不同光谱纯度量子光源自发辐射寿命分辨率的信息紧界

Cheyenne S. Mitchell 和 Mikael P. Backlund*

Department of Chemistry and Illinois Quantum Information Science and Technology Center (IQUIST), University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801（日期：2023年5月11日）

我们将解析两个间隔很近的自发辐射寿命混合态的理论推广至包含纯退相干对退相干的贡献，从而使瑞利诅咒在寿命间隔较小时重新显现。当寿命展宽比纯退相干的影响更显著时，仍有可能大幅提升分辨率。在寿命展宽占主导的极限下，通过定制的单光子测量或洪-欧-曼德尔干涉均可实现超分辨率。我们说明了各自更优的适用条件。

arXiv:2305.05798v1 [quant-ph] 9 May 2023

I. 引言

近期一项受量子启发、针对空间分辨相互不相干光学点源这一古老问题的分析，揭示了此类测量精度能够超越瑞利诅咒的条件 [1, 2]。作者指出，在两个此类点源之间的间距趋于零时，与间距估计相关的量子费 Fisher 信息（QFI）仍保持恒定，而与直接成像相关的经典费歇尔信息（CFI）则在同一极限下趋于零。此后，许多研究在这一理论基础上进一步拓展 [3–26]，并通过实验展示了模型成像系统中的优势 [27–36]。这一基本思想也已从位置—动量分辨推广到时间—频率分辨 [37–40]。秉承这一思路，我们最近报告了与光学自发辐射寿命估计、分辨和判别相关的量子极限 [41]。

这项研究中有一大部分工作对相关理论提出了限制条件，指出在某些实验现实条件下，超越瑞利诅咒的能力会受到实质性制约。定量而言，当间距足够小时，这些限制会导致量子费 Fisher 信息最终趋于零。对两个光源的质心位置了解不准确，就是从一开始便明确指出的一种限制 [1, 42]。原本能够达到界限的模式分选测量，在存在错位或串扰时也会呈现相同趋势 [43–45]。其他各种干扰参数 [46–51] 或额外噪声源 [52–55] 也可能造成类似的抑制。在这篇论文中，我们详细讨论了另一种限制，它与光学自发发射寿命混合态的分辨尤为相关。具体而言，收集到的光子的光谱纯度降低，会使相应的量子费 Fisher 信息下降，并最终回归到通过时间相关单光子计数（TCSPC）直接测量所对应的经典界限。我们量化了该系统中光谱纯度与量子费 Fisher 信息之间的关系，并表明，当寿命展宽比纯退相干导致的展宽更显著时，仍有望实现显著的分辨率提升。在光谱纯度较高的极限下，我们探讨了通过对随后发射的光子进行洪–欧–曼（HOM）干涉测量 [56] 实现超分辨率的可能性，并将其性能与专门设计的单光子测量方案进行比较。

* mikaelb@illinois.edu

II. 结果与讨论

作为背景，在参考文献 [41] 中，我们考虑了这样一个任务：给定形式为以下形式的混合单光子态，估计组成部分寿命 τ_0 和 τ_1：

$$\rho = \frac{1}{2}|\psi_{\tau_0}(\omega)\rangle\langle\psi_{\tau_0}(\omega)| + \frac{1}{2}|\psi_{\tau_1}(\omega)\rangle\langle\psi_{\tau_1}(\omega)|, \quad (1)$$

其中

$$|\psi_\tau(\omega)\rangle = \int \mathrm{d}t\, \psi_\tau(t;\omega) a^\dagger(t)|0\rangle = \int \mathrm{d}t\, \psi_\tau(t;\omega)|t\rangle, \quad (2)$$

其中，$a^\dagger(t)$ 表示所标记时间模式的产生算符，并

$$\psi_\tau(t;\omega) = \frac{H(t)}{\sqrt{\tau}} e^{-i\omega t} e^{-t/2\tau} \quad (3)$$

对于 $\tau \in \{\tau_0, \tau_1\}$。在式（3）中，$H(t)$ 是赫维赛德阶跃函数，其定义为 $H(t \geq 0) = 1$ 且 $H(t < 0) = 0$。时间定义 t 经过平移，以补偿发射体与探测器之间的有限距离，使得关注的时间窗口从 $t = 0$ 开始。我们发现，基于时间相关单光子计数（TCSPC）的传统测量方案存在类似瑞利诅咒的问题：与寿命平方根比值估计相关的经典费歇尔信息 $\varepsilon = \sqrt{\tau_1/\tau_0}$ 在极限 $\varepsilon \to 1$ 下趋于零。相比之下，与估计 ε 相关的量子费 Fisher 信息在同一极限下达到最大值。我们证明，通过对加权拉盖尔（WL）模式基进行投影测量，可以达到这一量子界。该模式基定义如下：

$$|\phi_n(\omega, \bar{\tau})\rangle = \int \mathrm{d}t\, \phi_n(t;\omega,\bar{\tau})|t\rangle \quad (4)$$

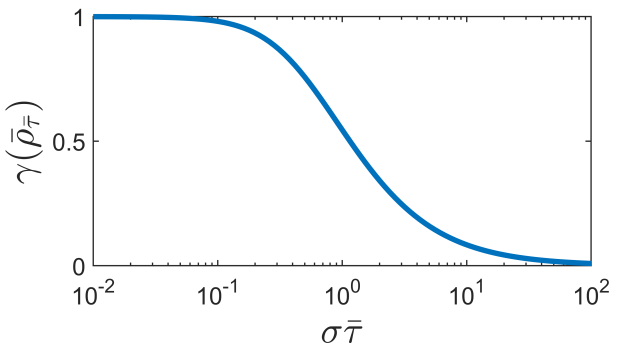


图 1. 极限态 $\bar{\rho}_{\bar{\tau}}$ 的纯度随乘积 $\sigma\bar{\tau}$ 的变化。

with

$$\phi_n(t;\omega,\bar{\tau}) = \frac{H(t)}{\sqrt{\bar{\tau}}} e^{-i\omega t} e^{-t/2\bar{\tau}} L_n(t/\bar{\tau}), \tag{5}$$

其中，$\bar{\tau} = \sqrt{\tau_0\tau_1}$ 是几何平均寿命，$L_n(\cdot)$ 表示 n 阶拉盖尔多项式。我们探讨了实现此类测量的可能途径，以及优于 TCSPC 的近似干涉测量方案。尽管该模型提供了有用的出发点，但式（1–3）所依据的模型采用了若干简化假设。本通信将特别关注其中一项假设：构成系统的单寿命态 ρ_{τ_0} 和 ρ_{τ_1} 具有单位纯度，这对应于光子的谱线宽受寿命限制。在实际系统中，必须应对纯退相干对谱线宽造成的影响（通常占主导地位）；其来源包括非均匀展宽（对于发射体系综）和/或光谱扩散（对于单个发射体）。通常需要付出很大努力才能产生寿命受限的光子，方法包括冻结退相干源 [57]，或通过工程手段加快发射速率 [58]。

在此，我们修正模型，使得收集到的单光子态表示为：

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\left(\bar{\rho}_{\tau_0} + \bar{\rho}_{\tau_1}\right), \tag{6}$$

其中，上划线表示对光谱密度函数 $P(\omega)$ 进行非相干平均，使得

$$\bar{\rho}_{\tau} = \int \mathrm{d}\omega P(\omega) |\psi_{\tau}(\omega)\rangle\langle\psi_{\tau}(\omega)| \tag{7}$$

针对 $\tau \in \{\tau_0, \tau_1\}$。为单独考察分辨率问题，我们假设已知 $\bar{\tau}$，并着手计算与 ε 相关的量子费 Fisher 信息 $\mathcal{K}_{\varepsilon}$，针对 $P(\omega)$ 的各种取值。我们假设 $P(\omega)$ 以某个已知频率 $\omega_0 > 0$ 为中心，使得 $P(\omega) = P_0(\omega - \omega_0)$，其中 $P_0(\omega)$ 以 $\omega = 0$ 为中心。量子费 Fisher 信息为

$$\mathcal{K}_{\varepsilon} = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{L}_{\varepsilon}^2 \bar{\rho}\right), \tag{8}$$

其中，$\mathcal{L}_{\varepsilon}$ 是对数导数对称算符（SLD），其定义隐含地由下式给出

$$\partial_{\varepsilon}\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\varepsilon}\bar{\rho} + \bar{\rho}\mathcal{L}_{\varepsilon}). \tag{9}$$

通过先对 $\bar{\rho}$ 进行对角化，可以显式计算 SLD，使得

$$\bar{\rho} = \sum_k D_k |k\rangle\langle k| \tag{10}$$

然后令两者相等

$$\mathcal{L}_{\varepsilon} = \sum_{k,k';D_k+D_{k'}\neq 0} \frac{2}{D_k + D_{k'}} \langle k|\partial_{\varepsilon}\bar{\rho}|k'\rangle\, |k\rangle\langle k'|. \tag{11}$$

为便于收敛，我们首先在指数加权拉盖尔多项式的离散基底 $|\phi_n(\omega_0,\bar{\tau})\rangle$ 中表示 $\bar{\rho}$，该基底根据方程 (4) 和 (5) 定义。我们在补充材料中证明，此基底下的矩阵元为：

$$\begin{aligned}\langle\phi_n|\bar{\rho}_{\tau}|\phi_m\rangle =& \frac{1}{\tau\bar{\tau}}\int \mathrm{d}\omega \left\{ \frac{P_0(\omega)}{\omega^2 + \Gamma_+^2/4} \right. \\ &\left. \times \left[\frac{\Gamma_-/2 + i\omega}{\Gamma_+/2 + i\omega}\right]^n \left[\frac{\Gamma_-/2 - i\omega}{\Gamma_+/2 - i\omega}\right]^m \right\},\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm \frac{1}{\bar{\tau}}. \tag{13}$$

对于 $P_0(\omega)$ 的某些取值，式（12）中的积分可能可以通过复围道积分解析计算。无论如何，在指定 $P_0(\omega)$ 后，都可以轻松进行数值计算。在接下来的计算中，我们考虑了具有谱宽参数 σ 的高斯展宽，使得：

$$P_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\omega^2/2\sigma^2}. \tag{14}$$

比较 σ 和 $1/\bar{\tau}$ 可以确定寿命展宽与纯退相干的相对重要性。等价地，乘积 $(\sigma\bar{\tau})$ 表征了纯度（图 1），

$$\gamma(\bar{\rho}_{\bar{\tau}}) = \mathrm{Tr}\left(\bar{\rho}_{\bar{\tau}}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Omega\, \frac{e^{-\Omega^2/4}}{1 + (\sigma\bar{\tau}\Omega)^2}, \tag{15}$$

的极限态

$$\bar{\rho}_{\bar{\tau}} = \lim_{\varepsilon\to 1} \bar{\rho}. \tag{16}$$

在极限 $\sigma \ll 1/\bar{\tau}$ 下，我们预计寿命展宽占主导，此问题将回归为在给定式 (1) 中的态且$\mathcal{K}_{\varepsilon} = \mathcal{K}_{\varepsilon}^{(\max)}$的情况下分辨 τ_0 和 τ_1。在极限 $\sigma \gg 1/\bar{\tau}$ 下，纯退相干占主导，我们预计 $\mathcal{K}_{\varepsilon} = \mathcal{J}_{\varepsilon}^{(\mathrm{TCSPC})}$，即量子费 Fisher 信息应渐近趋近于时间相关单光子计数的经典费歇尔信息。这一事实

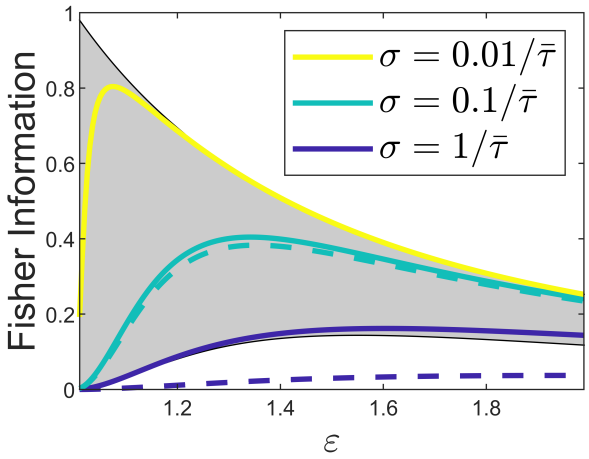


图 2. 与 ε 估计相关的费歇尔信息。灰色区域的上界为极限情况下的量子费 Fisher 信息$P_0(\omega) \to \delta(\omega)$，下界为与时间相关单光子计数相关的经典费歇尔信息。因此，落在灰色区域内的费歇尔信息表明，相较于时间相关单光子计数可能具有优势。实线彩色曲线标示了不同光谱纯度下计算得到的量子费 Fisher 信息。虚线彩色曲线表示如正文所述，对一组 WL 模式进行投影测量时相关的经典费歇尔信息。黄色虚线因几乎完全与黄色实线重合而被遮挡。

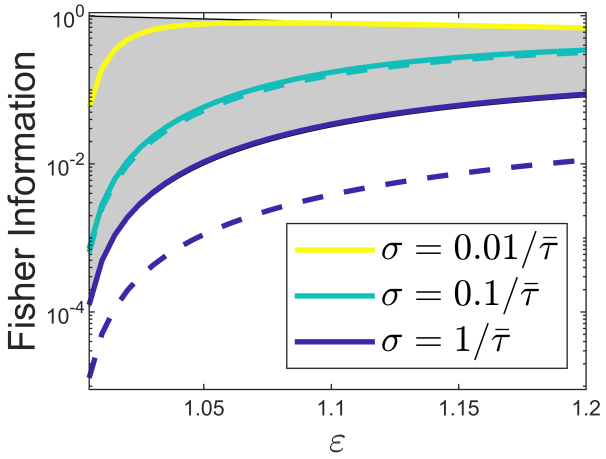


图 3. 与图 2 相同的数据，以半对数刻度呈现。

可以通过检查时间模式基中 $\bar{\rho}_\tau$ 的矩阵元来理解：

$$\langle t|\bar{\rho}_\tau|t'\rangle = \frac{H(t)H(t')}{\tau} e^{-(t+t')/2\tau} e^{-i\omega_0(t-t')} e^{-(t-t')^2\sigma^2/2}. \tag{17}$$

在式（17）中固定 τ 并取 $\sigma \to \infty$，其效果是消去矩阵的非对角元素，只留下与时间相关单光子计数测量的结果概率密度相一致的布居数。

图 2 展示了针对 $\sigma = 0.01/\bar{\tau}$、$0.1/\bar{\tau}$ 和 $1/\bar{\tau}$ 计算得到的 $\mathcal{K}_\varepsilon$ 数值（实线）。灰色阴影区域的上界为 $\mathcal{K}_\varepsilon^{(\max)}$，下界为 $\mathcal{J}_\varepsilon^{(\mathrm{TCSPC})}$。对于 $\sigma \ll 1/\bar{\tau}$，我们看到在大部分范围内确实有 $\mathcal{K}_\varepsilon \approx \mathcal{K}_\varepsilon^{(\max)}$；但当 ε 足够接近 1 时，量子费 Fisher 信息开始回落至零，表明瑞利诅咒再次显现。图 3 以半对数刻度展示了图 2 中的相同数据。仔细观察可见，尽管瑞利诅咒再次显现，但当 ε 接近 1 且 $\sigma < 0.1/\bar{\tau}[\gamma(\bar{\rho}_{\bar{\tau}}) \gtrapprox 0.98]$ 时，相较于时间相关单光子计数，仍有可能实现数量级上的分辨率提升。

图2和图3中的彩色虚线表示计算得到的经典费歇尔信息，$\mathcal{J}_\varepsilon^{(\mathrm{WL})}$，对应于投影到加权拉盖尔模式$\{|\phi_n(\omega_0,\bar{\tau})\rangle\langle\phi_n(\omega_0,\bar{\tau})|\}_n$上的投影测量，这些模式截断于 $n_{\max} = 100$。实际上，在 $\varepsilon = 1.05$ 附近，只需测量对应于 $n = 1$ 的单个模式，就能分别恢复 $\sigma = 0.01/\bar{\tau}$和 $\sigma = 0.1/\bar{\tau}$可用信息的 $> 87\%$和 $> 99\%$。对于 $\sigma = 1/\bar{\tau}$，投影到

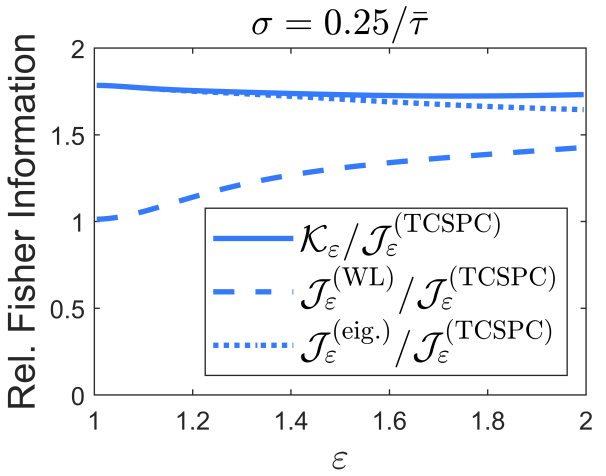


图 4. 与临界情形 $\sigma = 0.25/\bar{\tau}$ 相关的 $\varepsilon = 1$ 附近的 QFI（实线）、WL 投影的 CFI（虚线）和最优测量的 CFI（点线）。数值以时间相关单光子计数的 CFI 归一化。

前100个 WL 模式显然远非最优，因为深蓝色虚线远低于灰色区域。对于 $\sigma \geq 1/\bar{\tau}$，时间相关单光子计数能够很好地恢复可用信息；在这种情况下，最显而易见的测量就是正确的测量。图4展示了临界情形 $\sigma = 0.25/\bar{\tau}$ $[\gamma(\bar{\rho}_{\bar{\tau}}) \approx 0.905]$的类似数据。这里我们将费歇尔信息按 $\mathcal{J}_\varepsilon^{(\mathrm{TCSPC})}$缩放。在这种情况下，信息增益略低于 $2\times$，但无法通过 WL 基中的测量恢复。对于单参数 ε的估计，可通过投影到 $\mathcal{L}_\varepsilon$的本征态来构造最优测量。我们选取一个 ε，通过在 WL 基中表示 $\bar{\rho}$（截断至 $n_{\max} = 100$）后对 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 进行数值对角化，计算这种测量的性能（图4中的点线）。

前述分析更精确地指出了究竟.....

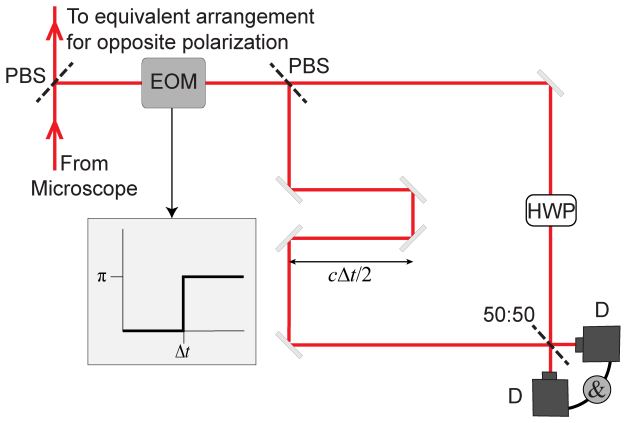


图 5. 通过双光子干涉测量分辨寿命的拟议装置，包括偏振分束器（PBS）、电光调制器（EOM）、半波片（HWP）、非偏振 50:50 分束器和符合探测器（ D ）。此处所示部分用于调制相对于第一个 PBS 为 s 偏振的发射分量。另一侧也可以搭建类似装置，以测量 p 偏振分量。

显著超越 TCSPC 分辨率性能需要什么量子特性——也就是说，必须保留时间模式基中的相干性。在理想情况下，$\sigma \ll 1/\bar{\tau}$时可以获得最大信息增益；在极限 $\varepsilon \to 1$下，后续收集到的光子在其他方面无法区分。因此显而易见，在极限$\sigma \to 0$ 下，可以选择执行文献 [41] 中所述的定制单光子测量，或利用它们近乎不可区分性的多光子干涉测量。认识到这一点后，我们接下来分析双光子洪-欧-曼德尔型测量的寿命分辨能力；此前研究表明，这种测量在空间分辨率问题中具有一定优势 [59]。我们考虑一个假想实验，使用图 5 所示的装置。相邻激发脉冲之间的时间间隔为 Δt ，显著长于 $\bar{\tau}$，因此，两个脉冲之间时间窗内的发射与第二个脉冲之后时间窗内的发射互不相关。我们从形式为$\rho^{(2)} = \rho \otimes \rho$的双光子态开始，其中 ρ 是方程（1）中定义的单光子态。对于这一乘积态，与 ε 相关的量子费 Fisher 信息仅为 ρ的两倍，即 $\mathcal{K}_\varepsilon^{(2)} = 2\mathcal{K}_\varepsilon^{(\max)}$。通过实施与第二个激发脉冲同步的开关，第一个收集到的光子被送入一条路径，第二个则被送入另一条路径。例如，可以在偏振分束器 [60]之前对电光调制器进行数字切换来实现这一点。第一个收集到的光子的路径中包含一个延迟器，用于补偿脉冲间隔时长Δt。第二个收集到的光子的路径中包含一个半波片，用于旋转偏振，使其与第一个光子的偏振匹配。随后将两个光子引入一起进入 50:50 分束器的任一输入端口。寿命对共有四种等概率的可能组合，记为 $(\tau_0,\ \tau_0)$、$(\tau_0,\ \tau_1)$、$(\tau_1,\ \tau_0)$ 和 $(\tau_1,\ \tau_1)$。如果取 $(\tau_0,\ \tau_0)$ 或 $(\tau_1,\ \tau_1)$，那么两个光子不可区分，它们将同时从端口 1 或同时从端口 2 输出。若取 $(\tau_0,\ \tau_1)$ 或 $(\tau_1,\ \tau_0)$，则两个光子从相反输出端口出射的概率会略微依赖于 ε。通过重复实验并统计符合计数，可以估算 ε。我们在补充材料中的详细分析表明，当 $\varepsilon \to 1$ 时，该测量方案可获取可用信息的一半，即 $\mathcal{J}_\varepsilon^{(\&)} = \mathcal{K}_\varepsilon^{(2)}/2$。由此成功规避了瑞利诅咒。我们还可以得出结论：若在最优单光子测量与上述双光子符合测量之间进行选择，前者在每个探测到的光子所携带的信息量方面更优。另一方面，若可在双光子符合测量与仅能获取每光子可用信息中一部分 $\xi < 1$ 的次优单光子测量方案之间选择，那么哪种方案更优取决于 ξ 大于还是小于 1/2。

到目前为止，在分析中，我们一直假设每次激发脉冲之后紧接着的时间间隔内，必定会收集到一个光子，并且该光子在到达探测器的途中不会丢失。实际上，在此时间间隔内，光子只有一定概率 p 能够被成功收集并传输至探测器，而在现实条件下， $p \ll 1$ 的情况很可能发生。因此，此时间间隔内的相关场态为：

$$\rho' = (1-p)|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}| + p\rho. \tag{18}$$

这两个此类时间间隔的集体态 $\rho' \otimes \rho'$ 仅以概率 p^2 包含两个光子。在这种情况下，当满足条件 $\xi > p/2$ 时，效率为 ξ 的次优单光子测量优于双光子符合测量方案。另一方面，HOM 方案具有一项独特的潜在优势，即无需预先知道平均寿命 $\bar{\tau}$，即可实现超分辨率。相比之下，最优单光子测量所需的 WL 基的正确选择明确取决于 $\bar{\tau}$，例如，可以通过初步的时间相关单光子计数（TCSPC）测量对其进行估计。

III. 结论

总之，通过将纯退相干对光谱线宽的贡献纳入考量，我们有效收紧了与光学自发辐射寿命分辨率相关的量子界限。当寿命展宽占主导时，经过适当设计的单光子或双光子测量能够带来显著的信息增益。当纯退相干占主导时，则无法超越传统的时间相关单光子计数测量。看来，任何程度的纯退相干都会导致

对于 ε 而言，当数值充分接近 1 时，分辨率量子费 Fisher 信息会回落至零，这表明寿命版的瑞利诅咒最终会再次出现。

致谢

我们感谢 Y. Wang、S. Bogdanov 和 E. Goldschmidt 对稿件提出的宝贵意见。本研究得到伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校化学系和化学科学学院提供的启动经费支持。

[1] M. Tsang、R. Nair 和 X.-M. Lu，《两个非相干光学点光源的超分辨率量子理论》，《Phys. Rev. X》**6**，031033（2016年）。[2] M. Tsang，《解析星光：量子视角》，《当代物理》**60**，279（2019年）。[3] R. Nair 和 M. Tsang，《量子极限下热电磁源的远场超分辨率》，《物理评论快报》**117**，190801（2016年）。[4] R. Nair 和 M. Tsang，《两个非相干光学点光源的干涉超定位》，《Opt. Express》**24**，3684（2016年）。[5] M. Tsang，《通过空间模解复用实现亚衍射极限非相干光学成像》，《New Journal of Physics》**19**，023054（2017年）。[6] S. Z. Ang、R. Nair 和 M. Tsang，《两个非相干光学点光源二维分辨率的量子极限》，《物理评论A》**95**，063847（2017年）。[7] M. Tsang，《通过空间模解复用实现亚衍射极限非相干光学成像：半经典处理》，《物理评论A》**97**，023830（2018年）。[8] J. Rehacek、M. Pa´ur、B. Stoklasa、Z. Hradil 和 L. L. S´anchez-Soto，《超越瑞利极限的最优测量》，《Opt. Lett.》**42**，231（2017年）。[9] M. Tsang，《亚衍射极限非相干光学成像的量子极限》，《物理评论A》**99**，012305（2019年）。[10] S. Zhou 和 L. Jiang，《瑞利判据的现代描述》，《物理评论A》**99**，013808（2019年）。[11] E. Bisketzi、D. Branford 和 A. Datta，《定位显微术的量子极限》，《New Journal of Physics》**21**，123032（2019年）。[12] C. Lupo、Z. Huang 和 P. Kok，《通过线性干涉测量实现非相干成像的量子极限》，《物理评论快报》**124**，080503（2020年）。[13] F. Bao、H. Choi、V. Aggarwal 和 Z. Jacob，《n 颗恒星的量子加速成像》，《Opt. Lett.》**46**，3045（2021年）。[14] M. Bojer、Z. Huang、S. Karl、S. Richter、P. Kok 和 J. von Zanthier，《天文学中振幅干涉测量与强度干涉测量的定量比较》，《New Journal of Physics》**24**，043026（2022年）。[15] C. Datta、Y. L. Len、K. ´Lukanowski、K. Banaszek 和 M. Jarzyna，《通过空间解复用相干探测对双源进行亚瑞利表征》，《Opt. Express》**29**，35592（2021年）。[16] M. R. Grace 和 S. Guha，《在超分辨率成像的量子极限下识别物体》，《物理评论快报》**129**，180502（2022年）。[17] Z. Huang 和 C. Lupo，《系外行星探测的量子假设检验》，《物理评论快报》**127**，130502（2021年）。[18] Z. Huang、C. Schwab 和 C. Lupo，《系外行星光谱学的终极极限：一种量子方法》，《物理评论A》**107**，022409（2023年）。[19] J. M. Jusuf 和 M. D. Lew，《迈向用于三维分辨紧密间隔发射体的最优点扩散函数设计》，Opt. Express **30**，37154（2022年）。[20] I. Karuseichyk、G. Sorelli、M. Walschaers、N. Treps 和 M. Gessner，《以任意统计特性分辨相互相干的点光源》，Phys. Rev. Res. **4**，043010（2022年）。[21] H. Krovi，《超越两个点源的量子极限超分辨率》（2022年），arXiv:2206.14788 [量子物理]。[22] S. Kurdzialek，《重返光源——重新审视损耗与相干性在超分辨成像中的作用》，Quantum **6**，697（2022年）。[23] Z. Hradil、J. ˇReh´aˇcek、L. S´anchez-Soto 和 B.-G. Englert，《具有相干性的量子费 Fisher 信息》，《Optica》**6**，1437（2019年）。[24] K. Liang、S. A. Wadood 和 A. N. Vamivakas，《相干性对估计一般亚瑞利物体分布矩的影响》，《物理评论A》**104**，022220（2021年）。[25] G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers 和 N. Treps，《基于矩的超分辨率：形式体系与应用》，《物理评论A》**104**，033515（2021年）。[26] Y. Wang、Y. Zhang 和 V. O. Lorenz，《强热光源干涉成像中的超分辨率》，《物理评论A》**104**，022613（2021年）。[27] F. Yang、A. Tashchilina、E. S. Moiseev、C. Simon 和 A. I. Lvovsky，《通过高阶本振模式中的外差探测实现远场线性光学超分辨》，《Optica》**3**，1148（2016年）。[28] Z. S. Tang、K. Durak 和 A. Ling，《衍射极限内点发射体的容错有限误差定位》，Opt. Express **24**，22004（2016年）。[29] P. Boucher、C. Fabre、G. Labroille 和 N. Treps，《空间光学模式解复用：实现最优横向距离估计的实用工具》，《Optica》**7**，1621（2020年）。[30] S. A. Wadood、K. Liang、Y. Zhou、J. Yang、M. A. Alonso、X.-F. Qian、T. Malhotra、S. M. H. Rafsanjani、A. N. Jordan、R. W. Boyd 和 A. N. Vamivakas，《利用奇偶排序对部分相干光源实现超分辨率的实验演示》，Opt. Express **29**，22034（2021年）。[31] Y. Zhou、J. Yang、J. D. Hassett、S. M. H. Rafsanjani、M. Mirhosseini、A. N. Vamivakas、A. N. Jordan、Z. Shi 和 R. W. Boyd，《对两个非相干点源轴向间距的量子极限估计》，《Optica》**6**，534 2019( )。

[32]W.-K. Tham、H. Ferretti 和 A. M. Steinberg，《利用相位信息成像，打破瑞利诅咒》，《物理评论快报》118，070801（2017年）。[33] M. Pa´ur、B. Stoklasa、Z. Hradil、L. L. S´anchez-Soto 和 J. Rehacek，《实现光学分辨率的终极极限》，《Optica》3，1144（2016年）。[34] M. Pa´ur、B. Stoklasa、J. Grover、A. Krzic、L. L. S´anchez- Soto、Z. Hradil 和 J. ˇReh´aˇcek，《利用点扩散函数整形缓解瑞利诅咒》，《Optica》5，1177（2018年）。[35] L. Santamaria、D. Pallotti、M. S. de Cumis、D. De-qual 和 C. Lupo，《通过空间模式解复用增强强度与距离测量》（2023年），arXiv:2206.05246 [physics.optics]。[36] H. Zhang、S. Kumar 和 Y.-P. Huang，《高光子效率的超分辨光学分类器》，Opt. Lett. 45，4968（2020年）。[37] J. M. Donohue、V. Ansari、J. ˇReh´aˇcek、Z. Hradil、B. Stoklasa、M. Pa´ur、L. L. S´anchez-Soto 和 C. Silberhorn，《通过模式选择性光子测量实现量子极限时间频率估计》，《物理评论快报》121，090501（2018年）。[38] S. De、J. Gil-Lopez、B. Brecht、C. Silberhorn、L. L. S´anchez-Soto、Z. c. v. Hradil 和 J. ˇReh´aˇcek，《相干性对时间分辨率的影响》，Phys. Rev. Research 3，033082（2021年）。[39] V. Ansari、B. Brecht、J. Gil-Lopez、J. M. Donohue、J. ˇReh´aˇcek、Z. c. v. Hradil、L. L. S´anchez-Soto 和 C. Silberhorn，《实现终极量子计时分辨率》，PRX Quantum 2，010301（2021年）。[40] M. Shah 和 L. Fan，《通过光子的频谱-时间整形实现频率超分辨率》，Phys. Rev. Appl. 15，034071（2021年）。[41] C. S. Mitchell 和 M. P. Backlund，《自发辐射寿命分辨与判别的量子极限》，Phys. Rev. A 105，062603（2022年）。[42] M. R. Grace、Z. Dutton、A. Ashok 和 S. Guha，《在无需预先了解物体位置的情况下逼近量子极限成像分辨率》，J. Opt. Soc. Am. A 37，1288（2020年）。[43] M. Gessner、C. Fabre 和 N. Treps，《测量串扰导致的超分辨率极限》，《物理评论快报》125，100501 2020( )。[44] G. Sorelli、M. Gessner、M. Walschaers 和 N. Treps，《实用超分辨成像的最优可观测量与估计量》，《物理评论快报》127，123604（2021年）。[45] J. O. de Almeida、J. Ko·lody´nski、C. Hirche、M. Lewenstein 和 M. Skotiniotis，《失准情况下非相干光源的判别与估计》，Phys. Rev. A 103，022406（2021年）。[46] J. ˇRehaˇcek、Z. Hradil、B. Stoklasa、M. Pa´ur、J. Grover、A. Krzic 和 L. L. S´anchez-Soto，《多参数量子……

非相干点源的计量学：迈向现实的超分辨率，《物理评论A》**96**, 062107 (2017). [47] W. Larson and B. E. A. Saleh, 部分相干性下瑞利诅咒的复现，《Optica》**5**, 1382 (2018). [48] K. Liang, S. A. Wadood, and A. N. Vamivakas，部分相干性对两点间距估计的影响，《Optica》**8**, 243 (2021). [49] T. Linowski, K. Schlichtholz, G. Sorelli, M. Gessner, M. Walschaers, N. Treps, and ·Lukasz Rudnicki，受串扰影响的空间解复用在分辨不平衡源间距方面的适用范围 (2022), arXiv:2211.09157 [量子物理]. [50] T. Tan, K. K. Lee, A. Ashok, A. Datta, and B. A. Bash，稳健的自适应量子极限超分辨率成像，载于 *2022 56th Asilomar Conference on Signals Sys- ,,( ) tems and Computers* 2022 504 508 pp. – . [51] B. Wang, L. Xu, J. chi Li, and L. Zhang，三维中的量子极限定位与分辨，《光子学研究》**9**, 1522 (2021). [52] S. Kurdzialek and R. Demkowicz-Dobrzanski，量子估计中的测量噪声敏感性 (2023), arXiv:2206.12430 [量子物理]. [53] Y. L. Len, C. Datta, M. Parniak, and K. Banaszek，噪声探测下空间模式解复用的分辨率极限，《国际量子信息学杂志》**18**, 1941015 (2020). [54] C. Lupo，利用噪声探测器进行亚波长量子成像，《物理评论A》**101**, 022323 (2020). [55] C. Oh, S. Zhou, Y. Wong, and L. Jiang，噪声环境中的超分辨率量子极限，《物理评论快报》**126**, 120502 (2021). [56] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel，通过干涉测量两个光子之间的亚皮秒时间间隔，《物理评论快报》**59**, 2044 (1987年). [57] I. Aharonovich, D. Englund, and M. Toth，固态单光子发射器，《自然·光子学》**10**, 631 (2016年). [58] S. I. Bogdanov, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev，利用等离激元学克服量子退相干，《科学》**364**, 532 (2019年). [59] M. Parniak, S. Bor´owka, K. Boroszko, W. Wasilewski, K. Banaszek, and R. Demkowicz-Dobrz´nski，利用双光子干涉突破瑞利极限，《物理评论快报》**121**, 250503 (2018年). [60] A. J. Bowman, B. B. Klopfer, T. Juffmann, and M. A. Kasevich，电光成像实现高效大视场荧光寿命显微镜，《自然通讯》**10**, 4561 (2019年).