arXiv:2305.05819v1 [math.DG] 10 May 2023

SOME 几何不等式与 ABP 方法

DOANH PHAM

Abstract.本文采用所谓的 Alexandrov-Bakelman-Pucci（ABP）方法，建立若干几何不等式。我们首先证明单位球面中闭 n维极小子流形 Σ 的一个对数 Sobolev 不等式。由此可恢复经典结果：$|\mathbb{S}^n| \leq |\Sigma|$ 对于 $m = 1$，2。接下来，我们证明 $\mathbb{R}^n$ 中光滑区域上正定对称二阶张量的一个 Sobolev 型不等式；当区域为凸区域时，D. Serre 已建立了该结果。在 ABP 方法的最后一个应用中，我们提出并证明一个与欧氏空间中闭超曲面的拟曲率积分有关的不等式。

1. Introduction

1.1. A logarithmic Sobolev inequality for minimal submanifolds of the unit sphere

对数索博列夫不等式的研究历史悠久，并已成为分析学和几何学中的重要工具，参见例如 [6, 13, 16, 19]。其中一条不等式对于佩雷尔曼证明里奇流下熵的单调性公式至关重要（参见 [20]）。令 $\mathbb{N}$ 为正整数集。S. Brendle 证明的欧几里得空间中子流形的锐对数索博列夫不等式如下：

定理 1.1（[6]）。设 $n, m \in \mathbb{N}$ 和 Σ 为$\mathbb{R}^{n+m}$中的一个闭 n维子流形。那么对于 Σ 上的任意正光滑函数 f，有

$$\int_\Sigma f\left(\log f + n + \frac{n}{2}\log(4\pi) - n^2|H|^2\right) - \left(\int_\Sigma f\right)\log\left(\int_\Sigma f\right) \leq \int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f},$$

其中，H 是 Σ的平均曲率向量。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1\}$ 为单位球，$\mathbb{S}^n = \partial\mathbb{B}^{n+1}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面。我们的目标是为 $\mathbb{S}^{n+m}$的闭极小子流形建立一个对数索博列夫不等式。在极小子流形为 $\mathbb{S}^n$这一最简单的情形下，我们回顾以下经典事实：

定理 1.2（例如参见 [1]）。对于定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的任意正光滑函数 f，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^n} f\left(\log f + \log(|\mathbb{S}^n|)\right) - \left(\int_{\mathbb{S}^n} f\right)\log\left(\int_{\mathbb{S}^n} f\right) \leq \frac{1}{2n}\int_{\mathbb{S}^n} \frac{|\nabla^{\mathbb{S}^n} f|^2}{f}.$$

等号成立当且仅当 f 是常数。

本文的第一个主要结果如下:

定理1.3. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m = 1, 2$。假设 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$中的一个闭的 n维极小子流形。那么对于 Σ上的每个正光滑函数 f，有

$$\int_\Sigma f\left(\log f + \log(|\mathbb{S}^n|)\right) - \left(\int_\Sigma f\right)\log\left(\int_\Sigma f\right) \leq \frac{n+1}{2n^2}\int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}. \tag{1.1}$$

等号成立当且仅当 f 为常数，且 Σ 是一个全测地的 n球面 e.

根据定理1.3，我们立即得到以下经典结果 t:

推论1.4. 设 $n \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2$，且 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$中的闭 n维极小子流形。那么 $|\mathbb{S}^n| \leq |\Sigma|$。等号成立当且仅当 Σ 是一个全测地 n球面。

推导上述推论有几种方法。一种方法是利用文献 [5]中得到的欧几里得空间中极小曲面的等周不等式。其他方法适用于任意余维，包括单调性型论证（见 [2]）以及利用热核比较的方法（见 [11]）。

对于 Σ的任意余维 $m \geq 2$，我们也有:

定理1.5. 设 $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$，且 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$中的闭 n维极小子流形。那么，对于 Σ 上的任意正光滑函数 f，我们有

$$\int_\Sigma f\left(\log f + \log\left((n+1)\frac{|\mathbb{S}^{n+m}|}{|\mathbb{S}^{m-1}|}\right)\right) - \left(\int_\Sigma f\right)\log\left(\int_\Sigma f\right) \leq \frac{n+1}{2n^2}\int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}. \tag{1.2}$$

不等式 (1.1) 是定理1.5的推论。事实上，取 $m = 2$并利用公式 $(n+1)|\mathbb{S}^{n+2}| = 2\pi|\mathbb{S}^n|$，(1.2) 中第一个被积函数里的常数化简为 $\log(|\mathbb{S}^n|)$。对于 $m = 1$，将 $\mathbb{S}^{n+1}$ 视为 $\mathbb{S}^{n+2}$的（全测地）赤道，可得 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的每个极小超曲面也是 $\mathbb{S}^{n+2}$的极小子流形；因此，此时 (1.1) 同样成立。

正如读者在定理1.5的证明细节中将会看到的，条件 $m \geq 2$ 是必要的。更具体地说，如果在定理的证明中直接采用 $m = 1$，那么论证的最后一步便无法成立。基于这一原因，尽管存在一些重复之处，且该证明与 $m \geq 2$ 的证明较为相似，我们仍在第 2.1 节中给出了余维 1 情形下关于 (1.1) 的一个完整（且略为简单）的证明。

与丘成桐猜想的关系：假设 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+1}$中的闭极小超曲面。设 $0 < \lambda_1(\Sigma)$ 是拉普拉斯算子 $-\Delta_\Sigma$ onΣ 的第一个特征值。通过直接计算，任意线性泛函 L 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的限制 Σ 满足方程。

$$-\Delta_\Sigma L = nL.$$

因此 $\lambda_1(\Sigma) \leq n$。回顾一下，$\lambda_1(\mathbb{S}^n) = n$。S.T. Yau 曾猜想，$\lambda_1(\Sigma) = n$ （见 [26]）。在 [24], ，Z. Tang 和 W. Yan 验证了当 Σ为等参时，该猜想成立。在一般情形下，Choi 和 Wang [12] 证明了 $\lambda_1(\Sigma) \geq n/2$。之后，S. Brendle [3] 通过仔细分析 Choi 和 Wang 的论证指出，该不等式是严格的，即 $\lambda_1(\Sigma) > n/2$。Yau 猜想与对数索博列夫不等式之间的关系基于以下事实：

定理 1.6（例如见 [19]）。设 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$中的一个 n维子流形。假设存在常数 $\alpha > 0$，使得对于 Σ上的每个正光滑函数 f，都有

$$\int_\Sigma f(\log f + \log|\Sigma|) - \left(\int_\Sigma f\right)\log\left(\int_\Sigma f\right) \leq \frac{1}{2\alpha}\int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f},$$

那么 $\lambda_1(\Sigma) \geq \alpha$。

鉴于定理1.6，如果能将定理1.3中的项 log(|$\mathbb{S}^n$|) 改进为 log(|Σ|)，那么将可推出 $\lambda_1(\Sigma) \geq n^2/(n+1)$。

定理 1.5 和定理 1.3 的证明见第 2 节。这些证明受到 S. Brendle [4, 5, 6] 的研究成果启发。

1.2. A Sobolev-type inequality for positive symmetric tensors

设 $n \in \mathbb{N}$ 和 A 是有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的一个 $n \times n$ 矩阵值函数。A 的散度是 Ω 中定义的向量场，定义为

$$\operatorname{Div} A(x) := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} A_{1j}(x) \\ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} A_{2j}(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} A_{nj}(x) \end{pmatrix}.$$

此外，当 $A = 0$ 在 Ω 中时，我们称 A 为散度为零。

在 [22], 中，D. Serre 证明了一个关于正对称矩阵值函数的不等式，并展示了它在流体力学中的一些应用。在光滑情形下，该不等式为：

定理 1.7（[22], 定理 2.3 和命题 2.2）。设 $n \in \mathbb{N}$，且 Ω 是 $\mathbb{R}^n$中的一个光滑有界凸区域。若 A 是 $\underline{\Omega}$（Ω 的闭包）上的光滑一致正定对称矩阵值函数，则

$$n^{\frac{n-1}{n}} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega \det(A(x))^{\frac{1}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\partial\Omega} |A(x)\nu| d\sigma(x) + \int_\Omega |\operatorname{Div} A(x)| dx, \tag{1.3}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量场。当 A 散度为零时，式 (1.3) 中的等号成立，当且仅当存在 Ω 上的光滑凸函数 u，使得 $\nabla u(\Omega)$ 是以原点为中心的球，且 $A = (\operatorname{cof} D^2 u)$ 是 $D^2 u$ 的余子式矩阵。

定理 1.7 的原始证明采用了最优传输技术。由于传输映射存在正则性问题，论证中要求 Ω 满足凸性条件（例如参见 [25]）。本文的下一个结果表明，即使去掉 Ω 的凸性条件，定理 1.7 仍然成立。为证明这一点，我们使用 ABP 方法，并采用恰当选取的变量替换映射，而非传输映射。

定理 1.8. 设 $n \in \mathbb{N}$和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域。若 A 是 $\underline{\Omega}$ 上的光滑一致正定对称矩阵值函数，则

$$n^{\frac{n-1}{n}} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\partial\Omega} |A(x)\nu| d\sigma(x) + \int_\Omega |\operatorname{Div} A(x)| dx, \tag{1.4}$$

其中，ν 是 Ω 上的单位外法向量场。此外，当且仅当 Ω 上存在一个光滑凸函数 u，使得 $\nabla u(\Omega)$ 是一个以原点为中心的球，且 $A = (\operatorname{cof} D^2 u)$ 是 $D^2 u$ 的余子式矩阵时，(1.4) 中的等号成立。

请注意，在定理 1.8 的刚性结论中，我们并未预先假设 A 是散度为零的。取 $A = I_n$ 为单位矩阵应用定理 1.8，我们便可得到光滑区域的经典等周不等式。

该定理的证明见第 3 节。证明受到 S. Brendle [5] 和 X. Cabr´e [7, 8]相关工作的启发。

1.3. 与拟体积积分相关的不等式

我们接下来对 ABP 方法的应用是一个与拟积分相关的几何不等式。对于数 $n \in \mathbb{N}$ 和一个 $(n \times n)$-对称矩阵 A，令 $\sigma_k(A)$、$1 \leq k \leq n$ 为其特征值的 k 次基本对称函数。更

具体地说，如果 λ_1、λ_2、...、λ_n 是 A 的特征值，那么

$$\sigma_k(A) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_k}.$$

σ_k 的归一化记为 $H_k(A) := \sigma_k(A)/\binom{n}{k}$。对于 $0 \le k \le n-1$，A 的 k-Newton 张量是由下式给出的对称矩阵 $T_k(A)$：

$$T_k(A)_{ij} := \frac{\partial \sigma_{k+1}(A)}{\partial A_{ij}}.$$

此外，G̊arding 锥 Γ_k 定义为所有满足以下性质的对称矩阵 A所组成的集合：对于所有 $1 \le j \le k$，均有 $H_j(A) > 0$。如果 $A \in \Gamma_{k+1}$，那么根据 G̊arding 关于双曲多项式的理论，$T_k(A)$是正定的（见 [14]）。

设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的一个闭超曲面，ν 是 Σ 上指向所围区域的单位法向量场。我们用 II_ν 表示沿 ν方向的 Σ 上的标量第二基本形式。采用这些记号，若 Σ 是凸区域的边界，则 II_ν 半正定。为简单起见，我们分别用H_k 和 T_k 代替 $H_k(\mathrm{II}_\nu)$和 $T_k(\mathrm{II}_\nu)$。若在每个 $x \in \Sigma$处都有 $\mathrm{II}_\nu \in \Gamma_k$，则称该超曲面为 k-凸。本节接下来的主要结果如下：

定理 1.9。设 $n \in \mathbb{N}$、$n \ge 2$ 和 $0 \le k \le n-2$。假设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭合（$k+1$）-凸超曲面。则有

$$|\mathbb{S}^n| \left(\int_\Sigma H_k\right)^{n+1} \le \binom{n-1}{k}^n \left(\int_\Sigma H_{k+1}\right)^{n+1} \int_\Sigma \frac{H_k^{n+1}}{(\det T_k) H_{k+1}}. \tag{1.5}$$

等号成立当且仅当 Σ 是一个球面。

当 Σ 为（$k+1$）-凸时，其第二基本形式的 k-Newton 张量的行列式满足 $\det T_k \ge \binom{n-1}{k}^n H_{k+1}^{nk/(k+1)}$（更多细节请参见第4节）。因此，作为定理 1.9 的推论，我们得到

推论 1.10。设 $n \in \mathbb{N}$、$n \ge 2$ 和 $0 \le k \le n-2$。假设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭合（$k+1$）-凸超曲面。则有

$$|\mathbb{S}^n| \left(\int_\Sigma H_k\right)^{n+1} \le \left(\int_\Sigma H_{k+1}\right)^{n+1} \left(\int_\Sigma \frac{H_k^{n+1}}{H_{k+1}^{\frac{nk}{k+1}+1}}\right). \tag{1.6}$$

等号成立当且仅当 Σ 是一个球面。

推论 1.10 与 Alexandrov-Fenchel 型不等式的关系。根据混合体积的经典 Brunn–Minkowski 理论（例如参见 [23]），当 Σ

是 n-凸的（等价地，它是某个凸区域的边界）时，亚历山德罗夫-芬切尔不等式的一个推论指出

$$|\mathbb{S}^n|\left(\int_\Sigma H_k\right)^{n-k-1} \leq \left(\int_\Sigma H_{k+1}\right)^{n-k} \quad \text{for } 0 \leq k \leq n-2, \tag{1.7}$$

等号成立当且仅当 Σ 是一个球面。将 (1.7) 推广至满足某些较宽松曲率条件的超曲面上成立，一直是一个活跃的研究方向。在 [17], 中，P. Guan 和李通过曲率流方法证明了 (1.7) 对 $(k+1)$-凸的星形超曲面成立（另见 [18] ，其中讨论了几何流的方法）。在 [9], 中，张艾丽丝和王通过最优传输方法证明了 (1.7) 对 $(k+2)$-凸超曲面成立，但所得常数并非最佳。在一些极端情形下，他们能够给出最佳常数（见 [10]）。

一般而言，$(k+1)$-凸性是 (1.7) 的一个自然条件。这一研究方向中一个重要的未解问题如下:

开放问题：假设 Σ 是 $(k+1)$-凸的，不等式 (1.7) 是否成立?

如果开放问题成立，那么推论 1.10 就是其结果。为此，假设 $0 \leq k \leq n-2$ 和 Σ是（$k+1$）-凸的。于是，根据麦克劳林不等式，有

$$H_k \leq H_k^{\frac{n+1}{k+2}} / H_{k+1}^{\frac{nk-k(k+1)}{(k+1)(k+2)}}.$$

因此，根据霍尔德不等式可得

$$\int_\Sigma H_k \leq \int_\Sigma \frac{H_k^{\frac{n+1}{k+2}}}{H_{k+1}^{\frac{nk-k(k+1)}{(k+1)(k+2)}}} \leq \left(\int_\Sigma H_{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k+2}} \left(\int_\Sigma \frac{H_k^{n+1}}{H_{k+1}^{\frac{nk}{k+1}+1}}\right)^{\frac{1}{k+2}}. \tag{1.8}$$

因此，如果假设开放问题有肯定答案，那么我们可以将其与 (1.8) 结合，从而推出 (1.6)。

定理 1.9 的证明以及推导推论 1.10 的更多细节见第4节。

2. Proof of the logarithmic Sobolev inequality for minimal submanifolds of $\mathbb{S}^{n+m}$

2.1. Proof of (1.1) for closed minimal hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$

在本小节中，我们给出余维 1 情形下 (1.1) 的证明。更准确地说，对于 $n \in \mathbb{N}$, 设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 的一个闭极小超曲面,

且 f 是 Σ 上的正光滑函数。我们将证明:

$$\int_\Sigma f\left(\log f+\log(|\mathbb{S}^n|)\right)-\left(\int_\Sigma f\right)\log\left(\int_\Sigma f\right)\le\frac{n+1}{2n^2}\int_\Sigma\frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}. \tag{2.1}$$

为此，我们暂且假设 Σ 是连通的。将 f 乘以一个（唯一的）正常数后，我们可以不失一般性地假设

$$\frac{n}{n+1}\int_\Sigma f(x)\log(f(x))\,d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x)=\frac{1}{2n}\int_\Sigma\frac{|\nabla^\Sigma f(x)|^2}{f(x)}\,d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.2}$$

然后，我们需要证明的是

$$|\mathbb{S}^n|\le\int_\Sigma f(x)\,d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.3}$$

由于 $f>0$ 和 Σ 是连通的，根据 (2.2)，存在一个（除一个常数外唯一的）光滑解 u 满足该方程

$$\mathrm{div}(f\,\nabla^\Sigma u)=\frac{n}{n+1}f\log f-\frac{1}{2n}\frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}.$$

令 ν 为 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中 Σ 的单位法向量场。我们将 II_ν 记为 Σ 在 ν 方向上的标量第二基本形式。更确切地说，这意味着

$$\mathrm{I\!I}_\nu(V,W)=\langle\overline{\nabla}_V W,\nu\rangle=-\langle\overline{\nabla}_V\nu,W\rangle\quad\text{for every } V,W\in T_x\Sigma,$$

wher且 $\overline{\nabla}$ 是 $\mathbb{R}^{n+2}$ 上的欧几里得联络。我们定义集合 V 和 Ω b y

$$\begin{aligned}V\coloneqq\{&(x,s,t):\ x\in\Sigma,\ s,t\in\mathbb{R}\ \text{such that}\\&|\nabla^\Sigma u(x)|^2+s^2+t^2<1\ \text{and}\ D^2_\Sigma u(x)-s\,\mathrm{I\!I}_\nu(x)+\ tg_\Sigma(x)\ge 0\},\\ \Omega\coloneqq\{&x\in\Sigma\ \text{such that}\ (x,s,t)\in V\ \text{for some}\ s,t\in\mathbb{R}\},\end{aligned}$$

其中 g_Σ 表示 Σ上的诱导度量。特别地，由于 Σ是 $\mathbb{S}^{n+1}$的极小子流形，我们有

$$0\le\mathrm{tr}_{g_\Sigma}(D^2_\Sigma u(x)-s\,\mathrm{I\!I}_\nu(x)+\ tg_\Sigma(x))=\Delta_\Sigma u(x)+nt\quad\text{for } (x,s,t)\in V. \tag{2.4}$$

我们还定义映射 Φ： $\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+2}$ 如下:

$$\Phi(x,s,t)=\nabla^\Sigma u(x)+s\nu+tx\quad\text{for } x\in\Sigma,\ s,t\in\mathbb{R}.$$

引理 2.1。我们有 $\mathbb{B}^{n+2}=\Phi(V)$。

证明。显然， $\Phi(V)\subseteq\mathbb{B}^{n+2}$。为证明反向包含关系，取 $\mathbb{B}^{n+2}$ 中的一个点ξ 。对于每个 $x\in\Sigma$，记 $\xi^{\tan}_x$为 ξ 在 $T_x\Sigma$ 上的正交投影像。换言之，

$$\langle\xi^{\tan}_x,V\rangle=\langle\xi,V\rangle\quad\text{for every } V\in T_x\Sigma.$$

考虑函数

$$v(x) \coloneqq u(x) - \langle \xi, x \rangle \quad \text{for } x \in \Sigma.$$

由于 Σ 是闭的，函数 v 在某个点 $x_0 \in \Sigma$ 处取得全局最小值。于是

$$0 = \nabla^\Sigma v(x_0) = \nabla^\Sigma u(x_0) - \xi^{\tan}_{x_0}.$$

因此，$\xi = \nabla^\Sigma u(x_0) + s_0 \nu + t_0 x_0$，其中 $s_0 = \langle \xi, \nu \rangle$ 和 $t_0 = \langle \xi, x_0 \rangle$。特别地，由于 $\nabla^\Sigma u(x_0)$、x_0 和 ν 彼此垂直，可得 $|\nabla^\Sigma u(x_0)|^2 + s_0^2 + t_0^2 = |\xi|^2 < 1$。此外，我们还有

$$0 \le D^2_\Sigma v(x_0) = D^2_\Sigma u(x_0) - s_0 \,\mathrm{I\!I}_\nu + t_0 g_\Sigma(x_0).$$

因此，$(x_0, s_0, t_0) \in V$，且 $\xi = \Phi(x_0, s_0, t_0)$。由于 ξ 的选取是任意的，这就完成了该引理的证明。□

引理 2.2. 对于每个 $(x, s, t) \in V$，我们有

$$f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t \ge 0. \tag{2.5}$$

此外，对于每个 $(x, s, t) \in V$，Φ 的雅可比行列式满足 s

$$|\det D\Phi(x, s, t)| \le \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t \right)^n. \tag{2.6}$$

证明。为开始该引理的证明，我们固定 $\in V$ 中的任意一点（x，s，t）。我们首先证明（2.5）。根据 u 的方程，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma u(x) &= \frac{n}{n+1} \log f(x) - \frac{1}{2n} \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f^2} - \left\langle \frac{\nabla^\Sigma f}{f}, \nabla^\Sigma u \right\rangle. \\
&= \frac{n}{n+1} \log f(x) + \frac{n}{2} |\nabla^\Sigma u|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\nabla^\Sigma f}{f} + \sqrt{n} \nabla^\Sigma u \right|^2 \\
&\le \frac{n}{n+1} \log f(x) + \frac{n}{2} |\nabla^\Sigma u|^2.
\end{aligned}$$

利用基本不等式

$$\log \lambda \le \lambda - 1 \ \text{ for } \lambda > 0 \quad \text{and} \quad \sqrt{1 - \theta} \le 1 - \frac{\theta}{2} \ \text{ for } 0 \le \theta \le 1,$$

我们得到

$$\frac{1}{n+1} \log f(x) \le f(x)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \quad \text{and} \quad \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u|^2} \le 1 - \frac{|\nabla^\Sigma u|^2}{2}. \tag{2.7}$$

因此，我们通过以下方式继续对 $\Delta_\Sigma u$ 进行估计：

$$\Delta_\Sigma u(x) \le n \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - 1 + \frac{|\nabla^\Sigma u|^2}{2} \right) \le n \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u|^2} \right). \tag{2.8}$$

因此，由 (2.4) 和 (2.18) 可得

$$0 \le \Delta_\Sigma u(x) + nt \le n\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2} + t\right). \tag{2.9}$$

这验证了 (2.5)。

为证明 (2.6)，我们在 Σ 中的 x 邻域内选取一个局部正交标架 $\{e_1,\dots,e_n\}$。相对于标架 $\{e_1,\dots,e_n,\nu,x\}$，我们计算

$$\begin{aligned}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\Phi, e_j\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla^\Sigma u, e_j\rangle + s\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_j\rangle + t\langle \overline{\nabla}_{e_i}x, e_j\rangle \\ &= (D^2_\Sigma u)(e_i,e_j) - s\,\mathrm{I\!I}_\nu(e_i,e_j) + t\delta_{ij}.\end{aligned}$$

此外，由于

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi = \nu \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi = x,$$

我们推知

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\Phi,\, e_j\right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\Phi,\, \nu\right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\Phi,\, x\right\rangle = 0,$$

and

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi,\, e_j\right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi,\, \nu\right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi,\, x\right\rangle = 1.$$

因此，表示 $D\Phi$ 的矩阵具有如下形式

$$D\Phi(x,y,t) = \left(\begin{array}{c|c} D^2_\Sigma u(x) - s\,\mathrm{I\!I}_\nu + tI_n & * \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right). \tag{2.10}$$

因此，由于 $D^2_\Sigma u(x) - s\,\mathrm{II}_\nu + tI_n \ge 0$ as $(x,s,t) \in V$，由 (2.9)、(2.10) 和算术-几何平均不等式可得

$$\begin{aligned}|\det D\Phi(x,s,t)| &= \det(D^2_\Sigma u(x) - s\,\mathrm{I\!I}_\nu + tI_n) \\ &\le \left(\frac{\Delta_\Sigma u(x) + nt}{n}\right)^n \\ &\le \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t\right)^n. \end{aligned}\tag{2.11}$$

这验证了 (2.6)，并完成了引理的证明。 □

由 (2.5) 以及引理 2.1 中 $\Phi(V) = \mathbb{B}^{n+2}$ 的事实可知，对于任意 $(x,s,t) \in V$，t 的取值范围为

$$\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} - f(x)^{\frac{1}{n+1}} \le t \le \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2}.$$

在下一步中，我们遵循 [4] 中的论证。回顾一下，$|\Phi(x,s,t)|^2 = |\nabla^\Sigma u(x)|^2 + s^2 + t^2$。结合 (2.2)、引理 2.1 和 Fubini定理，我们得到

$$\begin{aligned}
\pi|\mathbb{B}^{n+1}| &= \int_{\mathbb{B}^{n+2}} \frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}} d\xi \\
&\le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{-\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2-t^2}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2-t^2}} \\
&\qquad |\det D\Phi(x,s,t)| \frac{1}{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2-t^2-s^2}} \, 1_V(x,s,t)\, ds\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{-\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2-t^2}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2-t^2}} \\
&\qquad \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}+t\right)^n \frac{1}{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2-t^2-s^2}} ds\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&= \pi \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}+t\right)^n dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&= \frac{\pi}{n+1} \int_\Omega f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x),
\end{aligned}$$

其中，在这一串等式中倒数第二个等号处用到了恒等式 $\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}} ds = \pi$。根据 (2.3)，当 Σ 连通时，余维 1 情形下 (1.1) 的证明便完成了。

现在假设 Σ 不连通。接着，对 Σ 的每个连通分支分别应用 (2.1)，将结果相加，并利用初等不等式

$$a\log a + b\log b < (a+b)\log(a+b) \quad \text{for all } a,b>0$$

即可完成此情形下的证明。

2.2. 定理 1.5 的证明

设 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$ 中一个闭的 n 维子流形，带有诱导度量 g_Σ。记 $T_x^\perp\Sigma$ 为 Σ 在 x 处相对于 $\mathbb{S}^{n+m}$（而非 $\mathbb{R}^{n+m+1}$）的法空间。对于每个 $y \in T_x^\perp\Sigma$，记 II_y 为 Σ 在 x 处沿 y 方向的标量第二基本形式。这意味着

$$\mathrm{II}_y(V,W) = \langle \mathrm{II}(V,W), y\rangle = \langle \overline{\nabla}_V W, y\rangle \quad \text{for every } V,W \in T_x\Sigma,$$

其中 $\overline{\nabla}$ 是 $\mathbb{R}^{n+m+1}$ 上的欧几里得联络，$\mathrm{II}(V,W) := (\overline{\nabla}_V W)^\perp$ 是 Σ 上相对于 $\mathbb{S}^{n+m}$的第二基本形式。Σ 上的平均曲率向量H 是 II 的主方向的平均值。因此，H 是零向量场

当 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$的极小子流形时。

为证明定理1.5，我们假设 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$ 中一个闭的 n 维极小子流形，其中 $m \geq 2$。暂且假设 Σ 是连通的。令 f 为 Σ 上的一个正光滑函数。将 f 乘以一个（唯一的）正常数后，不失一般性地，我们可以假设

$$\frac{n}{n+1}\int_\Sigma f(x)\log(f(x))\,d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) = \frac{1}{2n}\int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f(x)|^2}{f(x)}\,d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.12}$$

接下来，我们需要证明

$$(n+1)\frac{|\mathbb{S}^{n+m}|}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \leq \int_\Sigma f(x)\,d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.13}$$

由于 $f>0$ 和 Σ 是连通的，由 (2.12) 可知，存在一个（模常数唯一的）光滑解 u，满足方程

$$\mathrm{div}(f\,\nabla^\Sigma u) = \frac{n}{n+1} f\log f - \frac{1}{2n}\frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}.$$

对于每个 $0 \leq r < 1$，我们定义

$$\begin{aligned} V_r \coloneqq \{&(x,y,t):\ x\in\Sigma,\, y\in T_x^\perp\Sigma,\, t\in\mathbb{R} \text{ such that}\\ &r^2 \leq |\nabla^\Sigma u(x)|^2 + |y|^2 + t^2 < 1 \text{ and } D^2_\Sigma u(x) - \mathrm{I\!I}_y + t g_\Sigma(x) \geq 0\},\\ \Omega \coloneqq \{&x\in\Sigma \text{ such that } (x,y,t)\in V_0 \text{ for some } y\in T_x^\perp\Sigma \text{ and } t\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

特别地，由于 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+m}$ 的一个极小子流形，我们有

$$0 \leq \mathrm{tr}_{g_\Sigma}(D^2_\Sigma u(x) - \mathrm{I\!I}_y + t g_\Sigma(x)) = \Delta_\Sigma u(x) + nt \quad \text{for } (x,y,t)\in V_0. \tag{2.14}$$

我们还定义映射 $\Phi\colon\ T^\perp\Sigma\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+m+1}$ 如下

$$\Phi(x,y,t) = \nabla^\Sigma u(x) + y + tx \quad \text{for } x\in\Sigma,\ y\in T_x^\perp\Sigma,\ t\in\mathbb{R}.$$

引理2.3. 对每个 $0\leq r<1$，都有 $\{\xi\in\mathbb{R}^{n+m+1}:\ r\leq|\xi|<1\} = \Phi(V_r)$。

证明。由 V_r 的定义可知 $\Phi(V_r)\subseteq\mathbb{B}^{n+m+1}(1)\backslash\mathbb{B}^{n+m+1}(r)$，这是显然的。为证明反向包含，取一个满足 $r\leq|\xi|<1$ 的点 ξ，其中 $\xi\in\mathbb{R}^{n+m+1}$。对于每个 $x\in\Sigma$，我们用 $\xi_x^{\tan}$ 表示 ξ 在正交投影到 $T_x\Sigma$ 下的像。换言之，

$$\langle \xi_x^{\tan}, V\rangle = \langle \xi, V\rangle \quad \text{for every } V\in T_x\Sigma.$$

我们考虑函数

$$v(x) \coloneqq u(x) - \langle \xi, x\rangle \quad \text{for } x\in\Sigma.$$

由于 Σ 是闭集，函数 v 在某个点 $x_0 \in \Sigma$处取得其全局最小值。于是

$$0 = \nabla^\Sigma v(x_0) = \nabla^\Sigma u(x_0) - \xi^{\tan}_{x_0}.$$

因此，注意到对于每个 $y \in T^\perp_x\Sigma$ 都有 $x \perp y$，我们得出 $\xi = \nabla^\Sigma u(x_0) + y_0 + t_0 x_0$，其中 $t_0 = \langle \xi、\ x_0\rangle$，且 y_0 是 $T^\perp_{x_0}\Sigma$ 中的某个向量。特别地，由于 $\nabla^\Sigma u(x_0)$、x_0 和 y_0 两两垂直，可得 $|\nabla^\Sigma u(x_0)|^2 + |y_0|^2 + t_0^2 = |\xi|^2$ （它属于 $[r^2, 1)$）。此外，我们还有

$$0 \le D^2_\Sigma v(x_0) = D^2_\Sigma u(x_0) - \mathrm{I\!I}_{y_0} + t_0 g_\Sigma(x_0).$$

因此，$(x_0, y_0, t_0) \in V_r$ 和 $\xi = \Phi(x_0, y_0, t_0)$。由于 ξ 是任意选取的，这就完成了引理的证明。□

引理 2.4. 对于每个 $(x, y, t) \in V_0$，我们有

$$f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t \ge 0. \tag{2.15}$$

此外，对于每个 $(x, y, t) \in V_0$，Φ 的雅可比行列式满足

$$|\det D\Phi(x, y, t)| \le \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t \right)^n. \tag{2.16}$$

证明。为开始证明该引理，我们固定一个任意的点 $(x, y, t) \in V_0$。首先证明 (2.15)。根据 u 的方程，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma u(x) &= \frac{n}{n+1}\log f(x) - \frac{1}{2n}\frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f^2} - \left\langle \frac{\nabla^\Sigma f}{f}, \nabla^\Sigma u \right\rangle. \\
&= \frac{n}{n+1}\log f(x) + \frac{n}{2}|\nabla^\Sigma u|^2 - \frac{1}{2}\left| \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\nabla^\Sigma f}{f} + \sqrt{n}\nabla^\Sigma u \right|^2 \\
&\le \frac{n}{n+1}\log f(x) + \frac{n}{2}|\nabla^\Sigma u|^2.
\end{aligned}$$

利用基本不等式

$$\log\lambda \le \lambda - 1 \ \text{ for } \lambda > 0 \quad \text{and} \quad \sqrt{1-\theta} \le 1 - \frac{\theta}{2} \ \text{ for } 0 \le \theta \le 1,$$

我们得到

$$\frac{1}{n+1}\log f(x) \le f(x)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \quad \text{and} \quad \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u|^2} \le 1 - \frac{|\nabla^\Sigma u|^2}{2}. \tag{2.17}$$

因此，我们继续对 $\Delta_\Sigma u$ 进行如下估计：

$$\Delta_\Sigma u(x) \le n\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - 1 + \frac{|\nabla^\Sigma u|^2}{2} \right) \le n\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u|^2} \right). \tag{2.18}$$

由此可见，由 (2.14) 和 (2.18) 可得

$$0 \le \Delta_\Sigma u(x) + nt \le n\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2} + t\right). \tag{2.19}$$

这就验证了（2.15）。

为证明 (2.16)，我们在正规丛 $T^\perp\Sigma$ 的全空间中，于 (x,y) 处选取一个局部正交规范标架 $\{e_1,\dots,e_n,\nu_1,\dots,\nu_m\}$，使得 $e_i \in T_x\Sigma$ 且 $\nu_\alpha \in T_x^\perp\Sigma$。相对于标架 $\{e_1,\dots,e_n,\nu_1,\dots,\nu_m,x\}$，在点 (x,y,t) 处，我们计算

$$\begin{aligned}\langle \overline{\nabla}_{e_i}\Phi, e_j\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla^\Sigma u, e_j\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} y, e_j\rangle + t\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, e_j\rangle \\ &= (D^2_\Sigma u)(e_i,e_j) - \mathrm{I\!I}_y(e_i,e_j) + t\delta_{ij}.\end{aligned}$$

此外，由于

$$\overline{\nabla}_{\nu_\alpha}\Phi = \overline{\nabla}_{\nu_\alpha} y = \nu_\alpha \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi = x,$$

由此可推得

$$\langle \overline{\nabla}_{\nu_\alpha}\Phi, e_j\rangle = 0, \quad \langle \overline{\nabla}_{\nu_\alpha}\Phi, \nu_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle \overline{\nabla}_{\nu_\alpha}\Phi, x\rangle = 0$$

and

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi,\, e_j \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi,\, \nu_\beta \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Phi,\, x \right\rangle = 1.$$

因此，表示 $D\Phi$ 的矩阵具有如下形式。

$$D\Phi(x,y,t) = \left(\begin{array}{c|c} D^2_\Sigma u(x) - \mathrm{I\!I}_y + tI_n & * \\ \hline 0 & I_{m+1}\end{array}\right). \tag{2.20}$$

因此，由于 $D^2_\Sigma u(x) - \mathrm{II}_y + tI_n \ge 0$ as $(x,y,t) \in V$，根据（2.19）、（2.20）以及算术-几何平均不等式可得

$$\begin{aligned}|\det D\Phi(x,y,t)| &= \det(D^2_\Sigma u(x) - \mathrm{I\!I}_y + tI_n) \\ &\le \left(\frac{\Delta_\Sigma u(x) + nt}{n}\right)^n \\ &\le \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t\right)^n. \end{aligned}\tag{2.21}$$

这就验证了（2.16），并完成了引理的证明。 □

根据（2.15）以及由引理2.3可知的 $\Phi(V_0) = \mathbb{B}^{n+m+1}$，对于任意 $(x,y,t) \in V_0$，t的取值范围为

$$\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} - f(x)^{\frac{1}{n+1}} \le t \le \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2}.$$

下一步，我们遵循 [5] 中的论证。首先固定任意一个 $0 < r < 1$。然后，结合（2.4）、引理2.3和Fubini定理，可得

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{B}^{n+m+1}|(1-r^{n+m+1}) \\
&\qquad = |\{\xi \in \mathbb{R}^{n+m+1} : r \le |\xi| < 1\}| \\
&\qquad \le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{\{y\in T_x^\perp\Sigma:\, r^2\le|\nabla^\Sigma u|^2+t^2+|y|^2<1\}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad |\det D\Phi(x,y,t)|\, 1_{V_r}(x,y,t)\, dy\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\qquad \le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{\{y\in T_x^\perp\Sigma:\, r^2\le|\nabla^\Sigma u|^2+t^2+|y|^2<1\}} \\
&\qquad\qquad \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2}+t\right)^n 1_{V_r}(x,y,t)\, dy\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \\
&\qquad \le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{\{y\in T_x^\perp\Sigma:\, r^2\le|\nabla^\Sigma u|^2+t^2+|y|^2<1\}} \\
&\qquad\qquad\qquad \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2}+t\right)^n dy\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x).
\end{aligned}$$

此外，对于每个 $x \in \Omega$，利用初等不等式 $b^{\frac{m}{2}} - a^{\frac{m}{2}} \le \frac{m}{2}(b-a)$（适用于 $0 \le a \le b < 1$和 $m \ge 2$），我们有

$$\begin{aligned}
&|\{y \in T_x^\perp\Sigma : r^2 \le |\nabla^\Sigma u|^2 + t^2 + |y|^2 < 1\}| \\
&\qquad \le |\mathbb{B}^m| \left((1-|\nabla^\Sigma u|^2-t^2)_+^{\frac{m}{2}} - (r^2-|\nabla^\Sigma u|^2-t^2)_+^{\frac{m}{2}}\right) \\
&\qquad \le \frac{m}{2}|\mathbb{B}^m|(1-r^2).
\end{aligned}$$

因此，我们继续前面的估计链：

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{B}^{n+m+1}|(1-r^{n+m+1}) \\
&\le \frac{m}{2}|\mathbb{B}^m|(1-r^2)\int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \left(f^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}+t\right)^n dt d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le \frac{m}{2(n+1)}|\mathbb{B}^m|(1-r^2)\int_\Omega f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x).
\end{aligned}$$

将不等式两边相除

$$|\mathbb{B}^{n+m+1}|(1-r^{n+m+1}) \le \frac{m}{2(n+1)}|\mathbb{B}^m|(1-r^2)\int_\Omega f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x)$$

再除以 $(1-r)$，然后令 $r \to 1$ 趋于无穷，得到

$$|\mathbb{S}^{n+m}| \leq \frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{n+1} \int_\Omega f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \leq \frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{n+1} \int_\Sigma f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.22}$$

最后一个不等式与 (2.13) 相同。由此完成 Σ 连通时定理的证明。

现在假设 Σ 不连通。于是，我们对 Σ的每个连通分支分别应用 (1.1)，将结果相加，并使用初等不等式

$$a \log a + b \log b < (a+b)\log(a+b) \quad \text{for all } a, b > 0$$

即可完成此情形的证明。定理1.5的证明至此完成。

2.3. Proof of Theorem 1.3的证明

设 Σ 是 $\mathbb{S}^{n+2}$ 中的闭 n维极小子流形，且 f 是 Σ上的正光滑函数。正如引言中所指出的，不等式 (1.1) 是定理1.5的直接推论。我们只需验证刚性结论。为此，我们进一步假设 f 满足

$$\int_\Sigma f\,(\log f + \log(|\mathbb{S}^n|)) - \left(\int_\Sigma f\right) \log\left(\int_\Sigma f\right) = \frac{n+1}{2n^2} \int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}. \tag{2.23}$$

由定理1.5证明的最后一段，我们得出 Σ 是连通的。将 f 乘以一个（唯一的）正常数后，不失一般性地假设

$$\frac{n}{n+1} \int_\Sigma f(x) \log(f(x))\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) = \frac{1}{2n} \int_\Sigma \frac{|\nabla^\Sigma f(x)|^2}{f(x)}\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.24}$$

由 (2.23)，这意味着

$$|\mathbb{S}^n| = \int_\Sigma f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x). \tag{2.25}$$

由于 $f > 0$ 和 Σ 是连通的，由 (2.24) 可知，存在一个光滑解 u （在相差一个常数的意义下唯一），满足方程

$$\mathrm{div}(f\,\nabla^\Sigma u) = \frac{n}{n+1} f \log f - \frac{1}{2n} \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f}.$$

我们按照定理1.5证明中的定义来定义集合 Ω、V_r 以及映射 Φ 。由 (2.22) 可知，Ω 在 Σ 中稠密。

引理 2.5. 对于每个 $(x, y, t) \in V_0$，我们有

$$|\det D\Phi(x,y,t)| = \left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1 - |\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t\right)^n.$$

证明. 假设在某个点 $(x_0, y_0, t_0) \in V_0$，有

$$|\det D\Phi(x_0, y_0, t_0)| < \left(f(x_0)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x_0)|^2} + t\right)^n.$$

然后，由连续性和引理 2.4，存在 U 的一个开邻域，它包含 x_0、y_0、t_0，位于 $T^\perp\Sigma \times \mathbb{R}$ 中，并且存在一个满足条件的数 $0 < \varepsilon < 1$

$$|\det D\Phi(x, y, t)| < (1-\varepsilon)\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t\right)^n \text{ in } U \cap V_0.$$

设 U_{x_0} 是 U 在投影到 Σ下的像。换言之，

$$U_{x_0} \coloneqq \{x \in \Sigma \text{ such that } (x, y, t) \in U \text{ for some } y \in T_x^\perp\Sigma,\, t \in \mathbb{R}\}.$$

显然， U_{x_0} 在 Σ中包含 x_0 的一个开邻域。特别地， $|U_{x_0}| > 0$。接下来固定任意 $0 < r < r_0$。由引理 2.4 以及定理1.5证明中的论证可知，我们有

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{B}^{n+3}|(1-r^{n+3}) \\
&= |\mathbb{B}^{n+3}(1) \backslash \mathbb{B}^{n+3}(r)| \\
&\le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{\{y \in T_x^\perp\Sigma:\, r^2 \le |\nabla^\Sigma u|^2+t^2+|y|^2<1\}} \\
&\qquad (1-\varepsilon 1_U(x,y,t))\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t\right)^n 1_{V_r}(x,y,t)\, dy\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le \int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} \int_{\{y \in T_x^\perp\Sigma:\, r^2 \le |\nabla^\Sigma u|^2+t^2+|y|^2<1\}} \\
&\qquad\qquad (1-\varepsilon 1_U(x,y,t))\left(f(x)^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u(x)|^2} + t\right)^n dy\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le |\mathbb{B}^2|(1-r^2)\int_\Omega \int_{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}-f^{\frac{1}{n+1}}}^{\sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2}} (1-\varepsilon 1_{U_{x_0}})\left(f^{\frac{1}{n+1}} - \sqrt{1-|\nabla^\Sigma u|^2} + t\right)^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le \frac{|\mathbb{B}^2|(1-r^2)}{n+1}\int_\Omega (1-\varepsilon 1_{U_{x_0}}(x)) f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x).
\end{aligned}$$

将上述不等式除以 $(1-r)$，再令 $r \to 1$ 并取极限，同时回忆恒等式 $(n+3)$ $|\mathbb{B}^{n+3}| = 2|\mathbb{B}^2||\mathbb{B}^{n+1}| = 2|\mathbb{B}^2||\mathbb{S}^n|/(n+1)$，即可得到

$$\begin{aligned}
|\mathbb{S}^n| \le \int_\Omega (1-\varepsilon 1_{U_{x_0}}(x)) f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) &\le \int_\Sigma (1-\varepsilon 1_{U_{x_0}}(x)) f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&< \int_\Sigma f(x)\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x).
\end{aligned}$$

这与 (2.25) 矛盾。引理的证明完成。 □

结合引理 2.4 和引理 2.5，可知 (2.21) 和 (2.17) 在 V_0 上必须取等号。(2.17) 中的等式意味着，对于 $(x, y, t) \in V_0$，$f(x) = 1$ and $\nabla u(x) = 0$。由于 Ω 是从 V_0 到 Σ 的投影，且在 Σ中稠密，我们得出$f = 1$，并且 u 在 Σ上为常数。因此，对于每个 $x \in \Sigma$ 以及充分小的$y \in T_x^{\perp}\Sigma$，三元组 $(x, y, 1_2)$ 属于 V_0。此外，(2.21) 中的等式意味着，对于每个这样的 y，II_y 是 I_n 的倍数。作为具有这一性质的极小子流形，Σ 是全测地的。定理1.3的证明完成。

3. Proof of Theorem 1.8

本节中，我们证明定理 1.8。我们将证明分为两部分。第一部分证明不等式 (1.4)，第二部分证明刚性结论。

3.1. Proof of the inequality (1.4)

设 $n \in \mathbb{N}$ 和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个光滑有界区域。假设 A 是 Ω 上的一个光滑一致正定对称矩阵值函数。将 A 乘以一个（唯一的）正常数后，我们还可以进一步假设

$$n \int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} dx = \int_{\partial\Omega} |A(x)\nu| d\sigma(x) + \int_\Omega |\operatorname{Div} A(x)| dx. \tag{3.1}$$

于是我们需要证明

$$|\mathbb{B}^n| \le \int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} dx. \tag{3.2}$$

由于 A 为正且对称，根据 (3.1)，方程组存在一个解 u （在相差一个常数的意义下唯一）

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = n(\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} - |\operatorname{Div} A(x)| & \text{in } \Omega \\ \langle A(x)\nabla u, \nu\rangle = |A(x)\nu| & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

由于 $n(\det A)^{1/(n-1)} - |\operatorname{Div} A|$ 在 Ω 中是 Lipschitz 连续的，且 $A\nu$ 在 $\partial\Omega$ 上处处不与切向相切，根据椭圆方程的标准理论，u 属于类 $C^{2,\alpha}(\Omega)$，对每个 $0 < \alpha < 1$ 均成立（参见 [15], 第 6.7 节）。令 V 表示集合

$$V := \{x \in \Omega \text{ such that } |\nabla u(x)| < 1 \text{ and } D^2u(x) \ge 0\}.$$

引理 3.1。我们有 $\mathbb{B}^n = \nabla u(V)$。

证明。显然 $\nabla u(V) \subseteq \mathbb{B}^n$。为证明反向包含关系，我们固定一个任意向量$\xi \in \mathbb{B}^n$。然后考虑函数

$$v(x) := u(x) - \langle \xi, x\rangle \quad \text{for } x \in \overline{\Omega}.$$

设 x_0 是 v的一个最小点。如果 $x_0 \in \partial\Omega$，那么，由于 A 在 Ω 上是正对称的，并且 $|\xi| < 1$，我们有

$$\begin{aligned} 0 \geq \langle \nabla v(x_0), A(x_0)\nu \rangle &= \langle \nabla u(x_0), A(x_0)\nu \rangle - \langle \xi, A(x_0)\nu \rangle \\ &= |A(x_0)\nu| - \langle \xi, A(x_0)\nu \rangle \\ &> 0. \end{aligned}$$

因此，$x_0 \in\Omega$。由此，根据 v 的定义，我们得到

$$\xi = \nabla u(x_0) \quad \text{and} \quad D^2 u(x_0) \geq 0.$$

引理的证明完成。 □

引理 3.2. 对于每个 $x \in V$，我们有

$$\det(D^2 u(x)) \leq (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}.$$

证明。我们先固定一个点 $x \in V$。注意到

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x) = \operatorname{tr}(A(x)D^2 u(x)) + \langle \operatorname{Div} A(x), \nabla u(x) \rangle.$$

因此，根据 u 的方程可知

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A(x)D^2 u(x)) &= \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) - \langle \operatorname{Div} A(x), \nabla u(x) \rangle \\ &= n(\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} - |\operatorname{Div} A(x)| - \langle \operatorname{Div} A(x), \nabla u(x) \rangle \\ &\leq n(\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中我们用到了这样一个事实：$|\nabla u(x)| < 1$。由于 $D^2 u(x) \geq 0$，我们将引理 A.1 应用于对 $A(x)$，$D^2 u(x)$，并利用 (3.3) 得到

$$\begin{aligned} \det(D^2 u(x)) &= \frac{1}{\det A(x)} \det(A(x)D^2 u(x)) \\ &\leq \frac{1}{\det A(x)} \left(\frac{\operatorname{tr}(A(x)D^2 u(x))}{n} \right)^n \\ &\leq (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

至此，引理的证明完成。 □

应用引理 3.1、引理 3.2 和面积公式，我们得出

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}^n| = |\nabla u(V)| \leq \int_V \det(D^2 u(x))dx &\leq \int_V (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} dx \\ &\leq \int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

这与 (3.2) 一致。(1.4) 的证明至此完成。

3.2. Proof of the rigidity statement of Theorem 1.8

设 $n \in \mathbb{N}$ 和 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界区域。假设 A 是 Ω 上的光滑一致正定对称矩阵值函数，且 (1.4) 中等号成立。将 A 乘以一个（唯一的）正常数后，我们还可以进一步假设

$$n\int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}dx = \int_{\partial\Omega} |A(x)\nu|d\sigma(x) + \int_\Omega |\operatorname{Div} A(x)|dx. \tag{3.6}$$

等价地，这意味着

$$|\mathbb{B}^n| = \int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}dx. \tag{3.7}$$

设 u和 V分别为第 3.1 节中的函数和集合。那么，由 (3.5) 可立即推出 V是 Ω 的稠密子集。特别地，根据连续性，我们有 $D^2u \geq 0$ 和 $|\nabla u| \leq 1$ 在 Ω 上。

引理 3.3. 对每个 $x \in V$，我们有

$$\det(D^2u(x)) = (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}.$$

证明. 鉴于引理 3.2，反设存在一个点$x_0 \in V$满足

$$\det(D^2u(x_0)) < (\det A(x_0))^{\frac{1}{n-1}}.$$

由连续性可知，存在 x_0 的一个开邻域 U 以及一个数 $0 < \varepsilon < 1$，使得

$$\det(D^2u(x)) < (1-\varepsilon)(\det A(x)))^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{for } x \in U \cap V.$$

结合引理 3.1、引理 3.2 和这一结论，我们可推得

$$\begin{aligned}
|\mathbb{B}^n| \leq |\nabla u(V)| &\leq \int_V \det(D^2u(x))dx \\
&\leq \int_V (1-\varepsilon 1_U(x))(\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}dx \\
&\leq \int_\Omega (1-\varepsilon 1_U(x))(\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}dx \\
&< \int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}dx,
\end{aligned}$$

这与 (3.7) 矛盾。引理的证明至此完成。 □

由于 V在 Ω 中稠密，特别地，由引理 3.3 可得

$$\det(D^2u(x)) = (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} > 0 \quad \text{for } x \in \overline{\Omega}. \tag{3.8}$$

因此，再次回顾引理 3.1，我们推得

$$|\mathbb{B}^n| \leq |\nabla u(\Omega)| \leq \int_\Omega \det(D^2u(x))dx = \int_\Omega (\det A(x))^{\frac{1}{n-1}}dx,$$

根据 (3.7)，这进而意味着 $|\mathbb{B}^n| = |\nabla u(\Omega)|$ 。

引理 3.4. 张量 A 在 Ω 中散度为零。此外， u 在 Ω 中光滑，且 $\nabla u(\Omega) = \mathbb{B}^n$。

证明. 结合 (3.8) 和引理 3.2，我们推知 (3.3) 必须取等号。由于 $|\nabla u| < 1$ 属于 V，可得 $\operatorname{Div} A = 0$ 属于 V。由于 V 在 Ω 中稠密，我们得出 A 在 Ω 中散度为零。因此， u 的方程变为

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = n(\det A(x))^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{in } \Omega.$$

现在，由于右端项光滑，根据椭圆方程的标准理论， u 在 Ω 中光滑。此外，根据 (3.8) 和反函数定理， $\nabla u(\Omega)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集。由于 $\mathbb{B}^n \subseteq \nabla u(\Omega)$ 和 $|\mathbb{B}^n| = |\nabla u(\Omega)|$，我们得出 $\mathbb{B}^n = \nabla u(\Omega)$。引理的证明完成。□

引理 3.5。对于 $x \in \Omega$， $A(x) = (\operatorname{cof} D^2u(x))$，即 $D^2u(x)$ 的余子式矩阵。

证明。根据 (3.8) 和引理 3.2，我们推知 (3.4) 必须是一串等式。特别地，由引理 A.1 和 V 的稠密性可知，对于某个定义在 Ω 上的正光滑函数 λ ，以及每个 $x \in \Omega$，都有$A(x)D^2u(x) = \lambda(x)I_n$ 。等价地，由于 $D^2u(x)$ 是可逆的，存在一个定义在 Ω 上的正光滑函数 g ，满足

$$A(x) = g(x)(\operatorname{cof} D^2u(x)) \qquad \text{for } x \in \Omega.$$

再次回顾（3.8），我们得到

$$\det A = g^n \det(\operatorname{cof} D^2u) = g^n(\det D^2u)^{n-1} = g^n \det A.$$

因此， $g \equiv 1$。引理的证明完成。 □

结合引理 3.4 和引理 3.5，我们完成了定理 1.8 的证明。

4. Proof of Theorem 1.9

在本节中，我们将使用牛顿张量的一些性质（例如参见 [21]）。令$n \in \mathbb{N}$ 和 A 为一个 $(n \times n)$-对称矩阵和 $1 \leq k \leq n-1$，回顾一下，k-牛顿张量定义为

$$T_k^{ij}(A) := \frac{\partial \sigma_{k+1}(A)}{\partial A_{ij}}.$$

由于 σ_{k+1} 是 $(k+1)$-齐次的，根据 T_k 的定义，欧拉齐次函数定理可得

$$\sigma_{k+1}(A) = \frac{1}{k+1} \operatorname{tr}\left(T_k(A) \cdot A\right). \tag{4.1}$$

牛顿张量有一个递推公式，以 $T_0 = I_n$ 开始，并且

$$T_k(A) = \sigma_k(A)\, I_n - T_{k-1}(A) \cdot A. \tag{4.2}$$

对（4.2）取迹并利用（4.1），得到

$$\operatorname{tr} T_k(A) = (n-k)\, \sigma_k(A). \tag{4.3}$$

若进一步假设 $A \in \Gamma_{k+1}$，则如引言中所述，$T_k(A)$ 是正定的。此外，G̊arding 关于 σ_k 的不等式具有如下形式：

命题 4.1（[14], 定理 5）。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le n-1$。假设 A 和 B 是大小为 n 的方对称矩阵。若 $A,\ B \in \Gamma_{k+1}$，则

$$\operatorname{tr}(T_k(A)B) \ge (k+1)(\sigma_{k+1}(A))^{\frac{k}{k+1}}(\sigma_{k+1}(B))^{\frac{1}{k+1}}.$$

为证明推论 1.10，我们证明 G̊arding 不等式的如下推论：

引理 4.2. 设 $n \in \mathbb{N}$、$n \ge 2$ 和 $1 \le k \le n-2$。假设 A 是一个 n 阶方阵，且为对称矩阵。如果 $A \in \Gamma_{k+1}$，则

$$\det T_k(A) \ge \binom{n-1}{k}^n H_{k+1}(A)^{\frac{nk}{k+1}}. \tag{4.4}$$

当且仅当对于某个 $\lambda > 0$，$A = \lambda I_n$ 时，等号成立。

回顾一下，$H_k(A)$ 是 $\sigma_k(A)$ 的归一化，即 $H_k(A) := \sigma_k(A)/\binom{n}{k}$。当 $k = n-1$ 时，(4.4) 取等号。

引理 4.2 的证明。由于 $A \in \Gamma_{k+1}$，其 k-牛顿张量 $T_k(A)$ 是正定的。因此，在命题 4.1 中取 $B = \operatorname{cof} T_k(A)$，并应用麦克劳林不等式，可得

$$\begin{aligned} n \det T_k(A) &= \operatorname{tr}(T_k(A) \operatorname{cof} T_k(A)) \\ &\ge (k+1)\, \sigma_{k+1}(A)^{\frac{k}{k+1}}\, \sigma_{k+1}(\operatorname{cof} T_k(A))^{\frac{1}{k+1}} \\ &\ge (k+1)\, \sigma_{k+1}(A)^{\frac{k}{k+1}} \binom{n}{k+1}^{\frac{1}{k+1}} (\det \operatorname{cof} T_k(A))^{\frac{1}{n}} \\ &= (k+1)\, \sigma_{k+1}(A)^{\frac{k}{k+1}} \binom{n}{k+1}^{\frac{1}{k+1}} (\det T_k(A))^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

因此，我们得到

$$\det T_k(A) \geq \binom{k+1}{n}^n \binom{n}{k+1}^{\frac{n}{k+1}} \sigma_{k+1}(A)^{\frac{nk}{k+1}} = \binom{n-1}{k}^n H_{k+1}(A)^{\frac{nk}{k+1}}.$$

这就完成了（4.4）的证明。如果（4.4）中的等式成立，那么根据（4.5），我们必须有

$$\sigma_{k+1}(\operatorname{cof} T_k(A))^{\frac{1}{k+1}} = (\det \operatorname{cof} T_k(A))^{\frac{1}{n}}.$$

因此，由麦克劳林不等式可知，$\operatorname{cof} T_k(A) = \mu I_n$，其中某个 $\mu > 0$。等价地，这意味着 $T_k(A) = \eta I_n$，其中某个 $\eta > 0$。由于 $A \in \Gamma_{k+1}$，因此我们得出结论：$A = \lambda I_n$，其中某个 $\lambda > 0$。引理的证明完成。□

设 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的闭超曲面，并回顾第 1.3 节中的记号 ν、II_ν。如果 Σ 是 $(k+1)$-凸的，那么通过将引理 4.2 应用于 $A = \mathrm{II}_\nu$，我们得到

$$\det T_k \geq \binom{n-1}{k}^n H_{k+1}^{\frac{nk}{k+1}}.$$

如第 1.3 节所述，推论 1.10 由此以及定理 1.9 得出。

T_k 的一个重要性质是它散度为零（参见例如 [21]）。更具体地说，对于每个 $x \in \Sigma$，如果 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 x 在 Σ的邻域中的局部正交标架，那么 T_k 满足

$$\nabla_{e_j} (T_k)_{ij} = 0 \quad \text{for each } 1 \leq i \leq n.$$

定理 1.9 的证明分为两部分。第一部分中，我们证明不等式 (1.5)；第二部分中，我们证明刚性结论。

4.1. Proof of Theorem 1.9: Inequality (1.5)

设 $n \in \mathbb{N}$、$n \geq 2$、$0 \leq k \leq n-2$ 和 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个闭的（$k+1$）凸超曲面。暂且假设 Σ 是连通的。对 Σ 重新缩放后，我们可以不失一般性地假设人人操

$$\int_\Sigma H_k \, d\operatorname{vol}_\Sigma = \int_\Sigma H_{k+1} \, d\operatorname{vol}_\Sigma . \tag{4.6}$$

然后，我们需要证明的是

$$|\mathbb{S}^n| \leq \binom{n-1}{k}^n \int_\Sigma \frac{H_k^{n+1}}{(\det T_k) H_{k+1}} \, d\operatorname{vol}_\Sigma . \tag{4.7}$$

根据 $(k+1)$-凸性假设，k-Newton 张量 T_k 正定。因此，由 (4.6) 以及 Σ 连通这一假设可知，存在一个解（模去一个常数后唯一），

该光滑解为 u，满足方程:

$$\operatorname{div}(T_k \nabla^{\Sigma} u) = (n-k)\binom{n}{k}(H_k - H_{k+1}).$$

我们定义映射 Φ，令

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x,t) &\longmapsto \nabla^{\Sigma} u(x) + t\nu(x). \end{aligned}$$

我们还将集合 $V \subset \Sigma \times \mathbb{R}$ 和 $\Omega \subset \Sigma$ 定义为

$$\begin{aligned} V &\coloneqq \{(x,t) \in \Sigma \times \mathbb{R} : \, |\nabla^{\Sigma} u(x)|^2 + t^2 < 1 \text{ and } D^2_{\Sigma} u(x) - t\,\mathrm{I\!I}_{\nu}(x) \geq 0\}, \\ \Omega &\coloneqq \{x \in \Sigma : \, (x,t) \in V \text{ for some } t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

引理4.3。我们有 $\mathbb{B}^{n+1} = \Phi\,(V)$。

证明。显然，$\Phi(V) \subseteq \mathbb{B}^{n+1}$。为了证明反向包含关系，我们任取一个向量 $\xi \in \mathbb{B}^{n+1}$。对于每个 $x \in \Sigma$，我们用 $\xi_x^{\tan}$表示 ξ 在到 $T_x\Sigma$ 的正交投影下的像。换言之，

$$\langle \xi_x^{\tan}, V \rangle = \langle \xi, V \rangle \quad \text{for every } V \in T_x\Sigma.$$

然后我们考虑函数

$$v(x) \coloneqq u(x) - \langle \xi, x \rangle \quad \text{for } x \in \Sigma.$$

由于 Σ 是闭集，函数 v 在某个点 $x_0 \in \Sigma$ 处取得其最小值。于是

$$0 = \nabla^{\Sigma} v(x_0) = \nabla^{\Sigma} u(x_0) - \xi^{\tan}.$$

因此，对某个 $t_0 \in \mathbb{R}$，有 $\xi = \nabla^{\Sigma} u(x_0) + t_0 \nu$。此外，我们还有

$$0 \leq D^2_{\Sigma} v(x_0) = D^2_{\Sigma} u(x_0) - t_0\,\mathrm{I\!I}_{\nu}(x_0),$$

and

$$|\nabla^{\Sigma} u(x_0)|^2 + t_0^2 = |\xi|^2 < 1.$$

引理的证明至此完成。 □

引理4.4. 对于每个 $(x,t) \in V$，我们有 $H_k - (1+t)H_{k+1} \geq 0$。此外，$\Phi$ 的雅可比行列式满足

$$|\det D\Phi(x,t)| \leq \frac{1}{\det T_k}\left(\binom{n-1}{k}(H_k - (1+t)H_{k+1})\right)^n \quad \textit{for } (x,t) \in V.$$

证明。为此，我们任意固定 $(x,t) \in V$。然后，在 x 处选取一个局部标准正交标架 $\{e_1,\dots,e_n\}$。与引理 2.4 的证明中相同，关于标架 $\{e_1,\dots,e_n,\nu\}$，表示 $D\Phi$ 的矩阵具有如下形式

$$D\Phi(x,t) = \left(\begin{array}{c|c} D^2_\Sigma u(x) - t\,\mathrm{I\!I}_\nu(x) & * \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

由于 T_k 在 Σ 上正定，且 $D^2_\Sigma u(x) - t\,\mathrm{II}_\nu(x) \geq 0$，因此可得

$$|\det D\Phi(x,t)| = \det(D^2_\Sigma u(x) - t\,\mathrm{I\!I}_\nu(x)) = \frac{1}{\det T_k}\det(T_k(D^2_\Sigma u - t\,\mathrm{I\!I}_\nu)).$$

另一方面，利用 (4.3)、u 的方程以及 T_k 是无散度的这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \leq \operatorname{tr}(T_k(D^2_\Sigma u - t\,\mathrm{I\!I}_\nu)) &= \operatorname{tr}(T_k\, D^2_\Sigma u) - t\operatorname{tr}(T_k\,\mathrm{I\!I}_\nu) \\ &= \operatorname{div}(T_k \nabla^\Sigma u) - t\operatorname{tr}(T_k\,\mathrm{I\!I}_\nu) \\ &= (n-k)\binom{n}{k}(H_k - (1+t)H_{k+1}). \end{aligned}$$

因此，将这些结果结合起来，并将引理 A.1 应用于 T_k 与$D^2_\Sigma u(x) - t\,\mathrm{II}_\nu(x)$这一对，我们便得到

$$\begin{aligned} |\det D\Phi(x,t)| &= \frac{1}{\det T_k}\det(T_k(D^2_\Sigma u - t\,\mathrm{I\!I}_\nu)) \\ &\leq \frac{1}{\det T_k}\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(T_k(D^2_\Sigma u - t\,\mathrm{I\!I}_\nu))\right)^n \\ &= \frac{1}{\det T_k}\left(\frac{1}{n}(n-k)\binom{n}{k}(H_k - (1+t)H_{k+1})\right)^n. \end{aligned} \tag{4.8}$$

从这里，利用恒等式 $\frac{1}{n}(n-k)\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$，我们完成引理的证明。

□

由引理4.3和引理4.4可知，对于每个 $(x,t) \in V$，t 的范围满足 $-1 \le t \le \frac{H_k}{H_{k+1}} - 1$。此外，我们有

$$\begin{aligned}
|\mathbb{B}^{n+1}| &= |\Phi(V)| \\
&\le \int_\Omega \int_{-1}^{\frac{H_k}{H_{k+1}}-1} |\det D\Phi(x,t)|\, 1_V(x,t)\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le \int_\Omega \int_{-1}^{\frac{H_k}{H_{k+1}}-1} \frac{1}{\det T_k} \left(\binom{n-1}{k} (H_k - (1+t)H_{k+1}) \right)^n 1_V(x,t)\, dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma(x) \\
&\le \int_\Omega \int_{-1}^{\frac{H_k}{H_{k+1}}-1} \frac{1}{\det T_k} \left(\binom{n-1}{k} (H_k - (1+t)H_{k+1}) \right)^n dt\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{n-1}{k}^n \int_\Omega \frac{H_k^{n+1}}{(\det T_k) H_{k+1}}\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma \\
&\le \frac{1}{n+1} \binom{n-1}{k}^n \int_\Sigma \frac{H_k^{n+1}}{(\det T_k) H_{k+1}}\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma\,. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

这与 (4.7) 一致，因此在 Σ 连通时证明了 (1.5)。

现在，假设 Σ 不连通。令 Σ_1 为其一个连通分支。我们将 (1.5) 应用于 Σ_1，并将所得不等式改写为

$$|\mathbb{S}^n|^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_{\Sigma_1} H_k \right) \le \binom{n-1}{k}^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_{\Sigma_1} H_{k+1} \right) \left(\int_{\Sigma_1} \frac{H_k^{n+1}}{(\det T_k) H_{k+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \qquad (4.10)$$

然后，我们对其各个连通分支求和，并使用基本不等式

$$a_1 \,.\, b_1^{\frac{1}{n+1}} + a_2 \,.\, b_2^{\frac{1}{n+1}} < (a_1 + a_2) \,.\, (b_1 + b_2)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{for } a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$$

以完成此情形下 (1.5) 的证明。

4.2. Proof of Theorem 1.9: Rigidity

设 $n \in \mathbb{N}$、$n \ge 2$、$0 \le k \le n-2$ 和 Σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中一个闭的（$k+1$）-凸超曲面，且 (1.5) 中等号成立。根据第4.1节最后一段的论证，我们可得 Σ 是连通的。对 Σ 重新缩放后，不妨设

$$\int_\Sigma H_k\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma = \int_\Sigma H_{k+1}\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma\,. \qquad (4.11)$$

等价地，这意味着

$$|\mathbb{S}^n| = \binom{n-1}{k}^n \int_\Sigma \frac{H_k^{n+1}}{(\det T_k) H_{k+1}}\, d\,\mathrm{vol}_\Sigma\,. \qquad (4.12)$$

我们继续定义函数 u、集合 V、Ω 以及映射 Φ，如第4.1节所述。然后，要使 (4.12) 成立，(4.9) 必须是等式链。特别是，(4.9) 中最后一个$\widetilde{}$等式意味着 Ω 在 Σ 中稠密。此外，若我们将集合 Σ 定义为

$$\widetilde{\Sigma} := \{(x,t) : x \in \Sigma \text{ and } -1 \le t \le \frac{H_k}{H_{k+1}} - 1 \text{ at } x\},$$

于是，由链式等式（4.9）中的第四个和第五个等式可知，V 在 Σ中稠密$\widetilde{}$。由连续性可得，对于每个（x，t）$\in \Sigma$，都有 $D^2_\Sigma u$（x）$- t\mathrm{II}_\nu$（x）≥ 0。因此，根据链式等式（4.9）中的第二个等式和引理4.4，我们推得

$$|\det D\Phi(x,t)| = \frac{1}{\det T_k}\left(\binom{n-1}{k}(H_k - (1+t)H_{k+1})\right)^n \text{ for } (x,t) \in \widetilde{\Sigma}.$$

$\widetilde{}$因此，由（4.8）以及 V 在 Σ中的稠密性可知，必有

$$\det(T_k(D^2_\Sigma u - t\,\mathrm{I\!I}_\nu)) = \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(T_k(D^2_\Sigma u - t\,\mathrm{I\!I}_\nu))\right)^n \quad \text{at every } (x,t) \in \widetilde{\Sigma}.$$

因此，固定点 $x \in \Sigma$，令 t 变化，并在 x处对 T_k 和 $D^2_\Sigma u - t\mathrm{II}_\nu$ 应用引理 A.1，可得 $T_k\,\mathrm{II}_\nu = \lambda I_n$，其中 $\lambda =$（$k+1$）σ_{k+1}（II_ν）> 0。因此，$\mathrm{II}_\nu = \lambda$（$T_k$）$^{-1}$ 是正定的。此外，利用（4.2），可得$T_{k+1} = \eta I_n$，其中 $\eta > 0$为某个值。由于 $k \le n-2$ 且$\mathrm{II}_\nu \in \Gamma_n$，这意味着 x 是一个脐点。由于 x 是任意选取的，我们得出 Σ 是一个球面。命题1.9的证明至此完成。

Acknowledgements

本文是作者学位论文的一部分。作者谨向导师 YanYan Li 教授致谢，感谢他进行的广泛讨论和提出的宝贵建议。

Appendix A. An auxiliary lemma

为方便读者，我们回顾一个在本文主要部分中用到的标准事实。

引理 A.1. 对于 $n \in \mathbb{N}$，设 A 和 B 是大小为 n的方对称矩阵。假设 A 是正定的，且 B 是半正定的。那么

$$\det(AB) \le \left(\frac{\operatorname{tr}(AB)}{n}\right)^n. \tag{A.1}$$

等号成立当且仅当对于某个 $\lambda \ge 0$，有 $AB = \lambda I_n$，其中 I_n 是单位矩阵。

例如参见 [22] 以了解该引理的证明及进一步讨论。

References

[1] W. Beckner，球面上的尖锐索博列夫不等式与莫泽-特鲁金格不等式，Ann. of Math. (2) 138(1) (1993) 213-242。[2] S. Brendle，单位球内极小曲面面积的尖锐界，Geom. Funct. Anal. 22 (2012) 621–626。[3] S. Brendle， $\mathbb{S}^3$中的极小曲面：近期结果综述，Bull. Math. Sci. 3 (2013) 133–171。[4]S. Brendle，极小超曲面与几何不等式，预印本，（2020） arXiv:2010.03425v2 [math.DG[5] S. Brendle，欧氏空间中极小子流形的等周不等式，J. Amer. Math. Soc. 34 (2021) 595-603。[6] S. Brendle，欧氏空间中子流形的对数索博列夫不等式，Comm Pure Appl Math. 75 (2022) 0449–0454。[7] X. Cabr´e，概率与几何中的椭圆型偏微分方程：解的对称性与正则性，Discrete Contin. Dyn. Syst. 20(3) (2008) 425–457。[8] X. Cabr´e，通过阿列克桑德罗夫-巴克尔曼-普奇方法得到的等周、索博列夫及特征值不等式：综述。Chin. Ann. Math. 38B(1) (2017) 201–214。[9] S.-Y. A. Chang 和 Y. Wang，k-凸区域上的拟合积分不等式，Adv. Math. 248 (2013) 335–377。[10] S.-Y. A. Chang 和 Y. Wang，通过最优传输方法得到的某些高阶等周不等式，Int. Math. Res. Not. 24 (2014) 6619–6644。[11] S.Y. Cheng、P. Li 和 S.T. Yau，极小子流形上的热方程及其应用，Amer. J. Math. 106 (1984) 1033-1065。[12] H. Choi 和 A. N. Wang，极小超曲面的第一特征值估计，J. Differential Geom. 18(3) (1983) 559-562。[13] K. Ecker，欧氏空间子流形上的对数索博列夫不等式，J. reine angew. Math. 522 (2000) 105-118。[14] L. G˚arding，关于双曲多项式的一个不等式，J. Math. Mech. 8 (1959) 957-965。[15] D.Gilbarg 和 N. Trudinger，二阶椭圆型偏微分方程，数学经典，Springer-Verlag，柏林，（2001）。[16] L. Gross，对数索博列夫不等式，Amer. J. Math. 97 (1975) 1061-1083。[17] P. Guan 和 李，k-凸星形区域的拟合积分不等式，Adv. Math. 221 (2009) 1725–1732。[18] P. Guan 和 李，等周型不等式与超曲面流，J. Math. Study 54(1) (2021) 56-80。[19] R. Latala 和 K. Oleszkiewicz，介于索博列夫与Poincar´e之间，《泛函分析的几何方面》，以色列研讨会（GAFA）数学讲义1745 (2000) 147–168，Springer，柏林。[20] G. Perelman，里奇流的熵公式及其几何应用，预印本，（2002）arXiv:math/0211159 [math.DG]。[21] R. Reilly，关于函数的海森矩阵及其图形的曲率，Michigan Math. J. 20 (1973) 373–383。[22]D. Serre，散度为零的正对称张量与流体动力学，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lin´ eaire 35(5) (2018) 1209–1234。

[23] R. Schneider, 《凸体：Brunn–Minkowski 理论》，第 2 版，剑桥大学出版社，纽约（2014 年）。[24] Z. Tang 和 W. Yan, 《等参叶状结构与 Yau 关于第一特征值的猜想》，《微分几何杂志》94(3)（2013 年）521–540。[25] C. Villani, 《最优传输专题》，数学研究生教程 58（2003 年），美国数学学会。[26] S.T. Yau，问题部分，《微分几何研讨会》，数学年鉴研究丛书 102（1982 年）669–706，普林斯顿大学出版社。

Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854, USA
电子邮箱：doanh.pham@rutgers.edu