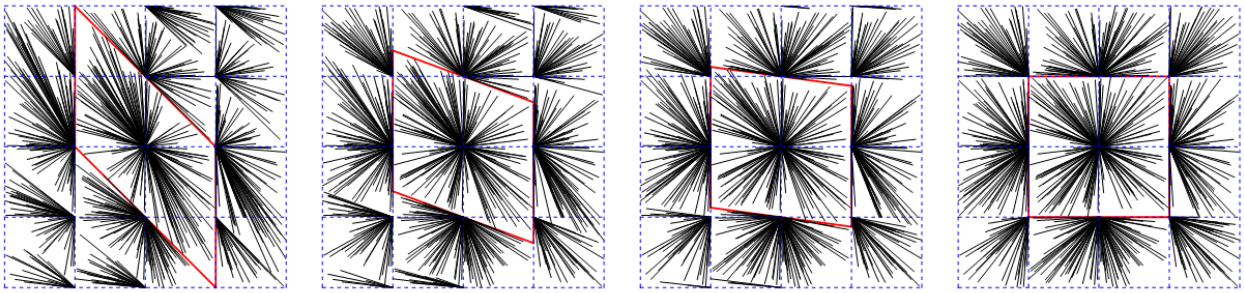

图 6：量化 相对于 $\|.\|_{A,\ \alpha}$、 $\alpha \in \{0,1,2,\infty\}$，对于带有随机 $a_i \in [-2,2]$ 的脉冲序列 $\eta = a_1\delta_0 + a_2\delta_1$；第 th 项 e
对应的单位平衡 脉冲被标为红色；箭头将各点与其量化点连接起来。

定理 1 与准等距性质 (17) 立即通过推论 2 和推论 3，从第 3 节中的公设 1 和 2 的角度给出了答案。由于阈值化的不连续性，我们所能期待的最佳结果是阶为阈值 ϑ 的误差界。推论 2 中由小滞后引起的误差界 (19) 非常显著，因为其渐近地仅取决于阈值和最大脉冲幅度，而不取决于例如脉冲频率。这一性质是 Alexiewicz 范数及其相关度量（例如差异度量）的典型特征，并且与欧几里得几何及其相关的相关性度量概念形成对比，另见 Moser 等人 [2011]。证明请参见 E。

推论 2 **（滞后误差界）**对于 $\eta = \sum_i a_i\delta_{t_i} \in \mathbb{S}$ 且当 Δt 足够小时，我们得到误差界 *d:*

$$\begin{aligned} \|LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta(\cdot - \Delta t)) - LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta(\cdot))\|_{A,\alpha} &\leq \\ \max_i |a_i| + 2\,\vartheta + \Delta t\,\alpha(\|\eta\|_{A,\alpha} + \max_i |a_i|) + O(\Delta t^2). & \end{aligned}$$

结合（1）和范数的三角不等式可得

$$\begin{aligned} \|\mathrm{LIF}_{\vartheta+\varepsilon,\alpha}(\eta) - \eta + \eta - \mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha} &\leq \\ \|\mathrm{LIF}_{\vartheta+\varepsilon,\alpha}(\eta) - \eta\|_{A,\alpha} + \|\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta) - \eta\|_{A,\alpha} &\leq 2\vartheta + \varepsilon, \end{aligned}$$

由此证明推论 3。

推论 3（阈值扰动误差界）对于 $\varepsilon > 0$ 我们有

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}} \|LIF_{\vartheta+\varepsilon,\alpha}(\eta) - LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha} \leq 2\vartheta + \varepsilon. \tag{19}$$

（1）也可以解释为脉冲序列分解：将其分解为两部分，一部分由振幅为阈值的带符号倍数的脉冲组成，另一部分为低于阈值的余量。有趣的是，第一部分还可以进一步分解为一系列 Alexiewicz 范数为 1 的脉冲序列之和。示例见 D。

定理 2（尖峰序列分解）对于任意 $\eta \in \mathbb{S}$，都存在一个 $\psi \in \mathbb{S}$，其脉冲幅度是阈值的整数倍；并存在一个低于阈值的余量脉冲序列 $\rho \in \mathbb{S}$，满足 $\|\rho\|_{A,\ \alpha} < \vartheta$，使得 $\eta = \psi + \rho$，其中 ψ =漏积分发放$_{\vartheta,\ \alpha}(\eta)$。此外，$\psi$ 可以表示为 $\|.\|_{A,\ 0}$ 单位脉冲序列 $\Delta\eta_r$, $r \in \{1,\ldots,a\}$,$a := \|\psi\|_{A,\ 0}$ 之和，即，

$$\psi = \sum_{r=1}^{a} \Delta\eta_r, \tag{20}$$

其中 $\|\Delta\eta_r\|_{A,\ 0} = 1$对所有 r 均成立。

证明。 设 $\eta_0 := \psi$ 为具有整数脉冲幅度 $a_i^{(0)} \in \mathbb{Z}$ 的初始脉冲序列。假设 $\|\eta_0\|_{A,0} > 1$。为方便起见，我们将空索引集上的和定义为零，即 $\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$。我们将递归地定义一个序列

$$\eta_r = \sum_{i=1}^{N^{(r)}} a_i^{(r)}\delta_{t_i}, \tag{21}$$

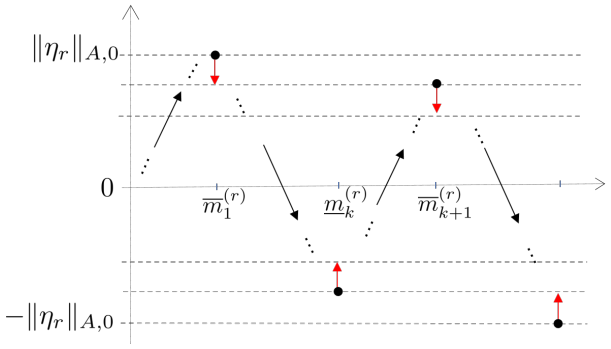

图 7：脉冲序列中的峰值 分解算法。减去 $\Delta\eta_r$ 会使峰值向零移动 o
直线，由红色箭头标示 色箭头。

脉冲序列，满足 $r = 1, \ldots, N(0)$，使得 $\|\eta_r - \eta_{r-1}\|_{A,\,0} = 1$ 且 $\eta_{N^{(0)}} = \emptyset$。记作 $N^{(r)} := \|\eta_r\|_{A,\,0}$。

若 $N^{(r)} \geq 2$，则根据图 (7)，我们考虑游走 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i^{(r)}$ 中的峰值。不失一般性，假设第一个峰值为正。为此，我们递归地定义相应的顶部峰值索引 $\overline{m}_k^{(r)}$ 和底部峰值索引 $\underline{m}_k^{(r)}$，如下所示。

$$\begin{aligned} \overline{m}_1^{(r)} &:= \min\{k > 0 : \sum_{i=1}^{k} a_i^{(r)} = N^{(r)}\}, \\ \overline{m}_{k+1}^{(r)} &:= \min\{k > \overline{m}_k^{(r)} : \sum_{i=1}^{k} a_i^{(r)} \geq N^{(r)} - 1\}, \end{aligned} \tag{22}$$

并且，类似地，

$$\underline{m}_k^{(r)} := \min\{m \in J = \{\overline{m}_k^{(r)} + 1, \ldots, \overline{m}_{k+1}^{(r)}\} : \sum_{i=1}^{m} a_i^{(r)} = \min_{j \in J} \sum_{i=1}^{j} a_i^{(r)} \leq -1\}. \tag{23}$$

基于 (22) 和 (23)，我们定义脉冲序列 $\Delta\eta_{r+1} := \sum_i d_i^{(r+1)} \delta_{t_i}$ 如下。由于我们假设第一个峰值为正，因此定义（否则 -1）

$$d_{m_1}^{(r+1)} := 1. \tag{24}$$

对于后续峰值，我们考虑下区间和上区间。

$$\underline{J}_k := \left\{\overline{m}_k^{(r)} + 1, \ldots, \underline{m}_k^{(r)}\right\}, \; \overline{J}_k := \left\{\underline{m}_k^{(r)} + 1, \ldots, \overline{m}_{k+1}^{(r)}\right\}. \tag{25}$$

对于除以下情况外的所有 t_i，我们设定 $d_i^{(r+1)} := 0$。对于下降区间有两种情况（上区间同理）：

- 情况 A. $\sum_{i \in J_k} a_{(r)\,i} \leq -2$ 且存在一个索引 $i \in J_k$：$a_{(r)\,i} \leq -2$，则我们设定

$$d_i^{(r+1)} := -2. \tag{26}$$

- 情况 B。$\sum_{i \in J_k} a_{(r)\,i} \leq -2$ 并且不存在索引 $i \in J_k$：$a_{(r)\,i} \leq -2$，那么至少存在两个索引 i_1, i_2 使得 $a_{(r)\,i_1} + a_{(r)\,i_2} \leq -2$。因此，我们设

$$d_{i_1}^{(r+1)} := -1, d_{i_2}^{(r+1)} := -1. \tag{27}$$

类似地，我们定义上区间的脉冲，即再次区分两种情况。

- 情况 A. $\sum_{i \in J_k} a_{(r)\,i} \geq 2$ 并且存在一个索引 $i \in J_k$：$a_{(r)\,i} \geq 2$，那么我们设定

$$d_i^{(r+1)} := 2. \tag{28}$$

• 情况 B。 $\sum_{i\in J_k} a_{(r)\,i} \geq 2$ 且不存在索引 $i \in J_k$： $a_{(r)\,i} \geq 2$，则至少存在两个索引 i_1, i_2 使得 $a_{(r)\,i_1} + a_{(r)\,i_2} \geq 2$。因此，我们设定

$$d_{i_1}^{(r+1)} := 1, d_{i_2}^{(r+1)} := 1. \tag{29}$$

并非 $\|\Delta\eta_{r+1}\|_{A,\,0} = 1$ 和 $\|\eta_r - \Delta\eta_{r+1}\|_{A,\,0} = \|\eta_r\|_{A,\,0} - 1$，因为所有峰值都朝零直线方向移动了 1。由于每一步中 $\|.\|_{A,\,0}$ 都减少 1， $\|\psi\|_{A,\,0}$ 因此只需足够多的步骤即可表示 $\psi = \sum_r \Delta\eta_r$。□

4 加性脉冲误差与共振现象

本节首先研究通过添加加权脉冲 ν扰动输入脉冲序列 η 时，对单个 LIF 神经元模型输出的影响，如图 8 所示。

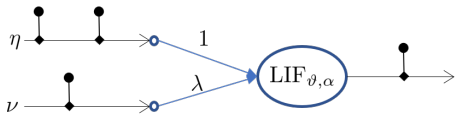

图 8：通过单个 LIF 模型传播加性信号误差的示意图。

首先，我们考虑零泄漏和无限泄漏这两种特殊情况，即 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \infty$，以得到引理 2。证明见 F。

引理 2（积分发放的加性误差界）设 漏积分以及取模重置重新初始化，则 $\alpha \in \{0, \infty\}$

$$\forall \vartheta > 0, \eta, \nu \in \mathbb{S} : \|\nu\|_{A,\alpha} \leq \vartheta \Rightarrow \|\mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta + \nu) - \mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha} \leq \vartheta. \tag{30}$$

基于定理 1（将 LIF 表征为信号到脉冲序列的量化），并考虑引理 2 中 $\alpha \in \{0, \infty\}$ 的特殊情形，我们得到了 Lipschitz 型上界：对于取模重置 LIF 神经元，该上界由不等式 (31) 给出；对于基于取模重置 LIF 神经元的脉冲神经网络，该上界由不等式 (40) 给出。

定理 3（LIF 模型的 Lipschitz 型上界）对于具有 $\vartheta > 0$ 和 $\alpha \in [0, \infty]$ 的重置取模 *LIF* 神经元模型，以及所有脉冲序列 $\nu \in \mathbb{S}$，以下不等式成立。

$$\sup_{\eta\in\mathbb{S}} \|\mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta + \nu) - \mathit{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha} \leq \gamma(\alpha) \left\lceil \frac{1}{\vartheta}\|\nu\|_{A,\alpha} \right\rceil \vartheta, \tag{31}$$

其中 $\gamma(0) = \gamma(\infty) = 1$ 以及 $\gamma(\alpha) \in [2, 3]$ 对于 $\alpha \in (0, \infty)$。

证明。 首先要注意的是

$$\xi(\vartheta, \alpha) := \sup_{\eta,\nu\in\mathbb{S}} \frac{\|\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta + \nu) - \mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha}}{\left\lceil \|\frac{1}{\vartheta}\nu\|_{A,\alpha} \right\rceil \vartheta} \tag{32}$$

与 ϑ 无关，尽管 ϑ 出现在 (32) 中，如下所示。事实上，对于给定的阈值 $\vartheta > 0$，设 $\eta_i^{(\vartheta)}$ 和 $\nu_i^{(\vartheta)}$ 为满足 (32) 中的分数收敛到 ξ （ϑ, α）的序列，则 $\widetilde{\eta_i} := \eta_i^{(\vartheta)}/\vartheta$ 和 $\widetilde{\nu_i} := \nu_i^{(\vartheta)}/\vartheta$ 得出

$$\xi(\vartheta, \alpha) = \sup_i \frac{\vartheta \, \|\mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\widetilde{\eta_i} + \widetilde{\nu_i}) - \mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\widetilde{\eta_i})\|_{A,\alpha}}{\left\lceil \|\frac{1}{\vartheta}\nu_i^{(\vartheta)}\|_{A,\alpha} \right\rceil \vartheta} = \xi(1, \alpha). \tag{33}$$

现在，定义并使用 (14)

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &:= \xi(1, \alpha) \\ &= \sup_{\eta,\nu\in\mathbb{S}} \frac{\|\mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta + \nu) - (\eta + \nu) + \nu + \eta - \mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha}}{\lceil \|\nu\|_{A,\alpha} \rceil} \\ &\leq \sup_{\eta,\nu\in\mathbb{S}} \frac{2 + \|\nu\|_{A,\alpha}}{\lceil \|\nu\|_{A,\alpha} \rceil} \leq 3 < \infty. \end{aligned} \tag{34}$$

现在，考虑 $\alpha \in (0, \infty)$ 以及以下示例。

例 1 令 $\eta = \sum_{k=1}^{3} a_k \delta_{t_k}$ 对于 $t_k = k\varepsilon$、 $\varepsilon > 0$ 和 $(a_1、\ a_2、\ a_3) = (-\frac{3}{2}、\ 1、\ 32)$，以及 $\nu = \sum_{k=1}^{3} b_k \delta_{t_k}$ 其中 $(b_1、\ b_2、\ b_3) = (1、\ -1、\ 1)$ 满足 $\|\nu\|_{A,\,\alpha} = 1$ 对所有 $\alpha \in [0, \infty]$均成立。

对于 $\alpha \in (0, \infty)$，我们针对该例得到

$$\begin{aligned} \mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta) &= -1\,\delta_{t_1} + 0\,\delta_{t_2} + 1\,\delta_{t_3}, \\ \mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta+\nu) &= 0\,\delta_{t_1} + 0\,\delta_{t_2} + 2\,\delta_{t_3}. \end{aligned} \tag{35}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon,\alpha) := \|\mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta+\nu) - \mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha} &= \|1\,\delta_{t_1} + 0\,\delta_{t_2} + 1\,\delta_{t_3}\|_{A,\alpha} \\ &= \left|1 + e^{-2\varepsilon\alpha}\right|. \end{aligned} \tag{36}$$

由 $\lim_{\vartheta\to 0}\rho(\varepsilon,\ \alpha) = 2$ 对所有 $\alpha \in (0,\ \infty)$ 成立可得，$\gamma(\alpha) \geq 2$ 对所有 $\alpha \in (0,\ \infty)$ 成立。

现在，我们来考察特殊情形 $\alpha = 0$。不失一般性，我们可以假设 $\vartheta = 1$。对于这种情形，我们应用推论 2 的脉冲序列分解，由此可将 $\nu = \sum_{k=1}^{a}\nu_k + \widetilde{\nu}$ 表示为，其中 $a := \lfloor \|\nu\|_{A,\ 0} \rfloor \|\nu_k\|_{A,\ 0} = 1$和 $\|\widetilde{\nu}\|_{A,\ 0} < 1$。然后，考虑到引理 2，并在望远镜求和上应用式 (14)

$$\begin{aligned} & \|\mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu) - \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta)\|_{A,0} \\ = \;& \|\,\mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu_1+\ldots+\nu_a+\widetilde{\nu}) - \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu_2+\ldots+\nu_a+\widetilde{\nu}) \\ & + \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu_2+\ldots+\nu_a+\widetilde{\nu}) - \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu_3+\ldots+\nu_a+\widetilde{\nu}) \\ & \quad \ldots \\ & + \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu_a+\widetilde{\nu}) - \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\widetilde{\nu}) \\ & + \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\widetilde{\nu}) - \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta)\,\|_{A,0} \\ \leq \;& \lceil \|\nu\|_{A,0} \rceil \end{aligned} \tag{37}$$

我们得到 $\gamma(0) \leq 1$。由于例 1 给出

$$\begin{aligned} \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta) &= -1\,\delta_{t_1} + 0\,\delta_{t_2} + 2\,\delta_{t_3}, \\ \mathrm{LIF}_{1,0}(\eta+\nu) &= 0\,\delta_{t_1} + 0\,\delta_{t_2} + 2\,\delta_{t_3}, \end{aligned} \tag{38}$$

因此，$\|$漏积分发放$_{1,0}(\eta+\nu)$ $-$漏积分发放$_{1,0}(\eta)\|_{A,\ 0} = 1$，最终得到 $\gamma(0) = 1$。同样的望远镜求和推理也适用于情形 $\alpha = \infty$，得到 $\gamma(\infty) \leq 1$。再次检查例 1，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{LIF}_{1,\infty}(\eta) &= -1\,\delta_{t_1} + 1\,\delta_{t_2} + 1\,\delta_{t_3}, \\ \mathrm{LIF}_{1,\infty}(\eta+\nu) &= 0\,\delta_{t_1} + 0\,\delta_{t_2} + 2\,\delta_{t_3}, \end{aligned} \tag{39}$$

因此，$\|$漏积分发放$_{1,\ \infty}(\eta+\nu)$ $-$ 漏积分发放$_{1,\ \infty}(\eta)\|_{A,\ 0} = \|1\,\delta_{t_1} - 1\,\delta_{t_2} + 1\,\delta_{t_3}\|_{A,\ 0} = 1$，这表明 $\gamma(\infty) = 1$。 □

定理 3 结合范数的三角不等式 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$，立即得出脉冲神经网络中 LIF(η) 与其扰动版本 LIF$(\eta+\nu)$ 之间范数差的全局上界。

定理 4（脉冲神经网络的全局类 Lipschitz 界）设脉冲神经网络 $SNN : \mathbb{S}^{N_0} \to \mathbb{S}^{(N_L)}$ 由重置取模 *LIF* 神经元 $LIF_{\vartheta,\alpha}$, $\vartheta = 1$ 构成，由 $[W^{(1)}, \ldots, W_{(N_L)}]$ 按照（9）给出，并设$(\nu_1, \ldots, \nu_{N_0})$ 是对应输入脉冲序列$(\eta_1, \ldots, \eta_{N_0})$ 中的加性误差脉冲序列，则对于所有输出通道 $\eta^{(N_L)\,j}, j \in \{1, \ldots, N_L\}$，我们得到以下误差界。

$$\begin{aligned} & \sup_{\eta_i} \|SNN((\eta_i+\nu_i)_i) - SNN((\eta_i)_i)\|_{A,\alpha} \\ \leq_j \;& \Gamma_\alpha \circ \widetilde{W}^{(N_L)} \left(\Gamma_\alpha \circ \widetilde{W}^{(N_L-1)} \cdots \left(\Gamma_\alpha \circ \widetilde{W}^{(1)}\left(\Gamma_\alpha \circ \nu_{A,\alpha}\right)\right)\right), \end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\|(c_{i,j})_{i,\ j}\|_{A,\ \alpha} := (\|(c_{i,j})_{i,\ j}\|_{A,\ \alpha})_i$，$\leq_j$ 指不等式左右两侧的第 j个输出通道，$\widetilde{W}_{(k+1)}$:
$= \left(\left|w^{(k+1)}_{i_{k+1},i_k}\right|\right)_{i_{k+1},\ i_k}$、$\nu_{A,\ \alpha} := \left(\|\nu_1\|_{A,\alpha}, \ldots, \|\nu_{N_0}\|_{A,\alpha}\right)$，$\Gamma_\alpha(x) := \lceil \gamma(\alpha)\ x \rceil$，且向上取整函数 $\lceil . \rceil$ 按坐标逐一应用。

5 评估

本节通过数值示例展示本文的主要理论结果，尤其是关于脉冲序列量化的式 (14) 及其在拟等距方面的推论、推论 1、关于时间延迟的误差界、推论 2，以及定理 3 针对 LIF 模型和定理 4 针对基于漏积分发放模型的前馈脉冲神经网络所给出的加性脉冲序列全局 Lipschitz 型上界。Python 和 Mathematica 代码见 https://github.com/LunglmayrMoser/AlexSNN。

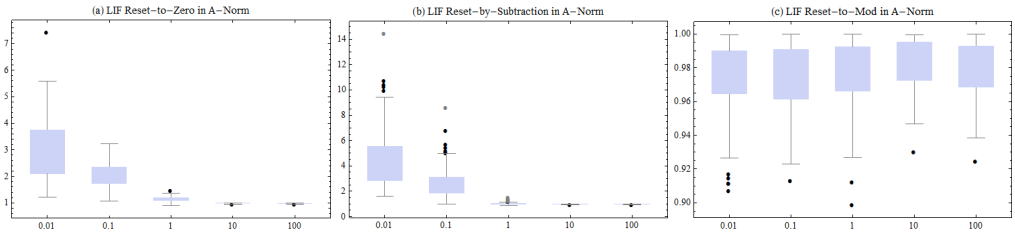

图 9： $\|$漏积分发放$_{\vartheta,\ \alpha}(\eta) - \eta\|_{A,\ \alpha}$ 对于 $\vartheta = 1$、 $\alpha \in \{0.01, 0.1, 1, 10, 100\}$ 以及以下重置变体的量化误差分布：(a) 重置为零、(b)减法复位和 (c) 取模重置 （我们提出）；包含 50 个脉冲的脉冲序列（位于等距网格上）由范围为 $[-2, 2]$ 的均匀分布脉冲幅度生成；每种变体均进行 100 次运行。

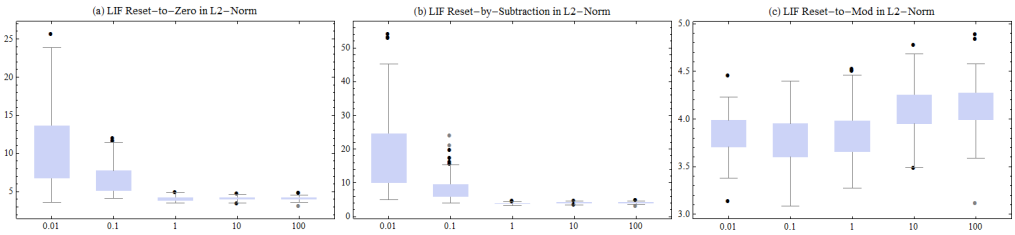

图 10：与图 9 类似，采用基于 L_2 的范数 (41)。

本文的所有理论发现都基于选择取模重置 作为重新初始化模式。因此，在后续评估中，我们也将其他重置模式纳入考量，以全面了解行为差异。此外，考察与 Alexiewicz 范数不等价的其他距离度量的影响也很有启发性。我们将比较范围限定在基于欧几里得距离的范数 (41)。其他脉冲序列度量，例如 Satuvuori 和 Kreuz [2018], Sihn 和 Kim [2019],Victor [2005]，则不予考虑，因为它们的出发点与我们的方法所关注的目标不同；我们的方法旨在刻画满足第 3 节公设 1 和 2 的向量空间所具有的拓扑 $\mathbb{S}$。因此，关于 Alexiewicz 拓扑（及其泄漏变体）在其他已提出度量背景下可能产生的影响，将留待未来研究中详细讨论。

5.1 由（14）引起的脉冲序列量化

图 9 展示了 Alexiewicz 拓扑中的量化误差，即 $\|$漏积分发放$_{\vartheta,\alpha}(\eta) - \eta\|_{A,\alpha}$-范数，针对不同的重置变体：(a) 重置为零、(b) 减法复位，以及我们的 (c)取模重置。对于较大的泄漏参数 α，三种变体都趋向于相同的误差行为。正如定理 1 所预期的那样，只有在取模重置 变体中，我们才能保证定理 1 的界限。相比之下，图 10 展示了选择欧几里得拓扑的影响，这在脉冲神经网络的语境中通常使用，即，

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{t_i} \right\|_{2,\alpha} := \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i e^{-\alpha(t_k - t_i)} \right)^2}. \tag{41}$$

与 Alexiewicz 拓扑和漏积分发放神经元的取模重置重新初始化不同，在欧几里得度量下无法保证量化误差存在全局上界，见图（11）。

5.2 关于公设 1 和 2 及准等距的误差界

公设 1 和 2 分别由不等式（19）和（19）涵盖，分别涉及时间延迟和阈值偏差。图12展示了一个示例，其中包括针对取模重置变体所证明的理论上界，以及由我们的三种重新初始化变体和不同泄漏参数设置产生的范数误差。对于时间延迟，当时间延迟足够小时，理论上界有保证（见 E）。在此示例中，与取模重置相比，其他重新初始化变体减法复位和重置为零的误差更小。对于阈值偏差，情况则相反；并且如（19）所保证的，对于所有 $\Delta\vartheta$，与取模重置相关的红色虚线都严格低于上界（黑线）。

与脉冲序列量化的数据类似，准等距分析（见图 13）也显示，重新初始化模式的选择会带来显著差异。

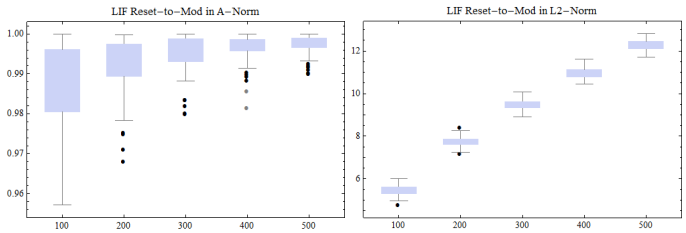

图 11：与图 9 和图 10 类似，针对 $\alpha = 1$，但脉冲数量不同，$N \in \{100, \ldots, 500\}$。虽然欧几里得范数中的量化误差 (41) 随着 N 增大（右图），但根据定理 1，它在 Alexiewicz 拓扑中始终严格小于阈值（左图）。请注意 Alexiewicz 拓扑中的测度集中效应，参见 Vershynin。

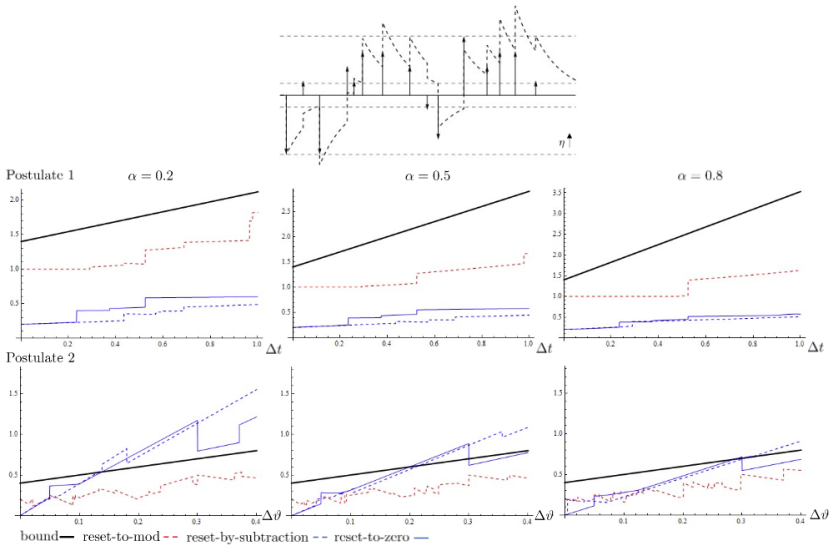

图 12：对于不同的 $\alpha \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$，评估时间延迟 Δt（第二行）和阈值偏差 $\Delta\vartheta$（第三行）对单个漏积分发放神经元的影响。图中显示了三种重置变体对应不等式 (19) 左侧的值，以及由相应不等式右侧给出的界（黑线）。

5.3 漏积分发放和脉冲神经网络的 Lipschitz 型上界

我们先考察单个漏积分发放神经元。定理 3 实际上涉及两个方面：首先是全局 Lipschitz 型界；其次是上界常数 $\gamma(\alpha)$ 在 $\alpha \in \{0, \infty\}$ 和 $\alpha \in (0, \infty)$ 下表现不同。图 14 中，我们针对加性脉冲序列 ν的不同泄漏参数 α 和缩放因子 λ，计算了这一效应。从这些（α，λ）图中可以看出，放大因子可能相当不连续且呈锯齿状。不同的干扰 ν 信号可能导致截然不同的形状。更值得注意的是，对于所有输入脉冲序列，放大因子都有全局上界，不受其包含的脉冲数量影响；并且当 $\alpha = 0$（或取较大值）时，我们有紧确界 $\gamma(\alpha) = 1$。对于 $\alpha \in (0, \infty)$，我们找到了收敛到 $\gamma(\alpha) = 2$ 的例子，正如定理中所证明的那样。我们猜想，实际上 $\gamma(\alpha) = 2$，不过在证明中，我们只能证明 $\gamma(\alpha) \in [2, 3]$。如何更详细地分析这种共振型现象，仍是一个开放问题。相比之下，三维图中比较重新初始化模式取模重置（三维图第一行）与重置为零时出现的不同形状，则更容易解释。由于较大的 α 会降低对过去脉冲的依赖，从而近似重置为零的行为。

脉冲神经网络的 (α, λ) 图与图 14 中的图形相似。根据定理 4，对于所有输入脉冲序列，它们在全局范围内都有界。然而，其形状可能相当锯齿且不连续，如图 15 所示；该图展示了一个三层脉冲神经网络的示例，其

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, W^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

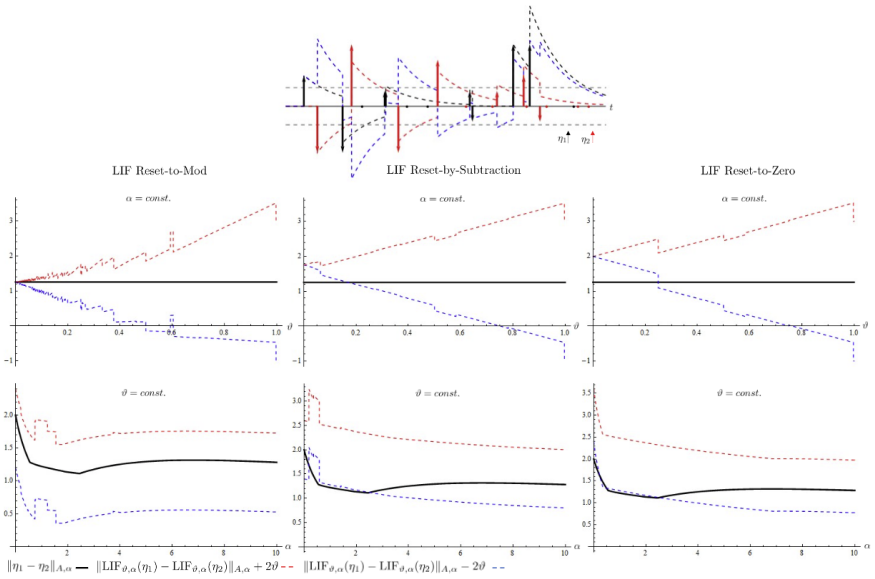

图 13：准等距评估。第二行和第三行：应用漏积分发放后，对 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$-范数的评估；第二行对应常数 $\alpha = 4$，第三行对应常数 $\vartheta = 0.3$。根据式（17），只有 取模重置 满足准等距条件。

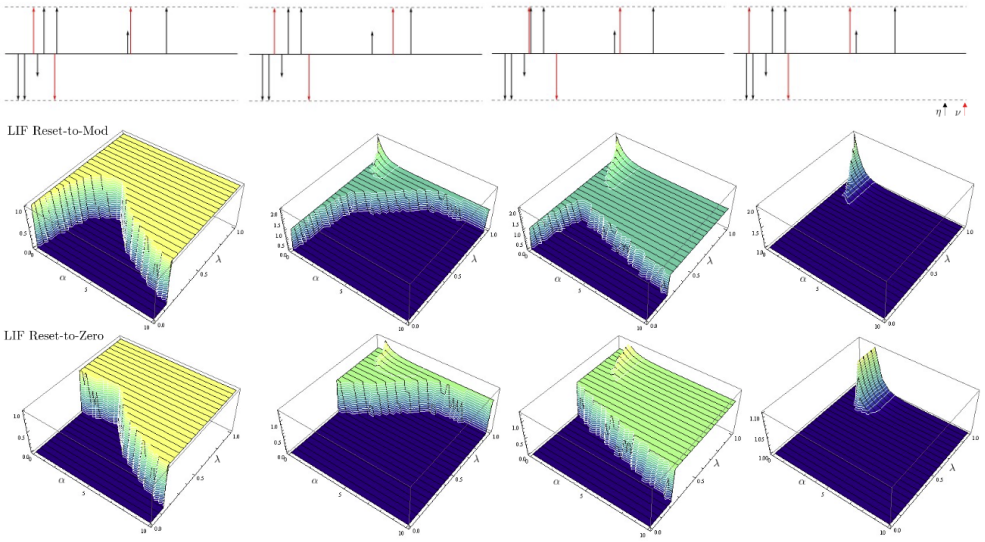

图 14：针对例 1 的四种变体，绘制不等式（31）左侧的 (α, λ) 图；$\alpha \in [0, 10]$ 为横轴变量，缩放因子 $\lambda \in [0, 1]$ 为纵轴变量。

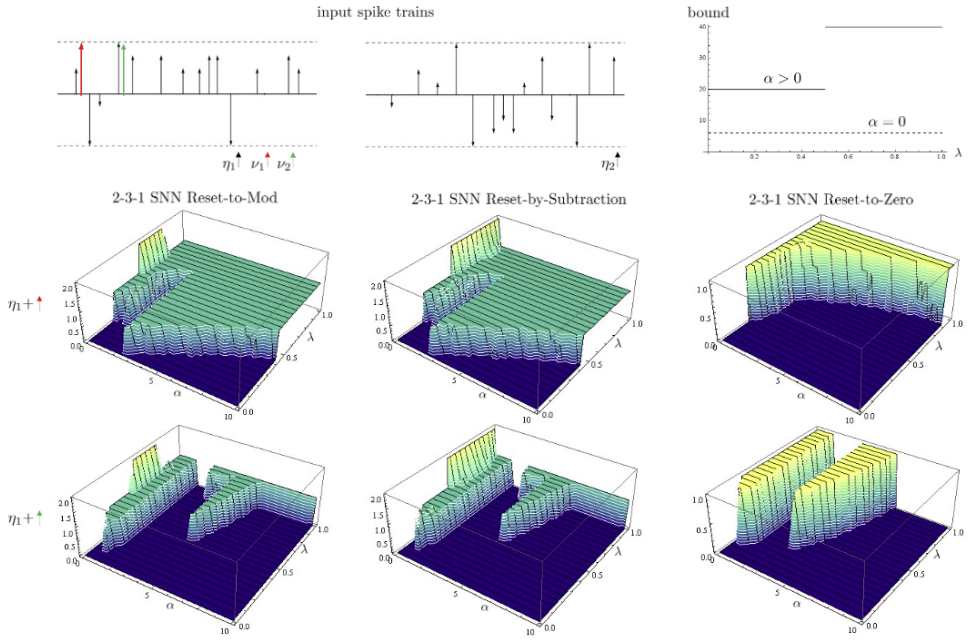

图 15：对于由权重矩阵 (42) 和输入脉冲序列 η_i给出的 2-3-1脉冲神经网络，评估不等式 (40) 左侧的（α, λ）。最右侧的外部图展示了不等式 (40) 右侧的情况，其中区分了 $\alpha = 0$ 和 $\alpha > 0$ 两种情形。第二行展示了红色附加脉冲对应的（α, λ）评估，而第二行展示了绿色附加脉冲对应的评估。在第二行中，我们用红色脉冲扰动 η_1；相应地，在第三行中添加绿色脉冲，并如图 14 所示，展示了三种不同重新初始化模式下测得误差的 Alexiewicz 范数三维图。

对图 15 中两个示例的比较显示了时间敏感性。将造成扰动的红色脉冲移至绿色位置后，所得的（α, λ）图打破了对称性，使形状呈现出不同特征。对这些效应的详细分析留待未来研究。

6 展望与结论

我们的方法始于一个众所周知的观察：与成熟的基于时钟的采样和处理技术相比，仿生信号处理带来了范式转变。基于这样的假设——这一范式转变也必然体现在其数学基础中——我们从自上而下的理论构建入手，首先探寻具有启发性的公设。对于 LIF 神经元模型（以及基于该模型的脉冲神经网络），我们的分析表明，其输入输出行为受一种潜在的非欧几里得几何支配。本文的核心结果是，这种映射可以完全刻画为 Alexiewicz 范数下的信号到脉冲序列量化，或在正泄漏参数情况下对该范数的相应调整。我们证明了这一结果适用于由任意时间间隔上的加权狄拉克冲激序列表示的脉冲序列，并在附录中指出，这一量化原理也适用于更广泛的函数类。除此之外，我们猜想，量化误差不等式对所有公式有定义的信号都成立；不过，要实现这一点，可能需要采用另一种积分概念，即与 Alexiewicz 拓扑相关的 Henstock-Kurzweil积分。这有待后续研究。此外，还需在 Lipschitz型误差界的背景下分析这一类共振现象。另一个研究方向是探索基于 Alexiewicz 范数的方法在信息编码中的潜力，并进一步建立一种统一理论，将通过事件驱动采样进行的低层信号采集、通过反馈回路进行的信号处理，以及用于高层问题求解的学习策略纳入其中。贯穿本文的另一个议题是重新初始化变体的选择及其影响。量化定理针对我们称为取模重置的变体提出；当脉冲幅度超过阈值的整数倍时，该变体通过即时应用减法复位实现。由此得到的准等距性质以及关于时间延迟的误差界等特性，或可作为采用取模重置的依据；但归根结底，本研究只能视为迈向更全面理论基础的起点，这一理论基础将把仿生信号处理的拓扑特性纳入考量。

致谢

本研究获得以下支持：（1）Silicon Austria Labs（SAL）及其奥地利应用基础研究合作高校发起的“University SALLabs”倡议；（2）奥地利联邦气候行动、环境、能源、交通、创新与技术部（BMK）、联邦数字与经济事务部（BMDW）以及上奥地利州在 SCCH 框架内提供的支持；SCCH 是由奥地利研究促进署（FFG）管理的 COMET 计划的一部分；（3）Horizon Europe 项目 *NeuroSoC*，资助协议编号为 101070634。

定理1的证明

我们给出 $\alpha = 0$ 的证明。对于 $\alpha > 0$，论证过程类似。
从左至右。考虑一个由低于阈值的脉冲序列 $\eta_n = \sum_{i_n} a_{i_n}^{(n)} \delta_{t_{i_n}}$ 组成的序列 η_n，则积分发放神经元永远不会达到阈值 $\theta > 0$，即对于所有 n 和 m，都有 $|\sum_{i_n=0}^{m} a_{i_n}^{(n)}| < \theta$。因此，对 n 取极限可得公式 (10) 的右侧。

从右向左。现在，考虑满足公式 (10) 右侧不等式的 $\eta = \sum_i a_i \delta_{t_i}$。如果输出中没有脉冲，则该脉冲序列低于阈值，即 $\eta \in C$，因此 $\eta \in C$。假设输出中至少有一个脉冲。不失一般性，设第一个脉冲为正。接着，我们递归地定义 $i_0 := 0$ andi_k，定义为 $i_{k+1} := \min\{j : \sum_{i=i_k+1}^{j} = (-1)^k 2\vartheta\}$. 注意， $a_i^{(\varepsilon)} := a_i - (-1)^k \varepsilon a_i/\vartheta\}$ 会产生一个收敛到 η 的脉冲序列$\eta^{(\varepsilon)} \in C$。

B 单位球$\|\cdot\|_{A,0}$

本节将刻画单位球 B_A $\|\cdot\|_A$ $[-1,1]^N$ $B_A =$，它是超立方体，经剪切变换后的像，即 : : , 其中 $\{x \in \mathbb{R}^N \quad \|x\|_A \leq 1\} = \{x = Ty \quad y \in [-1,1]^N\}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

证明。我们希望刻画所有满足 $\|x\|_A \leq 1$ 的 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$，即 $y_n := \sum_{i=1}^{n} x_i \in [-1,1]$ 对所有 $n \in \{1, \ldots, N\}$ 均成立。将 x_i 用 y_i 表示，意味着 $y_1 = x_1, y_2 - y_1 = x_2 \ldots\ldots, y_N - y_{N-1} = x_N$；由于 (43)，这意味着 $x = Ty$。□

C Dirac 脉冲的脉冲序列量化证明

我们回顾 Moser 和 Lunglmayr 的证明 [2023]

定理 *5*（重置取模 *LIF* 神经元的$\|\cdot\|_{A,\alpha}$-量化）给定一个采用取模重置的 *LIF* 神经元模型，其 *LIF* 参数为 $\vartheta > 0$ 和 $\alpha \in [0, \infty]$，脉冲序列为 $\eta \in \mathbb{S}$，脉冲幅度为 $a_i \in \mathbb{R}$。那么，$LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta)$ 是 η 的 ϑ-量化，即所得脉冲幅度是 ϑ 的整数倍，且量化误差由 *(14)* 界定；因此 $LIF_{\vartheta,\alpha}(LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta) - \eta) = \emptyset$ 和 $LIF_{\vartheta,\alpha}(LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta)) = LIF_{\vartheta,\alpha}(\eta)$。

证明。首先，我们引入以下运算 $\oplus$。该运算满足结合律；若将脉冲序列 $\eta = \sum_i a_i \delta_{t_i}$ 中相邻的元素 a_i 聚合起来，则可以像通常的加法一样处理：

$$a_i \oplus a_{i+1} := e^{-\alpha(t_{i+1} - t_i)} a_i + a_{i+1}. \tag{44}$$

这样，在汇总卷积时，我们可以使用更简洁的记法，例如，

$$a_i \oplus \ldots \oplus a_j = \sum_{k=i}^{j} e^{-\alpha(t_j - t_k)} a_k.$$

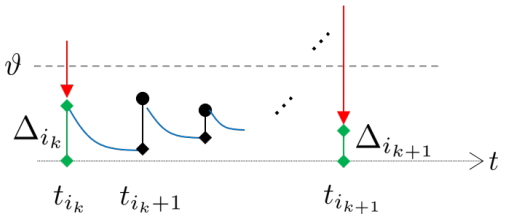

图 16：公式（46）的示意图。红色箭头表示重置取模。

对于离散版本，我们重新定义 $a_{i_k} \oplus a_{i_{k+1}} :=$ $\beta^{(i_{k+1}-i_k)}a_{i_k} + a_{i_{k+1}}$，若 i_k 和 i_{k+1} 分别表示时间 i_k、i_{k+1}处的相邻脉冲。此外，我们记 $q[z] := \mathrm{sgn}(z)$ $\lfloor |z| \rfloor$，即由整数截断得到的普通量化，例如 $q[1.8] = 1$、$q[-1.8] = -1$，其中 $\lfloor |z| \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \ n \le |z|\}$。确定记号后，我们来考察一个脉冲序列 $\eta = \sum_j a_i \delta_{t_i}$。不失一般性，我们可以假设 $\vartheta = 1$。我们需要证明 ‖漏积分发放$_{1,\ \alpha}(\eta) - \eta\|_{A,\ \alpha} < 1$，这等价于离散条件 $\forall n : \max_n |\sum_{i=1}^n \hat{a}_i| < 1$，其中 η–漏积分发放$_{1,\ \alpha}(\eta) = \sum_i \hat{a}_i \delta_{t_i}$。令 $\hat{s}_k := \hat{a}_0 \oplus \cdots \oplus \hat{a}_k$。我们需要证明 $\max_k |\hat{s}_k| < 1$。证明基于归纳法，并将问题归结为通过截断进行标准量化。

假设在时间 $t_{i_{k-1}}$，经过取模重置 重新初始化后，我们得到余量 $\Delta_{i_{k-1}}$ 作为膜电位，它是 $t_{i_{k-1}}$之后积分的起点。注意，

$$\mathrm{LIF}_{1,\alpha}(\eta)|_{t=t_k} = q(\Delta_{i_{k-1}} \oplus a_{i_{k-1}+1} \cdots \oplus a_{i_k}) \tag{45}$$

然后，如图 16 所示，下一个触发事件 t_{i_k} 处的余量 Δ_{i_k} 由下式给出：

$$\Delta_{i_k} = \Delta_{i_{k-1}} \oplus a_{i_{k-1}+1} \oplus \ldots \oplus a_{i_k} - q[\Delta_{i_{k-1}} \oplus \ldots \oplus a_{i_k}]. \tag{46}$$

注意，由于漏积分发放的阈值条件，我们有

$$|\Delta_{i_k} \oplus a_{i_k+1} \oplus \ldots \oplus a_j| < 1 \tag{47}$$

对于 $j \in \{i_k + 1, \ldots, i_{k+1} - 1\}$。对于 $\oplus$ 项求和 $\hat{s}_{i_k}$，我们有

$$\hat{s}_{i_{k+1}} = \hat{s}_{i_k} \oplus a_{i_k+1} \cdots a_{i_{k+1}-1} \oplus \left(a_{i_{k+1}} - q[\Delta_{i_k} \oplus a_{i_k+1} \oplus \ldots \oplus a_{i_{k+1}}]\right). \tag{48}$$

注意，$\hat{s}_0 = \Delta_{i_0} = a_0 - q[a_0]$，接下来通过归纳法，我们假设直到索引 k 均有

$$\hat{s}_{i_k} = \Delta_{i_k}. \tag{49}$$

现在，利用式 (49)，式 (48) 给出

$$\begin{aligned} \hat{s}_{i_{k+1}} &= \Delta_{i_k} \oplus a_{i_k+1} \oplus \ldots \oplus a_{i_{k+1}-1} \oplus \left(a_{i_{k+1}} - q[\Delta_{i_k} \oplus a_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus a_{i_{k+1}}]\right) \\ &= \Delta_{i_k} \oplus a_{i_k+1} \oplus \ldots \oplus a_{i_{k+1}-1} \oplus a_{i_{k+1}} - q[\Delta_{i_k} \oplus a_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus a_{i_{k+1}}], \\ &= \Delta_{i_{k+1}} \end{aligned} \tag{50}$$

证明 (49)，结合 (47) 即完成证明，表明对所有 k，$|\hat{s}_k| < 1$。

□

D 脉冲序列分解示例

算法 2 总结了定理 2 证明中的这一方法，图 17 展示了一个示例。

算法 2脉冲序列分解**第 0 步**：初始化：$\eta_0 := \eta, r = 0$;**第 1 步**：上升和下降区间：根据公式 (25)，基于结果游走中顶部和底部峰值的位置 m_k 和 m_k，将时间域划分为上升区间 J_k 和下降区间 J_k，分别对应公式 (22) 和 (23)。**第 2 步**：单位差异量 Delta：根据 (24)、(26)、(27)、(28) 和 (29) 定义 $\Delta\eta_{r+1}$。**第 3 步：**减法：$\eta_{r+1} := \eta_r - \Delta\eta_{r+1}$;**第 4 步：**重复**1**、**2** 和**3** 步，直到 $r = \|\eta\|_{A,\ 0}$，以得到 $\eta = \sum_{k=1}^r \Delta\eta_k$。

E 滞后误差界，推论 2

由拟等距性质 (17) 可得

$$\|\mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta(\cdot - \Delta t)) - \mathrm{LIF}_{\vartheta,\alpha}(\eta)\|_{A,\alpha} \ \le \ \|\eta(\cdot - \Delta t) - \eta\|_{A,\alpha} + 2\vartheta. \tag{51}$$

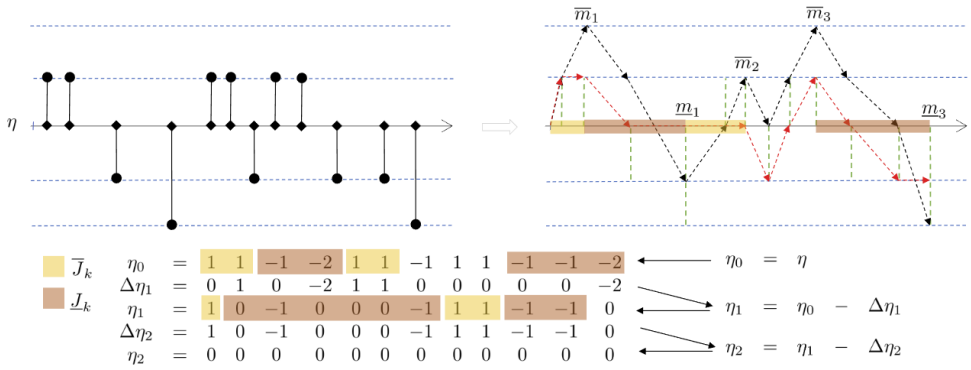

图 17：根据算法 2，将脉冲序列 η with $\|\eta\|_{A,\,0} = 2$ 分解为和 $\eta = \sum_{k=1,\,2} \Delta\eta_k$ with $\|\Delta\eta_k\|_{A,\,0} = 1$的示例。左上：脉冲序列 η；右上：第一步的示意图，展示由 (22) 和 (23) 得到的游走及其顶部和底部峰值。红色虚线表示减去 $\Delta\eta_1$ 后得到的游走。下方：根据 (25) 递归执行的步骤，其中突出显示了上升和下降区间。

由于对于 $\Delta t \approx 0$，$e^{\alpha\Delta t} = 1 + \alpha\Delta t + O(\Delta t^2)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\eta(\cdot - \Delta t) - \eta\|_{A,\alpha} &= \max_i \left| \sum_{j=1}^{i-1} \left(a_j e^{-\alpha(t_i - t_j)} - a_j e^{-\alpha(t_i - t_j - \Delta t)} \right) + a_i \right| \\
&= \max_n \left| \sum_{j=1}^{n-1} a_j e^{-\alpha(t_n - t_j)} \left(1 - e^{\alpha\Delta t} \right) + a_n \right| \\
&= \max_i \left| (-\alpha\Delta t) \sum_{j=1}^{i-1} a_j e^{-\alpha(t_i - t_j)} + a_n \right| + O(\|\eta\|_{A,\alpha}\Delta t) \\
&\leq \alpha \left(\|\eta\|_{A,\alpha} + \max_i |a_i| \right) \Delta t + \max_i |a_i|,
\end{aligned} \tag{52}$$

结合 (51)，这就证明了 (19)。

F 引理 2 的证明

首先，考察 $\alpha = 0$ 的情形。不失一般性，我们可以假设 $\vartheta = 1$。给定脉冲序列 η，$\nu \in \mathbb{S}$、$\eta = \sum_i a_i \delta_{t_i}$ 和 $\nu = \sum_i b_i \delta_{t_i}$，并假设 $\|\nu\|_{A,\,0} \leq 1$。将相对于输入脉冲序列 η 触发脉冲前一刻膜电位记为 $p_\eta(t_i^-)$。

间接地，假设将 ν 加到 η 后产生了三个极性相同（均为负或均为正）的连续脉冲。不失一般性，我们可以假设这三个脉冲事件的极性为负。将这些时间点记为 $t_{s_1} < t_{s_2} < t_{s_3}$，并考虑时间点 $t_{s_0} \leq t_{s_1}$：在该时刻，ν 首次促成了发生于 t_{s_1} 的负脉冲事件。那么，t_{s_0} 之后的第一个脉冲事件发生在 t_{s_1}，其特征为

$$p_\eta(s_1) - \sum_{i=s_0}^{s_1} b_i < [p_\eta(s_1)] - 1. \tag{53}$$

在 t_{s_1} 处发生脉冲事件后，随即进行由 取模重置 引起的重新初始化，即将膜电位增量重置为 1，从而在原始膜电位 $p_\eta(s_1)$ 上加上 $(1 - \sum_{i=s_0}^{s_1} b_i)$。因此，对于在 t_{s_2} 处发生的第二个后续脉冲，我们得到放电条件

$$p_\eta(s_2) + (1 - \sum_{i=s_0}^{s_1} b_i) - \sum_{i>s_1}^{s_2} b_i < [p_\eta(s_2)] - 1, \tag{54}$$

因此，

$$p_\eta(s_2) - [p_\eta(s_2)] + 2 < \sum_{i=s_0}^{s_2} b_i. \tag{55}$$

类似地，我们得到第三次脉冲事件的判定条件

$$p_\eta(s_3) - [p_\eta(s_3)] + 3 < \sum_{i=s_0}^{s_3} b_i. \tag{56}$$

由于 $\|\nu\|_{A,0} \le 1$，即 $|\sum_{i=1}^{k} b_i| \le 1$ 对所有 k 均成立，因此可得 $|\sum_{i=k_1}^{k_2} b_i| = |\sum_{i=1}^{k_2} b_i - \sum_{i=1}^{k_1-1} b_i| \le 2$。将其应用于 (56) 得到矛盾

$$p_\eta(s_3) - [p_\eta(s_3)] + 3 < \sum_{i=s_0}^{s_3} b_i \le 2, \tag{57}$$

也就是说，$-1 < p_\eta(s_3) - [p_\eta(s_3)] \le -1$。因此，加入 ν 后，随后触发的额外脉冲最多有 2 个。

采用相同的推理方式，现结合公式 (54)，可知新增脉冲首次出现时只能是单个事件；如果发生该事件，则其后必须跟随一个极性不同的脉冲事件。综上，这意味着$\|$漏积分发放$_{1,0}(\eta+\nu)\|_{A,0}$ − 漏积分发放$_{1,0}(\eta)\|_{A,0} \le 1$。

第二种情况 $\alpha = \infty$，即 $\|\nu\|_{A,\ \infty} = \max_i |b_i| \le 1$，归结为整数截断的标准量化，即证明 $\max_i |[a_i + b_i] - [a_i]| \le 1$，这可由以下事实得出：对于正的 a_i，$-1 \le a_i - [a_i] + b_i < 2$；对于负的 a_i，$-2 < a_i - [a_i] + b_i \le 1$。

参考文献

Wulfram Gerstner、Werner M. Kistler、Richard Naud 和 Liam Paninski。《神经元动力学：从单个神经元到网络与认知模型》。剑桥大学出版社，美国，2014年。ISBN 1107635195。Amirhossein Tavanaei、Masoud Ghodrati、Saeed Reza Kheradpisheh、Timothée Masquelier 和 Anthony Maida。脉冲神经网络中的深度学习。《神经网络》，111:47–63，2019年。ISSN 0893-6080。doi:https://doi.org/10.1016/j.neunet.2018.12.002。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0893608018303332。João D. Nunes、Marcelo Carvalho、Diogo Carneiro 和 Jaime S. Cardoso。脉冲神经网络：综述。《*IEEE Access*》，10:60738–60764，2022年。doi:10.1109/ACCESS.2022.3179968。Wenzhe Guo、Mohammed E. Fouda、Ahmed M. Eltawil 和 Khaled Nabil Salama。脉冲神经网络中的神经编码：面向稳健神经形态系统的比较研究。《神经科学前沿》，15，2021年。ISSN 1662- 453X。doi:10.3389/fnins.2021.638474。URL https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnins.2021.638474。Marek Miskowicz。增量发送概念：一种基于事件的数据报告策略。《传感器》，6(1):49–63，2006年。ISSN 1424-8220。doi:10.3390/s6010049。URL http://www.mdpi.com/1424-8220/6/1/49/。Shih-Chii Liu、Tobi Delbruck、Adrian Indiveri、Giacomo abd Whatley 和 Rodney Douglas。《基于事件的神经形态系统》。John Wiley & Sons, Ltd，2014年。ISBN 9780470018491。doi:10.1002/9781118927601。Amirreza Yousefzadeh 和 Manolis Sifalakis。增量激活层利用时间稀疏性，实现高效的嵌入式视频处理。载于*2022*年国际联合神经网络会议（*IJCNN*），第 01–10 页，2022年。doi:10.1109/IJCNN55064.2022.9892578。Arnon Amir、Brian Taba、David Berg、Timothy Melano、Jeffrey McKinstry、Carmelo Di Nolfo、Tapan Nayak、Alexander Andreopoulos、Guillaume Garreau、Marcela Mendoza、Jeff Kusnitz、Michael Debole、Steve Esser、Tobi Delbruck、Myron Flickner 和 Dharmendra Modha。一种低功耗、完全基于事件的手势识别系统。载于*2017*年*IEEE*计算机视觉与模式识别会议（*CVPR*），第 7388–7397 页，2017年。doi:10.1109/CVPR.2017.781。Jibin Wu、Yansong Chua、Malu Zhang、Haizhou Li 和 Kay Chen Tan。一种用于稳健声音分类的脉冲神经网络框架。《神经科学前沿》，12，2018年。ISSN 1662-453X。doi:10.3389/fnins.2018.00836。URL https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnins.2018.00836。Jibin Wu、Emre Y?lmaz、Malu Zhang、Haizhou Li 和 Kay Chen Tan。用于大词汇量自动语音识别的深度脉冲神经网络。《神经科学前沿》，14，2020年。ISSN 1662-453X。doi:10.3389/fnins.2020.00199。URL https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnins.2020.00199。

Amr M. Hassan、Aya F. Khalaf、Khaled S. Sayed、Hai Helen Li 和 Yiran Chen。使用忆阻器神经形态计算系统进行实时心律失常分类。*2018*年*IEEE*医学与生物学工程学会第*40*届年度国际会议（*EMBC*），第 2567–2570 页，2018年。R. Kabilan 和 N. Muthukumaran。使用脉冲神经网络进行图像识别的神经形态模型。载于*2021*年第六届国际发明计算技术会议（*ICICT*），第 720–725 页，2021年。doi:10.1109/ICICT50816.2021.9358663。Kashu Yamazaki、Viet-Khoa Vo-Ho、Darshan Bulsara 和 Ngan Le。脉冲神经网络及其应用：综述。《脑科学》，12(7):863，2022年6月。doi:10.3390/brainsci12070863。URL https://dx.doi.org/10. 3390/brainsci12070863。Helin Yang、Kwok-Yan Lam、Liang Xiao、Zehui Xiong、Hao Hu、Dusit Niyato 和 H. Vincent Poor。面向无线边缘人工智能的领先联邦神经形态学习。《自然·通讯》，13(1):1–12，2022年12月。doi:10.1038/s41467-022-32020-。URL https://ideas.repec.org/a/nat/natcom/v13y2022i1d10.1038_s41467-022-32020-w.html。Julie Dethier、Paul Nuyujukian、Stephen I Ryu、Krishna V Shenoy 和 Kwabena Boahen。面向脑机接口的实时脉冲神经网络解码器的设计与验证。《神经工程学杂志》，10(3):036008，2013年4月。doi:10.1088/1741-2560/10/3/036008。URL https://dx.doi.org/10.1088/1741-2560/10/3/036008。Zhan Gege、Zuoting Song、Tao Fang、Yuan Zhang、Song Le、Xueze Zhang、Shouyan Wang、Yifang Lin、Jie Jia、Lihua Zhang 和 Xiaoyang Kang。脉冲神经网络在脑机接口中的应用。第 1–6 页，2021年2月。doi:10.1109/BCI51272.2021.9385361。Lei Deng、Yujie Wu、Xing Hu、Ling Liang、Yufei Ding、Guoqi Li、Guangshe Zhao、Peng Li 和 Yuan Xie。重新思考脉冲神经网络与人工神经网络之间的性能比较。《神经网络》，121:294–307，2020年。ISSN 0893-6080。doi:https://doi.org/10.1016/j.neunet.2019.09.005。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0893608019302667。Maxence Bouvier、Alexandre Valentian、Thomas Mesquida、Francois Rummens、Marina Reyboz、Elisa Vianello 和 Edith Beigné。脉冲神经网络的硬件实现及其挑战。《*ACM*计算系统新兴技术杂志》（*JETC*），15:1 – 35，2019年。Michael V. DeBole、Brian Taba、Arnon Amir、Filipp Akopyan、Alexander Andreopoulos、William P. Risk、Jeff Kusnitz、Carlos Ortega Otero、Tapan K. Nayak、Rathinakumar Appuswamy、Peter J. Carlson、Andrew S. Cassidy、Pallab Datta、Steven K. Esser、Guillaume Garreau、Kevin L. Holland、Scott Lekuch、Michael Mastro、Jeffrey L. McKinstry、Carmelo di Nolfo、Brent Paulovicks、Jun Sawada、Kai Schleupen、Benjamin Shaw、Jennifer L. Klamo、Myron D. Flickner、John V. Arthur 和 Dharmendra S. Modha。TrueNorth：十年间从零发展到 6400 万个神经元。《计算机》，52(5):20–29，2019年。doi:10.1109/MC.2019.2903009。URL https://doi.org/10.1109/MC. 2019.2903009。Christoph Ostrau、Christian Klarhorst、Michael Thies 和 Ulrich Rückert。神经形态硬件及其能量消耗的基准测试。《神经科学前沿》，16，2022年。ISSN 1662-453X。doi:10.3389/fnins.2022.873935。URL https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnins.2022.873935。Carlo Michaelis、Andrew B. Lehr、Winfried Oed 和 Christian Tetzlaff。Brian2loihi：使用脉冲神经网络模拟器 brian 模拟神经形态芯片 Loihi。《神经信息学前沿》，16，2022年。ISSN 1662- 5196。doi:10.3389/fninf.2022.1015624。URL https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fninf. 2022.1015624。Bernhard A. Moser 和 Thomas Natschläger。电平交叉采样所诱导事件序列距离度量的稳定性。《*IEEE*信号处理汇刊》，62(8):1987–1999，2014年。doi:10.1109/TSP.2014.2305642。Bernhard Alois Moser。基于阈值的采样作为度量问题的稳定性。载于国际事件驱动控制、通信与信号处理会议（*EBCCSP 2015*），克拉科夫，波兰，*2015*年*6*月*17*日至*19*日，第 1–8 页。IEEE，2015年。doi:10.1109/EBCCSP.2015.7300692。URL https://doi.org/10.1109/EBCCSP.2015.7300692。Bernhard Alois Moser。关于保持积分发放采样的度量性质。载于第二届国际事件驱动控制、通信与信号处理会议（*EBCCSP 2016*），克拉科夫，波兰，*2016*年*6*月*13*日至*15*日，第 1–7 页。IEEE，2016年。doi:10.1109/EBCCSP.2016.7605276。URL https://doi.org/10.1109/EBCCSP.2016.7605276。Bernhard A. Moser。一般条件下从基于阈值的采样中恢复相似性。《*IEEE*信号处理汇刊》，65(17):4645–4654，2017年。doi:10.1109/TSP.2017.2712121。Bernhard A. Moser 和 Michael Lunglmayr。基于阈值的采样的准等距性。《*IEEE*信号处理汇刊》，67(14):3832–3841，2019年。doi:10.1109/TSP.2019.2919415。

Louis Lapicque. 关于将神经电兴奋视为极化的定量研究。*J. Physiol.Pathol.Gen.*，9:620–635，1907。Peter Dayan 和 L. F. Abbott。《神经系统的理论神经科学：计算与数学建模》。《麻省理工学院出版社》，2001。Jason K. Eshraghian、Max Ward、Emre Neftci、Xinxin Wang、Gregor Lenz、Girish Dwivedi、Mohammed Bennamoun、Doo Seok Jeong 和 Wei D. Lu。借鉴深度学习经验训练脉冲神经网络，2021。URL https://arxiv.org/abs/2109.12894。Sander M. Bohte、Joost N. Kok 和 Johannes A. La Poutré。Spikeprop：脉冲神经元网络的反向传播。载于*ESANN*，第419–424页，2000。Steven R. Finch。我们可能随机游走多远？，2018。URL https://arxiv.org/abs/1802.04615。N. Jain 和 S. Orey。关于随机游走的取值范围。*Israel J. Math.*，6:373–380，1968。Bernhard A. Moser。用其 n 维单位球对 Weyl 差异范数进行几何刻画。*Discret.Comput.Geom.*，48(4):793–806，2012。doi:10.1007/s00454-012-9454-0。URL https://doi.org/10. 1007/s00454-012-9454-0。B. Chazelle。《差异方法：随机性与复杂性》。剑桥大学出版社，2000。Bernhard A. Moser。一种基于 Hermann Weyl 差异度的图像和体数据相似性度量。*IEEETrans. Pattern Anal. Mach. Intell.*，33(11):2321–2329，2011。doi:10.1109/TPAMI.2009.50。URL https: //doi.org/10.1109/TPAMI.2009.50。Hermnann Weyl。关于模一数的均匀分布。*Math. Ann.*，77:313–352，1916。Andrzej Alexiewicz。定义在 Denjoy 可积函数上的线性泛函。*Colloq. Math.*，1:289–293，1948。Bernhard A. Moser 和 Michael Lunglmayr。脉冲神经网络中的量化。投稿至 *ESANN 2023*，2023。Douglas S. Kurtz 和 Charles W. Swartz。积分理论：黎曼、勒贝格、亨斯托克–库兹韦尔和麦克沙恩积分。2004。Bernhard Moser、Gernot Stübl 和 Jean-Luc Bouchot。关于相似性度量的一种非单调效应。载于 Marcello Pelillo 和 Edwin R. Hancock 编，《基于相似性的模式识别——第一届国际研讨会，SIMBAD 2011，意大利威尼斯，2011年9月28日至30日，会议论文集》，《计算机科学讲义》第7005卷，第46–60页。Springer，2011。doi:10.1007/978-3-642-24471-1_4。URL https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-24471-1_4。Eero Satuvuori 和 Thomas Kreuz。哪种脉冲序列距离最适合区分放电率编码和时间编码？*Journal of Neuroscience Methods*，299:22–33，2018。ISSN 0165- 0270。doi:https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2018.02.009。URL https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/S0165027018300372。Duho Sihn 和 Sung-Phil Kim。一种基于地球搬运者 ́距离、对放电率变化具有鲁棒性的脉冲序列距离。*Frontiers in Computational Neuroscience*，13，2019。ISSN 1662-5188。doi:10.3389/fncom.2019.00082。URL https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fncom.2019.00082。Jonathan D Victor。脉冲序列度量。*Current Opinion in Neurobiology*，15(5):585–592，2005。ISSN 0959-4388。doi:https://doi.org/10.1016/j.conb.2005.08.002。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0959438805001236。神经元和胶质细胞生物学／新技术。Roman Vershynin。《高维概率：数据科学中的导论与应用》。《剑桥统计与概率数学丛书》第47卷。剑桥大学出版社。ISBN 978-1-108-41519- 4。