arXiv:2305.05922v1 [math.RT] 10 May 2023

反德西特空间上的达朗贝尔算子共振 $\mathrm{SO_e}(2,2)/\mathrm{SO_e}(2,1)$

Simon Roby

目录

1. 引言 1 2. 记号与背景 2 2.1. 背景 2 2 3 3 2 2，. . 与 SL(𝕂) 的一个同构 . SL(2，4 4 9 𝕂) 上拉普拉斯算子的共振 . 留数表示 4.1. $K\times K$-同型分支 9 4.2. $G\times G$ 作用 11 参考文献 16

摘要。我们研究达朗贝尔算子在伪黎曼三维反德西特空间上的函数上的作用，并确定该算子的共振。每个共振都可以关联一个留数表示。我们通过朗兰兹参数对这些表示作出明确描述。

1. 引言

共振这一概念最早是在量子力学中引入的。我们可以将这一概念的起源追溯到 1926 年左右，当时薛定谔研究了斯塔克效应。粗略地说，它们将紧致空间上微分算子的特征值推广到了非紧致空间上。关于这一主题的更多信息，可以参阅例如 [Har07] 或 [DZ19]。

令 $\mathrm{SO_e}(p,\ q)$ 表示 $\mathrm{SO}(p,\ q)$ 中包含单位元的连通分支，其中 p 和 q 均为正整数。本文旨在计算反德西特空间 $\mathbb{X}:=\mathrm{SO_e}(2,\ 2)/\mathrm{SO_e}(2,\ 1)$ 上达朗贝尔算子的共振。达朗贝尔算子 $\Box_{\mathbb{X}}$ 作用于 $\mathbb{X}$ 上紧支撑光滑函数的集合 $C_c^\infty(\mathbb{X})$。$\Box_{\mathbb{X}}$ 的预解式 R 是复平面上谱 $\Box_{\mathbb{X}}$ 的补集上的全纯函数。若能将此函数亚纯延拓至谱之外，那么这种亚纯延拓的极点就称为（散射）共振。拉普拉斯算子共振的研究始于非紧型黎曼对称空间，后由多位作者继续开展。这类对称空间具有极大平坦子空间，它们的维数都相同，称为该对称空间的秩。当秩为一时，Guillopé 和 Zworski [GZ95], 、Miatello 和 Will [MW00], 以及 Hilgert 和 Pasquale [HP09] 采用不同方法计算了共振。后两篇文章还找到了由共振产生的留数表示。对于更高秩的对称空间，这一问题仍未解决。Mazzeo 和 Vasy [MV05] 以及 Strohmaier [Str05]取得了一些部分结果。关于

2010 数学主题分类。 主要分类：22E45、20G05、22D10；次要分类：43A85、58J50。

大多数秩 2 情形的完整结果已由 Hilgert、Pasquale 和 Przebinda 在一系列论文中证明[HPP16, HPP17b, HPP17a]。
在本文中，我们确定了作用于$C_c^\infty(\mathbb{X})$上的 $\square_{\mathbb{X}}$ 的共振及其留数表示。关键在于，空间 $\mathbb{X}$ 不再是黎曼空间，而是一个伪黎曼对称空间。本文给出了在这一背景下计算共振的一个实例。一般的伪黎曼情形（甚至反德西特情形）目前尚难以处理。然而，Frahm 和 Polyxeni 在 [FS23],中取得了首批重要成果；他们研究了作用于伪黎曼空间 $U(p,\ q;\mathbb{F})$ 上的达朗贝尔算子。$U(1;\mathbb{F})\times U(p-1,\ q;\mathbb{F})$（其中 $\mathbb{F}$ 可以是实数、复数、四元数或八元数域）。

在 [And01], 中，我们通过反德西特对称空间 $\mathbb{X}$ 与 $SL(2,\mathbb{F})$ 的同构，证明了一个帕利-维纳型定理。$SL(2,\mathbb{F})\times SL(2,\mathbb{F})$ 在 $SL(2,\mathbb{F})$ 上的左右作用，等价于 $SO_e(2,2)$ 在 $\mathbb{X}$ 上的作用。这个同构使得 $\square_{\mathbb{X}}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{X})$ 上的作用，对应于 $SL(2,\mathbb{F})$ 的卡西米尔算子在 $SL(2,\mathbb{F})$ 上紧支撑函数上的作用。第 2 节对此作了明确说明。第 3 节中，我们确定共振。借助 $SL(2,\mathbb{F})$ 上的分析，尤其是 Harish-Chandra-Plancherel 定理，我们可以采用与 [HP09] 中相似的方法来确定它们。相关分析见 [Rob21]。第 4 节中，我们研究由共振产生的留数表示，并对其作出明确描述：定理 2 给出了这些表示的不可约部分的朗兰兹参数。对这些表示的研究不能等同于以往的工作，因为作用群并非 $SL(2,\mathbb{F})$，而是 $SL(2,\mathbb{F})\times SL(2,\mathbb{F})/\pm\mathrm{Id}\simeq SO_e(2,2)$。

2. 记号与背景

我们将使用标准记号 $\mathbb{N}^+$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ 分别表示非负整数、整数、实数和复数。对于复数 $z\in\mathbb{C}$，我们分别用 $R(z)$ 和 $I(z)$ 表示其实部和虚部。我们分别用 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{L}$ 表示通常的右表示和左表示。

2.1. 背景。设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^4$ 上由下式给出的双线性形式。

$$\langle x,y\rangle := x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}^4$。令 $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ 表示系数为实数的 4×4 矩阵空间。我们考虑 $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ 通过乘法对 $\mathbb{R}^4$ 的作用。

$$x\mapsto g\cdot x\quad,\ \text{for } g\in\mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}) \text{ and } x\in\mathbb{R}^4\ .$$

设 $O(2,2)$ 为保持 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的矩阵李群。我们用 $G:=SO_e(2,2)$ 表示其单位元的连通分支。令 $H\subset G$ 表示点 $(1,\ 0,\ 0,\ 0)\in\mathbb{R}^4$ 的各向同性子群。于是群 H 同构于 $SO_e(1,\ 2)$。齐性空间 $\widetilde{G}/H$ 是双曲空间

$$\mathbb{X}=\{x\in\mathbb{R}^4\mid\langle x,x\rangle=1\}\ .$$

这是一个伪黎曼对称空间。令 $K\simeq SO(2)\times SO(2)$ 为由 G 中含有对角线上两个 $SO(2)$ 分块的矩阵组成的最大紧子群 $\widetilde{G}$。$SO(2)$ 中的每个矩阵写作

$$k_\theta:=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\ ,\qquad \theta\in\mathbb{R}\ .$$

~2.2. **与 $SL(2,\mathbb{R})$ 的同构。** 令 $G = SL(2,\mathbb{R})$。该对应关系 $G = G\times G/\pm Id$ 定义如下；例如参见 [And01，第 5] 节。令 $Mat_2(\mathbb{R})$ 表示具有实系数的 2×2 矩阵集合。我们考虑 $\mathbb{R}^4$ 与 $Mat_2(\mathbb{R})$ 之间的向量空间同构，将 $\mathbb{R}^4$ 的标准基映射为由以下向量组成的基

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

即

$$\mathbb{R}^4 \ni x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto g_x = \begin{pmatrix}x_1+x_4 & -x_2+x_3\\ x_2+x_3 & x_1-x_4\end{pmatrix}.$$

我们在 $Mat_2(\mathbb{R})$ 上引入双线性形式 $\mathbf{h}g_x,\ g_y\mathbf{i} := \mathbf{h}x,\ y\mathbf{i}$。我们考虑 $G\times G$ 在 $Mat_2(\mathbb{R})$ 上的左右作用：

$$(g_1,g_2)\cdot X := g_1 X g_2^{-1},$$

其中 $(g_1,\ g_2)\in G\times G$ 以及 $X\in Mat_2(\mathbb{R})$。直接计算可得

$$\langle g_x, g_y\rangle := \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\det(g_y)\,\mathrm{Tr}\left(g_x g_y^{-1}\right) = \frac{1}{2}\det(g_x)\,\mathrm{Tr}\left(g_y g_x^{-1}\right).$$

因此，$Mat_2(\mathbb{R})$ 上的形式 $\mathbf{h}\cdot,\ \cdot\mathbf{i}$ 具有 $G\times G$ 不变性。元素 $(g_1,\ g_2)$ 和 $(-g_1,\ -g_2)$ 的作用方式相同，因此 $G\times G/\pm Id$ 可以嵌入保持该惯性指数为 (2,2) 的双线性形式的等距群中，该等距群为 $O(2,2)$。由单位元所在连通分支的唯一性，我们得到李群同构

$$G\times G/\pm \mathrm{Id} \simeq \widetilde{G}.$$

此外，$x\in\mathbb{X}$ 等价于 $\det(g_x) = 1$。因此，同构 $x\mapsto g_x$ 限制为一个微分同胚 $\mathbb{X}$ 和 G。于是我们有 $C^\infty(G)\simeq C^\infty(\mathbb{X})$。我们将此同构记为

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(G) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{X}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f}\,. \end{array} \tag{1}$$

通过这个同构，$G\times G$ 在 $C^\infty(G)$上的双侧作用

$$(g_1,g_2)\cdot f(g) := \mathbf{L}(g_1)\cdot\mathbf{R}(g_2)\cdot f(g) = f(g_1^{-1}gg_2)\ ,\ \text{for all } g,g_1,g_2\in G\,, \tag{2}$$

~对应于 G 在 $C^\infty(\mathbb{X})$上的左作用。
在球坐标中，每个元素 $x\in\mathbb{X}$ 表示为

$$x = x(t,\psi_1,\psi_2) = (\cosh t\cos\psi_1, \cosh t\sin\psi_1, \sinh t\sin\psi_2, \sinh t\cos\psi_2)\in\mathbb{X}\,,$$

其中 $t,\ \psi_1,\ \psi_2\in\mathbb{R}^\circ$。令 $\theta = \frac{\psi_1-\psi_2}{2}$和 $\phi = \frac{\psi_1+\psi_2}{2}$。通过映射 $x\mapsto g_x$，G 中的对应元素为

$$g(t,\theta,\phi) := g_{x(t,\phi+\theta,\phi-\theta)} = k_\theta a_t k_\phi = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{pmatrix}.$$

我们将 Ω 记为 $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 的卡西米尔算子，即 G 的李代数。考虑上述针对 $g(t,\theta,\phi)\in G$ 的“KAK”分解。于是，对于所有 $f\in C_c^\infty(G)$（参见 [Var89，第 6 章，引理）

26])

$$\mathbf{R}(\Omega)f = \Bigg[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\cosh(2t)}{\sinh(2t)}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{4\cosh^2(t)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sinh^2(t)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right)\Bigg] f \,. \quad (3)$$

这是球坐标中 $\Box_{\mathbb{X}} = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} - \partial^2_{x_3} - \partial^2_{x_4}$上的达朗贝尔算子公式（参见 [And01，第 70]页）。

3. SL(2，$\mathbb{R}$)上的拉普拉斯算子共振

‹ 我们回顾一下， G =SL(2，$\mathbb{R}$)与 SU(1，1)同构，且局部同构于 H。群 G 的拉普拉斯算子共振已为人所知。对于实双曲平面上的线丛，可以在 [Wil03] 中找到其共振及留数表示。我们在此采用的不同方法见于 G 在 [Rob21] 未发表的第 II.1.2 和 II.2.2 部分。我们采用一种基于原始 Harish-Chandra–Plancherel 公式的直接方法，针对 G。其思想基于 [HP09]。

通过第 2.2 节给出的同构， G 的拉普拉斯算子共振直接给出达朗贝尔算子 $\Box_{\mathbb{X}}$的共振。留数表示将不同于 G中的留数表示，因为这里的作用不是 G 的作用，而是 $G \times G$的作用，因为我们考虑的是~G在 $C_c^\infty(\mathbb{X})$ 上的作用。这些内容将在第 4 节给出。

回顾一下， $K := \mathrm{SO}(2)$ 的不可约酉表示是特征标 $\chi_n : K \mapsto \mathbb{C}$，定义为

$$\chi_n(k_\theta) = e^{in\theta}$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 且 $n \in \mathbb{Z}$。令 A 和 N 定义如下

$$A = \left\{ a_t := \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

其李代数为

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

（限制）根系对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 的根系为 $\{\pm\alpha\}$，其中 $\alpha(a_t) = 2t$。我们选择 $\{\alpha\}$ 作为正根系，使得正根之和的一半为 $\rho := \frac{1}{2}\alpha$。对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们定义 $e^{\lambda\alpha}(a_t) := e^{2\lambda t}$。 A 在 K 中的中心化子为 $M = \{\pm I_2\}$。我们用 0 表示平凡表示，用 1 表示 M 的非平凡表示。$(\pi^\delta_{i\lambda}, \mathscr{H}^\delta_{i\lambda})$ 表示主系列表示 $\mathrm{Ind}_{MAN}^G(\delta \otimes e^{i\lambda\rho} \otimes \mathrm{triv}_N)$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $\delta \in \hat{M} = \{0, 1\}$。空间 $\mathscr{H}^\delta_{i\lambda}$ 是光滑函数空间 $f : G \to \mathbb{C}$的希尔伯特空间完备化，满足

$$f(manx) = a^{(1+i\lambda)\rho}\delta(m)f(x) = t^{1+i\lambda}\delta(m)f(x)\,,$$

其中， $m \in M$, $a = a_t \in A$, $n \in N$, $x \in G$。表示 $\pi^\delta_{i\lambda}$对所有$g \in G$ 和 $f \in \mathscr{H}^\delta$均定义为 $\pi^\delta_{i\lambda}(g)f = \mathbf{R}(g)f$。

Let

$$\delta(l) = \begin{cases} 0 & \text{if } l \text{ is odd} \\ 1 & \text{if } l \text{ is even} \end{cases} . \tag{4}$$

命题 3.1 ([Lan85], **VI. §6, 定理 8，第 119-124 页)**如果 $i\lambda$ 不是整数，则

$$\mathscr{H}^0_{i\lambda}|_K = \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) \qquad and \qquad \mathscr{H}^1_{i\lambda}|_K = \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}+1} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) .$$

若 $\lambda = 0$，则

$$\mathscr{H}^0_0 = \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) \qquad and \qquad \mathscr{H}^1_0 = \bigoplus_{\substack{n\in 2\mathbb{Z}+1 \\ n\geq 1}} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) \ \oplus \ \bigoplus_{\substack{n\in 2\mathbb{Z}+1 \\ n\leq -1}} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) .$$

若 $m \geq 2$ 是一 个整数且 $i\lambda = m-1$，则 $\mathscr{H}^{\delta}{}_{(m-1)\ m-1}$ 包含两个不可约子模 ，

$$D^m = \bigoplus_{\substack{m\leq n \\ n-m\in 2\mathbb{Z}}} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) , \qquad D^{-m} = \bigoplus_{\substack{-m\geq n \\ n-m\in 2\mathbb{Z}}} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n) .$$

商模（$\mathscr{H}^{\delta(m-1)}_{m-1}$ 除以这两个子模）是不可约的有限维模，维数为 $m-1$。

模 $\mathscr{H}^{\delta(m)}_{m-1}$ 是不可约的，并且对应于

$$\bigoplus_{n-m\in 2\mathbb{Z}+1} \mathrm{Ind}_K^G(\chi_n)$$

若 $m \geq 2$ 是整数 且 $i\lambda = -m+1$，则 $\mathscr{H}^{\delta}{}_{(m-1)\ m-1}$ 包含有限维子模

$$\mathbb{C}^{e_{-m+2}} \oplus \mathbb{C}^{e_{-m+4}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{e_{m-2}} .$$

其中 e_n 是定义在 G 上的函数，定义为

$$e_n\left(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = y^{1+i\lambda}e^{in\theta} . \tag{5}$$

这里 u、y 和 x 均为实数，使得所示乘积属于 G。因此，我们得到最高权模、最低权模、有限维模，以及两侧均具有无界K-类型的模。

（$\mathfrak{g}, K$）-模 $\mathscr{H}^{\delta}_{m-1}$ 和 $\mathscr{H}^{\delta}_{-m+1}$ 互为对偶。
以下是不可约可酉化（$\mathfrak{g}, K$）-模的完整列表。

(1) 最低权模 D^m，其最低权为 $m \geq 1$；最高权模 D^m，其最高权为 $m \leq -1$; *(2)* 主系列 $\mathscr{H}^0_{i\lambda}$ 和 $\mathscr{H}^1_{i\lambda}$、$\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; *(3)* 主系列 $\mathscr{H}^0_0$; *(4)* 互补系列 $\mathscr{H}^0_s$、$0 < s < 1$; *(5)* 平凡表示。

我们用 $\Theta^{\delta}_{i\lambda}$ 表示 $\pi^{\delta}_{i\lambda}$ 的表示特征。我们还定义卷积积

$$\left(\Theta^{\delta}_{i\lambda} * f\right)(g) = \int_G \Theta^{\delta}_{i\lambda}(x) f(gx)\, dx .$$

G 的 Harish-Chandra Plancherel 定理可表述如下。 :

定理 1（ *G*的反演公式）
对于任意 $f \in C_c^\infty(G)$,

$$2\pi f(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\operatorname{Tr}\left(D^{(n+1)} + D^{(-n-1)}\right) * f\Big)(g) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\Theta_{i\lambda}^1 * f\right)(g) \;\; \lambda \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \ . \quad (6)$$

备注
作为作用于 L^2 上的算子，SL(2，$\mathbb{R}$) 的拉普拉斯算子（或等价地，达朗贝尔算子）具有离散谱和连续谱。离散部分由特征值构成，这些特征值是拉普拉斯算子作为作用于 L^2 上的算子的预解式的极点。另一方面，共振源自谱的连续部分，这正是我们将首先把算子投影到其连续谱上，以确定共振的原因。这似乎与共振的散射解释相一致。在物理学文献中，系统的物理态表现为束缚态或共振态。束缚态对应于系统哈密顿算子作为作用于 L^2 上的算子时的特征值。假设（如同我们的情形）哈密顿算子限制在光滑紧支撑函数上时存在亚纯延拓。该延拓通常定义在 {style id='8'>C （或 $\mathbb{C}$ 的一部分）上方的黎曼曲面上。包含 L^2 谱（因而也包含特征值）的原复平面称为物理片。共振是位于物理片之外的亚纯延拓的极点。在许多情形下（我们的情形也是如此），黎曼曲面是具有两张片的平方根函数。第二张称为非物理片，因此共振可以在此找到。一个共振可能与某个特征值相对应（即它们分别是两张片上的对应点）。然而，正如我们将在定理 2 中看到的，我们所确定的留数表示没有一个属于 L^2，而共振态本应如此。关于共振的物理解释，更多信息请参见 [DZ19], [His12]。黎曼对称空间情形另见 [Str05，第 3] 节。因此，从现在起，我们考虑预解式在（6）的连续部分上的投影。

直接计算（见 [Lan85，第 195] 页）表明，在包络代数$U(\mathfrak{g}_c)$中

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

and

$$\pi_{i\lambda}(\Omega) = -(\lambda^2 + 1)\,\mathrm{Id} \ .$$

我们考虑 Ω 通过左作用（或右作用）于 $C_c^\infty(G)$。对于所有 $x \in \mathbb{X}$，我们有

$$\square_{\mathbb{X}} \left(\widehat{\Theta_{i\lambda}^\delta * f}\right)(x) = \mathbf{L}(\Omega)\left(\Theta_{i\lambda}^\delta * f\right)(g_x) = -(\lambda^2+1)\left(\Theta_{i\lambda}^\delta * f\right)(g_x) \ , \quad (7)$$

Û，其中同构 $f \mapsto f$ 已在 (1) 中定义。
Set

$$\mathrm{R}(z) := (-\mathbf{L}(\Omega) - z)^{-1} \ . \quad (8)$$

Then，除相差一个常数外，适用于 $f \in C_c^\infty(G)$，以及所有 $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ 和 $g \in G$

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}(z)f)(g) = &\int_0^\infty (\lambda^2 + 1 - z)^{-1} \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \\ &+ \int_0^\infty (\lambda^2 + 1 - z)^{-1} \left(\Theta_{i\lambda}^1 * f\right)(g) \;\; \lambda \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \; .\end{aligned}$$

选择平方根函数的全纯分支，使得 $\sqrt{-1} = i$。令变量 $\zeta = \sqrt{z-1}$，则对于

$$\zeta \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \; ,$$

相差一个常数，

$$\left(\mathrm{R}(\zeta^2 + 1)f\right)(g) = \int_0^\infty (\lambda^2 - \zeta^2)^{-1} \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \tag{9}$$

$$+ \int_0^\infty (\lambda^2 - \zeta^2)^{-1} \left(\Theta_{i\lambda}^1 * f\right)(g) \;\; \lambda \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \; , \tag{10}$$

我们将分别处理积分 (9) 和 (10)。对于第一个积分 (9)，将其拆分如下：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\lambda^2 - \zeta^2)^{-1} \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda - \zeta} + \frac{1}{\lambda + \zeta}\right) \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \zeta} \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda\end{aligned}$$

根据莫雷拉定理，所得函数在 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上全纯。我们希望将其亚纯延拓到上半平面之外。为此，我们沿负虚轴方向移动积分路径，并应用留数定理。这对于任意 $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{S}^+$ 给出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\lambda^2 - \zeta^2)^{-1} \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda = \\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}-iy} \frac{1}{\lambda - \zeta} \left(\Theta_{i\lambda}^0 * f\right)(g) \;\; \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \\ - \pi i \sum_{l \in 2\mathbb{N}_y^+ + 1} \frac{1}{-il - \zeta} \left(\Theta_l^0 * f\right)(g) \;\; \operatorname*{Res}_{\lambda = -il} \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \; . \end{aligned} \tag{11}$$

第二项（10）的处理方式不同，因为 $\lambda \mapsto \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)$ 在 $\lambda = 0$处有一个极点。因此我们先平移积分路径。对于固定的 $\zeta \in \mathbb{C}^+$ et $y \in \mathbb{R} \setminus 2\mathbb{S}$, $y > \mathrm{I}(\zeta)$，根据留数定理

给出

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}}(\lambda^2-\zeta^2)^{-1}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\ \lambda\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^{-yi}}(\lambda^2-\zeta^2)^{-1}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\ \lambda\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda$$
$$-\pi i\sum_{\substack{l\in 2\mathbb{Z}^+\\ l<y}}{}^{*}\frac{-il}{-l^2-\zeta^2}\ \left(\Theta^1_l*f\right)(g)\ \operatorname*{Res}_{\lambda=-il}\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)$$
$$-\frac{\pi i}{2}\left(\Theta^1_{i\zeta}*f\right)(g)\ \operatorname*{Res}_{\lambda=-\zeta}\left[\frac{1}{\lambda+\zeta}\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\right].$$

现在我们可以像之前一样拆分第一项

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^{-yi}}&(\lambda^2-\zeta^2)^{-1}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\lambda\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^{-yi}}\left(\frac{1}{\lambda-\zeta}+\frac{1}{\lambda+\zeta}\right)\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^{-yi}}\frac{1}{\lambda-\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda\\&+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^{-yi}}\frac{1}{\lambda+\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda\end{aligned}$$

在第二个积分中，我们将变量替换为 $-\lambda$

$$\int_{\mathbb{B}^{-yi}}\frac{1}{\lambda+\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda=\int_{\mathbb{B}^{+yi}}\frac{1}{\lambda-\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda\ ,$$

并再次平移至 $\mathbb{B}^{-yi}$ 经过奇点 $\lambda=\zeta$ 以及 $\lambda\mapsto\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)$ 的奇点

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^{+yi}}\frac{1}{\lambda-\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^{-yi}}\frac{1}{\lambda-\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda$$
$$-\pi i\sum_{\substack{l\in 2\mathbb{Z}\\ |l|<y}}\frac{1}{il-\zeta}\ \left(\Theta^1_{-l}*f\right)(g)\ \operatorname*{Res}_{\lambda=il}\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)$$
$$-\pi i\left(\Theta^1_{i\zeta}*f\right)(g)\ \operatorname*{Res}_{\lambda=\zeta}\left[\frac{1}{\lambda-\zeta}\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\right]$$

将所有内容相加　将 g 代入公式（10），若干留数相互抵消，得到

$$\int_{\mathbb{B}}(\lambda^2-\zeta^2)^{-1}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\ \ \lambda\coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda=\int_{\mathbb{B}^{-yi}}\frac{1}{\lambda-\zeta}\left(\Theta^1_{i\lambda}*f\right)(g)\ \ \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)d\lambda$$
$$+2i\sum_{\substack{l\in 2\mathbb{Z}^+\\ l<y}}{}^{*}\frac{1}{il+\zeta}\ \left(\Theta^1_l*f\right)(g)+\frac{i}{\zeta}\left(\Theta^1_0*f\right)(g)$$

将（9）和（10）结合起来，即可得到以下命题。

命题 3.2

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{R}(\zeta^2+1)f\right)(g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}-iy} \frac{1}{\lambda-\zeta}\ \left(\Theta^0_{i\lambda} * f\right)(g)\ \ \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \\ + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}-iy} \frac{1}{\lambda-\zeta}\ \left(\Theta^1_{i\lambda} * f\right)(g)\ \ \coth\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) d\lambda \\ + \frac{i}{\zeta}\left(\Theta^1_0 * f\right)(g) + 2i \sum_{\substack{l\in \mathbb{N}^+ \\ l<y}} \frac{1}{il+\zeta}\ \left(\Theta^{\delta(l)}_l * f\right)(g)\ , \quad (12)\end{aligned}$$

其中，$\delta(\cdot)$在式 *(4)* 中定义。上述公式给出了正拉普拉斯算子预解式在 $R-iy$上方半平面内的亚纯延拓，并在 $\zeta=-il$处有简单极点，其中 $l\in\mathbb{Z}_+$, $l<y$。我们作出 $y\to+\infty$。令 $S=\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^2 \mid z=\zeta^2+1\}$。则预解式从 $S^+=\{(z,\zeta)\in M \mid I(\zeta)>0\}$ 亚纯延拓至 S，并在 $(-l+1,-il), l\in\mathbb{Z}_+$ 处有简单极点。这些极点就是拉普拉斯算子的共振。

根据（7）中的同构，我们有

推论 3.2.1
$\square_{\mathbb{X}}$ 在 $C_c^\infty(\mathbb{X})$ 上的共振由命题 *3.2* 给出。

4. 留数表示

回顾由式（2）给出的 $G\times G$在 $C^\infty(G)$ 上的双侧作用。在亚纯延拓（12）中 $\lambda_l:=-il, l\in\mathbb{N}^+$处的留数张成了 $G\times G$-不变子空间 $C^\infty(G)$。根据前面的同构，这恰好是 $G\times G$-交织映射的像：

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{R}_l: & C_c^\infty(G) & \longrightarrow & C^\infty(G) \\ & f & \longmapsto & \Theta_l^{\delta(l)} * f\ ,\end{array} \quad (13)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 在（4）中定义。我们将此空间记为

$$\mathscr{E}_l := \{\Theta_l^{\delta(l)} * f \mid f\in C_c^\infty(G)\}\ . \quad (14)$$

4.1. $K\times K$**-型分支**。根据定义，$\mathscr{E}_l$ 的 $K\times K$-型分支是满足以下条件的函数空间：函数 $u\in C^\infty(G)$ 对所有 $(k_1,k_2)\in K\times K$ 和 $g\in G$,

$$(k_1,k_2)\cdot u(g) = u(k_1^{-1}gk_2) = \chi_n(k_1)\chi_m(k_2^{-1})u(g) \quad (15)$$

对于某个 $n,m\in\mathbb{N}$。文献中称它们为 (χ_n,χ_m)-球函数 。我们将这类函数的集合记为 $\mathsf{S}_{n,m}$。

从现在起，我们采用主系列表示的紧致图像。它是将 $\mathscr{H}^\delta_{i\lambda}$ 中的元素限制到 K 上得到的。其表示空间记为 $\mathscr{H}^\delta$，是以下空间的希尔伯特完备化：

$$\{f: K\to\mathscr{H}_\delta \mid f(mk)=\delta(m)f(k)\ \text{ for all } k\in K,\ m\in M\}$$

相对于 L^2 内积而言。它与 $\lambda\in\mathbb{C}$ 无关。在 $g\in G$ 分解上定义伊瓦萨瓦分解如下：

$$g = \mathbf{n}(g)e^{\mathbf{H}(g)}\mathbf{k}(g)\ . \quad (16)$$

则 $\pi^{\delta}_{i\lambda}$ 的作用由下式给出：

$$\pi^{\delta}_{i\lambda}(g)f(k) := e^{(i\lambda+1)\rho(\mathbf{H}(kg))}f\big(\mathbf{k}(kg)\big)$$

对于所有 $g \in G$、$k \in K$ 和 $f \in \mathscr{H}^{\delta}$。表示 $\pi^{\delta}_{i\lambda}$ 在 $\lambda \in \mathbb{B}$ 上是酉的。我们用 $\mathbf{h}\cdot,\cdot\mathbf{i}$ 表示该空间上的内积。

引理 4.1
设 $f \in C_c^{\infty}(G) \cap \mathcal{S}_{n,m}$。那么，如果 n，则 $\Theta_l^{\delta(l)} * f \equiv 0$ $m \notin 2\mathbb{Z} + \delta(l)$。此外，若 n，$m \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，则 $\Theta_l^{\delta(l)} * f \in \mathcal{S}_{n,m}$。

证明。回忆一下，主系列在 $\mathscr{H}^{\delta}$ 上的伴随表示为

$$\langle \pi^{\delta}_{\lambda}(x)\chi_i, \chi_j\rangle = \langle \chi_i, \pi^{\delta}_{-\overline{\lambda}}(x^{-1})\chi_j\rangle \ ,$$

ˆ对所有 $\delta \in M$、$\lambda \in \mathbb{C}$、$x \in G$ 和 $i,j \in \mathbb{Z}$ 都成立。该引理可通过以下直接计算证明：

$$\begin{aligned}
\Theta_l^{\delta(l)} * f(g) &= \int_K \int_G \Theta_l^{\delta(l)}(x) f(kk^{-1}gx)dxdk \\
&= \int_K \int_G \Theta_l^{\delta(l)}(g^{-1}kx) f(kx)dxdk \\
&= \int_K \int_G \Theta_l^{\delta(l)}(kxg^{-1}) f(kx)dxdk \\
&= \int_K \int_G \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+\delta(l)} \langle \pi_l^{\delta(l)}(kxg^{-1})\chi_j, \chi_j\rangle f(kx)dxdk \\
&= \int_K \int_G \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+\delta(l)} \langle \pi_l^{\delta(l)}(xg^{-1})\chi_j, \pi^{\delta(l)}_{-\bar{l}}(k^{-1})\chi_j\rangle f(kx)dxdk \\
&= \int_G \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+\delta(l)} \langle \pi_l^{\delta(l)}(xg^{-1})\chi_j, \chi_j\rangle \left[\int_K \chi_n(k^{-1})\overline{\chi_j(k^{-1})}dk\right] f(x)dx
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\Theta_l^{\delta(l)} * f(g) &= \int_G \Theta_l^{\delta(l)}(x) \int_K f(gxk^{-1}k)dkdx \\
&= \int_G \int_K \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+\delta(l)} \langle \pi_l^{\delta(l)}(xk)\chi_j, \chi_j\rangle f(gxk)dkdx \\
&= \int_G \sum_{j\in 2\mathbb{Z}+\delta(l)} \langle \pi_l^{\delta(l)}(x)\chi_j, \chi_j\rangle \left[\int_K \chi_m(k^{-1})\chi_j(k)dk\right] f(gx)dx \ .
\end{aligned}$$

因此，如果 $n, m \notin 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，则卷积为零。由于

$$\Theta_l^{\delta(l)} * f(g) = \int_G \Theta_l^{\delta(l)}(x) f(gx)dx = \int_G \Theta_l^{\delta(l)}(x) f(xg)dx \ ,$$

我们看到 $\Theta_l^{\delta(l)} * f \in \mathcal{S}_{n,m}$

■

4.2. $G \times G$ **作用 on.** 现在我们需要了解 $G \times G$ 对 (χ_n, χ_m)-球函数的作用 s.

注（通过直接计算的方法）
令 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的复化，并记其包络代数为 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$。我们回顾一下主系列表示通过函数 $\chi_n \in \mathscr{H}^{\delta}$ 给出的 $\mathfrak{g}$ 作用。我们选择 $\mathfrak{g}$ 的如下基。令

$$E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{k} \, .$$

可以证明， $\pi_l^{\delta(l)}$ 的无穷小作用为

$$\begin{array}{ll} \pi_l^{\delta}(E)\chi_n & = (n+l+1)\chi_{n+2} \, , \\ \pi_l^{\delta}(F)\chi_n & = (n-l-1)\chi_{n-2} \, , \\ \pi_l^{\delta}(D)\chi_n & = in\chi_n \, . \end{array} \tag{17}$$

令 $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。假设 f 是一个 (χ_n, χ_m)-球函数。类似于引理 **4.1** 中的计算可得

$$\mathbf{R}(X) \cdot \left(\Theta_l^{\delta(l)} * f \right) \in \begin{cases} \mathcal{S}_{n,m+2} & \text{if } X = E \text{ and } l - m - 1 \neq 0 \, , \\ \mathcal{S}_{n,m-2} & \text{if } X = F \text{ and } l + m - 1 \neq 0 \, , \end{cases} \tag{18}$$

and

$$\mathbf{L}(X) \cdot \left(\Theta_l^{\delta(l)} * f \right) \in \begin{cases} \mathcal{S}_{n-2,m} & \text{if } X = E \text{ and } l - n + 1 \neq 0 \, , \\ \mathcal{S}_{n+2,m} & \text{if } X = F \text{ and } l + n + 1 \neq 0 \, . \end{cases} \tag{19}$$

要证明它并不容易 因此要证明 $\mathsf{S}_{n,\ m} \cap \mathscr{E}_l$ 非零似乎并不容易。这就是我们采用另一种方法的原因 .

我们将映射 $\mathbf{R}_l$ （它把 $f \in C_c^{\infty}(G)$ 映到 $\mathscr{E}_l$ ）通过 $f \mapsto \Theta_l^{\delta(l)} * f$ 分解如下。右侧和左侧的 G 作用彼此交换，因此左作用的不变子空间在右作用下保持不变，反之亦然。我们将分别对这两个作用进行这种分解。

对于每个表示 $(\pi, \ V_\pi)$ 以及每个 $f \in C_c^{\infty}(G)$，定义

$$\pi(f) := \int_G \pi(x) f(x) dx \quad \in \mathrm{End}(V_\pi). \tag{20}$$

对于每个 $n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，我们定义一个截断映射 $\mathbf{T}_{l,\ n}$，其定义为

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_{l,n} : & C_c^{\infty}(G) & \longrightarrow & \mathscr{H}^{\delta(l)} \\ & f & \longmapsto & \pi_l^{\delta(l)}(f)\chi_n \, . \end{array} \, , \tag{21}$$

我们也用 $\mathbf{P}_{l,\ n}$ 表示映射

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_{l,n} : & \mathscr{H}^{\delta(l)} & \longrightarrow & C^{\infty}(G) \\ & \phi & \longmapsto & \left(g \mapsto \left\langle \pi_l^{\delta(l)}(g^{-1})\phi, \chi_n \right\rangle \right) \, . \end{array} \tag{22}$$

在文献中，这些映射也称为 泊松变换 。对于所有 $n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，我们将这两个映射 $\mathbf{P}_{l,\ n} \circ \mathbf{T}_{l,\ n}$. So 的复合映射的像记为 $\mathscr{E}_{l,\ n}$

$$\mathscr{E}_{l,n} \simeq \mathrm{Im}\left(\mathcal{T}_{l,n}\right) \Big/ \mathrm{Ker}\left(\mathcal{P}_{l,n}\right) \cup \mathrm{Im}\left(\mathcal{T}_{l,n}\right) \tag{23}$$

然后，对所有 $n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，我们将函数 $\mathbf{P}_{l,n} \circ \mathbf{T}_{l,n}(f)$ 求和，得到

$$\Theta_l^{\delta(l)} * f(g) = \sum_{n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)} \mathcal{P}_{l,n} \circ \mathcal{T}_{l,n}(f)(g) \, .$$

换句话说，我们将 R_l 分解为以下两个映射

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(G) & \longrightarrow & \bigoplus_{n\in 2_{\mathbb{Z}}+\delta(l)} \mathscr{H}^{\delta(l)} \\ f & \longmapsto & (\ldots, \mathcal{T}_{l,\delta(l)-2}(f), \mathcal{T}_{l,\delta(l)}(f), \mathcal{T}_{l,\delta(l)+2}(f), \ldots)\ , \end{array} \tag{24}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n\in 2_{\mathbb{Z}}+\delta(l)} \mathscr{H}^{\delta(l)} & \longrightarrow & \mathscr{E}_l \\ (\ldots, \phi_{\delta(l)-2}, \phi_{\delta(l)}, \phi_{\delta(l)+2}, \ldots) & \longmapsto & \sum_{n\in 2_{\mathbb{Z}}+\delta(l)} \mathcal{P}_{l,n}\phi_n\ . \end{array} \tag{25}$$

引理 4.2
对于每个固定的 $n \in 2_{\mathbb{Z}} + \delta(l)$，映射 $\mathcal{T}_{l,n}$ 将 $(\mathbf{L}\ C_c^\infty(G))$ 与 $(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$交织在一起。$\mathcal{T}_{l,n}$ 的值域是 $(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$中由 $\{\pi_l^{\delta(l)}(g)\chi_n \mid g \in G\}$ 张成的空间的闭包。

证明。 固定 $n \in 2_{\mathbb{Z}} + \delta(l)$ 和 $f \in C_c^\infty(G)$。对于所有 $g \in G$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{l,n}\left(\mathbf{L}(g)f\right) &= \int_G \big(\mathbf{L}(g)f\big)(x)\pi_l^{\delta(l)}(x)\chi_n dx \\ &= \int_G f(x)\pi_l^{\delta(l)}(gx)\chi_n dx \\ &= \pi_l^{\delta(l)}(g)\mathcal{T}_{l,n}(f)\ . \end{aligned}$$

因此，$\mathrm{T}_{l,n}$ 是一个交织映射，并且对于所有 $k \in K$ 和 $f \in \mathrm{S}_{m_1,m_2}$:

$$\pi_l^{\delta(l)}(k)\mathcal{T}_{l,n}(f) = \mathcal{T}_{l,n}\left(\mathbf{L}(k)f\right) = \chi_{m_1}(k)\mathcal{T}_{l,n}(f)\ .$$

But

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{l,n}(f) &= \int_G f(x)\pi_l^{\delta(l)}(x)\chi_n dx \\ &= \int_G \int_{K\times K} f(kxh)\pi_l^{\delta(l)}(kxh)\chi_n dk dh dx \\ &= \int_G \left(\int_K \chi_{m_2}(h^{-1})\chi_n(h)dh\right)\ \left(\int_K \chi_{m_1}(k)\pi_l^{\delta(l)}(kx)\chi_n dk\right)\ f(x)dx \\ &= \delta_{m_2,n}\int_G\ \left(\int_K \chi_{m_1}(k)\pi_l^{\delta(l)}(kx)\chi_n dk\right)\ f(x)dx\ , \end{aligned}$$

其中 δ 是克罗内克符号。因此，若 $m_2 \neq n$，则 $\mathrm{T}_{l,n}\left(\mathrm{S}_{m_1,m_2}\right) = \{0\}$。采用与[Rob22, Lemma 4.1]相同的证明，我们还可得，$\mathrm{T}_{l,n}(C_c^\infty(G))$ 是 $\mathscr{H}^{\delta(l)}$ 的闭子空间，由 G 对 χ_n 的左平移张成。这给出了主系列 $(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$ 中由 $\{\pi_l^{\delta(l)}(g)\chi_n \mid g \in G\}$ 张成的空间（见命题 3.1）。

■

引理 4.3
对于每个 $n \in 2_{\mathbb{Z}} + \delta(l)$，映射 $\mathcal{P}_{l,n}$ 交织 $(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$ 与 $(\mathbf{L}\ C_c^\infty(G))$。$\mathcal{P}_{l,n}$ 的核是包含 χ_n 的 $(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$ 的最小商。

证明。 设 $n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$ 和 $\phi \in \mathscr{H}^{\delta}{}_{(l)}$。对于所有 $g, x \in G$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{l,n}(\pi_l^{\delta(l)}(g)\phi)(x) &= \left\langle \pi_l^{\delta(l)}(x^{-1})\pi_l^{\delta(l)}(g)\phi, \chi_n \right\rangle \\ &= \left\langle \pi_l^{\delta(l)}\left((g^{-1}x)^{-1}\right)\phi, \chi_n \right\rangle \\ &= \mathcal{P}_{l,n}(\phi)(g^{-1}x) = \mathbf{L}(g)\left(\mathcal{P}_{l,n}(f)\right)(x)\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{P}_{l,\,n}$ 是一个交织映射。此外，对于所有 $m \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$、$k_1,\ k_2 \in K$ 和 $g \in G$，

$$\mathcal{P}_{l,n}(\chi_m)(k_1 g k_2) = \left\langle \pi_l^{\delta(l)}(k_2^{-1}g^{-1}k_1^{-1})\chi_m, \chi_n \right\rangle = \overline{\chi_m(k_1)\chi_n(k_2)}\mathcal{P}_{l,n}(\chi_m)(g)\ .$$

因此，$\mathrm{P}_{l,\,n}(\chi_m) \in \mathrm{S}_{m,\,n}$，但它可能为零。回顾 $(\pi_l^{\delta(l)},\ \mathscr{H}^{\delta}{}_{(l)\,l})$ 中命题 3.1 的合成级数：

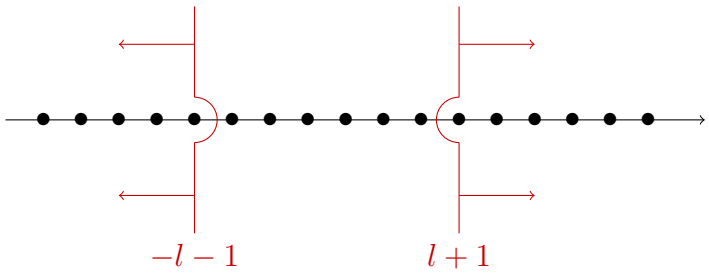


图 1。 $\pi_l^{\delta(l)}$ 的合成级数

在图 1 中，圆点表示 K-型 $\mathrm{Ind}_K^G \chi_m$，对应于 $m \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$；而作用 $\pi_l^{\delta(l)}(G)$ 只能沿箭头所示的方向穿过红色壁。因此，$\mathrm{P}_{l,n}(\chi_m) = \left\langle \pi_l^{\delta(l)}(g^{-1})\chi_m, \chi_n \right\rangle = 0$当且仅当

$$\begin{array}{rl} n \in [l+1, +\infty[& \text{and } m \in]-\infty, -l-1], \\ \text{or } n \in [-l+1, l-1] & \text{and } m \in]-\infty, -l-1] \cup [l+1, +\infty[, \\ \text{or } n \in]-\infty, -l-1] & \text{and } m \in [l+1, +\infty[\ . \end{array} \tag{26}$$

因此，$\mathrm{P}_{l,n}$ 的核是包含 χ_n 的 $(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta}{}_{(l)\,l})$ 的最小商。

■

对所有 $m \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，记为：

$$[m] = \left\{ j \in 2\mathbb{Z} + \delta(l) \mid \chi_j \text{ is in the same component as } \chi_m \text{ in } (\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}_l^{\delta(l)}) \right\} \tag{27}$$

我们所说的分支 是指由屏障界定的空间，而不考虑箭头；换言之，就是不可约子商。由 (23) 可得：

命题 4.1
表示 $(\mathbf{L}^{\mathscr{E}_{l,n}})$ 等价于主系列$(\pi_l^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta}{}_{(l)\,l})$ 中包含 χ_n 的最小子商。它包含在由以下元素张成的空间的闭包中

$$\bigoplus_{j \in [n]} \mathcal{S}_{j,n}\ . \tag{28}$$

对于 G 在 $\mathscr{E}_l$ 上的右作用以及主系列 $(\pi_{-l}^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$，可以证明与引理 4.2、4.3 和 4.1 类似的结果，其中 $\mathbf{T}_{l,n}$ 和 $\mathbf{P}_{l,n}$ 分别替换为

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{l,n}^{\mathbf{R}}: \ C_c^\infty(G) &\longrightarrow \mathscr{H}^{\delta(l)} \\ f &\longmapsto \int_G \pi_{-l}^{\delta(l)}(x^{-1})\chi_n \overline{f(x)} dx \ , \end{aligned} \tag{29}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{l,n}^{\mathbf{R}}: \ \mathscr{H}^{\delta(l)} &\longrightarrow C_c^\infty(G) \\ \phi &\longmapsto \left(g \mapsto \left\langle \pi_l^{\delta(l)}(g^{-1})\chi_n, \phi \right\rangle\right) \ . \end{aligned} \tag{30}$$

即：

引理 4.4
对于所有 $n \in 2Z + \delta(l)$，映射 $T\,R_{l,n}$ 在 $(R\ C_c^\infty(G))$ 与 $(\pi_{-l}^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta}(l))$ 之间是交织的。$T\,R_{l,n}$ 的值域是 $(\pi_{-l}^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta}(l))$ 中由 $\{\pi_{-l}^{\delta(l)}(g)\chi_n \mid g \in G\}$ 张成的空间的闭包

引理 4.5
对于所有 $n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$，映射 $\mathcal{P}_{l,n}^{\mathbf{R}}$ 在 $(\pi_{-l}^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$ 与 $(\mathbf{R}\ C_c^\infty(G))$之间是交织的。$\mathcal{P}_{l,n}^{\mathbf{R}}$ 的核是包含 χ_n 的 $(\pi_{-l}^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$ 的最小商。

命题 4.2
表示 $(\mathbf{R}^{\mathscr{E}_{l,n}})$ 等价于包含 χ_n 的主系列$(\pi_{-l}^{\delta(l)}, \mathscr{H}^{\delta_{(l)}})$ 的最小子商。它包含在由以下元素张成的空间的闭包中

$$\bigoplus_{j \in [n]} \mathcal{S}_{n,j} \ . \tag{31}$$

$G \times G$的主系列表示由 G 的主系列表示的张量积构成（另见 [Prz87, II. §5]，关于不可约酉表示）。命题 4.1 和 4.2 给出了 $\mathbf{R}_l$ 的像，它是三个分支之和，其中 $\mathbf{S}_{n,n}$ 对于所有$n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$均成立。可以注意到，这是包含 $\mathbf{S}_{n,n}$的“对角线”的最小分支，其中 $n \in 2\mathbb{Z} + \delta(l)$。回想一下，我们研究了商 $G \times G/\mathrm{diag}(G) \simeq G$ 上的函数（见 [And01, 第 94] 页）。

让我们画一幅图以便更好地理解（见图 2）。横坐标为 n、纵坐标为 m 的一个点表示 $\mathbf{S}_{n,m}$ 中 $\mathscr{E}_l$ 的 $K \times K$ 型 $\chi_n \otimes \chi_m$。我们用绿色画出了这条线。带箭头的灰线表示该表示合成级数的屏障：作用 $(\mathbf{L} \otimes \mathbf{R}\ G \times G)$ 只能按照附在这条线上的箭头所示，使元素穿过这条线。表示 $\mathscr{E}_l$ 是三个不可约子商的直和。在图中，它们由未被红线划掉的 $K \times K$ 型组成。

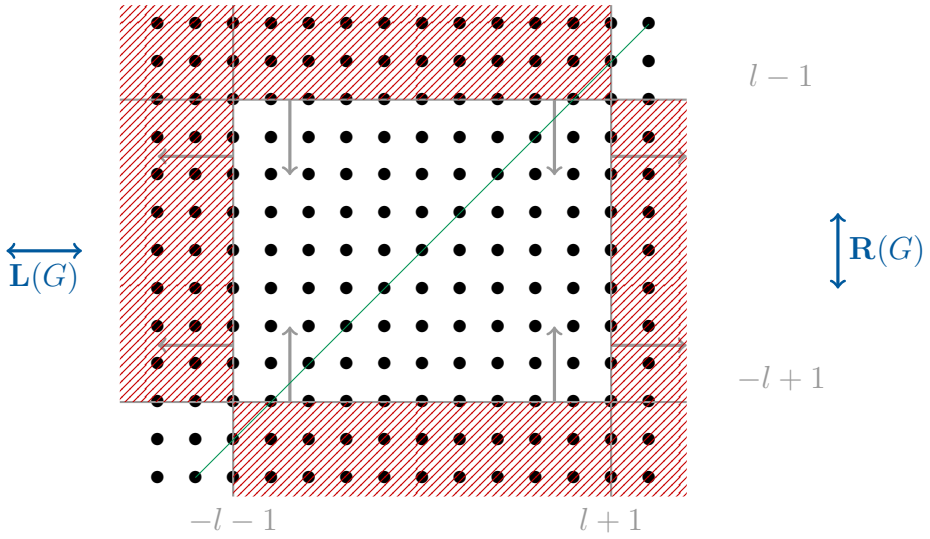


图 2. 留数表示的合成级数

在图 2 中，我们选择了 $l=9$。对于 $l=0$，中间的有限维表示消失了，在 $\mathscr{E}_l$ 中只剩下两个无限维分量。

~ ~ ~~‹ 我们引入一些记号，以便用 G 的表示来表述结果。令 $P:=MAN^{\sim}$ 为 G 的极小抛物子群，其定义如下

$$\widetilde{A}:=\{\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\mid a_1,a_2\in \mathbb{R}^+\}\ ;\ \widetilde{M}:=\{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\mid \varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm 1\}\ ;$$
$$\mathrm{Lie}(\widetilde{N})=\widetilde{\mathfrak{n}}:=\left\{\begin{pmatrix}0&x&0&y\\0&0&-y&0\\0&0&0&0\\0&0&-x&0\end{pmatrix}\mid x,y\in \mathbb{R}\right\}\ . \tag{32}$$

~ ^^ M 的表示属于 $M\otimes M$。

~令 $P_1:=\widetilde{M}_1\widetilde{A}_1\widetilde{\ }$ ~N_1 为 G 的另一个抛物子群，其定义如下

$$\widetilde{A}_1:=\{\mathrm{diag}(a,a,a^{-1},a^{-1})\mid a\in \mathbb{R}^+\}\ ;\ \widetilde{M}_1:=\{\mathrm{diag}(g,({}^tg)^{-1})\mid g\in G\}\ ;$$
$$\mathrm{Lie}(\widetilde{N}_1)=\widetilde{\mathfrak{n}}_1:=\left\{\begin{pmatrix}0&y\\0&0\end{pmatrix}\mid y\in K\right\}\ . \tag{33}$$

不存在另一个抛物子群。参见 [Prz87, 2.2.2]。细心的读者已经注意到~，按照第 2.1 节中的定义，这些抛物子群并不属于 G，但它们是该群的抛物子群，该群通过以下共轭与 G 同构：~

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}I_2&I_2\\I_2&-I_2\end{pmatrix}.$$

~‹ ~~ ~‹ ~ ~参见 [Prz87, 1.1.9]。P 中的一个卡当子群是 $H:=MA$，P_1 中的一个卡当子群是 $H_1:=T_1A_1$，其中~ ~T_1 是由以下方式定义的 M_1 的卡当子群：

$$\widetilde{T}_1:=\{\mathrm{diag}(k,k)\mid k\in K\}\ . \tag{34}$$

定理 2

~群 G 的留数表示 $\mathscr{E}_l$ 源自达朗贝尔算子在 $C_c^\infty(\mathbb{X})$上的共振；若 $l\neq 0$，则它是三个不可约酉化表示之和。其中一个是有限维表示，其朗兰兹参数为$(\widetilde{P}, e^{l\widetilde{\rho}}, \delta(l)\otimes\delta(l))$。另外两个是无限维表示，且互为对偶。其中一个表示的朗兰兹参数为

~(P1, 平凡表示A1, χ2l+2)。表示 $\mathscr{E}_0$ 是 $l=0$所给出的两个无限维表示之和。

证明。 首先假设 $l \neq 0$。 $\mathscr{E}_l$ 是三个不可约表示的和。可以验证，该有限维表示恰好是由 $\delta(l) \otimes \delta(l) \in \widetilde{M}$ 和 $e^{l\tilde{\rho}} \in \widetilde{A}$ 诱导的^^主系列表示（$\pi_l^{\delta(l)\otimes\delta(l)}$，$\mathscr{H}^{\delta（l）\otimes\delta（l）}$）的唯一不可约商，其中 $\tilde{\rho}$ 是群 $\widetilde{G}$的正根半和。表示 $\pi_l^{\delta(l)\otimes\delta(l)}$ 可视为与图 2 相同，只是灰色水平线分别从 $l-1$和 $-l+1$ 移至 $l+1$ 和 $-l-1$，并将这些线的箭头反向。

两个无限维表示互为对偶。现在来求图 2 右上角的朗兰兹参数。记其为 η_l。这里也考虑“$l=0$”的情形。如果它不是离散系列表示，则它同构于一个朗兰兹商（见 [Kna01，定理 8.54]）。我们需要找出与此朗兰兹商对应的抛物子群 P 及其表示σ （也称为朗兰兹参数）。按照沃根范数， η_l 与 $\mathrm{Ind}_P^{\widetilde{G}}\sigma$ 的极小‹K-型必须相同（见 [Vog81，第‹ 4.1、4.2、6.5、6.6] 节）。 η_l 的极小 K-型是 $\chi_{l+1}\otimes\chi_{l+1}$。 [Prz87 第 2.5] 节列出了 G的不可约容许表示可能的全部~朗兰兹参数。唯一具有^~ ‹ 极小 K-型 $\chi_{l+1}\otimes\chi_{l+1}$ （在其中记作 $\pi_{l+1、l+1}$）的参数，是附属于 P_1、 $\chi_{2l+2}\in T_1$^~以及 $e^{\nu}\in A_1$ 的参数，其中 $\nu\in\mathfrak{a}^*$ 为 C， $\mathrm{R}\nu>0$ 或 $\mathrm{R}\nu=0$ ，并且 $\mathrm{I}\nu\geq 0$ （见 [Prz87，2.5.24.]）。记 α_c 和 α_{nc} 为分别附属于 $\widetilde{T}_1$ 和 $\widetilde{A}_1$的基本权，记 ϵ_1、 ϵ_2 为附属于 H的~‹基本权。我们知道， $\mathfrak{h}=\mathrm{Lie}(H)$上的无穷小特征为 $(l+1)\epsilon_1+(-l-1)\epsilon_2$（它只是 $e^{(l+1)\alpha}\otimes e^{(-l-1)\alpha}$的导数；两个根 $2\epsilon_1$、 $2\epsilon_2$ 均为实根，并且限制到‹ ‹α）。接着，我们对与 $\epsilon_1-\epsilon_2$ 相关的变换，从 H 到 H_1 应用凯莱变换。它将根 $\epsilon_1-\epsilon_2$ 映到紧根 $2\alpha_c$。因此，$(l+1)\epsilon_1+(-l-1)\epsilon_2$ 映到 $2(l+1)\alpha_c$。这是当 $\nu=0$时 $\mathrm{Ind}_{\widetilde{M}_1‹A_1‹N_1}^{G}(\chi_{2l+2}\otimes e^{\nu}\otimes 1)$的无穷小特征。因此， $\mathfrak{a}^*$C 中的实部 ν必须为 0。

■

参考文献

[And01] Nils Byrial Andersen. 双曲空间上的 Paley-Wiener 定理。函数分析杂志，179(1):66–119，2001。[DZ19] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。散射共振的数学理论，第 200 卷，数学研究生教材。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2019。[FS23] Jan Frahm 和 Polyxeni Spilioti。伪黎曼双曲空间的共振与留数算子，2023。[GZ95] L. Guillopé 和 M. Zworski。非紧黎曼曲面上共振数量的上界。函数分析杂志，129(2):364–389，1995。[Har07] Evans M. II Harrell。自薛定谔时代以来的微扰理论与原子共振。载于谱理论与数学物理。献给 *Barry Simon* 六十岁生日的纪念文集。量子场论、统计力学与非相对论量子系统。基于 *2006* 年 *3* 月 *27–31* 日在美国加利福尼亚州帕萨迪纳举行的 *SimonFest* 会议，第 227–248 页。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2007。[His12] Peter D. Hislop。量子力学中散射理论与共振的基础。*Cubo*，14(3):1–39，2012。

[HP09] J. Hilgert 和 A. Pasquale。秩一对称空间的共振与留数算子。纯粹与应用数学杂志，91(5):495 – 507，2009。[HPP16] J. Hilgert、A. Pasquale 和 T. Przebinda。拉普拉斯算子的共振： BC_2 和 C_2的情形（$SO_0(p,2)$ 且 $p > 2$ 为奇数的情形除外）。载于《物理学中的几何方法》，数学趋势，第 159–182 页。Birkhäuser/Springer，[Cham], 2016。[HPP17a] J. Hilgert、A. Pasquale 和 T. Przebinda。两个秩一黎曼对称空间乘积上的拉普拉斯算子共振。函数分析杂志，272(4):1477 – 1523，2017。[HPP17b] J. Hilgert、A. Pasquale 和 T. Przebinda。黎曼对称空间上拉普拉斯算子的共振： $SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ 的情形。表示论，21:416–457，2017。[Kna01] A.W. Knapp。《半单群表示论：基于实例的概述》。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，2001。[Lan85] Serge Lang。$SL_2(R)$，第 105 卷，数学研究生教材。Springer-Verlag，纽约，1985。1975 年版重印。[MV05] R. Mazzeo 和 A. Vasy。非紧型对称空间上拉普拉斯算子预解式的解析延拓。函数分析杂志，228(2):311–368，2005。[MW00] R. J. Miatello 和 C. E. Will。Damek-Ricci空间上预解式的留数。美国数学会会刊，128(4):1221–1229，2000。[Prz87] Tomasz Przebinda。O(2,2)、Sp(2,R) 对的振子对偶对应。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1987。博士论文——耶鲁大学。[Rob21] S. Roby。实秩一对称空间上齐性向量丛的拉普拉斯算子共振。论文，洛林大学，梅斯，2021。[Rob22] S. Roby。实秩一对称空间上齐性向量丛的拉普拉斯算子共振。数学进展，408:108555，2022。[Str05] A. Strohmaier。非紧对称空间上预解核的解析延拓。数学杂志，250(2):411–425，2005。[Var89] V. S. Varadarajan。半单李群调和分析导论，第 16 卷，剑桥高等数学研究。剑桥：剑桥大学出版社，1989。[Vog81] D. A. Vogan, Jr.。实约化李群的表示，第 15 卷，数学进展丛书。Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州，1981。[Wil03] C. E. Will。$C^H(n)$ 上线丛拉普拉斯算子预解式的亚纯延拓。太平洋数学杂志，209(1):157–173，2003。

清华大学丘成桐数学科学中心，北京，中国，邮编 100084电子邮箱：
roby@mail.tsinghua.edu.cn