使用 GRAND 将错误检测升级为预测

Kevin Galligan汉密尔顿研究所 梅努斯大学，爱尔兰 kevin.galligan.2020@mumail.ie

Peihong Yuan 和 Muriel M´edard电子研究实验室 麻省理工学院 剑桥，美国{phyuan,medard}@mit.edu

Ken R.Duffy电子与计算机工程系和数学系 东北大学 波士顿，美国 k.duffy@northeastern.edu

arXiv:2305.05777v1 [cs.IT] 9 May 2023

摘要——随机加性噪声译码（GRAND）是一类硬判决和软判决错误检测纠错译码算法，能够对任意长度的中等冗余码进行准确译码。本文提出一种方法，使任何软输入GRAND算法都能以软输出的形式给出准确的后验估计，估计译码正确的似然；对于列表译码，则估计正确译码属于该列表的似然。该方法仅需在现有译码过程中增加可忽略不计的计算量和内存开销。输出结果可用于调整任意中等冗余码（包括循环冗余校验码）的未检出错误与块错误之间的平衡。

索引词——GRAND、软输入、软输出

I. 引言

对于任何信道编码方案，如果纠错译码器能够以置信度度量的形式输出解码块正确与否的软输出，将会很有帮助。软输出可用于做出控制决策，例如发送重传请求，或将块标记为擦除，以便由纠删码纠正 [1]。一种常见的建立二元译码置信度度量的方法，是在传输消息后附加循环冗余校验（CRC） [2, 3] ，再进行纠错编码；解码后可利用该校验来评估一致性。块长度较大时，添加 CRC 对码率的影响可以忽略不计。然而，3GPP 5G 等现代通信标准的目标之一是实现超可靠低时延通信（URLLC） [4], , 这要求使用短分组 [5]。为短分组添加 CRC 会显著影响码率，因此，评估译码置信度的替代方案正受到广泛关注，例如 [3]。

在关于错误指数的开创性研究中，Forney [6] 提出了一种近似计算解码块正确概率的方法。Forney 的方法必须使用列表译码器，这大大限制了其适用性；我们将证明，在噪声条件严峻的信道中，该方法给出的估计并不准确。而这恰恰是我们主要关注的区域，因为其输出可用于触发或抑制重传请求；不过，该方法的潜在价值仍值得进一步研究，例如 [7]。随着 CRC 辅助极化码（CA-Polar 码）近期被纳入通信标准 [4], , Forney 近似重新受到关注 [3] ，并成为一种流行的译码方法

CA-Polar码采用 CRC辅助连续消除列表（CA-SCL）译码，在译码过程中会生成候选码字列表，例如 [8–11]。对于卷积码或网格码，可修改维特比算法 [12] ，使其在序列层面产生软输出 [13], ；这种方法已用于具有多层译码的编码方案 [14] ，也用于提供重复传输请求的依据 [15][13]。我们提出的方法可直接应用于任何中等冗余码，无需进行列表译码即可评估，而且在噪声信道条件下仍能保持准确的估计。

GRAND 是一种近期开发的码无关译码算法系列，可针对硬判决 [16–18] 和软检测 [19–23] 信道实现最大似然译码。GRAND 算法通过依据信道特性和软信息，按照似然从高到低的顺序，依次从接收信号中逆向消除假定的噪声效应。通过逆向消除某种噪声效应而得到的第一个码字，即为最大似然译码结果。由于这一过程不依赖于码本结构，GRAND 能够对任何中等冗余码进行译码。针对硬判决和软检测场景的高效硬件实现 [24, 25] 及综合实现 [26–29] 已转化为流片电路，验证了 GRAND 译码策略的灵活性和能效。

我们为 GRAND 开发的软输出度量，是对译码正确的后验概率，或在列表译码情况下正确码字位于列表中的概率，所作出的极其准确的估计。我们针对均匀随机码本推导了这些概率，并通过实验证明，所得公式对于结构化码本仍能提供准确的软输出。只要有软输入，这些公式就可以与 GRAND 系列中的任何算法配合使用。计算软输出只需知道码的维度，并在 GRAND 正常运行期间累积每次噪声效应查询的概率，因此该度量的计算不会增加译码器的算法复杂度或存储需求。从实际应用角度看，这种方法能够为任意长度、任意结构的中等冗余码进行单码字译码或列表译码提供准确的软输出。

II. 背景

首先定义本文其余部分所用的符号。设 $\mathcal{C}$为一个码本，其中包含 2^k 个二进制码字，每个码字的长度为

n 比特。设 $X^n : \Omega \to \mathcal{C}$ 为从码本中均匀随机抽取的码字，设 $N^n : \Omega \to \{0,1\}^n$表示信道在传输过程中对该码字造成的二进制噪声效应；也就是说， N^n 编码的是解调接收序列与传输码字之间的二进制差异，而非可能连续的信道噪声。因此， $Y^n = X^n \oplus N^n$ 是解调信道输出，其中 $\oplus$ 是逐元素二进制加法算子。设 $R^n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 表示软信道输出。小写字母表示随机变量的实现值，但 z^n 除外，它是 N^n的实现值。

所有 GRAND 算法都通过依次尝试一系列噪声效应猜测 $z^{n,1}, z^{n,2}, \ldots \in \{0,1\}^n$来运行，其顺序由信道统计特性（例如 [18], ）或软输入（例如 [21], ）决定，直到找到一个满足 $\hat{x}_q^n = y^n \ominus z^{n,q} \in \mathcal{C}$ 的猜测 $z^{n,q}$，其中 $\ominus$ 用于抵消噪声对信道输出的影响。如果这些猜测按似然依信道相关的降序排列，那么 $z^{n,q}$ 是 N^n 的最大似然估计，而 $\hat{x}_q^n$ 是传输码字 X^n的最大似然估计。由于这一猜测过程不依赖码本结构，只要有检查码本成员资格的方法，GRAND 就能译码任何中等冗余码。对于具有 $(n-k) \times n$ 校验矩阵 H 的线性分组码，当 $H\hat{x}_q^n = 0^n$ [1]时，$\hat{x}_q^n$ 是一个码字；其中 $\hat{x}_q^n$ 被视为列向量，0^n 为零向量。要生成大小为 L 的译码列表，GRAND 会持续运行，直到找到 L 个码字[22, 30]。

GRAND 的基本机制是两个随机变量之间的竞赛：直到识别出真实码字所需的猜测次数，以及直到识别出错误码字所需的猜测次数。哪个过程先完成，便决定 GRAND 给出的译码是否正确。猜测工作量函数 G: $\{0,1\}^n \to \{1,\ldots,2^n\}$ 在软检测设置下取决于软输入，它将噪声效应序列映射到该序列在 GRAND 猜测顺序中的位置，因此 $G(z^{n,i}) = i$。因此， $G(N^n)$ 是一个随机变量，表示直到识别出传输码字所需的猜测次数。若 $W_{(i)} : \Omega \to \{1,\ldots,2^n-1\}$是直到识别出第 i 个错误码字所需的猜测次数，且不计识别出正确码字的查询，则当 $G(N^n) \leq W_{(1)}$ 时，GRAND 返回正确译码；当 $G(N^n) \leq W_{(L)}$ 时，GRAND 返回一个长度为 L 且包含正确码字的列表。对这两个过程之间竞赛的分析，导出了本文中的软输出。

Forney 关于错误指数的研究 [6] 得出了概率软输出的近似方法。给定信道输出r^n 和最大似然译码输出 $c^{n,*} \in \mathcal{C}$，译码正确的概率为

$$P(X^n = c^{n,*}|R^n = r^n) = \frac{P(R^n = r^n|X^n = c^{n,*})}{\sum_{c^n \in \mathcal{C}} P(R^n = r^n|X^n = c^n)}.$$

根据这个公式，Forney 推导出了一个最优阈值，用于判断是否应将某次译码标记为擦除。对于实际规模的码本而言，计算公式中的总和并不可行，因此 Forney 建议根据概率排名第二高的码字 $c^{n,**} \in \mathcal{C}$，将正确概率近似为

$$\frac{P(R^n = r^n|X^n = c^{n,*})}{P(R^n = r^n|X^n = c^{n,*}) + P(R^n = r^n|X^n = c^{n,**})}, \quad (1)$$

这必然不小于 $1/2$。更一般地，给定一个译码列表 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$，分母可替换为 $\sum_{c^n \in \mathcal{L}} P(R^n = r^n|X^n = c^n)$，从而得到一个不小于 $1/|\mathcal{L}|$ 的正确概率估计。将似然最高的码字纳入译码列表，可以得到最准确的近似，因为它们的似然主导了总和。这种方法的一个缺点是需要码字列表，而大多数译码器都不提供该列表。因此，最近有人提出了一种方法，用于估计给定第一个码字时似然第二高的码字 [31]。此外，还有人提出了多种用于作出擦除判决的替代方案，相关总结见 [32]。

III. GRAND 软输出

在本节中，我们始终假设码本 $\mathcal{C}$ 由从 $\{0,1\}^n$ 中均匀随机抽取的 2^k 个码字组成，不过这一推导也可推广到更高阶符号。对于 GRAND 算法，我们首先推导精确表达式，随后给出易于计算的近似，用以计算传输码字不在译码列表中的概率，并由此推得单码字 GRAND 输出错误的概率。在第四节中，我们将展示，这些公式能为结构化码本提供出色的估计。

定理 1（均匀随机码本下错误 GRAND 列表译码的后验似然）。设 $G(N^n)$ 表示识别出噪声效应序列 N^n 前所进行的码本查询次数。令 W_1、.....、W_{2^k-1} 从 $\{1,\ldots,2^n-1\}$ 中不放回地均匀随机选取，并将其按秩排序的版本定义为 $W_{(1)} < \cdots < W_{(2^k-1)}$。不计入真实噪声效应时， $W_{(i)}$ 对应于在均匀随机构造的码本中，第 i 个错误译码在猜测顺序中的位置。对每个 $i \leq j \in \{1,\ldots,2^k-1\}$，定义部分向量 $W^{j}{}_{(i)} = (W_{(i)}, \ldots, W_{(j)})$

假设 GRAND 译码器在查询序号 $q_1 < \ldots < q_L$ 处识别出一组 $L \geq 1$ 码本。为每个 $i \leq j \in \{1,\ldots,2^k-1\}$ 定义相应的部分向量 $q_i^j = (q_i, \ldots, q_j)$，并

$$q_1^{L,\{i\}} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1} - 1, \ldots, q_L - 1), \quad (2)$$

该向量为向量 q_1^L，但省略了分量 q_i，并将从 q_{i+1} 起的所有分量都减去 1。定义

$$P(A) = P(G(N^n) > q_L) P(W_{(1)}^L = q_1^L),$$

这与传输码字不在列表中有关，并且，对于每个 $i \in \{1,\ldots,L-1\}$,

$$P(B_i) = P(G(N^n) = q_i) P(W_{(1)}^{L-1} = q_1^{L,\{i\}}),$$

这与传输码字是列表中的第 i 个元素有关，并且

$$P(B_L) = P(G(N^n) = q_L)P(W_{(1)}^{L-1} = q_1^{L-1}, W_{(L)} \geq q_L),$$

这对应于传输码字是列表中最后一个元素的情形。因此，正确译码不在列表中的概率为

$$\frac{P(A)}{P(A) + \sum_{i=1}^{L} P(B_i)}. \tag{3}$$

证明。对于 $q \in \{1, \ldots, 2^n\}$，定义 $W_{(i),q} = W_{(i)} + 1_{\{W_{(i)} \geq q\}}$，这样任何大于或等于 q 的 $W_{(i)}$ 都会加一。注意，$W_{(i),G(N^n)}$ 在给定 $G(N^n)$ 的值时，表示随机构造的码本中按猜测顺序排列的错误码字的位置；特别地，$W_{(i),G(N^n)}$ 对应于在给定 $G(N^n)$ 的情况下，找到第 i 个错误码字之前所需的查询次数。

我们将译码不在列表中的事件表示为

$$A = \left\{ G(N^n) > q_L, W_{(1)}^L = q_1^L \right\}$$

将译码作为列表中第 i 个元素的事件表示为

$$B_i = \left\{ W_{(1)}^{i-1} = q_1^{i-1}, G(N^n) = q_i, \right.$$
$$\left. W_{(i)}^{L-1} + 1 = q_{i+1}^L, W_{(L)} \geq q_L \right\}$$

其中，对于 $i = \{1, \ldots, L-1\}$，最后一个条件自动满足，但对于 $i = L$ 则不满足。在已找到 L 个元素的条件下，GRAND 解码不属于列表中任何元素的条件概率为

$$P\left(A \middle| A \bigcup_{i=1}^{L} B_i\right) = P(A) \Big/ P\left(A \bigcup_{i=1}^{L} B_i\right). \tag{4}$$

由于所有 A 和 B_i 事件互不相交，要计算式 (4)，只需化简 $P(A)$ 和 $P(B_i)$，以便 $i \in \{1, \ldots, L\}$评估传输码字不在列表中的后验似然。

考虑分子，

$$\begin{aligned} P(A) &= P(G(N^n) > q_L, W_{(1)}^L = q_1^L) \\ &= P(G(N^n) > q_L) P(W_{(1)}^L = q_1^L), \end{aligned}$$

其中我们利用了这样一个事实：根据构造，$G(N^n)$ 与 $W_{(1)}^L$ 相互独立。考虑分母时，我们只需关注 $P(B_i)$ 中与在第 q_i 次查询时识别出正确码本相对应的项，对此有

$$\begin{aligned} P(B_i) =& P(G(N^n) = q_i, \\ & W_{(1)}^{i-1} = q_1^{i-1}, W_{(i)}^{L-1} + 1 = q_{i+1}^L, W_{(L)} \geq q_L) \\ =& P(G(N^n) = q_i, W_{(1)}^{L-1} = q_1^{L,\{i\}}, W_{(L)} \geq q_L) \\ =& P(G(N^n) = q_i) P(W_{(1)}^{L-1} = q_1^{L,\{i\}}, W_{(L)} \geq q_L), \end{aligned}$$

其中，我们在式（2）中使用了 $q^{L,\{i\}}_{,1}$ 的定义以及独立性。因此，在式（4）中未找到正确答案的条件概率由式（3）给出。 □

对于列表大小 $L = 1$，式（3）中表示译码错误的后验似然的公式可简洁地表述如下推论。

推论1（均匀随机码本下错误 GRAND 解码的后验似然）。已知在第 q 次查询时识别出一个码字，GRAND 解码错误的条件概率为

$$\frac{P(G(N^n) > q) P(W_{(1)} = q)}{P(G(N^n) = q) P(W_{(1)} \geq q) + P(G(N^n) > q) P(W_{(1)} = q)}.$$

其中，$W_{(1)}$ 的分布与从 $\{1, \ldots, 2^n - 1\}$ 中不放回地均匀随机选取 $2^k - 1$ 个数后得到的最小值相同。

为了计算定理 1 中错误解码的后验概率，我们需要评估或近似：1) $P(G(N^n) = q)$ 和 $P(G(N^n) \leq q)$；以及 2) $P(W_{(1)}^L = q_1^L)$ 和 $P(W^{L-1}{}_{(1)} = q_1^{L-1}, W_{(L)} \geq q_L)$。在 GRAND 算法执行期间，可以通过在每次进行噪声效应查询时计算其似然，$P(G(N^n) = q) = P(N^n = z^n, q)$，并保留一个累计和，$P(G(N^n) \leq q) = \sum_{j=1}^{q} P(N^n = z^n, j)$，来精确评估 1)。对于 2)，可以采用几何近似，其渐近精度可通过 [16][定理 2] 中描述的方法加以验证，从而分别得到以下关于列表译码和单码字译码的推论。

推论 2（均匀随机码本下 GRAND 列表解码出错的后验似然近似）。假设每个 $W_{(i)}$ given $W_{(i-1)}$ 服从成功概率为 $2^k - 1/(2^n - 1)$ 的几何分布，则描述列表译码未包含传输码字的后验概率的式 (3) 可近似为

$$\frac{\left(1 - \sum_{j=1}^{q_L} P(N^n = z^{n,j})\right)\left(\frac{2^k - 1}{2^n - 1}\right)}{\sum_{i=1}^{L} P(N^n = z^{n,q_i}) + \left(1 - \sum_{j=1}^{q_L} P(N^n = z^{n,j})\right)\left(\frac{2^k - 1}{2^n - 1}\right)} \tag{5}$$

证明。将几何分布的成功概率定义为 $\phi = (2^k - 1)/(2^n - 1)$。根据推论中的假设，有如下公式

$$P\left(W_{(1)}^L = q_1^L\right) = (1 - \phi)^{q_L - L} \phi^L,$$

对于 $i \in \{1, \ldots, L-1\}$

$$P\left(W_{(1)}^{L-1} = q_1^{L,\{i\}}\right) = (1 - \phi)^{q_L - L} \phi^{L-1},$$

and

$$P\left(W_{(1)}^{L-1} = q_1^{L-1}, W_{(L)} \geq q_L\right) = (1 - \phi)^{q_L - L} \phi^{L-1}.$$

使用这些表达式，化简式（3）可得式（5）。 □

若要获得稍高一些的精度，可以使用以下近似式，该式考虑了被消除的查询，并且用单个码字译码表示最为简洁。

推论 3（均匀随机码本下 GRAND 错误译码的近似后验似然）。如果假设$W_{(1)}$服从几何分布，成功概率为 $(2^k-1)/(2^n-q)$，并且经过 $q-1$ 次失败查询后，描述经过 q_1 次查询找到的译码结果有误的后验概率的式 (3) 可近似为

$$\frac{\left(1-\sum_{j=1}^{q_1} P(N^n=z^{n,j})\right)\frac{2^k-1}{2^n-q_1}}{P(N^n=z^{n,q_1})+\left(1-\sum_{j=1}^{q_1} P(N^n=z^{n,j})\right)\frac{2^k-1}{2^n-q_1}}. \quad (6)$$

证明。在该推论的条件下，

$$P(W_{(1)}=q_1)=\prod_{i=1}^{q_1-1}\left(1-\frac{2^k-1}{2^n-i}\right)\frac{2^k-1}{2^n-q_1},$$

由此，公式 (3) 可简化为公式 (6)。 □

IV. 性能评估

软输出的准确性。利用公式 (5) 和 (6) 中的近似后验概率，我们研究了它们在随机码本和结构化码本中的精度。图 1 展示了将公式 (6) 用于随机线性码 RLC(64,56) 时的准确性。作为对比，图中还展示了列表大小为 $L\in\{2,4\}$ 时的 Forney 近似。我们使用采用二进制相移键控 (BPSK) 调制的加性高斯白噪声 (AWGN) 信道进行了传输仿真。我们采用有序可靠性比特 GRAND (ORBGRAND) [21] 进行软输入解码，为两种软输出方法生成了大小合适的译码列表。

图 1 绘出了根据使用式 (6) 评估的预测块错误概率得到的经验块错误率（BLER）。如果估计准确，曲线应沿着直线 $x=y$，因为预测错误概率应与块错误率相符。由于 RLC 是线性码，码字在猜测顺序中的分布并非完全均匀，但该公式仍能给出准确的估计。相比之下，Forney 近似会显著低估错误概率，在噪声更大的信道中效果更差，且其估计值不高于 $1/L$。此外，GRAND 只需识别出一个可能的译码结果，就能作出预测。

图 2 与图 1 类似，但针对的是列表译码；当传输码字不在译码列表中时，就会发生列表错误。图中将测得的列表块错误率与式 (5) 预测的列表块错误率进行了对比。可以看出，该预测对信道条件、列表大小和码结构均具有稳健性。

用于错误检测。检测错误的一种常见方法是为消息附加一个循环冗余校验码（CRC），如果接收端发现不一致，则声明为擦除。由于 GRAND算法能够译码任何码，GRAND 软输出的一种用途是升级循环冗余校验码，使其同时用于

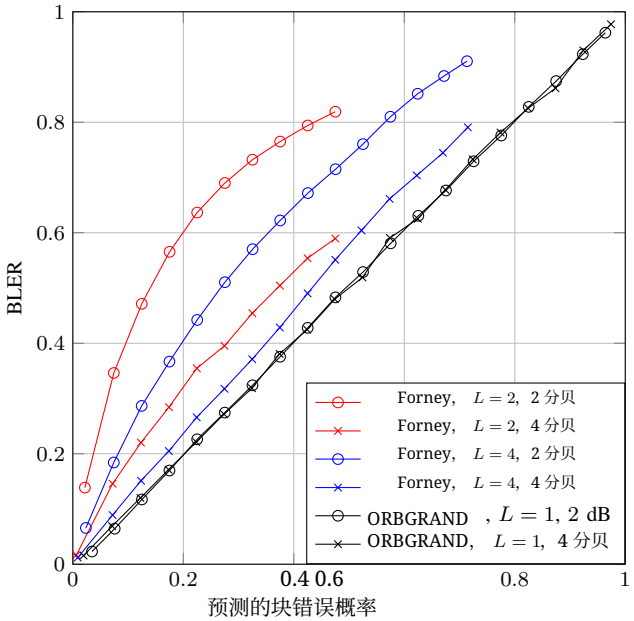

图 1：使用 ORBGRAND 对 RLC(64,57) 进行解码时软输出的准确性。将预测的块错误概率与测得的块错误率进行比较。如果软输出完全准确，那么数据将沿着直线 $x=y$ 分布。

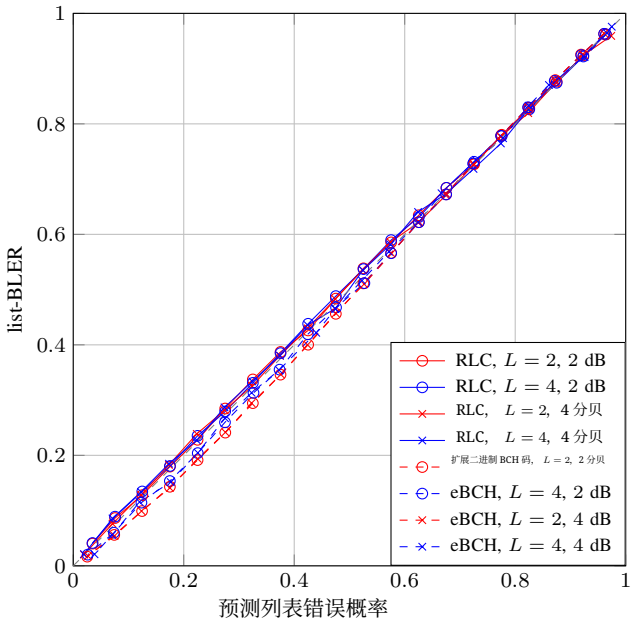

图 2：预测列表错误概率与测得的列表块错误率之间的准确度。参数与图 1 相同，但信道噪声、列表大小 $L\in\{2,4\}$ 以及 RLC(64,57) 和扩展二进制 BCH 码(64,57) 的码类型有所变化。

差错纠正和错误检测：对该块进行译码，但如果译码结果的可靠性过低，则返回擦除。此过程产生的块错误率（BLER）由未检测到的块错误和擦除组成。

图 3 展示了 CRC(64,56) 码的未检测错误率（UER）和块错误率（BLER）。比较了两种差错控制方法：1）检查 CRC 的一致性，若检查失败，则声明发生擦除；2）使用 ORBGRAND 来

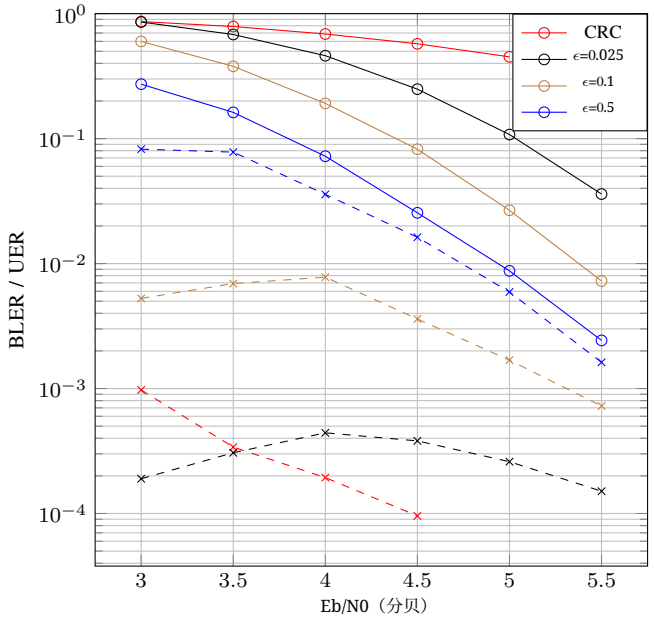

图 3：采用两种差错控制方法的 CRC(64,56)码的未检测错误率（虚线）和块错误率（实线）：1）使用循环冗余校验进行错误检测；2）ORBGRAND 使用循环冗余校验进行差错纠正，然后在预测的块错误概率超过 ϵ 时声明擦除。

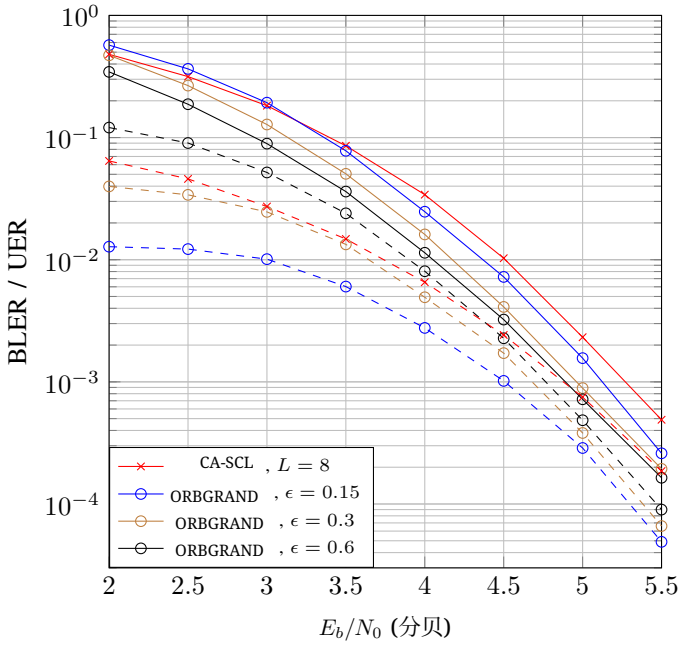

图4：以下方案的错误检测与纠正性能：1）与6位CRC 0x30级联并采用CA-SCL 解码的 $(64, 51 + 6)$ 5G 极化码；（2）采用 ORBGRAND解码和阈值为 $\epsilon = 0.15$ 的基于阈值的擦除判决的 eBCH(64, 51)码。实线表示块错误率，虚线表示未检测错误率。

纠正错误；如果估计的错误概率大于阈值 ϵ，则判定为擦除。方案 2) 的优势在于，使用 GRAND 进行差错纠正可显著降低块错误率，同时通过相应调整阈值，使错误检测满足目标未检测错误率。

作为另一个示例，图 4 展示了在使用错误概率阈值ϵ 进行擦除判决时，采用 ORBGRAND 译码的 eBCH(64, 51)码的错误检测和差错纠正性能。作为比较，还展示了对与 6位 CRC 0x30 级联的 $(64, 51 + 6)$ 5G 极化码 [4]进行 CA-SCL 译码 [33] 的性能：该方法生成一个包含 8个候选项列表，并从中选出 CRC 校验一致且可能性最高的候选项作为译码结果。如果 CA-SCL列表中没有候选项的 CRC 校验匹配，则将其视为擦除。在适当选择 ϵ后，两种方法的块错误率相近，但结果表明，在 Eb/N0 为 2 至 3分贝的范围内，ORBGRAND 的未检测错误率比 CA-SCL 低近一个数量级。在噪声较小的条件下，它仍能带来 0.5分贝的增益。

V. 讨论

我们已经证明，软输入GRAND算法在运行过程中可以评估解码块或列表出错的预测似然。我们推导出了精确公式以及易于计算的近似。尽管这些公式假设码本是随机的，但我们通过实验证明，它们对结构化码本也能做出准确预测。

这种软输出有许多潜在应用。它可以用于降低译码期间的未检出错误率；对于超可靠低时延通信（URLLC），也可以以更低的成本实现这一目标，

ORBGRAND 可使用循环冗余校验（CRC）或任何其他码，既进行差错纠正，也减少未检出错误。在混合自动重传请求（HARQ）方案中，预测的正确概率可用于决定是否请求重传，从而减少请求次数。已有研究表明， [34] GRAND 软输出可用于破坏窃听信道的安全性。置信度度量还可用于从一组译码结果中选出最可靠的结果，这有助于在噪声回收中选择主信道 [35, 36]。

VI. 致谢

本研究部分经费由美国国防高级研究计划局合同 HR00112120008 资助。本出版物源自一项研究，该研究获得爱尔兰科学基金会资助，项目编号为 18/CRT/6049。本文所表达的观点、研究结果、结论或建议均为作者的观点，不一定反映爱尔兰科学基金会的意见。

参考文献

[1] S. Lin 和 D. J. Costello，《差错控制编码：基础与应用》。Pearson/PrenticeHall，2004年。[2] T. Hashimoto 和 M. Taguchi，“带擦除解码中的显式错误检测与阈值判决性能”，IEEE《信息论汇刊》，第43卷，第5期，第1650–1655页，1997年。

[3] A. Sauter、B. Matuz 和 G. Liva，“连续消除列表译码下CRC级联极化码的错误检测策略”，载于 CISS，2023年。[4] 3GPP，“NR；复用与信道编码”，第三代合作伙伴计划（3GPP），技术规范（TS）38.21，2019年，版本15.5.0。[5] G. Durisi、T. Koch 和 P. Popovski，“迈向短分组的大规模超可靠低时延无线通信”，IEEE会议录，第104卷，第9期，第1711–1726页，2016年。[6] G. Forney，“擦除、列表和判决反馈方案的指数误差界”，IEEE《信息论汇刊》，第14卷，第2期，第206–220页，1968年。[7] E. Hof、I. Sason 和 S. Shamai，“线性分组码中擦除、列表和判决反馈方案的性能界”，IEEE《信息论汇刊》，第56卷，第8期，第3754–3778页，2010年。[8]K. Niu 和 K. Chen，“极化码的CRC辅助译码”，IEEE《通信快报》，第16卷，第10期，第1668–1671页，2012年。[9] I. Tal 和 A. Vardy，“极化码的列表译码”，IEEE《信息论汇刊》，第61卷，第5期，第2213–2226页，2015年。[10] A. Balatsoukas-Stimming、M. B. Parizi 和 A. Burg，“极化码的基于LLR的连续消除列表译码”，IEEE《信号处理汇刊》，第63卷，第19期，第5165–5179页，2015年。[11] X. Liang、J. Yang、C. Zhang、W. Song 和 X. You，“基于分布式排序的高硬件效率、低时延CA-SCL译码器”，载于 IEEE GLOBECOM。IEEE，2016年，第1–6页。[12] G. Forney，“维特比算法”，《IEEE会议录》，第61卷，第268–278页，1973年。[13] A. Raghavan 和 C. Baum，“一种可靠性输出维特比算法及其在混合自动重传请求中的应用”，IEEE《信息论汇刊》，第44卷，第1214–1216页，1998年。[14] J. Hagenauer 和 P. Hoeher，“一种具有软判决输出的维特比算法及其应用”，载于 IEEE GLOBECOM，第3卷，1989年，第1680–1686页。[15] H. Yamamoto 和 K. Itoh，“具有重复请求的卷积码维特比译码算法”，IEEE《信息论汇刊》，第26卷，第5期，第540–547页，1980年。[16] K. R. Duffy、J. Li 和 M. Medard，“容量达到型猜测随机加性噪声译码”，IEEE《信息论汇刊》，第65卷，第7期，第4023–4040页，2019年。[17] K. Galligan、A. Solomon、A. Riaz、M. M´edard、R. T. Yazicigil 和 K. R. Duffy，“IGRAND：译码任意乘积码”，载于 IEEE GLOBECOM，2021年。[18]W. An、M. M´edard 和 K. R. Duffy，“保留突发，摒弃交织器”，IEEE《通信汇刊》，第70卷，第6期，第3655–3667页，2022年。[19] A. Solomon、K. R. Duffy 和 M. M´edard，“使用 GRAND 进行软最大似然译码”，载于 IEEE 国际通信会议，2020年。[20] K. R. Duffy、M. M´edard 和 W. An，“利用符号可靠性信息的猜测随机加性噪声译码（SRGRAND）”，载于 IEEE《通信汇刊》，第70卷，第1期，2022年，第3–18页。[21] K. R. Duffy、W. An 和 M. Medard，《有序可靠性比特猜测随机加性噪声译码》，IEEE《信号处理汇刊》，第70卷，第4528–4542页，2022年。[22] S. M. Abbas、M. Jalaleddine 和 W. J. Gross，《列表 GRAND：实现最大似然译码的一种实用方法》，IEEE《超大规模集成系统汇刊》，第1期，第43–54页，2022年。[23] K. R. Duffy、M. Grundei 和 M. M´edard，《利用信道相关性改进译码——ORBGRAND-AI》，2023年，arXiv:2303.07461。[24] A. Riaz、V. Bansal、A. Solomon、W. An、Q. Liu、K. Gal- ligan、K. R. Duffy、M. Medard 和 R. T. Yazicigil，《使用 GRAND 的多码多速率通用最大似然译码器》，发表于 ESSCIRC，2021年。[25] A. Riaz、A. Yasar、F. Ercan、W. An、J. Ngo、K. Galligan、M. M´edard、K. R. Duffy 和 R. T. Yazicigil，《一种采用 ORBGRAND、亚0.8pJ/b、16.3Gbps/mm^2 的40纳米CMOS通用软检测译码器》，发表于 IEEE ISSCC，2023年。[26] C. Condo、V. Bioglio 和 I. Land，《用于 ORBGRAND 解码的高性能低复杂度错误模式生成》，发表于 IEEE GLOBECOM，2021年。[27] S. M. Abbas、T. Tonnellier、F. Ercan 和 W. J. Gross，《GRAND 高吞吐量超大规模集成电路架构》，发表于 IEEE信号处理系统研讨会，2020年，第681–693页。[28]S. M. Abbas、T. Tonnellier、F. Ercan、M. Jalaled- dine 和 W. J. Gross，《有序可靠性比特 GRAND 的高吞吐量、能效超大规模集成电路架构》，IEEE《超大规模集成系统汇刊》，第30卷，第6期，2022年。[29] C. Condo，《一种采用查找表辅助错误模式调度的固定时延 ORBGRAND 译码器架构》，IEEE《电路与系统汇刊 I：正规论文》，第69卷，第5期，第2203–2211页，2022年。[30] K. Galligan、M. M´edard 和 K. R. Duffy，《采用 ORBGRAND 的分组Turbo译码》，发表于 CISS，2023年。[31]J. Freudenberger、D. Nicolas Bailon 和 M. Safieh，《适用于级联码的低复杂度硬输入和软输入 BCH 译码》，IET《电路、器件与系统》，第15卷，第3期，第284–296页，2021年。[32] T. Hashimoto，《用于带擦除解码的复合方案 LR+Th 及其与 Forney规则的有效等价性》，IEEE《信息论汇刊》，第45卷，第1期，第78–93页，1999年。[33] I. Tal 和 A. Vardy，《极化码的列表译码》，IEEE《信息论汇刊》，第61卷，第5期，2015年。[34] K. R. Duffy 和 M. Medard，《软检测与物理层不安全性》，2023年，arXiv:2212.05309。[35] A. Cohen、A. Solomon、K. R. Duffy 和 M. M´edard，《噪声回收》，发表于 IEEE信息论国际研讨会，2020年。[36]A. Riaz、A. Solomon、F. Ercan、M. Medard、R. T. Yazicigil 和 K. R. Duffy，《使用 GRAND 的交织噪声回收》，发表于 IEEE ICC，2022年，第2483–2488页。